UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Do número natural ao número racional:

Um projeto de colaboração com uma professora do 3º ano de escolaridade

Margarida Maria de Sousa Uva da Gama Nunes e Silva

DISSERTAÇÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Do número natural ao número racional:

Um projeto de colaboração com uma professora do 3º ano de escolaridade

Margarida Maria Sousa Uva Gama Nunes e Silva

DISSERTAÇÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

2012

Orientadoras: Prof.ª Doutora Ana Maria Roque Boavida

Prof.ª Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender o trabalho de uma professora do 3.º ano de escolaridade orientado para a construção, pelos alunos, do conceito de número racional, representado na forma de fração, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Concretamente pretende-se descrever e analisar as suas práticas, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem dos números racionais, perspetivando os desafios e dificuldades com que se vai confrontando.

O quadro teórico problematiza o ensino dos números racionais através de problemas, evidenciando perspetivas, contornos e desafios do ensino em geral, e do ensino do número racional, em particular.

Do ponto de vista metodológico, o estudo inscreve-se numa abordagem qualitativa de investigação e, em particular, situa-se na interface entre o paradigma interpretativo e o colaborativo. Neste âmbito, foi realizado um estudo de caso sobre as práticas de uma professora do 3.º ano relativas à preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem dos números racionais, negociada no decurso do desenvolvimento de um projeto de colaboração. A recolha de dados foi realizada através de (i) duas entrevistas semiestruturadas à professora, (ii) da observação de aulas registadas em áudio e vídeo, (iii) da recolha documental e (iv) da conversação informal.

As conclusões evidenciam a necessidade de uma abordagem holística na construção do conceito de número racional, a partir da compreensão da fração, uma noção complexa e multifacetada. Essa abordagem requer proporcionar aos alunos uma experiência diversificada, apoiada em tarefas criteriosamente selecionadas e encadeadas que possam fazer emergir as grandes ideias matemáticas relacionadas com o conceito de número racional, e um trabalho em torno das estratégias usadas pelos alunos, apoiado em modelos para suportar o seu pensamento. A escolha de tarefas matematicamente poderosas, uma compreensão profunda da estrutura matemática subjacente a estas tarefas e a orquestração das discussões na aula de modo a fazer emergir e instituir como objeto de reflexão essas grandes ideias, revelaram-se aspetos importantes das práticas da professora.

Palavras-chave: Práticas do professor de Matemática; números racionais; fração; sentido de número; trabalho colaborativo

Abstract

This study aims to understand a third grade teacher's work oriented towards the construction, by the students, of the concept of rational number, represented as a fraction, in a perspective of number sense development. Specifically it intends to describe and analyze the teacher's practices concerning the preparation and implementation of a learning trajectory of rational numbers as well as the challenges and difficulties faced by her.

The theoretical framework is focused on teaching rational numbers through problem solving, illustrating perspectives and challenges related to teaching, in general, and to teaching rational numbers, in particular.

From a methodological point of view, the study is based on a qualitative research approach and, in particular, lies at the interface between the interpretive and the collaborative paradigms. In this context, a case study on a third grade teacher's practices was carried out, that is related to the preparation and achievement of a learning trajectory of rational numbers, which was negotiated during the development of a collaboration project. The data was collected through (i) two semi-structured interviews with the teacher, (ii) classroom observation in which audio and video records were made, (iii) documentary collection and (iv) informal conversation.

The findings show the need of an holistic approach in the construction of the rational number concept, starting by the understanding of fraction as a complex and wide-ranging concept. This approach requires to provide students with a diversified experience, supported by carefully selected and sequenced tasks that can bring out the big mathematical ideas related to the concept of rational number, and a work based on the strategies used by students, supported by models to foster their thinking. The choice of powerful mathematical tasks, a deep understanding of the mathematical structure underlying these tasks and the orchestration of collective discussions, in order to bring out and to establish as an object of reflection these big ideas, turned out to be significant aspects of the teacher's practices.

Keywords – Mathematics teachers' practices; rational numbers; fraction; number sense; collaborative working.

Agradecimentos

À Beatriz pela intensa colaboração neste trabalho, e pelo prazer que foi estar na aula dela, e com ela;

À Ana, primeiramente minha formadora e seguidamente minha orientadora que sempre me valorizou pessoal e profissionalmente, levando-me a esta aventura;

À Hélia, minha professora e minha orientadora que manteve sempre uma disponibilidade afetuosa;

À Paula, a quem desafiei para esta caminhada e se encontra mesmo a terminar;

À Cristina, que cuidou do meu bem-estar e dos pequenos erros;

À Alexandra, pela sua ajuda na bibliografia e pelo incentivo;

Aos meus rapazes, que sem compreender esta loucura, me libertaram e me apoiaram.

Índice

Índice de quadros

Índice de figuras

Capítulo 1- Introdução

1.1 Motivação e problemática

Acredito que os alunos constroem o seu próprio conhecimento, tal como todos nós o construímos ao longo de toda a vida à medida que vamos vivendo e que vamos tornando "nosso" o que experienciamos, atribuindo um significado pessoal, construindo uma ideia própria sobre as coisas. Encontro ressonância desta ideia em Hiebert e Carpenter (1992) quando referem que "o conhecimento conceptual é o conhecimento que é compreendido", ou seja, aquele que se torna a nossa própria ideia, devidamente fundamentada em outras que foram construídas, amadurecidas, trabalhadas, provadas, durante anos, por nós ou por outros.

Para construir essas ideias necessitamos de ferramentas, materiais e do nosso próprio esforço para aprender. Precisamos que se criem condições externas e internas a nós próprios. É nesta medida, que penso que *aprender é um ato de liberdade*. Necessita da nossa adesão, do nosso consentimento. É também *um ato da vontade*. Aprendo quando me envolvo ativamente no ato de pensar. Quando me esforço por entender, por compreender, por dar sentido a uma nova ideia, a partir daquelas que já existem em mim e estabelecendo conexões entre elas.

Quanto maior for a rede de relações que estabeleço maior a compreensão que vou conseguindo estabelecer acerca das ideias, das coisas, do mundo que me rodeia. "O significado é sempre uma questão de compreensão humana, que constitui a nossa experiência de um mundo comum a que podemos dar sentido", referem Nunes, Edwards e Matos (1999). Estes autores concluem, assim, que uma teoria do significado é uma teoria da compreensão que envolve imagens, esquemas e projeções metafóricas, formas de representação das ideias.

Simultaneamente, a aprendizagem é realizada num meio e em interação com os outros. Como sublinha Vygostky (1989), é a linguagem que permite aceder ao pensamento e, simultaneamente, ajudar a pensar: "Uma palavra que não representa uma ideia é uma coisa morta, da mesma forma que uma ideia não incorporada em palavras não passa de uma sombra" (Vygostky 1989, p. 131). A estrutura da língua que uma pessoa fala influencia a maneira como esta pessoa percebe o universo; a linguagem não é um código aleatório é uma forma de acesso ao pensamento que traduz uma visão do mundo e o permite incorporar em nós: "As palavras desempenham um papel central não só no desenvolvimento do pensamento, mas também na evolução histórica do pensamento como um todo. A palavra é um microcosmo da consciência humana" (idem, p.132).

Pensar a Matemática… e com a Matemática pensar o mundo. Ao contrário das ciências que estudam o mundo natural ou social, a Matemática

> é uma ciência que lida com objetos e relações abstratas; e ainda uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados das ações que realizarmos. (ME, 2007, p. 2)

A Matemática pode fazer sentido! A Matemática tem de fazer sentido! Esta é, para mim, a ideia fundamental para que um professor seja capaz de criar oportunidades de aprendizagem poderosas para os seus alunos. Envolvemo-nos naquilo que nos faz sentido e encontramos no mundo onde vivemos, aquilo que nos desafia e interpela. Sensibilizam-me as palavras de Cochran citadas por VanWalle e Lovin (2006):

> Uma vez tive um professor que compreendeu. Ele trouxe com ele a beleza da matemática. Disse-me que a criasse por mim próprio. Não me deu nada, e foi mais do que qualquer outro professor jamais se atreveu a dar-me. (p. ix)[1]

Os autores citados consideram ser fundamental um professor de Matemática acreditar nesta ideia e agir em consonância, enfatizando que o caminho que o professor vai desenvolvendo com os seus alunos pode ter uma enorme importância na forma, como estes "olham a matemática". Para mim, desenvolver também nos alunos esta crença, é um dos aspetos essenciais daquilo em que acredito enquanto professora: A Matemática faz sentido!

[1] Tradução correspondente a: "And once I had a teacher who understood. He brought with him the beauty of mathematics. He made me create it for myself. He gave me nothing, and it was more than any other teacher has ever dared to give me." (1991)

A confiança de cada aluno na sua capacidade para "fazer matemática" vai crescendo à medida que se vai envolvendo na atividade matemática. Ensinar será, de acordo com VanWalle e Lovin (2006), envolver os alunos até a um nível onde eles possam criar e desenvolver novas ideias e refletir sobre elas, procurando a relação com outras ideias, interrelacionando-as, estando envolvidos mentalmente e encontrado, assim, sentido na matemática.

Atribuir sentido, ou dar sentido à matemática que o professor e os alunos trabalham faz-se como? Depende de quê? Haverá da parte de professores e alunos um modo de "olhar" a matemática que os ajude a manter a "matemática viva"? Que será necessário da parte do professor para criar uma aula onde todos os alunos têm acesso a um ensino da matemática que o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2008) designa por estimulante e de elevada qualidade? Como poderá o professor encontrar, com os seus alunos, percursos de aprendizagem desafiantes e promotores de uma aprendizagem significativa?

Que competências são necessárias para enfrentarmos os desafios do mundo de hoje com a Matemática que é de todos os tempos? Como favorecer, por exemplo, o desenvolvimento do sentido de número? Como fomentar a construção do conceito de número racional, um conceito cuja aprendizagem se tem revelado tão complexa? Como apoiar os alunos na passagem do número natural ao número racional? Como dar sentido à noção de fração, uma representação que não explicita um número mas a relação entre dois números? Que traz de poderoso à própria compreensão do mundo, a noção de fração e a construção de um novo conceito, o de número racional?

Não pretendo dar resposta a todas as questões colocadas mas explicitar o pano de fundo das interrogações, relativamente ao tema que escolhi para este trabalho. Descreverei, mais à frente, o objetivo e questões associadas ao presente estudo.

1.2 Pertinência do estudo

A investigação nacional e internacional tem, desde há muito, considerado que as frações[2] são um dos temas mais importantes mas também dos mais complexos e difíceis do ensino básico, tanto no que diz respeito ao ensino como à aprendizagem (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Monteiro & Pinto, 2005; Nunes & Bryant, 2006). A longevidade do projeto Rational Number Project[3], iniciado em 1979, e as inúmeras publicações a ele associadas, é reveladora da importância que este tema tem tido no ensino elementar, nomeadamente porque se relaciona com o facto da compreensão do conceito de fração poder proporcionar estruturas mentais essenciais a futuras aprendizagens entre as quais está o raciocínio multiplicativo e o proporcional (Mamede, 2009; Monteiro & Pinto, 2005). Como bem salientam Nunes e Bryant (2006), não é possível os alunos fazerem progressos em Matemática, ou seguir determinados vias no ensino secundário sem uma compreensão profunda deste conceito.

A identificação das dificuldades dos alunos tem sido objeto de significativa atenção por parte dos investigadores. Vários não compreendem que a representação usada para fração se refere a uma única entidade e quando confrontados, por exemplo, com $\frac{3}{5}$ dizem estar perante dois números (Cramer, Behr, Post, & Lesh, 2009). Esta dificuldade é também sublinhada por Quaresma (2010) que refere, ainda, a representação pictórica da fração (sobretudo a imprópria), a compreensão da fração como operador sobretudo quando a fração não é unitária, e a dificuldade de os alunos estabelecerem ligações entre as diversas representações de números racionais. Para a maioria das pessoas, a compreensão das frações não é simples pois, diferentemente do que acontece com os números inteiros, estas envolvem relações entre quantidades, o que passa por entender a natureza relativa da fração (Nunes & Bryant, 2006). Este entendimento requer a compreensão de que a mesma fração se pode referir a diferentes

[2] Para efeitos de simplificação de linguagem, o termo fração é usado para designar um número racional representado sob a forma de fração.

[3] http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/

quantidades ($\frac{1}{2}$ de 8 e $\frac{1}{2}$ de 12 são duas quantidades diferentes) e de que diferentes frações podem ser equivalentes ($\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{5}{10}$) porque representam a mesma quantidade.

As dificuldades associadas à compreensão dos números racionais, em particular quando representados sob a forma de fração, também sobressaem quando se analisam os relatórios dos resultados das provas de aferição do 6º ano de escolaridade divulgados pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE)[4]. Se se observarem os resultados de 2010 constata-se que o tema Números e Operações é o que apresenta resultados mais baixos. Os itens em que os alunos apresentam um nível de desempenho inferior foram aqueles em que tiveram de resolver um problema, envolvendo o conceito de fração como operador, e o que envolvia o cálculo de uma percentagem. Independentemente da existência, ou não, de alguma destreza na resolução de expressões numéricas com frações, pois há evidência de que os alunos conhecem as regras de cálculo para adicionar duas frações com diferentes denominadores, as respostas desses alunos revelaram falta de capacidade crítica perante a solução obtida e a existência de graves lacunas na compreensão da noção de fração. Os resultados nacionais obtidos nesta área apontam para a necessidade de serem dadas mais oportunidades aos alunos para resolverem problemas envolvendo a tomada de decisões e o conceito de fração, e para discutirem o significado das suas soluções, nos respectivos contextos. A análise dos resultados no ano 2011 é similar. O tema Números e Operações é, também aquele em que os alunos apresentam os resultados mais baixos e a resolução de problemas envolvendo números escritos na forma de fração continuou a revelar-se problemática para muitos alunos que revelaram dificuldades quer na realização de cálculos com estes números, quer na interpretação das situações em que eles surgem.

Há vários autores que destacam que as dificuldades experienciadas pelos alunos relativamente à compreensão das frações se relacionam, não apenas com a complexidade do próprio conceito, mas também com as abordagens de ensino (Sousa, 2009) e, em particular, com práticas de ensino tendencialmente estruturalistas e mecanicistas (Monteiro & Pinto, 2005).

[4] Disponíveis em http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

A primazia destas práticas é posta em causa quando se analisam as orientações do atual Programa de Matemática do Ensino Básico [5] (ME, 2007). Com efeito, os objetivos gerais aí enunciados apontam para uma valorização da compreensão sobre a técnica, sendo a última absolutamente necessária ao trabalho na disciplina de Matemática mas não a sua finalidade última. O objetivo da ordem do "saber porquê" deve ser prosseguido a cada momento de aprendizagem. Os alunos devem compreender conceitos, algoritmos, procedimentos e relações, e perceber a Matemática como uma disciplina lógica e coerente. Além disso, devem ser capazes de *raciocinar matematicamente* e de *resolver problemas* usando os conceitos, as representações e os procedimentos matemáticos. Neste âmbito, é essencial que os alunos se familiarizem com diversas representações do conhecimento matemático e sejam capazes de estabelecer conexões entre elas. Com efeito, estas permitem modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e selecionar a melhor representação, a mais adequada face ao contexto da situação com que se lida, o que revela domínio e compreensão da matemática em jogo. Em particular, as representações permitem conhecer e compreender os números e as operações, o que permitirá a sua utilização em diferentes situações: "Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra" (ME, 2007, p.7).

No PMEB o tema Números e Operações surge em todos os ciclos tendo por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. Evidencia-se uma relação forte entre as duas últimas ideias, nomeadamente quando se destaca a importância do desenvolvimento, pelos alunos, de estratégias de cálculo mental que lhe permitam sentir-se mais confortável no uso de estratégias de cálculo mais convencionais, como os algoritmos das quatro operações. Enfatiza-se, ainda, que uma boa capacidade de cálculo mental é importante para fomentar e apoiar atitudes de autoconfiança e à vontade, tão necessárias à aprendizagem desse tema e da resolução de problemas.

É nos dois primeiros anos de escolaridade que se começam a trabalhar os números racionais não negativos, devendo iniciar-se este trabalho "com uma abordagem

[5] De ora em diante, Programa de Matemática do Ensino Básico passará a ser designado por PMEB

intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão em partes iguais, recorrendo-se a modelos e à representação na forma de fração" (ME, 2007, p. 15). O universo numérico dos alunos é, assim, ampliado para além dos números naturais. É no 3.º e 4.º anos de escolaridade que se aprofunda o estudo destes números "quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados na forma decimal[6] a partir de situações de partilha equitativa ou de medida, refinando a unidade de medida" (idem). Relativamente a estes níveis de ensino, o programa sugere, ainda, que sejam "proporcionadas situações aos alunos que permitam relacionar a representação fracionária e a decimal" (idem) e que se explorem "situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e proporção" (idem).

Ao trazer para o 1º ciclo do ensino básico os números racionais tendo por ponto de partida o conceito de fração e os seus diversos significados e trabalhando, em paralelo, a representação fracionária e decimal numa perspetiva de desenvolvimento de sentido do número, dá-se uma mudança curricular muito significativa para os professores deste ciclo. Os desafios são acrescidos porque muitos deles não tiveram, na sua formação profissional, a oportunidade de estudar o conceito de número racional ou de fração a partir dos seus muitos significados, nem de como ensinar números racionais.

O trabalho colaborativo que envolva professores e investigadores e cujo cerne seja a ação do professor e a reflexão sobre essa ação, pode ser uma boa maneira de o ajudar a enfrentar estes desafios e, simultaneamente, de produzir conhecimento sobre fenómenos educativos que sejam do interesse de todas as pessoas envolvidas nesse trabalho (Boavida, 2005). Com efeito, sobretudo quando se trata de assuntos complexos como é o caso do ensino e da aprendizagem das frações, a colaboração é, como referem Boavida e Ponte (2002), uma estratégia importante para a realização de investigações sobre a prática do professor pois proporciona uma capacidade de reflexão acrescida que favorece oportunidades de aprendizagem mútua e ajuda a ultrapassar obstáculos e a lidar com vulnerabilidades e frustrações, o que se pode traduzir em acréscimos de segurança para iniciar novos percursos.

[6] Que usualmente são designados por números decimais, e que designarei a partir de agora desta forma.

No que se refere ao desenvolvimento do sentido de número, há investigações que destacam as potencialidades educativas de delinear o ensino a partir da conceção e concretização de trajetórias de aprendizagem que tenham por referência as "grandes ideias" matemáticas que os alunos devem aprender. Entre estas investigações está a realizada por Mendes (2011) focada na aprendizagem da multiplicação. Esta autora sublinha a importância da escolha e sequenciação das tarefas na trajetória, dos contextos destas tarefas e dos números utilizados, bem como o papel do professor, em particular, no que se refere à orquestração de discussões coletivas de estratégias de resolução que sejam produtivas e ricas em conhecimento matemático.

A escolha de um percurso a realizar com os alunos através de uma sequência de tarefas criteriosamente escolhidas tendo por horizonte as "grandes ideias" que estruturam o pensamento matemático, é fundamental para a criação de contextos favoráveis à aprendizagem. E quanto maior a dificuldade e a complexidade de um conceito mais exigente se torna para o professor essa escolha. Torna-se, pois, essencial encontrar meios que permitam dotar o professor de recursos que lhes permitam fazer escolhas informadas sobre os melhores modos de agir na aula e, simultaneamente, compreender o que o leva a fazer estas escolhas e os problemas com que se confronta.

Tendo em conta as atuais orientações curriculares para o ensino dos números racionais nos primeiros anos de escolaridade, as dificuldades dos alunos neste domínio, os desafios que o seu ensino coloca aos professores, nomeadamente aos do 1.º ciclo do ensino básico, e as potencialidades do trabalho colaborativo, considerei que seria pertinente desenvolver este estudo centrado na análise das práticas de uma professora, que adotou o pseudónimo de Beatriz. Com efeito, a análise das práticas do professor é importante para compreender o seu modo de ensinar, as escolhas que estiveram subjacentes às suas ações, assim como as suas expetativas e dificuldades. Pode constituir para outros professores, como constituiu para mim, uma oportunidade de integrar, pela proximidade com o trabalho desenvolvido por Beatriz, conhecimentos mais ricos acerca dos desafios com que os professores se confrontam quando realizam um trabalho numa unidade de ensino particularmente complexa mas crucial: as primeiras aprendizagens do número racional.

1.3 O problema e as questões de investigação

Face às ideias apresentadas, uma das questões centrais que se pode colocar é, como pode um professor contribuir para o alargamento da noção de número natural para racional nos seus alunos, utilizando a noção intuitiva de fração, a partir de situações de partilha equitativa, e caminhar, progressivamente, para os outros significados da fração, usando múltiplas representações (entre elas, a decimal) através de uma possível trajetória de aprendizagem delineada numa perspetiva de desenvolvimento de sentido do número.

Perante a problemática referida, este estudo tem como objetivo compreender o trabalho de uma professora do 3º ano de escolaridade, desenvolvido no âmbito de um projeto colaborativo, orientado para a construção, pelos alunos, do conceito de número racional, representado na forma de fração, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Concretamente pretende-se descrever e analisar as suas práticas, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem, perspetivando os desafios e dificuldades com que se vai confrontando.

No âmbito deste objetivo, definiram-se as seguintes questões orientadoras da investigação:

> Q1. Qual o papel da professora na preparação de uma trajetória de aprendizagem, orientada para a construção do conceito de número racional? Quais as suas perspetivas sobre este processo de construção?
>
> Q2. Como concretizou a professora a trajetória de aprendizagem? O que influenciou essa concretização? Que aspetos, considerou facilitarem ou constrangerem a construção do conceito?
>
> Q3. De que modo, o trabalho desenvolvido contribuiu para a reorientação das práticas da professora?

O estudo foi organizado em sete capítulos de que este é o primeiro. É aqui que apresento a problemática, a relevância e objetivo do estudo e as questões de investigação. O capítulo 2, foca-se no quadro teórico. Começo por abordar questões associadas, em geral, ao ensino da Matemática para, em seguida, me centrar em contornos e desafios associados ao do ensino do número racional. No capítulo 4 abordo as principais opções metodológicas, explicitando o caso em estudo e as suas características específicas, e no capítulo 5 os principais aspetos do projeto de colaboração desenvolvido por mim e pela professora. O capítulo 6, intitulado, Beatriz, refere-se à descrição e análise dos dados empíricos. O capítulo 7 apresenta as conclusões do estudo.

Capítulo 2 - Ensinar números racionais com problemas

Neste capítulo, irei problematizar o ensino dos números racionais com problemas, começando por tecer algumas considerações sobre o ensino da matemática, de uma forma mais abrangente, e depois mais concretamente, sobre o ensino do número racional, os seus contornos e desafios.

2.1 Pensando o ensino da matemática

Ensinar é uma atividade complexa, que não se reduz à realização de um conjunto de rotinas mas assume, pelo contrário, todos os contornos de uma resolução constante de situações problemáticas (Santos, 2000). A prática letiva, que implica muita preparação, muito planeamento, muita antecipação, exige também, permanentemente, um agir no momento. Muitas tomadas de decisão são fruto da intuição, da experiência profissional, e provavelmente da pessoa que o professor é.

Uma razão para a complexidade da prática do professor é a de o professor ter de encaminhar todos os alunos para a aprendizagem, em simultâneo, e não um após o outro. Refere Lampert (2001) que por causa dessa simultaneidade diferentes problemas serão abordados por uma única ação do professor, e essa ação, não é independente de outras ações; há constantemente interações entre alunos, individualmente, e em grupo. O professor trabalha com diferentes grupos de alunos, ao mesmo tempo. O professor age, em tempos diferentes com diferentes níveis de ideias, com os alunos individualmente, com a turma toda. Tem de tornar a aula coerente, ligar o trabalhado numa aula, com o que foi trabalhado na outra, e trabalhar todo o currículo ao longo de um ano. Os problemas existem a partir de diferentes domínios: do domínio social, temporal e intelectual Lampert (2001).

Além das questões relacionadas com a própria aprendizagem dos conteúdos matemáticos, há todo um conjunto de ações do professor que são praticamente invisíveis. Para além de, estabelecer um conjunto de rotinas que suportam o desenvolvimento do trabalho, há todo um conjunto de normas, explicitas ou não, que se vão instituindo e que conferem a esse grupo a sua singularidade: "O estabelecimento de uma cultura de sala de aula que possa suportar o estudo é um elemento fundamental da prática do professor" (Lampert, 2001, p.53). Todos os professores estabelecem esta cultura, deliberadamente ou não. E todos o vão fazendo permanentemente, pois trabalhar as relações é cultivá-las. É um processo que não tem fim…Importa, portanto, "compreender melhor a natureza do trabalho com problemas na prática dos professores e do que os professores precisam para ensinar mais produtivamente" (idem, p. 421).

2.1.1. Perspetivas gerais

Ensino e aprendizagem não existem um sem ou outro

O ensino e a aprendizagem foram vistos com frequência, no passado, como dois processos distintos e mesmo antagónicos, sendo o papel do professor ensinar e o do aluno aprender. Para Fosnot e Dolk (2002) é uma evidência que o propósito de ensinar é ajudar crianças a aprender. Referem estes autores que em muitas línguas, curiosamente, ensinar e aprender se expressam através da mesma palavra (em alemão, *lereen aan* significa ensinar e *leeren van* significa aprender – o verbo é o mesmo, mudando a preposição) pelo que as ações de ensinar e aprender são, assim, inseparáveis. O ensino será visto, portanto, como estreitamente relacionado com a aprendizagem.

Ensino e aprendizagem como uma obra a construir

Há diversos modos de perspetivar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Neste estudo, apoiando-me em Van Walle e Lovin (2006) considero que os alunos constroem o seu conhecimento a partir da construção das ideias. Para estes autores construir ideias é tão trabalhoso quanto construir um edifício no mundo físico: requer ferramentas, materiais e esforço (ver figura 1). Recorrendo à metáfora do edifício, referem que as ferramentas necessárias à construção de uma ideia são as ideias já existentes em nós, aquele conhecimento que já possuímos. Os materiais podem ser algo que se vê, ouve ou toca (elementos que se encontram em redor de nós). O esforço é fornecido por um ativo e reflexivo pensamento sobre as "coisas". E sublinham "se a mente não estiver ativamente envolvida no pensamento não ocorre uma aprendizagem eficaz" (p.2).

Ferramentas

(Ideias existentes em nós)

Materiais

(O que existe fora de nós)

Esforço

(Pensamento ativo e reflexivo)

Figura1 – Construir ideias segundo Van Walle e Lovin (2006)

O professor é, pois, um responsável pela obra, tendo de fornecer os materiais, envolver os seus "homens" e cuidar da melhor utilização das ferramentas disponíveis.

O ensino e a aprendizagem como um continuum da compreensão

Ter conhecimento e compreender não são sinónimos. Van Walle e Lovin (2006) abordam a questão das diferenças entre estas noções, referindo que a compreensão é "a medida da qualidade ou da quantidade de ligações da nova ideia com as ideias pré-existentes. Quanto maior o número de ligações a uma rede de ideias, melhor a compreensão" (p.3). Por seu turno, o conhecimento é concebido "como algo que se tem ou não se tem" (idem). O conhecimento acerca de qualquer coisa expressa-se por uma sistema binário que tem apenas dois valores lógicos: 1 ou 0. Ou seja, sabe-se, ou não se sabe, isto é, ou se tem o conhecimento ou não se tem. Compreender não tem um valor lógico 0 ou 1. A compreensão depende da existência de ideias apropriadas e da criação de novas conexões. Então, construir ideias pressupõe um trabalho de ligação entre a nova ideia e as já existentes, estabelecendo-se uma rede de ligações entre as ideias. À medida que as ideias existentes vão contribuindo para dar significado à nova ideia, novas ligações são estabelecidas, entre a nova ideia e a existente, como ilustra a figura 2.

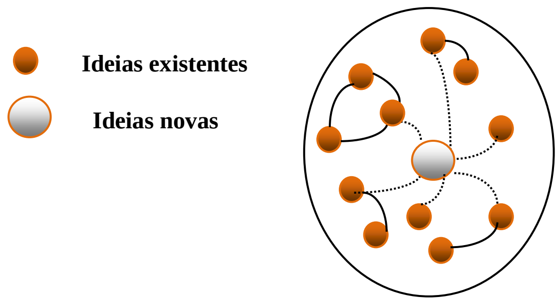


Figura 2 - Construindo ideias, modelo de Van Walle e Lovin (2006)

Van Walle e Lovin (2006) problematizam a noção de compreensão, referindo-se ao *continuum* da compreensão que engloba duas formas de compreensão: a compreensão relacional e a instrumental (figura 3). De um lado, está um conjunto muito rico de conexões, estando a ideia compreendida associada com muitas outras ideias existentes, interrelacionadas, numa rede muito significativa de conceitos e procedimentos. Do outro lado, as ideias estão quase isoladas. Podem existir ideias que foram ficando guardadas mas não ligadas a outras, ideias mal compreendidas que devido ao seu isolamento são esquecidas e não são utilizadas na ligação a novas ideias.

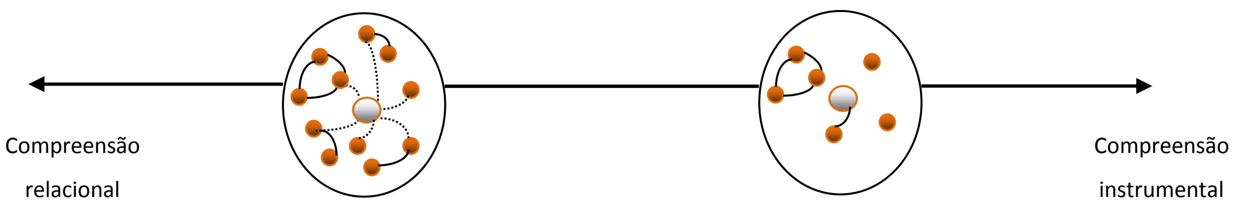


Figura 3 - *Continuum* da compreensão modelo de Van Walle e Lovin (2006)

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) sublinham a importância de uma aprendizagem com compreensão. “A aprendizagem com compreensão é essencial para tornar os alunos capazes de resolver novos tipos de problemas que, inevitavelmente, irão encontrar no futuro” (p. 22). Nesta publicação salienta-se que a compreensão dos conceitos, tem um importante papel no conhecimento necessário para lidar com novos problemas e situações exigindo a matemática do século vinte e um, a capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos. “A associação entre o conhecimento de fatos, o domínio de procedimentos e a compreensão de conceitos transforma esses três componentes em meios poderosos” (idem, p. 21). Num mundo tecnológico em que a maioria dos processos aritméticos e algébricos pode ser feita por computadores, a compreensão conceptual torna-se ainda mais importante.

O papel da compreensão é central quer na aprendizagem, quer no ensino, destacam Carpenter & Lehrer (1999) que encaram a aprendizagem, como um processo próprio de atribuição de significado. Os autores propõem cinco formas de atividade mental, a partir das quais a compreensão emerge: (i) a construção de relações entre ideias; (ii) ampliando, aplicando o conhecimento matemático; (iii) refletindo sobre experiências matemáticas; (iv) articulando o que se sabe, criando ligações; e (v) tornar o conhecimento matemático, conhecimento próprio. Estes mesmos autores sublinham a necessidade do professor estar consciente das dificuldades dos alunos durante o processo de aprendizagem, para poder projetar e desenvolver ambientes que promovam a compreensão de forma eficiente.

O ensino aprendizagem como uma escolha informada

O papel dos professores, como profissionais do ensino, é destacado por Carpenter & Lehrer (1999) que consideram que este papel tem duas vertentes: a escolha da metodologia de ensino (“o que fazer” e “como fazer”) e a tomada de decisões diárias durante a sua concretização. A capacidade do professor para envolver os alunos em discussões produtivas, acerca da resolução de um problema, e das diferentes estratégias usadas, tem por base a compreensão das respostas e dos processos de pensamento dos seus alunos. Independentemente da diversidade de formas de ajudar os alunos a aprender, que estarão relacionadas com as próprias crenças do professor sobre o ensino e a aprendizagem, entendem ser crucial, o professor compreender a Matemática que ensina e o pensamento dos seus alunos A reflexão do professor sobre a sua prática e sobre a melhor maneira de estruturar o envolvimento dos alunos na aula, de modo a poder apreciar o seu pensamento, são ações de preparação para a sua ação na aula.

Os autores destacam também, a importância do professor assumir a responsabilidade sobre a sua própria aprendizagem matemática, assim como sobre a dos seus alunos, de forma a selecionar e/ou conceber tarefas e práticas de ensino que providenciem um ambiente propício à aprendizagem, ou seja um ambiente que, através das tarefas e das ferramentas de aprendizagem, possa fornecer, a todos os alunos bons modelos de compreensão para o pensamento, assim como, instituir normas de funcionamento da aula que facilitem esse processo. Salientam, como muito importante, a compreensão dos professores sobre a matemática e sobre o pensamento dos alunos.

Ensinar bem é a alavanca fundamental para a melhoria das aprendizagens dos alunos, advogam Hierbert e Stigler (1999). Os autores denominam por "lacuna do ensino"[7], a consequência da mudança no ensino se centrar na escolha de "bons professores", professores com um determinado perfil e não no ensino em si, na "pedagogia do ensino" atendendo simplesmente ao que o professor faz, quando se encontra na aula, e que pode ser objeto de trabalho, com todos os professores. Os mesmos autores referem-se, de uma forma interessante, ao "DNA do professor" (p. xii), dizendo que muito do acontece na sala de aula, é determinado por um código cultural que é função do passado do próprio professor: a cultura em que viveu, os professores com quem aprendeu e os métodos que eles usaram e ficaram como referência. Apesar de pensarem, muitas vezes, que estão a utilizar métodos próprios, não estão contudo a fazê-lo, pois o "padrão de comportamento" que viveram como alunos, marcou-os para a sua vida futura. Destacam que esta pode ser uma das razões pela qual escolher o professor, não implica automaticamente mudar o ensino.

Para Hierbert e Stigler (1999), focar a mudança no ensino, significa ir tomando consciência das rotinas culturais que governam a vida de sala de aula, questionar os pressupostos subjacentes a essas rotinas e trabalhar para as melhorar o tempo todo. É reconhecer que os detalhes do trabalho do professor – as questões particulares colocadas pelo professor, o tipo de tarefas que apresenta aos alunos, as explicações que lhes deve fornecer – são aspetos importantes para a aprendizagem dos alunos. Focar a mudança no

[7] "the teaching gap" no original

ensino significa reconhecer que todos esses detalhes do ensino são escolhas que o professor faz.

O desenvolvimento da aprendizagem é complexo. Para Fosnot e Dolk (2002) para que os professores sejam capazes de ensinar, precisam de estar dispostos a 'viver no limite'[8] entre a estrutura da matemática e desenvolvimento do aluno, entre a comunidade e o indivíduo, numa constante procura de equilíbrio. Porque não há um único padrão, uma única forma de ensinar, nenhum mapa para a jornada, a consciência do professor para onde se dirige e como o poderá fazer é a bússola. Ter conhecimento da paisagem de aprendizagem e um sentido dos pontos de passagem, as grandes ideias matemáticas, estratégias e modelos pode ajudar na caminhada: "Eles são os passos, as mudanças e os mapas mentais" (Fosnot & Dolk, 2002, p.18). É necessário "estruturar o ambiente para trazer os alunos para mais perto dos pontos de referência, do horizonte – para que sejam capazes de agir sobre o mundo matematicamente" (idem, p. 159).

O ensino aprendizagem como um modelo complexo de relações

Para Lampert (2001) a prática de ensino decorre numa relação triádica entre professor, aluno e o conteúdo, assim como na relação estabelecida entre o professor e a relação aluno-conteúdo. A representação destas relações, é explicitada num modelo que designa por modelo tripartido da prática (fig. 4). Os elementos de trabalho do ensino, representados pelas setas, ocorrem entre os três vértices que sobressaem no modelo e nas interações onde as relações se desenvolvem. Este modelo sugere que o trabalho de ensino ocorre nas relações estabelecidas com os alunos, com o conteúdo e com as conexões entre o aluno e o conteúdo que surgem quando estes desenvolvem esforços para aprender .

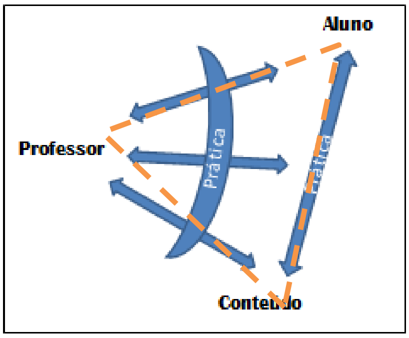


Figura 4 – Modelo tripartido da prática de Lampert (2001)

[8] "to live on the edge" no original

Contudo ao analisar o seu próprio ensino, usando este modelo, Lampert foi desenvolvendo, aprofundando e complexificando, referenciando fatores inerentes a cada um dos elementos da relação que contribuem para essa complexificação como mostra a figura 5. O fato do aluno, professor e conteúdo não serem imutáveis, sofrendo mudanças ao longo do tempo e de não existir um aluno na turma, mas um conjunto de alunos com os quais o professor estabelece essas relações e que estabelecem relações entre si e com o conteúdo matemático de ensino, torna mais complexo o trabalho de ensino.

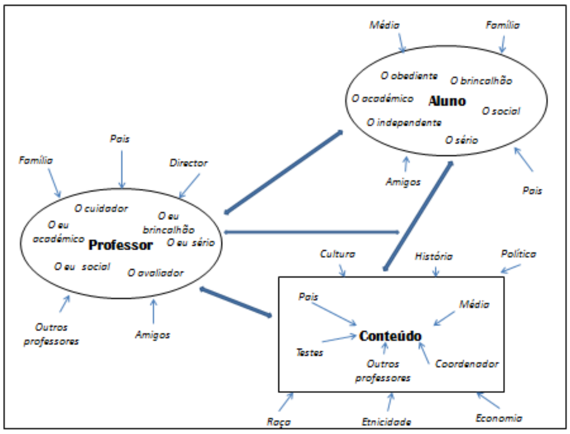


Figura 5 – Modelo complexificado da prática do professor de Lampert (2001)

A metáfora usada por Lampert (2001) para o trabalho de ensino – trabalhar na relação com alunos diversos, complexos e em mudança e com conteúdos também múltiplos, complexos e em mudança – é a da "navegação de um pesado barco num imenso e tumultuoso mar" (p. 446). Se alguns elementos do seu trabalho são estáveis, a maior parte encontra-se em permanente e rápida mudança, em direções diferentes. A área onde o professor vai trabalhar, está cheia de ideais a realizar, de destinos dignos. Para tornar possível que o professor atinja estes ideais e chegue a estes destinos, os alunos nas suas interações uns com os outros e com o professor, devem ser utilizados como recursos, para complementar os recursos que o professor traz, e os objetos que estão disponíveis no ambiente. Lampert (2001) considera, assim, os próprios alunos, recursos para a sua própria aprendizagem e para a aprendizagem de outros.

2.1.2. Orientações curriculares

O PMEB (ME, 2007) nas suas orientações metodológicas gerais refere que “A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor” (p.8). Salienta também, que o aluno, deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos.

A capacidade de resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação são objetivos de aprendizagem mas são, também, orientações metodológicas, isto é, não são só fins; são essencialmente meios para estruturar as atividades a realizar na aula, meios propícios à aprendizagem. Para tal, indica que faz parte do papel do professor também a promoção e o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática através da proposta de situações frequentes de resolução de problemas em que os alunos possam, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as dos seus colegas, e através das quais o professor valorize os diferentes raciocínios e apele à clareza da sua explicitação, à análise dos diferentes raciocínios e à reflexão de uns sobre os raciocínios dos outros.

As perspetivas sobre o ensino da Matemática destacadas a partir dos trabalhos de Lampert (2001), Fosnot e Dolk (2002) e Van Walle e Lovin (2006), vêm na mesma linha das orientações curriculares para o ensino da matemática referenciadas no PMEB (2007) e nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicadas pelo NCTM (2007).

De acordo com o Princípio do Ensino apresentado pelo NCTM, “o ensino efetivo requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente” (p. 17). Este ensino deverá orientar as tomadas de decisão da atividade profissional. Os professores precisam de empenhar-se e compreender os seus alunos, enquanto discípulos e seres humanos, e de ser criteriosos na escolha e na utilização de uma diversidade de estratégias pedagógicas e de avaliação. Neste mesmo princípio sublinha-se que um ensino efetivo “requer esforços constantes contínuos de aprendizagem e aperfeiçoamento” (p. 20), o que inclui “aprender matemática e pedagogia, beneficiando das interações com alunos e colegas, e envolver-se num contínuo desenvolvimento profissional e de auto – reflexão” (idem). Os professores deverão ser profissionais em constante desenvolvimento, promotores da ação, da reflexão na ação e sobre a ação, conscientes na escolha das tarefas e dos ambientes propícios à aprendizagem.

A análise do Princípio da Aprendizagem apresentado pela NCTM (2007) permite evidenciar que os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios, salientando-se que a compreensão dos conceitos é uma importante competência matemática. Ser competente num domínio tão complexo como a Matemática envolve a capacidade de usar o conhecimento com flexibilidade, aplicando, de forma apropriada, o que é aprendido numa situação, numa outra situação.

Os nove objetivos gerais do PMEB (ME, 2007) — conhecimento, compreensão, representações, comunicação, raciocínio, resolução de problemas, conexões, fazer Matemática e apreciar a Matemática (desenvolvidos nas páginas 4 a 6) — têm, segundo Kilpatrick (2009), aspetos similares às normas e diretivas para o currículo da matemática, apresentadas em 2007, pelo NCTM (NCTM, 2007). De acordo com este autor, o PMEB explicita os objetivos, não considerando, contudo, nenhuma relação de ordem entre si, apesar de se interligam profundamente, tal como as diversas vertentes da *proficiência matemática*. Esta expressão foi adotada por Kilpatrick, Swafford e Findell (2009) para representar o que pensam significar para todos aprender matemática com sucesso por considerarem que não existia nenhum termo que capturasse completamente a essência e todos os aspetos relativos à perícia, competência e facilidade em Matemática.

Na *proficiência matemática* Kilpatrick, Swafford e Findell distinguem cinco vertentes fortemente inter-relacionadas: (i) a compreensão conceptual que remete para a compreensão de conceitos, operações e relações; (ii) a fluência de procedimentos, que traduz a destreza na realização de procedimentos de forma flexível, precisa, eficaz e adequada; (iii) a competência estratégica, ou seja a capacidade para formular, representar e resolver problemas matemáticos; (iv) o raciocínio adaptativo, isto é a capacidade para pensar logicamente, refletir, explicar e justificar; e (v) a disposição produtiva, uma inclinação para ver a matemática como sensata, útil e interessante associada à crença na diligência e na sua própria eficácia.

Considerar todas estas componentes e as suas conexões, tem fortes implicações na forma como os alunos aprendem a ser proficientes em Matemática, como os professores desenvolvem a proficiência nos seus alunos, e como os professores se preparam para alcançar este objetivo.

2.1.3. Ensinar com problemas: significado e importância

De uma forma geral, quando os investigadores usam o termo problemas, referem-se a tarefas matemáticas que tenham potencial para providenciar desafios intelectuais e que possam melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos (Cai & Lester, 2010; Van de Walle & Lovin, 2006, referindo Hierbert et al.). Estas tarefas – os problemas – podem promover o desenvolvimento concetual dos alunos, ao mesmo tempo que promovem o raciocínio e a comunicação matemática e capturam o seu interesse e curiosidade. Cai & Lester, 2010 assumem a designação de "problemas com valor" (p.2) de Lappan e Philips para se referirem aos problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos, que envolvem matemática significativa e que têm o potencial para fornecer contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos, dando-lhes a oportunidade de solidificar e ampliar o que sabem. "Problemas com valor" são aqueles, que independentemente do contexto, são intrigantes e contém um nível de desafio que convida a um trabalho árduo de especulação levando os alunos a investigar ideias matemáticas importantes que vão ao encontro dos objetivos de aprendizagem. Apresentam, assim, o conjunto de critérios de Lappan e Philips para analisar as potencialidades desses problemas: (i) ter importantes ideias matemáticas subjacentes; (ii) exigir um elevado nível de pensamento e resolução de problemas; (iii) contribuir para o desenvolvimento conceptual dos alunos; (iv) criar uma oportunidade para o professor avaliar o que os seus alunos estão a aprender e como vão enfrentando dificuldades; (v) poder ser abordado, pelos alunos, através de diversas estratégias de resolução; (vi) ter várias soluções ou permitir assumir decisões ou posições diferentes assim como a sua defesa; (vii) incentivar o envolvimento dos alunos no discurso; (viii) ter conexões com outras ideias matemáticas; (xix) promover o uso hábil da matemática; e (x) oferecer oportunidades de mobilizar diferentes competências.

Os autores salientam que um problema pode não satisfazer, necessariamente, todos os critérios referidos, devendo o professor selecionar aqueles cujas características melhor correspondem aos aspetos que pretende trabalhar. Defendem, no entanto, que os investigadores tendem a concordar que os primeiros quatro critérios (Matemática subjacente, nível exigente de pensamento, desenvolvimento conceptual e oportunidade para avaliar a aprendizagem), são essenciais para a seleção de todos os problemas, considerando, portanto, estes critérios a condição *sine qua non*. Sublinham, ainda, como principal valor destes critérios o "fornecerem aos professores orientações para as suas tomadas de decisão" (p. 2).

A escolha e exploração na aula de "problemas com valor" é um aspeto que influencia, de forma muito significativa, o que Lampert e Ghousseini (2010) designam por práticas de ensino ambiciosas. Segundo estes autores, é importante que o professor aprenda a concretizar e manter estas práticas cujo objetivo primordial é que todos os alunos tenham um desempenho competente em domínios complexos como é o caso da Matemática: "O sucesso passaria por todos os alunos adquirirem conhecimentos mas, além disso, serem capazes de entender e explicar o que sabem para construir argumentos sólidos e usá-los para resolver problemas autênticos" (p.1). Este tipo de ensino é um desafio para os professores, porque envolve não apenas destrezas e conhecimento matemáticos, mas "um compromisso pouco usual, tanto para com Matemática, como para com os alunos" (Lampert & Ghousseini, 2010, p. 2). Salientam, assim, que os professores nas suas práticas de ensino devem trabalhar, não só o desenvolvimento de capacidades, mas também na construção de conhecimento matemático adequado e no compromisso. Um compromisso ambicioso com o ensino, por parte dos professores, significaria tratar todos os alunos como "fabricantes de sentido" (p.21), que têm a confiança intelectual para assumir o desafio de resolver problemas que nunca viram antes.

Há muitas perspetivas sobre o papel dos problemas no ensino da Matemática (Boavida, 2003; Stanic e Kilpatrick, 1990), o que não é independente da resolução de problemas ter, deste há muito, um importante lugar no currículo de Matemática de todos os níveis de ensino. Por exemplo, no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), a resolução de problemas, além de constituir um objetivo de aprendizagem, é, também, uma importante orientação metodológica para estruturar as atividades a desenvolver em sala de aula. Uma dessas perspetivas é o que Stanic e Kilpatrick (1990), designam por “resolução de problemas como arte” (p. 15), sublinhando que ela emerge dos trabalhos de George Pólya para quem ensinar é uma arte e a resolução de problemas é uma arte prática que se pode aprender tal como se aprende, por exemplo, a tocar piano.

Práticas de ensino que tenham subjacentes a perspetiva da resolução de problemas como arte, têm significativas semelhanças com o que alguns autores designam por ensinar com problemas. Esta abordagem de ensino tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é fundamental para que os alunos aprendam matemática com compreensão (Lampert, 2001; Fi & Degner, 2012). Esta ideia está presente em muitas das atuais orientações curriculares e as suas potencialidades têm sido amplamente documentadas por diversos autores (por exemplo, Fosnot & Dolk, 2002; Lampert, 2001; Van de Walle & Lovin, 2006).

2.1.4 Caminhos e contextos de ensino e de aprendizagem

A tarefa é o ponto de encontro entre o ensino e a aprendizagem, e o ponto por excelência de exercício da liberdade do professor. A montante estão as diretivas curriculares e a jusante os objetivos a atingir. Nesse espaço intermédio, o professor faz escolhas, entre elas, as tarefas a desenvolver na aula e como as desenvolver. A partir da questão proposta o professor ensina, promove a aprendizagem e o aluno desenvolve as suas ideias, a partir da atividade matemática emergente.

Trajetória de aprendizagem: Significado e importância

As crianças seguem progressões naturais de desenvolvimento na aprendizagem e gatinham, andam, correm, pulam e saltam cada vez com maior velocidade e destreza. Clements e Sarama (2009) defendem que de forma similar se dará a aprendizagem da matemática: aprendem ideias e capacidades de maneira própria. Apoiando-se na compreensão da forma como as crianças aprendem os professores podem construir ambientes adequados ao desenvolvimento da aprendizagem, proporcionando um caminho de desenvolvimento que tem por base, uma sequência de tarefas assente em grandes ideias matemáticas. Uma trajetória de aprendizagem responde às questões: (i) que objetivos estabelecer? (ii) como começar? (iii) como saber para onde ir? (iv) como vamos chegar lá? Sendo, contudo, o padrão de desenvolvimento, a componente principal de uma trajetória de aprendizagem. Segundo os autores as trajetórias de aprendizagem, descrevem assim: (a) os objetivos de aprendizagem, (b) os processos de pensamento e aprendizagem das crianças a vários níveis e, (c) as atividades de aprendizagem em que se podem envolver.

Esta ideia tem consonância com a conceção de Simon (1995) de trajetória de aprendizagem que se estrutura em torno de três componentes: (i) os objetivos de aprendizagem que definem uma direção; (ii) as atividades de aprendizagem; e (iii) o hipotético processo de aprendizagem: uma predição, de como os alunos pensam e compreendem, quando se vão envolvendo no contexto das atividades de aprendizagem.

O termo “trajetória de aprendizagem hipotética”[9] refere-se a uma predição do professor, relativamente ao desenvolvimento do processo de aprendizagem dos alunos. É hipotética porque a aprendizagem não pode ser conhecida em avanço (Simon,1995). Caracteriza-se por uma tendência esperada. Que pode não acontecer e que nem sempre acontece. A aprendizagem individual dos alunos tem um caráter idiossincrático muito embora possa passar, muitas vezes, por caminhos semelhantes.

Para o autor não há prescrições para o ensino da matemática. Todo o plano definido pelo professor torna-se uma conjetura acerca do processo que conduz à aprendizagem, desde que aquilo que o professor faz tenha por horizonte, os objetivos curriculares, uma escolha cuidadosa das tarefas, da sua sequência, a emergência de estratégias de resolução e de processos reflexivos sobre as diversas formas de resolução. Da trajetória prevista à que realmente vai acontecer é responsável o professor, necessitando de constantemente adequar a sua conjetura inicial à situação atual de aprendizagem dos seus alunos. Eles podem seguir tanto por caminhos previstos como imprevistos. A criação e a contínua modificação da trajetória são a peça chave do trabalho do professor refere Simon (1995, p. 136) que representa essa adaptação contínua através do ciclo de ensino da matemática (fig. 6). A relação simbiótica entre a

[9] Usualmente designada na literatura em Portugal por THA_ Trajetória hipotética de aprendizagem, designo por Trajetória de aprendizagem hipotética, numa tradução direta do inglês “hypothetical learning trajectory”.

"geração de ideias" das tarefas de aprendizagem a partir da atividade que se desenvolve na aula e a nova geração de hipóteses do desenvolvimento concetual do aluno que depende da natureza das atividades previstas é reforçada Simon (1995, p.136).

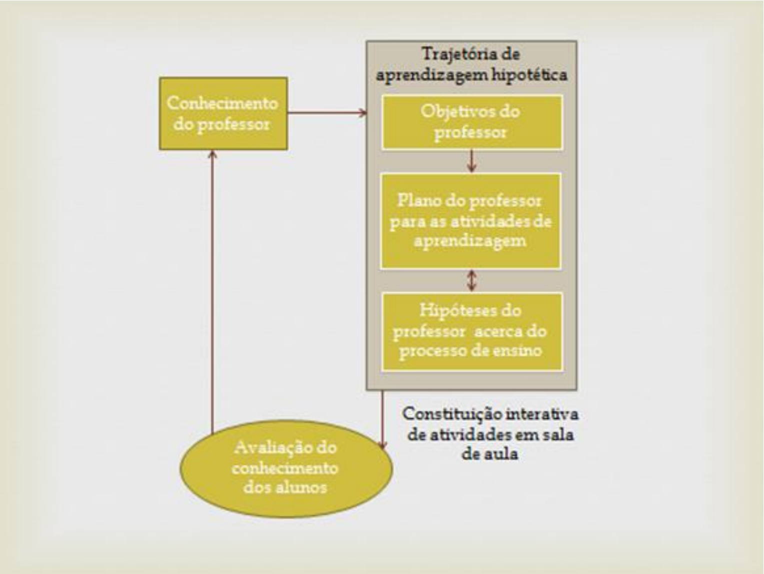


Figura 6 - O ciclo de ensino da matemática (abreviado) de Simon (1995)

O ciclo de ensino da matemática representa o processo pelo qual o professor pode tomar decisões no que diz respeito ao conteúdo, ao *design* e à sequência de tarefas matemáticas. O modelo enfatiza a ação recíproca entre os planos do professor e as atividades coletivas de sala de aula. O professor define os objetivos e as hipóteses de como encaminhar os alunos nessa direção como resultado do envolvimento coletivo em determinadas tarefas. Contudo " Os objetivos do professor, as hipóteses acerca da aprendizagem e o *design* de atividades mudam continuamente, como muda o próprio conhecimento do professor por estar envolvido na cultura de sala de aula" (p.141).

Para o autor a questão de se designar a trajetória, por hipotética, não significa que o professor segue um objetivo de cada vez, ou que apenas uma trajetória é considerada válida. Significa que o professor se propõe a ter um objetivo que justifica as decisões de ensino e salienta a natureza hipotética do seu raciocínio. "Uma trajetória de aprendizagem hipotética fornece ao professor uma base racional para a escolha de um determinado *design* de ensino" (p.135). O professor toma a sua decisão tendo por base o seu melhor palpite de como a aprendizagem pode prosseguir (Simon, 1995). De acordo com este quadro teórico, a aprendizagem tem características diferentes da de uma sala de aula tradicional, como é visível no quadro 1.

Quadro 1 - Comparação entre o quadro teórico para o ensino proposto por Simon (1992) e a forma de ensino considerada como tradicional

Quadro teórico de Simon	Forma de ensino tradicional
1. Explicitar o plano para a comunicação das ideias matemáticas e a negociação de significados	1. Pouco ou nada explicitado o plano para a comunicação das ideias matemáticas e a negociação de significados
2. Problemas num contexto específico, seguidos de abstração e generalização das ideias	2. Apresentação de ideias no abstrato seguida de aplicação em contextos específicos
3. Os conceitos discutidos são desenvolvidos pelos alunos e expressados através da sua própria linguagem	3. Os conceitos são apresentados pelo professor na sua própria linguagem
4. A validade das ideias é determinada pela comunidade de sala de aula	4. A validade das ideias é determinada pelo professor ou pelo manual
5. Aplicação é a exploração de novas ideias ou extensões das ideias previamente desenvolvidas	5. Aplicação é a prática limitada ao uso da ideia geral apresentada

A primeira parte de uma trajetória de aprendizagem é a definição do objetivo matemático. Os objetivos do professor são as grandes ideias, conjuntos de conceitos ou capacidades, matematicamente centrais e coerentes, consistentes com o pensamento dos alunos e geradores de aprendizagem futura (Clements & Sarama, 2009).Por exemplo, uma grande ideia na aprendizagem dos números racionais, é compreender que se obtém partes da unidade quando dividimos uma unidade em partes iguais, tendo a unidade, tantas partes quanto o número de partes em que foi dividida (3/3 = 1, 56/56= 1); outra grande ideia, a de que o tamanho dessas partes é equivalente em área, mas pode não ser congruente (uma folha dividida em quatro partes do mesmo tamanho pode ter quatro partes das mais diversas formas); e ainda outra ideia a de que o tamanho da parte depende do todo (uma metade de uma unidade pode ser mais pequena ou igual a um quarto de outra unidade). Qualquer uma destas ideais, e de outras, centrais à compreensão do conceito de fração são ideias a surgirem de forma emergente de situações problema de forma que possam progressivamente ser relacionadas com outras preexistentes criando um conhecimento relacional mais complexo e mais profundo.

A segunda parte de uma trajetória de aprendizagem consiste em níveis de pensamento, cada uma mais sofisticado que o anterior, que levam a alcançar o objetivo matemático.

A terceira parte de uma trajetória de aprendizagem consiste num conjunto de tarefas de ensino, adaptado a cada um dos níveis de pensamento, na progressão do desenvolvimento. Essas tarefas são concebidas para ajudar as crianças a aprender as ideias e destrezas necessárias para atingir esse nível de pensamento. Ou seja, como professores, podemos usar essas tarefas para promover o crescimento das crianças de um nível, para outro (Clements & Sarama, 2010).

Se entendermos a aprendizagem como um processo de construção individual e social será necessário instituir normas que definam o que é considerado para aquela comunidade uma efetiva participação na sala de aula. Cobb e Yackel (1996) referem-se as estas normas como "normas sociais" quando estas se referem à forma de funcionamento de uma sala de aula. Quando as normas se referem a aspetos específicos da atividade matemática, os autores designam por normas "sociomatemáticas". "Por exemplo, a compreensão normativa do que é considerado matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz e matematicamente elegante numa sala de aula são normas sociomatemáticas" (p.5).

A aula enquanto comunidade de aprendizagem

Os professores precisam de reunir e de se munir de uma ampla gama de recursos para apoiar a aquisição de proficiência matemática dos alunos. Devem ter uma visão clara dos objetivos de ensino e conhecimento sobre o que significa proficiência para o conteúdo matemático específico que estão a ensinar. Segundo Kilpatrick , Swafford e Findell (2001) o conhecimento do ensino da matemática pressupõe conhecimento do conteúdo matemático bem como das finalidades que referem como os horizontes da matemática, aonde ela pode levar os alunos e aonde os alunos poderão chegar através dela. Para isso tem de ser capazes de usar o seu conhecimento de forma flexível na prática, para avaliar e adaptar materiais didáticos, para representar o conteúdo de maneira fiel e acessível, para planear e conduzir o ensino, e para avaliar o que os alunos estão aprendendo. Precisam de ser capaz de ouvir e ver expressões das ideias matemáticas dos alunos e antecipar possíveis resoluções (p. 369). Um professor deve interpretar o trabalho dos alunos por escrito, analisar o seu raciocínio, e comparar as diferentes formas de resolução de um problema. Ensinar exige a capacidade de ver as possibilidades matemáticas numa tarefa, e dimensioná-la e adaptá-la a um grupo específico de alunos. Significa ainda, ter familiaridade com as trajetórias ao longo das quais as ideias matemáticas se desenvolvem para que possa conduzir os alunos ao longo dessas trajetórias.

Para Van Walle e Lovin (2006), as tarefas têm de ser desenhadas e concebidas todos os dias, tendo em consideração a compreensão presente dos alunos e o currículo prescrito sendo muito difícil planear mais do que uns dias em avanço sendo necessário conjugar no planeamento da aula, o *design* das tarefas em torno das quais os alunos trabalharão e a utilização do manual escolar com a sua orientação específica necessitando de proceder a adaptações na sua utilização.

Finalmente é preciso ter em atenção que as tarefas não podem ser tomadas isoladamente. Uma tarefa pode dar um contributo importante para a aprendizagem, mas é o conjunto das tarefas propostas que é decisivo para que todos os objetivos de uma certa unidade sejam atingidos. Assim, as tarefas a propor têm de estar inter-relacionadas entre si e devem ser apresentadas aos alunos em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à sua aprendizagem (Ponte, 2009).

Cada vez mais se reconhece, e assim o faz o PMEB, os papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos no processo de ensino aprendizagem não sendo este independente do contexto em que ocorre e do que nele se passa. Trata-se de um processo situado e condicionado por um largo conjunto de fatores, no qual as interações têm uma influência marcante. A comunicação e a sua intencionalidade assumem, assim, um papel decisivo na aprendizagem. A maneira como o professor conduz a sua aula desempenha um enorme papel na aprendizagem dos alunos, na forma como estes aprendem e como compreendem. O PMEB aponta como papel do professor “ propor aos alunos a realização de diversos tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização” e “prever momentos de confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas” (p.8) Enfatiza atitudes a trabalhar na aprendizagem da matemática designando-as como atividades, como o ouvir e praticar, em paralelo com o fazer, o argumentar e o discutir que devem ter uma importância crescente nessa aprendizagem. Refere ainda que “as situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos” pretendendo-se que as situações mais realistas sejam apresentadas sem artificialidade e com o objetivo de capitalizar o conhecimento prévio dos alunos. Salienta, também, que as “situações de contextos menos conhecidos precisam de ser devidamente explicadas, de modo a não constituírem obstáculos à aprendizagem” e que “a capacidade de utilizar ideias e processos matemáticos para lidar com problemas e situações contextualizadas é essencial, mas os alunos precisam de saber trabalhar igualmente em contextos puramente matemáticos, sejam de índole numérica, geométrica ou algébrica” (p.9).

A cultura de sala de aula que assim emerge implica, do aluno, consciência do seu próprio processo de aprendizagem, autonomia, comprometimento na construção e validação do conhecimento matemático e, do professor, uma regulação do processo assente numa tomada de decisões, momento a momento.

Walle e Lovin (2006) consideram três os fatores de primordial importância na aprendizagem: o pensamento reflexivo, a interação social com os outros alunos e o uso de ferramentas de aprendizagem (materiais manipuláveis, linguagem simbólica, computador, desenhos e a própria linguagem oral). Cada um destes fatores tem um impacto na forma de aprender e cada um é significativamente influenciado pelo professor. Por pensamento reflexivo, entendem atividade mental por parte do aluno, um comportamento ativo que se exprime por imaginar ou tentar relacionar ideias, o que se poderá traduzir por ponderação acerca de alguma coisa ou tecer uma consideração. Para que se dê a relação entre as ideias é preciso estar mentalmente envolvido. É necessário procurar as ideias relevantes que os alunos possuem e levá-los ao desenvolvimento de uma nova ideia suportando esse processo de desenvolvimento (Fig.1). No entanto, referem que não se pode esperar que isso simplesmente aconteça: o desafio do professor é manter os alunos mentalmente envolvidos. A forma de os manter mentalmente ativos é envolvê-los em problemas que os forcem a usar as ideias para encontrar as soluções e criar novas ideias no próprio processo. O pensamento reflexivo e, portanto, a aprendizagem são potencializados quando os alunos estão envolvidos com outros no seu trabalho em torno das mesmas ideias. Uma atmosfera reflexiva numa sala de aula pode promover as melhores oportunidades de aprendizagem. Uma interação "rica" numa aula aumenta significativamente as oportunidades de que uma reflexão produtiva sobre as ideias matemáticas relevantes possa acontecer.

Walle e Lovin (2006) defendem que as salas de aula nas quais se trabalha a partir das ideias dos alunos e nas soluções por eles encontradas para os problemas, são elementos estruturais para a aprendizagem dos alunos. Os autores citando Hierbert descrevem quatro recursos para uma cultura de aula produtiva matematicamente, na qual os alunos podem aprender uns com os outros assim como através do pensamento reflexivo produzido. Denominam estas salas de aula por comunidades de aprendizagem salientando que estas comunidades têm, determinadas características:

Todas as ideias são importantes; os alunos têm as suas próprias ideias e partilham-nas uns com os outros e vão tentando compreender as ideias que os outros vão formulando; aprender matemática é ir entendendo as ideias matemáticas da comunidade;

As ideias têm de ser partilhadas com os outros na turma; de forma recíproca, cada aluno respeita as ideias dos outros e tenta avaliá-las e dar-lhes sentido; o respeito partilhado é fundamental se se estabelece uma discussão;

Fica estabelecido que durante a aprendizagem podem ocorrer erros; os alunos podem, assim, começar a entender que os erros são oportunidades de crescimento à medida que vão sendo descobertos e explicados; têm de perceber que se recebe com o mesmo respeito uma ideia certa e uma ideia errada; sem esta ideia por base, não poderá haver partilha;

Os alunos começam a perceber que a matemática faz sentido. Como resultado desta simples verdade, a correção ou validade dos resultados reside na própria matemática; não é necessário o professor ou outra autoridade para providenciar o julgamento sobre as suas respostas. (p.10)

Os autores salientam que salas de aula que sejam comunidades de aprendizagem não acontecem simplesmente, ao acaso. O professor é o responsável por criar este clima que se trabalha todos os dias por dois caminhos: discutindo diretamente as grandes regras das discussões de sala de aula e através de modelarem o tipo de questões e de interações que desejam que se deem entre os seus alunos.

Também Lampert (2001) apresenta os aspetos da interação social como fatores condicionantes da aprendizagem, considerando a gestão das relações estabelecidas entre pares e entre professor-aluno, professor-grupos de alunos e professor-turma estruturantes para a aprendizagem. Refere que um professor pode usar mais ou menos bem essas interações dos alunos entre si, e dos vários grupos com a turma, para estabelecer as suas metas de aprendizagem. As memórias dos professores e as memórias dos alunos, bem como as suas antecipações relativamente a onde se dirigem ("where they are going"), separadamente e conjuntamente, proximamente e no futuro, contribuem para o conhecimento que informa como o professor e os alunos gerem as relações com o conteúdo em qualquer momento particular. Novamente o professor pode usar as memórias individuais e coletivas, ou não, mas a forma como as memórias e antecipações são usadas, afetam a aprendizagem. Se o professor usar a continuidade das relações com os estudantes produtivamente para envolver qualquer um em conteúdos dignos de serem estudados, necessita de trabalhar todo o tempo gerindo as relações com cada um dos alunos e com os grupos de alunos (e.g., alunos que falam muito, alunos que têm poucas competências do cálculo, alunos que querem estar sentados ao pé de outros…). Ao mesmo tempo, o professor deve gerir as relações com as múltiplas imagens das ideias matemáticas que são o foco das variadas comunicações (p. 429)

A metáfora da máquina fotográfica e da função *zoom* é sugerida por Lampert (2001, p. 430) para explicar a prática do professor. Para fazer o seu trabalho de ensino, o professor muitas vezes necessita de fazer algo que se assemelha muito ao aproximar (*zooming in)* e ao afastar (*zooming out*) da função *zoom* de uma máquina fotográfica atuando simultaneamente em ambos no quadro geral (*the big picture*), através do tempo e das relações, e nas interações individuais, momento a momento, com os alunos. Para resolver os problemas de ensino de um determinado conteúdo e num determinado momento, assim como para fomentar a construção das ideias ao longo do tempo, para ensinar cada um dos alunos, assim como todos os alunos, o professor deve constantemente ir reajustando a lente através da qual vê os alunos e o conteúdo. Contudo, esse reajustamento não é apenas sobre estes vários níveis de visão. A própria ação do professor precisa de uma aproximação e afastamento constantes em direções diferentes: dos grupos de alunos para toda a classe e vice-versa, da turma para pares de estudantes que se encontram em desacordo e vice-versa, da construção de um desenho no quadro para a unidade didática no seu todo e vice-versa. Estas ações precisam de ser, ao mesmo tempo, convergentes e simultaneamente amplas, de forma a obter uma panorâmica global. Ao mesmo tempo é preciso que se foque em mais do que um ponto central (*focal point*) (p.430).

O estabelecimento e manutenção das relações com os alunos, individualmente, em grupos, em cada momento e ao longo do tempo, permanecem questões invisíveis da prática do professor. Lampert (2001, p. 430) usa outra imagem para mostrar como o conhecimento dos alunos é muito importante na prática do professor e mesmo um recurso a usar para o seu ensino. Refere que tal como as enfermeiras fazem por conhecer bem os seus pacientes e famílias para realizar uma boa prática da medicina, os professores que mantém conexões sociais e intelectuais de longo termo com os seus alunos, estão a trabalhar em direção aos seus objetivos profissionais. O trabalho que investe nas relações com os seus alunos não tem a ver com uma predisposição natural para ser agradável mas com a identificação e a afinação das ferramentas essenciais à sua função de professor.

Os alunos também precisam de aprender como aprender matemática, com problemas, enquanto aprendem a "fazer escola" ("to do school"). Se os alunos estudam matemática discutindo soluções de problemas, usando um discurso matemático com certas qualidades, necessitam de ser ensinados a comportarem-se de uma forma particular, academicamente civilizada. Inventar e manter rotinas de ensino mais elevadas em termos de normas sociais é um caminho para a resolução deste problema. Planos de trabalho, definição de horários e plantas de sala de aula são outro caminho. Quando a interação com os conteúdos na sala de aula envolve os alunos com os seus pares existem riscos intelectuais particulares, pois podem confrontar-se com frustrações previsíveis. Daqui pode surgir um trabalho mal estruturado com os problemas, pode deteriorar-se a ordem social e instaurar-se o caos, se os alunos não aprenderem a gerir as suas interações. Se a gestão da interação social se sobrepuser ao trabalho matemático em questão, as consequências, serão, contudo, igualmente problemáticas. A autora refere-se a este equilíbrio necessário ao ensino com problemas: resolver o problema de ensinar os alunos a estudar 'anda de mãos dadas' com o ensino 'que lhes é feito' relativamente à aprendizagem do estudo através da resolução de problemas, denominando este duplo trabalho de construção do carácter académico[10].

2.2 Ensino do número racional: contornos e desafios

O ensino do número racional com problemas, assume determinados contornos e desafios.

2.2.1. Desenvolvendo o sentido de número racional

As investigações abertas permitem que os alunos se envolvem em processos matemáticos de uma variedade de formas. Valorizam-se as tentativas iniciais dos alunos de matematização ao mesmo tempo que se dá suporte e se os desafia a assegurarem-se que as grandes ideias[11] e estratégias se vão desenvolvendo progressivamente (Fosnot et. al., 2007).

Seguindo as ideias iniciais de Fosnot & Dolk (2002), a autora encara a aprendizagem como algo confuso, não linear sendo perante a situação que surge, a emergência da resposta. Desta forma concebe a aprendizagem da matemática, como uma jornada de desenvolvimento ao longo de uma paisagem de aprendizagem 12 composta por marcos de três domínios diferentes: as estratégias, as grandes ideias e os modelos.

A paisagem de aprendizagem para o número racional nas suas diversas representações é simbolizada numa grande pintura que contém os marcos dos três diferentes domínios.

[10] "academic character building"

[11] "big ideas" no original

[12] **"***landscape of learning"* no original

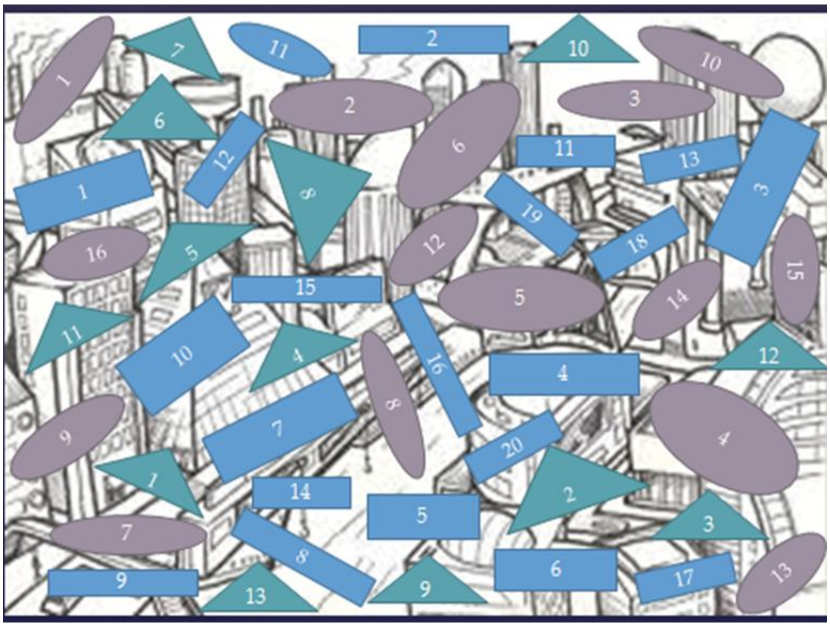


Figura 7 - "Paisagem de aprendizagem: Frações, Decimais e Percentagens no horizonte mostrando os marcos de referência: Estratégias (retângulos), Grandes ideias (oval) e Modelos (triângulos)" modelo de Fosnot & Dolk (2002)

As estratégias dos alunos são observáveis, são os esquemas de organização das ideias que os alunos usam para resolver o problema. Subjacentes às estratégias estão as grandes ideias que são " o centro, os organizadores das ideias matemáticas – os princípios que definem a ordem matemática" (Fosnot et al., 2007a, p. 14). Estão estreitamente ligadas com as estruturas da matemática e caracterizam mudanças no pensamento dos alunos, mudanças de perspetiva, de lógica nas relações matemáticas preexistentes. São estas mudanças estruturais no pensamento que caracterizam o processo de aprendizagem em geral. Elas são "grandes" porque críticas, porque "centrais" sendo responsáveis pelos grandes saltos no desenvolvimento da estrutura do raciocínio. Da mesma forma que através dos séculos, e através das culturas, os avanços foram muitas vezes caraterizados por mudanças paradigmáticas nos raciocínios (Fosnot et al., 2007). As grandes ideias para o ensino do número racional são de acordo com os autores as explicitadas na figura 8.

Figura 8 - "*Zoom* in" na "Paisagem de aprendizagem: Frações, Decimais e Percentagens no horizonte mostrando os marcos de referência.": Grandes ideias (oval)

A figura 9 apresenta as estratégias subjacentes às grandes ideais que poderão ser modeladas pelo professor:

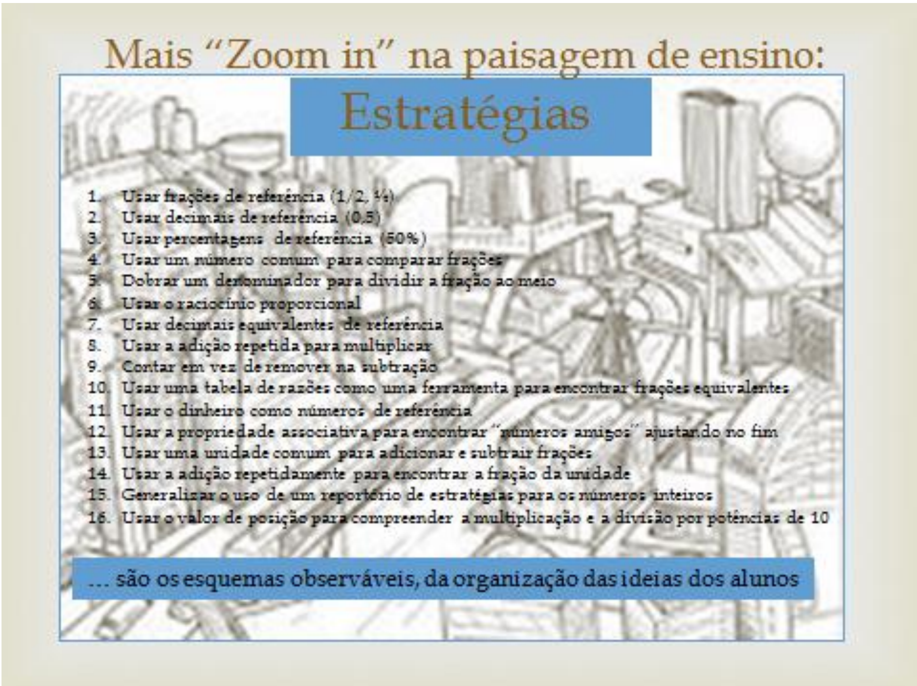


Fig. 9 - "*Zoom* in" na "Paisagem de aprendizagem: Frações, Decimais e Percentagens no horizonte mostrando os marcos de referência.": Estratégias (retângulos)

Matematizar envolve ainda o desenvolvimento de modelos matemáticos[13]. Os alunos aprendem a ver, organizar e interpretar o mundo através de, e com, modelos matemáticos. Essa modelagem começa muitas vezes na simples representação de situações ou de problemas. Estes modelos de situações podem, eventualmente, generalizar-se estabelecendo conexões entre contextos. O modelo mental desenvolve-se abrangendo situações diversas tornando-se um modelo para pensar outras situações. Esta ponte entre uma aprendizagem mais informal a uma aprendizagem formal mais progressiva pode fazer-se através dos modelos que deixam de ser modelos de pensar uma situação, para se tornarem modelos para o pensamento, de acordo com van Galen et al. (2008) salientando que estes, se tornam poderosas ferramentas para o pensamento.

De acordo com os autores os modelos numa primeira fase encontram-se muito próximos do contexto mas podem ser posteriormente usados num outro nível, quando uma rede de relações já foi estabelecida. Os modelos não são, portanto, coisas mas o que pode servir de suporte ao pensamento. Os autores referem mesmo que no uso de materiais concretos "existe o risco de uma leitura desligada das relações tomar o lugar do pensar sobre as relações" (p. 18).

Este conceito de modelo parece-me convergente com o de Fosnot & Dolk (2002) que os refere como "ferramentas para o pensamento" (p. 17) e de Van Walle & Lovin (2006) que os apresenta como ferramentas para a aprendizagem desempenhando estes num sentido geral, "um campo de ensaio para as ideias emergentes" pois dá-lhes "algo sobre que pensar, explorar com, falar, argumentar com" (p. 9).

Fosnot et. al. (2007) apresentam como modelos para a paisagem de aprendizagem das frações, decimais e percentagens, os representados na figura 10:

[13] sublinhado no original

Figura 10 - "*Zoom* in" na "Paisagem de aprendizagem: Frações, Decimais e Percentagens no horizonte mostrando os marcos de referência.": Modelos (triângulos).

Segundo Walle e Lovin (2006), o conhecimento conceptual de ideias matemáticas consiste numa lógica de relações construídos internamente e existentes na mente, como parte de uma rede de ideias (ver fig. 2 e 2.1). Pela própria natureza é um conhecimento que é entendido. Os modelos não são conceitos. Um modelo para um conceito matemático refere-se a um objeto, pintura ou desenho, ou uma ideia que represente o conceito e sobre o qual as relações relativamente a esse conceito se impõem. É um erro dizer que um modelo "ilustra" um conceito. De fato, ilustrar implica mostrar, o que significa que quando olhamos para o modelo, estaremos a ver um exemplo do conceito. A figura mostra um dos modelos possíveis para pensar a fração.

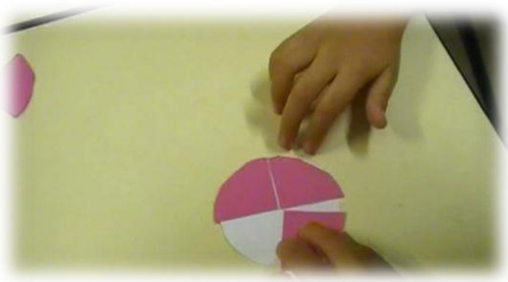


Figura 11 - Um modelo para trabalhar o conceito de fração

VanWalle & Lovin (2006) define como modelo o que nos permite criar um conceito, uma ideia mental sobre a realidade, uma abstração. Não estabelecida a relação entre as coisas não há conceito, para uma pessoa que ainda não estabelece a relação, o modelo não ilustra o conceito. Segundo Gravemeijer (2005) um modelo de atividades matemáticas informais desenvolve-se num modelo para um raciocínio matemático mais formal. Defende o autor que este é o valor da abordagem dos modelos emergentes: em vez de tentar ajudar os alunos a estabelecer conexões com uma realidade matemática que não existe para eles, o modelo emergente ajuda os alunos a construírem uma realidade por eles próprios.

O conceito de Sentido do Número tem sido objeto de definições muito vagas segundo diversos autores. Para Anghlieri (2006) o sentido de número é altamente personalizado e diz respeito não apenas às ideias sobre o número que foram estabelecidas, mas também como estas foram estabelecidas. Isso envolve uma forma de pensar que permite que às crianças identificar rapidamente relações importantes entre os números, tais como o reconhecimento de que 32:16 é um cálculo menos problemático do que 32: 17 pois 16 é metade de 32; ou que ½ de 26 é um número inteiro. Também envolve a capacidade de trabalhar com flexibilidade com os números e as operações, reconhecendo por exemplo que 48 é 40+8, 10+10+10+8, 3x10 +8, ½ x100 -2, o dobro de 24, ou que a oitava parte de 100 é, 100: 8, ou metade da metade da metade de 100 e logo 12,5. A maneira como os números estão relacionados uns com os outros, e os significados associados às diferentes operações poderão ter um papel chave no estabelecimento de conexões que é crucial para o desenvolvimento de sentido de número (p.3).

McIntosh, Reys & Reys, (1993) caracterizam o sentido de número como uma compreensão global dos números e das operações associada à capacidade e vontade de usar esse conhecimento de maneira flexível em raciocínios matemáticos e no desenvolvimento de estratégias úteis que impliquem o trabalho com números e operações. Apresentam-no como um conceito complexo, essencial à abordagem dos problemas e do cálculo manifestando-se de várias formas no pensamento matemático e desenvolvendo-se ao longo do tempo. Estes autores apresentam um quadro teórico relativo ao conceito de Sentido de Número, apresentado na figura 7, em que consideram em três categorias divididas em subcategorias:

Quadro 2 – Quadro teórico do "Sentido de Número" de acordo com McIntosh, Reys e Reys, 1992

"O sentido de número é uma propensão para, e uma capacidade de usar os números e os métodos quantitativos como um meio de processar e interpretar a informação. Isto resulta numa expetativa de que os números são úteis e de que a matemática tem uma certa regularidade (faz sentido)".	**1.Conhecimento e destreza com os números**	Sentido de ordenação dos números
		Múltiplas representações dos números
		Sentido de grandeza absoluta e relativa dos números
		Sistema de valores de referência
	2.Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão do efeito das operações;
		Compreensão das propriedades matemáticas das operações;
		Compreensão da relação entre as operações
	3. Aplicação dos conhecimentos em situações problemáticas e de cálculo	Compreensão da relação entre os problemas, o contexto e os cálculos necessários
		Perceção da existência de múltiplas estratégias
		Inclinação para utilizar diferentes representações e métodos
		Inclinação para analisar dados e resultados com sensibilidade

Para Walle e Lovin (2006) número é um conceito complexo e multifacetado. Um completo conhecimento dos números envolve muitas e variadas ideias, relações entre elas e competências. Essa relação desenvolve-se gradualmente trabalhando com as crianças a exploração de números, e ajudando-as a desenvolver novas relações (p.37). Para estes autores, o sentido de número precoce (*early sense number)*, adquirido nos primeiros anos de escolaridade, começa com o estabelecimento de relações e conexões pelas crianças com pequenos números, construindo e compreendendo o valor de posição, concebendo métodos de cálculo flexíveis e fazendo estimativas envolvendo números grandes.

A flexibilidade e o pensamento intuitivo com números que designam por *number sense*, pode continuar a ser desenvolvido nos anos seguintes através dos números racionais e das suas diversas representações — frações, decimais e percentagens — que ajudarão os alunos a adquirir um reportório de ideias acerca dos números mais alargado. Ao alargar o conceito de número inteiro para número racional através da representação de números sob a forma de fração e do estudo dos diversos significados e modelos de frações — o modo como as frações se relacionam entre si e com a unidade, e a forma como são representadas —, os alunos podem ganhar agilidade na perceção da "ordem de grandeza" das frações, recorrendo, geralmente à utilização de pontos de referência como 1 ou ½.

Para ser capaz de calcular usando o sentido do número não basta dispor de uma listagem de estratégias (Fosnot e Dolk, 2002). É preciso começar por olhar para os números, ser capaz de estabelecer relações que possam derivar deles e jogar com essas relações (idem, p. 123). O desafio que se coloca então ao professor é como conseguir ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido do número. Segundo Fosnot e Dolk (2002) este é um desafio fácil de entender, mas mais difícil de realizar. Tem de ser criadas as condições que permitam às crianças desenvolver, elas próprias e desde o início da escolaridade, os instrumentos que lhes permitam inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução dos problemas, nomeadamente os que são colocados pela vida de todos os dias. E, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais perde terreno, sendo cada vez mais importante ser capaz de estimar e de calcular de modo inteligente e flexível.

Fosnot e Dolk (2001) referem este horizonte de desenvolvimento do sentido do número como muito difícil para as crianças. Desde que começam a andar que elas lutam para entender esta noção aparentemente ilusória – quantidade. Existem passos e mudanças no pensamento ao longo do caminho e quando o horizonte parece alcançado, tudo parece ficar difuso até que novos pontos de referência se definam (p. 49).

Os alunos precisam de construir o conceito de número racional e trabalhar de forma flexível com as suas diversas representações. "Necessitamos de ser capazes de nos movermos para a frente e para trás de frações para decimal e para percentagem"[14], citando Dolk e Fosnot (2002, p. 101).

Esta ideia encontra ressonância nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar quando nelas se refere ao número como a pedra angular do currículo da matemática e à compreensão dos números a partir das suas diversas representação e das relações entre si e os sistemas numéricos (p. 35).

[14] No original "We need to be able to move back and forth from fractions to decimal to percents "

Tem sido argumentado que em matemática "um novo conceito é o produto de um cruzamento entre várias metáforas ao invés de uma simples metáfora."[15] Essa afirmação sugere que ter múltiplas metáforas é uma condição necessária para que um conceito seja significativo. Kilpatrick (2001) sugere que como muitas representações matemáticas são sugestivas das metáforas correspondentes, as ideias matemáticas são reforçadas através de representações múltiplas, que não servem apenas como ilustrações ou truques pedagógicos, mas formam uma parte significativa do conteúdo matemático e servem como fonte de recursos para o raciocínio matemático. Mesmo numeral o "729" é uma representação que incorpora uma quantidade significativa do pensamento matemático e interpretação. As ideias matemáticas são reforçadas através de representações múltiplas (p.101).

2.2.2 Fração conceito complexo e multifacetado

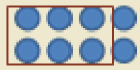
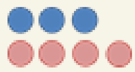
As frações são talvez o mais complexo conceito matemático que as crianças encontram nos primeiros anos de escolaridade defendem Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) afirmando que é de consenso entre os investigadores que um dos fatores principais dessa complexidade, é a fração constituir uma noção multifacetada que abrange cinco subconceitos interrelacionados (parte-todo, ratio, operador, quociente e medida).

A investigação realizada nas últimas décadas tem evidenciado a dificuldade associada à aprendizagem dos racionais, em particular, no que diz respeito ao conceito de fração (Lamon, 2007). “Compreender os números racionais envolve a coordenação de múltiplas e diferentes ideias e interpretações que estão, no entanto, inter-relacionadas” (idem, p.23). Lamon (2007) salienta que ter maturidade na compreensão dos números racionais é muito mais do que ser hábil a manipular símbolos: significa ser capaz de estabelecer conexões nas várias situações modeladas por esses símbolos. De facto, refere a autora, o conceito de fração, é multifacetado, surgindo aos alunos em diversos contextos com diferentes significados, o que torna a sua aprendizagem um desafio para alunos e professores.

[15] Citando Sfard, 1996

Segundo Kilpatrick Swafford, & Findell (2001) a pesquisa nas últimas duas décadas (80-00) identificou várias interpretações do número racional que se encontram explicadas no quadro que se segue.

Quadro 3 – Interpretações de número racional na forma de fração (Kilpatrick, et.al. 2001)

Interpretações de número racional representado na forma de fração			
	Três de quatro partes iguais de uma unidade	Parte-todo	
	O quociente de 3 por 4 (3 : 4 = 0,75)	Quociente	3 : 4
$\frac{3}{4}$	Três quartos de 12 (3×8:4 = 6 ou 1×8:4×3)	Operador	
	Três para quatro	Razão	
	Medida do caminho percorrido desde o início da unidade	Medida	

De acordo com os autores, a tarefa dos alunos é reconhecer estas distinções e, ao mesmo tempo construir relações entre eles, que permitam gerar um conceito coerente de número racional (p. 233). Muitos alunos confundem a lógica do número inteiro com a do número racional. A tabela seguinte contém as diferenças entre as duas lógicas: a aditiva e a multiplicativa que podem estar na origem das dificuldades dos alunos com este novo sistema numérico:

Quadro 4 – As diferenças entre os números naturais e os racionais (Kilpatrick, 2001)

Valor numérico	Número natural	Fração
Representação simbólica	Um número (pressuposição de discrição)	Dois números (pressuposição de densidade)
Ordem	Apoiada na sequência dos números naturais Existência de antecessor e precedente Não há números entre dois números consecutivos	Não apoiada na sequência dos números naturais Não há um único sucessor ou antecessor Há uma infinidade de números entre duas frações
Relação com a unidade	A unidade é o menor número	Não há um número menor único
Adição e Subtração	Apoiadas na sequência dos números naturais	Não apoiadas na sequência dos números naturais
Multiplicação	A multiplicação torna o número maior	A multiplicação torna o número ou maior ou menor
Divisão	A divisão torna o número mais pequeno	A divisão torna o número ou maior ou menor

Charalambous & Pitta_Pantazi (2007) apresentam uma visão holística da construção de número racional a partir do desenvolvimento do conceito de fração na perspetiva de Kieren (1976) de que a fração não um simples conceito mas um conceito multifacetado composto por diversos conceitos interrelacionados e apoiando-se no modelo teórico de Behr et al. (1983) realizam um estudo empírico que examina o modelo através das respostas dos alunos (figura 13). O modelo teórico de Behr et al. pode ser considerado como uma análise semântica da construção do conceito de número racional, do ponto de vista do professor. Aplicado a um conjunto amplo de alunos da primária Charalambous e Pitta-Pantazzi (2007) concluíram que os dados obtidos suportam as associações incluídas no modelo, tendo contudo estes alunos obtido mais sucesso nas tarefas relacionadas com o significado parte-todo e o menor sucesso nas tarefas relacionadas com o significado medida. No entanto, as descobertas dos autores e o seu estudo trouxe oportunidade a replicações do modelo, neste caso, em Hong-Kong. Os resultados foram um pouco diferentes; sendo as diferenças de currículo e de cultura responsáveis por essa diferença.

Os mesmos autores enfatizam que o desenvolvimento do conceito de fração, a partir de um dos seus subconceitos, não garante a compreensão dos restantes comprometendo a compreensão global do conceito de fração (p.294). Usando o modelo como ponto de referência realizam um estudo empírico em que examinam a construção, pelos alunos, do conceito de fração, a partir dos diferentes subconceitos e das associações entre eles (figura 12).

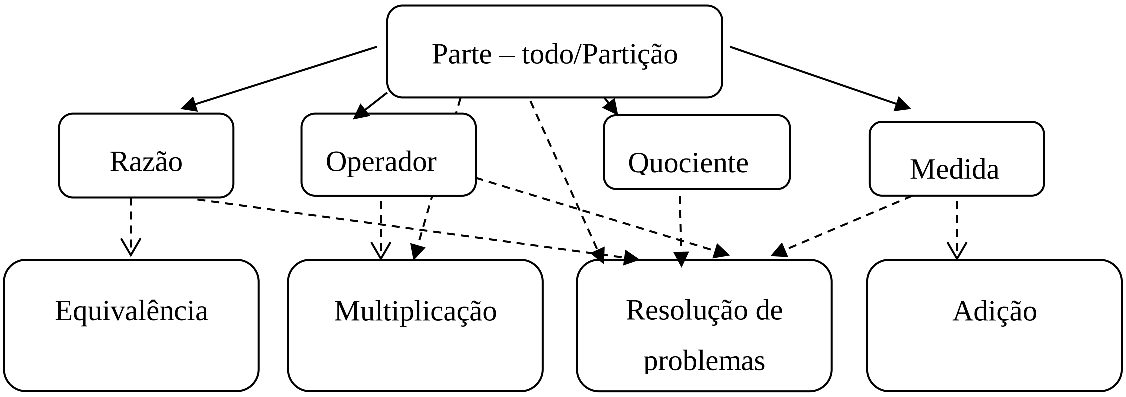


Figura12 - Modelo teórico de ligação dos cinco subconceitos das frações para as diferentes operações e para a resolução de problemas

A principal conclusão do seu trabalho é convergente com a dos autores: o significado parte-todo mediou os outros significados da fração, sendo necessário para a compreensão plena do conceito de número racional., compreender as relações e as subtilezas de cada um dos cinco significados.

2.2.3 Dificuldades e desafios

Multiplicidade de significados do conceito de número racional

Para Behr, Post, Lesh e Silver (1983) a multiplicidade de significados dos números racionais, a concetualização da unidade, a utilização precoce de regra e algoritmos no estudo dos números racionais, nomeadamente nos representados na forma de fração, explica a dificuldade em trabalhar no universo dos números racionais. Costa e Monteiro (1996) colocam a hipótese de que a memorização da regra impeça a interiorização do conceito. Figueiredo, Pinto e Monteiro (2006) abordam a questão de a construção do conceito de número racional se ir desenvolvendo ao longo do tempo sendo importante considerar duas vertentes: não um conceito, mas uma teia de conceitos e os símbolos que o representam. Os alunos têm de operar com os símbolos mas tendo por base o seu significado, melhor, os significados subjacentes. Têm de compreender o conceito nos seus diversos significados e utilizar o número com sentido. As mesmas autoras (2005) referem que ao trabalhar quase exclusivamente o significado parte – todo, se tem limitado a construção do conceito de fração. Sousa (2009) desenvolve uma investigação no 6º ano de escolaridade a partir de uma intervenção mais centrada no significado da fração como quociente e aponta para uma melhoria na compreensão da noção de fração, concretamente, no que diz respeito às relações de ordenação e equivalência.

Aprender os números racionais é mais complicado e difícil do que aprender os números inteiros, defendem Kilpatrick et al. (2001) salientando que a complexidade dos números racionais é, em parte, porque são representados de muitas formas (por exemplo: frações comuns e frações decimais), são usados de muitas maneiras (por exemplo: como partes de regiões ou de coleções, como razões, como quocientes) e têm numerosas propriedades, incluindo o facto dos dois números diferentes que compõem uma fração estarem relacionados entre si, através da multiplicação ou da divisão e não da adição. A estas características dos números racionais, atribuem a causa de muitas conceções erradas dos números racionais, desde as primeiras abordagens. O fato de no contexto da vida real, a experiência com números racionais ser menor do que com números inteiros, torna mais problemático o trabalho com estes números e torna-se um grande desafio para os alunos e professores (p.231). Por um lado, em termos teóricos a proficiência com números racionais não é tão bem compreendida como com números inteiros, o que acentua a dificuldade do seu ensino, por outro lado, o trabalho realizado com o ensino dos números racionais tem mostrado que os alunos têm noções informais de partilha, de partição, e de medida, a partir das quais se pode construir este novo conceito, e que por vezes a competência nas cinco vertentes representadas pela corda entrelaçada que têm de se enlaçar momento, a momento, para construir uma corda forte e harmoniosa não se desenvolve de forma equilibrada, ficando fios desligados uns dos outros (ver fig. 4). Em terceiro lugar, o desenvolvimento da proficiência com números racionais depende de um planeamento do ensino que permita estender-se o trabalho com estes números por longos períodos de tempo, que permitam construir e sustentar as conexões entre as diversas vertentes.

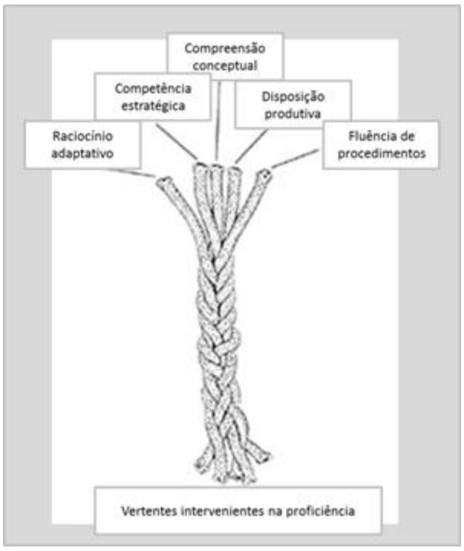


Figura 13- Modelo adaptado de Kilpatrick, Swaford & Findell (2001)

Lamon (2007) refere a construção do conceito de número racional como ambivalente na tradição escolar e as múltiplas tentativas para capturar a essência dos números racionais para fins pedagógicos salientando a necessidade de se procurar os valores, conexões e significado, assim como as questões básicas necessárias à exploração deste conceito questões, tais como: O que significa compreender os números racionais? Quais serão os obstáculos conceptuais para as crianças enquanto fazem a transição do número natural ao número racional? (p. 630). A partir da descoberta, no nível fenomenológico, ou seja, em situações reais relativamente às quais os números racionais são úteis, foram reconhecidas as diversas "personalidades" que constituem a fração e reconciliadas as diversas perspetivas foram reconhecidos os subconceitos distintos referindo-se a um desacordo, no que diz respeito à parte-todo, ser ou não um subconceito distinto da medida. No entanto, salienta que qualquer que seja o número de subconceitos, um ensino dos números racionais que aborda apenas um deles, é inadequado.

Esta conceção de número racional é consonante com a conceção de Lamon quando se define a fração a partir de uma perspetiva abrangente, holística em que o grande conceito _ fração, é um construto construído a partir dos seus diversos subconstrutos, não se reduzindo a nenhum deles mas podendo ser compreendido a partir de todos eles. Charalambous Pitta-Pantazi (2007) refere-se às múltiplas personalidades da fração. Um pouco nesta linha refere Kilpatrick (2001) tem sido argumentado que em matemática "um novo conceito é o produto de um cruzamento entre várias metáforas ao invés de uma simples metáfora" (p. 234). Essa afirmação sugere que ter múltiplas metáforas é uma condição necessária para um conceito ser significativo.

Trabalhar as múltiplas representações (desenvolver o sentido de número racional)

A compreensão de uma ideia matemática de uma forma mais completa exige que várias representações, possíveis, possam estar disponíveis para permitir uma escolha das mais úteis para resolver um determinado problema. Para Kilpatrick (2001) se as crianças devem ser capazes de usar uma multiplicidade de representações, é importante que sejam capazes de estabelecer relações entre as diversas formas de representação: fração, decimal, simbólicas, linha numérica, pictóricas (p. 102). Considerando, por exemplo, as seguintes representações de “metade”:

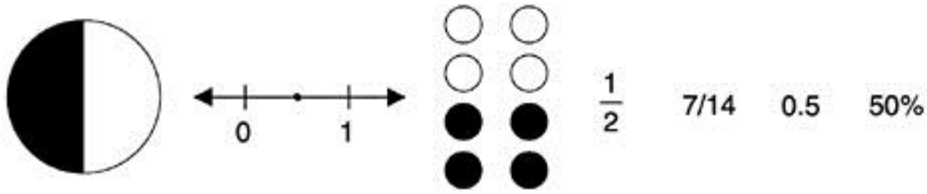


Figura 14 - Diversas representações da metade

Um meio é a representação através da fração na sua forma mais simples: irredutível; representar de outras formas envolve uma outra compreensão “saltando” de representação no universo dos números racionais de uma forma mais abrangente. Implica conhecer “as leis desse universo”. Se se tentar fazer o mesmo com a fração 5/8, maior compreensão ainda é exigida, pois esta fração não representa um dos valores de referência no sistema. O número é pouco maior que metade. Passa 1/8 da metade. Um oitavo é metade da metade da metade. Então, um oitavo é metade da quarta parte. Quarta parte é metade de metade. Logo, cinco oitavos são 5 vezes 0, 125 ou 0,50 + 0,25 + 0,125 = 0,875 é o valor do oitavo. Se estivermos perante a fração 13/40, provavelmente já teremos de recorrer à divisão ou a uma estratégia como a seguinte de decomposição em frações de referência (múltiplas ou submúltiplas de metade, um quarto: 13/40 = 10/40 + 2/40 + 1/40 = 0,25 + 0,05 + 0,025 = 0,325

A discussão dos sistemas numéricos dos números dados como exemplo, não seria possível sem o uso de uma variedade de representações dos números e de operações entre eles. Este domínio do número e das operações é o que pode ser definido de acordo com Mc Intosh Reys e Reys (1992) como o sentido de número e de operação.

Para Kilpatrick (2001) as ideias são essencialmente metafóricas e relativamente aos números racionais temos um uso diverso de metáforas entre elas, as seguintes: número como coleção, número como ponto numa linha, número como seta, adição como junção, multiplicação como área, fração como parte, fração como peça (parte de um todo), fração como número.

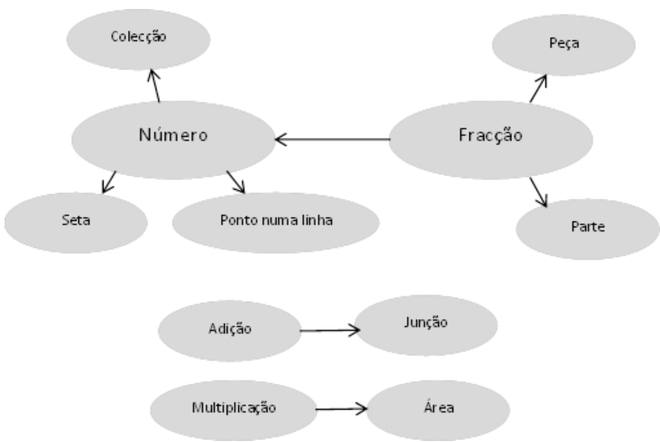


Figura15 - Uso de metáforas relativamente aos números racionais, Kilpatrick (2001)

As ideias matemáticas são reforçadas através de representações múltiplas, que não servem apenas como ilustrações ou truques pedagógicos, mas formam uma parte significativa do conteúdo matemático e servem como fonte de raciocínio matemático. Mesmo o numeral "729" é uma representação que incorpora uma quantidade significativa do pensamento matemático e interpretação (p.95).

Trabalhar as múltiplas representações dos números racionais será uma dificuldade para o professor mas poderá constituir certamente também um desafio.

Para ser capaz de calcular usando o sentido do número não basta dispor de uma listagem de estratégias (Fosnot e Dolk, 2002). É preciso começar por olhar para os números, ser capaz de estabelecer relações que possam derivar deles e jogar com essas relações (idem, p. 123). O desafio que se coloca então ao professor é como conseguir ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido do número. Segundo Fosnot e Dolk

(2002) este é um desafio fácil de entender, mas mais difícil de realizar. Têm de ser criadas as condições que permitam às crianças desenvolver, elas próprias e desde o início da escolaridade, os instrumentos que lhes permitam inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução dos problemas, nomeadamente os que são colocados pela vida de todos os dias. E, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais perde terreno, sendo cada vez mais importante ser capaz de estimar e de calcular de modo inteligente e flexível.

Fosnot e Dolk (2001) referem este horizonte de desenvolvimento do sentido do número como muito difícil para as crianças. Desde que começam a andar que elas lutam para entender esta noção aparentemente ilusória – quantidade. Existem passos e mudanças no pensamento ao longo do caminho e quando o horizonte parece alcançado, tudo parece ficar difuso até que novos pontos de referência se definam (p. 49).

Um bom conhecimento da matemática e do ensino da matemática

Os professores precisam de reunir e de se munir de uma ampla gama de recursos para apoiar a aquisição de proficiência matemática dos alunos, ter uma visão clara dos objetivos de ensino e conhecimento sobre o que significa proficiência para o conteúdo matemático específico que estão a ensinar. Efetivamente, segundo Kilpatrick e Swafford et al. (2001) o conhecimento do ensino da matemática pressupõe conhecimento do conteúdo matemático bem como das finalidades que referem como os horizontes da matemática, aonde ela pode levar os alunos e aonde os alunos poderão chegar através dela. Para isso têm de ser capazes de usar o seu conhecimento de forma flexível na prática, para avaliar e adaptar materiais didáticos, para representar o conteúdo de maneira fiel e acessível, para planear e conduzir o ensino, e para avaliar o que os alunos estão aprendendo. Precisam de ser capaz de ouvir e ver expressões das ideias matemáticas dos alunos e antecipar possíveis resoluções (p. 369). Um professor deve interpretar o trabalho dos alunos por escrito, analisar o seu raciocínio, e comparar as diferentes formas de resolução de um problema. Ensinar exige a capacidade de ver as possibilidades matemáticas numa tarefa, e dimensioná-la e adaptá-la a um grupo específico de alunos. Significa ainda, ter familiaridade com as trajetórias ao longo das quais as ideias matemáticas se desenvolvem para que possa conduzir os alunos ao longo dessas trajetórias.

Capítulo 3 - Metodologia

Este estudo é sobre a prática de uma professora do 3º ano de escolaridade na construção do conceito de número racional representado na forma de fração e numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. O propósito fundamental é descrever o contributo dessa professora para o desenvolvimento do sentido de número racional a partir da compreensão das suas opções para o ensino, das suas ações na prática pedagógica, e dos significados das suas ações, assim como da reflexão sobre a ação no âmbito de um projeto colaborativo.

A escolha do objeto de estudo e do contexto de trabalho considerando os pontos de vista dos sujeitos e os significados que atribuem às ações, apontam para uma opção metodológica de base. A metodologia é qualitativa no quadro de um paradigma de investigação interpretativo. Neste âmbito realizou-se um estudo de caso em contexto de trabalho colaborativo.

Em primeiro lugar apresentarei as opções metodológicas e seguidamente, descreverei os participantes do estudo, os instrumentos de pesquisa e os procedimentos de análise a que recorri.

3.1 Opções metodológicas

3.1.1 Um paradigma interpretativo

A escolha do paradigma deve ser determinada, pelas características do objeto em estudo (Patton, 1980). O paradigma interpretativo, valoriza a compreensão e a explicação, tendo em vista desenvolver e aprofundar, o conhecimento de um fenómeno ou situação, num dado contexto (Bogdan & Biklen, 1994).

Guba e Lincoln (1994) descrevem um paradigma como um conjunto de crenças básicas, de primeiros princípios para lidar com o mundo. Referem que um paradigma é uma visão do mundo, da sua natureza, de uma pessoa, de um lugar ou da própria relação da pessoa com o mundo. Sublinham que para a existência de rigor na sua investigação, é importante que o investigador assuma as suas crenças, valores e paradigmas que estão na base do seu trabalho. Desafiam mesmo o investigador a assumir as suas próprias crenças, acerca da natureza do conhecimento e dos fenómenos que pesquisam e tendo por base uma maior consciência da epistemologia, escolham o método mais adequado às questões da investigação. "Apelam a uma coerência pessoal, de forma, a que o método de investigação escolhido pelo investigador não entre em contradição com a sua forma de ser e pensar o mundo que o rodeia" (p.103).

Erickson (1986) utiliza o termo "interpretativo" para se referir a uma "família" de abordagens para a pesquisa participante observacional em que os significados imediatos, e locais, das ações são definidos, a partir do ponto de vista do ator. O interesse fulcral do investigador está no significado conferido pelos "atores" às ações, nas quais se envolveram. O primeiro sentido das abordagens não se situa no plano dos procedimentos ou das técnicas, mas sim no do próprio objeto de análise, e no dos postulados a ele ligados. O fato de uma investigação poder ser classificada de "interpretativa ou qualitativa " provém mais da sua orientação fundamental que dos procedimentos que são utilizados.

No contexto do paradigma interpretativo, o objeto de análise é formulado em termos de ação, sendo a tarefa da investigação interpretativa

> descobrir os caminhos específicos da organização social e da cultura relacionados com as atividades de pessoas específicas que fazem escolhas e conduzem a ação social, em conjunto" (Erickson, 1986, p. 129).

A investigação incidirá, sobre o modo como se desenvolvem e mantêm estes sistemas de significado, e não apenas sobre os comportamentos observáveis. Por sua vez, Denzin (1994) refere-se a essa atribuição de sentido como uma arte de interpretação:

> Confrontado com uma montanha de impressões, documentos e notas de campo, o pesquisador qualitativo enfrenta a difícil e desafiante tarefa de fazer sentido do que foi aprendido. Eu entendo por "fazer sentido", o que foi aprendido, a arte da interpretação. (p. 500)

Para Miles e Huberman (1994) esta abordagem tem uma longa história intelectual estando apoiada na tese de que as ações humanas não podem ser analisadas por métodos das ciências naturais e da física, sendo abordadas com uma perspetiva concetual diferente. A atividade humana pode ser vista como "texto" – uma coleção de símbolos expressando camadas de significados. "A interpretação desse texto está relacionada com a compreensão das ações e das interações procurando-se significados partilhados por ambos: os atores sociais e o investigador" (p.8).

Desta forma, de acordo com a minha própria perspetiva do mundo, e de acordo com as questões escolhidas para a minha investigação que se prendem essencialmente com uma melhor compreensão das ações, do professor na sua prática e da reflexão que o próprio professor faz do seu trabalho, optei por me situar no paradigma interpretativo informado por elementos do paradigma colaborativo, uma vez que preparei conjuntamente com a professora a trajetória de aprendizagem, tendo como objeto de análise, o significado da ação da professora, e o que a leva a agir, e a interagir no decurso da sua prática, mantendo uma relação reflexiva sobre a ação por ela realizada.

3.1.2 **Uma abordagem colaborativa**

"A colaboração parece ser uma condição necessária se a prática de ensino é para ser melhorada, de maneiras que sejam fundamentais e duradouras" (Erickson, p. 431). A colaboração implica trabalhar em conjunto, para que haja uma ajuda mútua, devendo esta ajuda, ser genuína, e através de movimentos mutuamente úteis. Para o autor essa colaboração traduz-se para os parceiros, num trabalho mais fácil, mais significativo, menos isolado e mais gratificante, podendo resultar num produto de maior qualidade. O autor não encara esta colaboração como um processo simples em que todos se encontram sempre de acordo, mas como um processo complexo e contínuo de articulação, entre os diferentes pontos de vista dos participantes.

Defende Erickson (1989) que a colaboração pode dar uma nova dimensão mais poderosa na investigação com a vivência conjunta de dilemas. Evidencia que a colaboração não é um processo de completa concordância entre os participantes nem visa atingir o cumprimento de objetivos, mas sim "um processo de contínua articulação entre os diferentes pontos de vista dos participantes e entende ainda esta forma de investigação como uma forma de nutrir as discussões humanas e as argumentações dos dilemas em educação" (p.430).

Para Miles e Huberman (1994), na abordagem colaborativa a ação é realizada num ambiente social, o investigador sente-se confortável no acompanhamento da ação e acompanha o processo em tempo real. Este acompanhamento pode tomar duas formas: "reflexividade" quando o investigador permanece numa postura de pergunta ou questionamento ou "dialética" quando atores e pesquisadores podem ter interpretações diferentes de dados (p.8). Os diálogos davam origem a diferenças de perspetiva que enriqueciam porque permitiram aprofundar a compreensão da ação.

Guba e Lincoln (1994) defendem que pode haver compatibilização de paradigmas, de modo que estes se informem mutuamente "desde que partilhem elementos axiomáticos, ou com fortes semelhanças entre si " (p. 174).

3.1.3 Um estudo de caso

Ao descrever e analisar a prática de uma professora na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem, na passagem do número natural ao número racional, através da fração, no 3º ano de escolaridade, pela primeira vez dada a mudança curricular, posso considerar estar perante uma perplexidade, um problema que necessita de uma compreensão global e mais profunda, em que a análise do caso particular desta professora poderá levar a compreender melhor o problema em questão e eventualmente poder fazer os leitores envolverem-se nesse processo reflexivo. Optei por realizar um único estudo de caso, sendo esta abordagem - o estudo de caso - de acordo Yin (2003), o que permite aos investigadores reter as características significantes e holísticas dos acontecimentos ou eventos da vida quotidiana. O estudo de caso mais do que conter interpretações completas e precisas dos acontecimentos reais tem como propósito estabelecer um quadro de reflexão e debate entre os investigadores mas necessita ter como preocupação a apresentação rigorosa e justa dos dados empíricos (p. 2). Patton (1990) refere que "os estudos de caso são particularmente úteis quando se pretende compreender determinados indivíduos, determinado problema, ou uma situação particular em grande profundidade." (p.74).

De acordo com Stake (2009) o estudo de caso é instrumental quando "visa alcançar algo mais do que compreender esta professora específica" (p.19). Mais do que explicar o que aconteceu com esta professora relativamente à questão de investigação, procurou-se compreender a sua ação e os significados das suas ações numa situação que é comum ao conjunto de professores do 1º ciclo: a sua prática letiva no momento concreto em que se faz a generalização do novo programa de matemática do ensino básico preconizando uma nova abordagem à construção do número racional, trabalhando em paralelo as representações fração e decimal.

Stake (2009) denomina de compreensão experiencial, a compreensão que advém da explicação que facilita a compreensão mas também da intencionalidade que lhe está inerente. "Mas a compreensão tem um círculo psicológico que a explicação não tem…. A compreensão também está relacionada com a intencionalidade de uma forma que a explicação não está." (p. 53). Explicita:

O verdadeiro estudo de caso é a particularização, não a generalização. Pegamos num caso particular e ficamos a conhecê-lo bem, numa primeira fase não por aquilo que difere dos outros, mas pelo que é, pelo que faz. A ênfase é colocada na singularidade e isso implica o conhecimento de outros casos diferentes, mas a primeira ênfase é posta na compreensão do próprio caso. (p. 24)

Stake refere que um estudo de caso é uma base pouco sólida para a generalização, referindo-se a microgeneralizações, para designar generalizações que ocorrem durante o estudo de caso salientando que raramente se alcança um entendimento novo, mas se consegue um aperfeiçoamento do entendimento já existente, uma generalização modificada, aperfeiçoada, existindo procedimentos para aperfeiçoar a validação dessa reconsideração, tais como, a triangulação (p. 24).

O autor enfatiza que muitas vezes, o objetivo do investigador não é tanto a representação verídica, mas antes a estimulação de reflexão posterior, otimizando a oportunidade de os leitores aprenderem. Stake (2009) refere que a característica principal da investigação qualitativa é a centralidade da interpretação. Que as descobertas não são tanto "descobertas" mas "asserções". Que a intensa interação do investigador com as pessoas, quando faz trabalho de campo, dada uma orientação construtivista para o conhecimento, dada atenção à intencionalidade e ao sentido do eu participante, por muito descritivo que seja o seu relatório, o investigador acaba por oferecer, em última análise, uma visão pessoal. "As 'descrições densas não são complexidades objetivamente descritas; são as perceções particulares dos participantes" e que “a intenção dos investigadores qualitativos de promover um paradigma de investigação subjetivo é um dado adquirido” (p.57).

A subjetividade não é considerada como uma imperfeição a precisar de ser eliminada, mas como um elemento essencial da compreensão. Assim, afirma “a função da investigação não é necessariamente mapear e conquistar o mundo mas sim sofisticar a sua contemplação.” (p.60). É suposto que além da “descrição densa” e da “compreensão experiencial” existam também “realidades múltiplas” nos estudos de carácter qualitativo. “Para descrever o caso tenta-se apresentar um corpo substancial de descrição incontestável” (p.124).

3.2 Participantes

Stake (2009) refere que a escolha do caso deve priorizar o acesso aos dados: “Dados os nossos objetivos que casos terão a probabilidade de nos levar a entendimentos, a asserções, talvez até à modificação de generalizações?” (p. 20). A preocupação central na escolha do participante para o estudo não se prendeu com características muito definidas de localização, nem de relação. Todos os professores do 3º ano de escolaridade estavam perante o desafio de trabalhar a construção do conceito de número racional, a partir dos múltiplos significados da fração, pela primeira vez na sua vida. O que tomei como ponto de partida para a escolha foi encontrar uma pessoa que quisesse trabalhar esta unidade no âmbito de um projeto de colaboração. Assim, o estudo de caso foi realizado com uma professora do 3º ano, por ter consciência do desafio que se coloca, neste momento, aos professores deste ano de escolaridade, que é a introdução no 1º ciclo, do conceito de número racional a partir da noção de fração.

A escolha da professora teve por base em primeiro lugar a sua imensa vontade de colaborar num projeto desta natureza, o seu interesse pela inovação no ensino da Matemática, a sua experiência profissional, a sua curiosidade, predisposição e sensibilidade para as questões que se relacionam com o número, o cálculo e as formas de desenvolver nos alunos flexibilidade e gosto na procura de estratégias e na explicitação de raciocínios e uma grande vontade de inovar. Depois de a conhecer apercebi-me também nela, um enorme entusiasmo para aceitar o desafio de experimentar novas estratégias, de seguir as orientações metodológicas do novo PMEB na sua sala de aula e da sua vontade em refletir conjuntamente sobre a sua prática.

3.3 Recolha de dados

A recolha de dados foi realizada recorrendo às técnicas de observação e do inquérito, privilegiando como instrumento, nesta última, a entrevista que assumiu um carácter semiestruturado. Também foram analisados documentos: memorandos de reuniões, e notas de campo e foi realizada conversação informal após as aulas. O quadro sintetiza o trabalho de campo realizado e a respetiva recolha de dados:

Quadro 5 - Trabalho de campo

Tipo	Objectivo	"Timing"
Observação de 5 aulas previamente à unidade didáctica	Familiarização com o contexto: "fazer parte do todo"; percepcionar a "cultura de sala de aula"; percepcionar formas de interacção.	Outubro de 2010 (1 semana)
Realização da 1ª entrevista e sua gravação em áudio	Conhecer a professora e motivações para o estudo e expectativas.	15 de Nov. 2010
Observação e Vídeo gravação de 14 aulas da unidade didáctica	Observar a concretização da trajectória de aprendizagem delineada de modo a recolher dados	De 29 de Nov. 2010 a 17 Março de 2011
Reuniões (8+4) de preparação, acompanhamento e reflexão com a professora e sua gravação em áudio	Partilhar ideias , reflectir, avaliar e reavaliar a trajectória de aprendizagem	De 22/9/2010 a Abril de 2011
Diálogo e elaboração das notas de campo	idem	Final de cada aula observada
Realização da 2º Entrevista e sua gravação em áudio	Percepcionar a perspectiva da professora sobre o trabalho realizado: concretização de expectativas, desafios, dificuldades, constrangimentos, inflexões futuras.	30 de Maio 2011

A observação será participante no sentido de Bogdan (1994), em que é o próprio investigador o instrumento principal de observação. Ele integra o meio a investigar, "veste" o papel de ator social podendo assim ter acesso às perspetivas de outros seres humanos ao viver os mesmos problemas e as mesmas situações que eles. Assim, a participação tem por objetivo recolher dados (sobre ações, opiniões ou perspetivas) aos quais um observador exterior não teria acesso. A observação participante é uma técnica de investigação qualitativa adequada ao investigador que pretende compreender, num meio social, um fenómeno que lhe é exterior e que lhe vai permitir integrar-se nas atividades/vivências das pessoas que nele vivem (p. 90). Estive presente nas aulas previstas para a unidade didática e inseri-me no grupo passando a vivenciar a experiência no local_ a sala de aula dos alunos do 3º ano. Tentei seguir uma observação naturalista, tendo como registos formais gravações áudio e vídeo das aulas de onde pude transcrever situações singulares, através de pequenos episódios ou relatos para que o leitor possa acompanhar o processo de reflexão fazendo ele próprio, uma reflexão semelhante.

A entrevista, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), é utilizada na investigação qualitativa para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, que permitam ao investigador conhecer o modo como aquele interpreta os acontecimentos. Pretende-se seguir a metodologia da entrevista semiestruturada ou semidirectiva, de acordo com Ghiglione e Matalon (1997) que consiste num diálogo em que o entrevistado é livre de mudar a sequência das questões e em que, ao entrevistador é consentido explicar e acrescentar questões. As entrevistas foram realizadas em dois momentos concretos: no início do projeto de colaboração e no final. Ambas foram gravadas e transcritas.

Relativamente às reuniões, estas eram preparadas por ambas, através do visionamento dos filmes, sendo posteriormente transcritas. Tínhamos muitas vezes contudo, pequenas conversas informais e espontâneas que surgiam, no decurso do processo e que eram por nós fomentadas por gosto pela partilha do que acabávamos de viver durante as aulas, e mesmo no meio de uma tarefa quando o intervalo surgia de permeio. Estas conversações que assumiam um caráter reflexivo e por vezes, dialético (Miles e Hubberman,1994) constituem conforme Patton (2002) também um modo de recolha de dados que denomina por entrevista de conversação informal 16(p. 342). Não constituindo os instrumentos de recolha de dados formais, estas conversas espontâneas que emergiam das vivências imediatas, permitiram apreender as primeiras impressões que são muitas vezes as mais genuínas e reveladoras do contexto psicológico da professora que esteve subentendido a toda a sua ação: as suas preocupações, os seus receios, os seus entusiasmos. Dessas conversas, fazia uma pequena gravação ou tirava

[16] "*informal conversational interview* " *no original*

um pequeno apontamento, ou enviava-lhe um *email* com alguma ideia que me surgia depois no decurso da reflexão que mantinha comigo mesma, após os nossos encontros.

Miles e Huberman (1994) referem-se à dificuldade central na recolha de dados qualitativos para análise. Evidenciando a perspetiva da pesquisa qualitativa como uma interpretação de uma ação embebida num contexto e com um significado especial para os atores, consideram-na uma forma de arte e salientam o carácter intuitivo destas abordagens. "Como pode ter a certeza de que uma "vulgar", "inegável" e "casual" descoberta, não está de fato errada?"[17] (p. 2). Referem a necessidade de métodos credíveis, dependentes e replicáveis em termos qualitativos, de forma, a que, se possam partilhar as descobertas, explicitando e sistematizando os métodos usados para fazer o *design* das suas conclusões. A riqueza e o holismo dos dados (observação de aulas antes e durante a unidade didática, duas entrevistas, várias reuniões de planificação e de análise retrospetiva "dilatadas" no tempo) poderão ter um forte potencial para revelar a complexidade do problema. O facto de serem recolhidos ao longo de um período de tempo considerável (no estudo em questão, de Outubro a Maio) torna mais poderoso o estudo de um processo de problemáticas ligadas ao "como" e ao "porquê", assim como a flexibilidade inerente aos métodos de recolha permitirá maior confiança. Essa confiança é reforçada, pelo fato da recolha de dados se dar na proximidade do próprio processo e mesmo dentro da situação específica (a recolha faz-se no momento em que a situação ocorre). A ênfase é num caso específico – o estudo desta professora na preparação e concretização de uma unidade didática concreta – caso este, focado e limitado, onde a influência do contexto é marcante – no âmbito de um projeto de colaboração.

Neste caso, o investigador pode, com ajuda local, desenhar os contornos de uma "experiência de campo". Os dados são recolhidos e fornecidos aos que se encontram na ação, de forma a serem utilizados tanto como feedback, como para elaborar, a próxima fase das operações. Durante o período de observação mantínhamos pequenos diálogos antes e depois das aulas, que permitiram reavaliar o plano de ação, as suas escolhas para as aulas seguintes. Nestas abordagens, defendem Miles & Huberman (1994) estão incorporados elementos característicos dos estudos naturalísticos: observação participante, sensibilidade relativamente às preocupações dos participantes, focagem na

[17] "How can we be sure that an "earthy", "undeniable" and "serendipitous" finding, is not, in fact wrong?" no original

descrição dos dados desde a fase inicial, instrumentos não estandardizados, uma perspetiva holística e a procura de temas ou padrões subjacentes (p.9).

As múltiplas abordagens no âmbito do trabalho, concretamente o recurso a métodos diversos de recolha dos dados para o estudo de caso; como a entrevista, observação participante e análise de documentos, assim como a verificação da descrição do caso por parte da própria professora, ajudam a triangular as observações e as interpretações do investigador (p. 128).

A recolha de dados coloca questões éticas ao investigador pois "é feita num "território privado" de alguém" (Stake, 2009, p. 74). Neste caso, na sala de aula da professora com os seus alunos. Há como que uma pequena invasão da privacidade pessoal dos intervenientes na ação e esta "invasão" carece da autorização dos mesmos. Efetuei o pedido de autorização à direção do agrupamento e à própria escola (anexo 2), assim como aos encarregados de educação dos alunos (anexo 3) através da sua professora tendo também estado presente na reunião de encarregados de educação a pedido desta, para esclarecer e tranquilizar os pais relativamente aos objetivos e ao uso das observações realizadas através das gravações vídeo. Os pais ou encarregados de educação depois de esclarecidos deram por escrito a sua autorização. Foram informados por mim do carácter sigiloso das observações realizadas e das informações obtidas garantindo-se sempre o anonimato dos intervenientes. Relativamente à professora, foi só apenas depois da negociação do projeto conjunto que passámos à fase dos esclarecimentos e pedidos de autorização aos pais. Esta teve acesso a um duplicado de todas as filmagens ou gravações assim como a todos os materiais produzidos no decurso do projeto podendo e devendo dar o seu contributo e parecer. Procedeu à verificação dos textos, quer da transcrição das entrevistas e dos memorandos, quer da descrição do caso, tendo sido acordado o produto a divulgar. Além destas formas, de preservar a identidade da escola, e dos alunos, Beatriz foi o pseudónimo adotado pela professora, garantindo-se desta forma a confidencialidade do estudo (Patton, 2002).

Nos episódios os alunos têm nomes fictícios, estando identificados com um nome próprio quando a intervenção diz respeito a um membro do grupo que apresenta e discute o trabalho e com um A (de aluno) seguido de um número (e.g. A7), outros intervenientes na discussão que pertencem à restante comunidade de discussão.

3.4 Análise dos dados

A análise dos dados foi desenvolvida tendo em consideração as aulas, as entrevistas, as conversas informais e as reuniões[18] com a professora.

De acordo com Miles e Huberman (1994) “a análise de dados “ é um contínuo e interativo empreendimento” (p. 12) que pode ser representado pelo modelo apresentado:

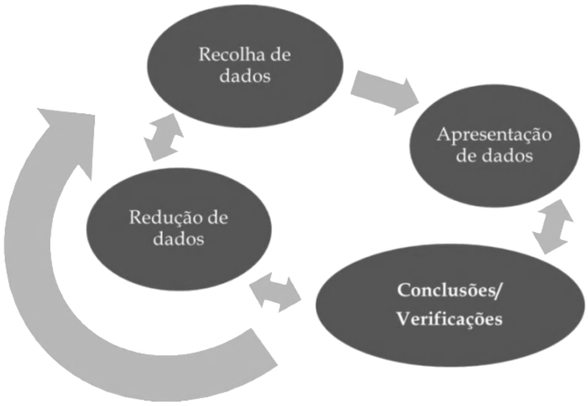


Figura 16_ Modelo interativo de Miles e Huberman (1994)

Como o modelo ilustra, na atividade de análise podem considerar-se três fases: redução de dados, apresentação de dados e conclusões. Os autores não consideram essas fases completamente distintas. Apresentam-nas, como três fluxos de análise, como que entrelaçados, antes, durante e depois da recolha de dados, podendo coexistir de forma paralela.

A redução de dados refere-se ao processo de selecionar, focar, simplificar, abstrair e transformar os dados. Há desde já uma redução antecipatória quando os investigadores fazem escolhas relativamente ao quadro conceptual, aos casos, às questões de investigação e aos instrumentos de recolha de dados. Este processo inicia-se durante o trabalho de campo, e ocorre continuamente até à escrita do relatório final.

A apresentação de dados é um conjunto organizado e comprimido de informação que permite o desenho das conclusões e da ação. Observando os dados apresentados pode-se compreender o que foi acontecendo e delinear outras ações, a partir da nova compreensão. Tal como a redução de dados, a apresentação dos dados não está separada da análise, mas faz parte dela.

[18] As reuniões realizadas, com Beatriz, encontram-se explicitadas no anexo 10

O terceiro fluxo da atividade de análise são as conclusões finais que não estão dissociadas da verificação. As conclusões podem não aparecer ao longo do processo de recolha de dados, dependendo do tamanho do corpo de análise, da codificação, e até mesmo da sofisticação do investigador, mas são delineadas, desde o início, mesmo quando um investigador diz ter procedido indutivamente. As conclusões vão sendo desenhadas e verificadas enquanto a análise decorre.

No presente estudo, a primeira fase da análise iniciou-se durante o período que decorreu a recolha de dados (de Novembro a Março). Com efeito, e de acordo com aspetos negociados no âmbito do projeto de colaboração, à medida que se fosse concretizando a trajetória havia que refletir sobre as aulas, de forma a ir ajustando o próprio percurso definido inicialmente.

Assim, houve reuniões em que após o visionamento das aulas (por vezes, já tínhamos visto as gravações antes da reunião, para ganhar tempo, outras vezes víamos durante a própria reunião) procedemos a uma análise retrospetiva dos acontecimentos, começando pelos aspetos que surgiam espontaneamente, e que por isso, denotavam a sua importância, pois tinham-se tornado significativos. Procurei dar a palavra a Beatriz, em primeiro lugar, não deixando de partilhar também, o que se tornou mais significativo para mim, no decurso da sua prática, através do caminho por nós delineado.

Dessas reuniões, emergia uma primeira análise do trabalho desenvolvido que permitiu a escolha das tarefas a serem analisadas de forma mais detalhada. A segunda entrevista e as reuniões que se sucediam "transportavam" questões que resultavam da primeira fase de análise.

Na segunda fase de análise mais detalhada e após terminado o período de recolha dos dados intensifiquei o trabalho de análise, procedendo primeiro de novo a uma "leitura flutuante dos dados" (Bardin, 1994), seguida da transcrição das aulas, entrevistas e reuniões.

Dado a extensão do "corpus" de análise, defini conjuntamente com Beatriz (essa escolha foi discutida com Beatriz!) um conjunto de tarefas que serão objeto de uma análise mais detalhada, tendo em conta, a relevância do seu papel no percurso de aprendizagem dos alunos da turma, a sua situação na trajetória de aprendizagem planeada e na que efetivamente se realizou, e razões que se relacionam com a própria estrutura da matemática subjacente às tarefas e que emergiram, ou não, de forma particularmente significativa. As razões que se prendem com aspetos emocionais, psicológicos ou pedagógicos, de Beatriz, também tiveram a sua importância, nessa escolha, pois considerei que também revelavam padrões a assinalar. Na escolha das tarefas que institui como objeto de análise, tentei ter um equilíbrio entre aquilo que foi mais significativo para a professora e o que considerei ser mais revelador das suas práticas de ensino.

De entre, todas as tarefas da trajetória foram escolhidas, tarefas representativas das diversas etapas da trajetória para análise detalhada, entre aquelas, que no decorrer do processo de concretização e reflexão foram consideradas pela professora e por mim, como as mais significativas na construção das aprendizagens dos alunos no que se refere à construção do conceito de número racional, trabalhado a partir da representação de números na forma de fração e caminhando progressivamente para as múltiplas representações da fração.

No quadro que se segue explicito as tarefas a analisar, a sua situação na trajetória definida e as razões que nos levaram a selecioná-las.

Quadro 6 – Tarefas escolhidas para análise mais detalhada

Posição na trajetória	Data	Designação	Número da aula observada	Justificação da escolha	Contexto de trabalho
T1,T2,T3	29/11/10	O guardanapo do marido da professora Dobragens e mais dobragens Pintando azulejos	1º	Primeiros passos na noção de fração; Abordagem intuitiva, e muito informal, mas forte, em termos de conteúdo matemático.	Trabalho de pares
T4	30/11/10	A visita de estudo e a distribuição de baguetes	2º	Escolhida de comum acordo; Tarefa de referência para a professora porque a deixou realizada e foi muito abrangente tendo trabalhado muitas das "grandes ideias".	Trabalho de grupo e discussão coletiva, em Congresso Matemático (2 aulas)
T7	07/12/10	A discussão do João e da Maria	4º	Referida de imediato pela Beatriz no decurso do intervalo da aula como sendo uma tarefa que lhe estava a causar r muita insatisfação, e com a qual se sentia frustrada. Voltou de imediato a ela na reflexão a meio da unidade didática. Mudança da unidade "criou problemas aos alunos".	Trabalho de grupo e discussão Coletiva (1 aula)
T16	17/01/11	As garrafas de água mineral	11º	Tarefa da própria escola que foi realizada com muita satisfação por alunos e colegas do ano passado. A professora queria muito fazê-la.	Trabalho de grupo e discussão coletiva, em Congresso Matemático (2 aulas)

As dimensões de análise decorrem da leitura flutuante dos dados, tendo por referência as questões do estudo, e o ciclo de ação-reflexão que atravessou todo o nosso projeto de colaboração. Concretamente, foquei-me na:

A. Preparação da trajetória e das aulas
B. Concretização da trajetória e das aulas
C. Reorientação das práticas de ensino da professora

Na **preparação da trajetória** e das aulas orientei-me pela (i) escolha e sequenciação de tarefas, tendo por horizonte as grandes ideias matemáticas para a construção do conceito de número racional, e na, (ii) preparação da professora através da antecipação de tarefas, e da escolha de modelos. Na **concretização da trajetória** e das aulas centrei-me na (iii) apresentação das tarefas aos alunos e no apoio ao trabalho dos alunos, procurando fazer emergir os conceitos matemáticos e na (iv) discussão das estratégias emergentes do trabalho realizado com os alunos, e no uso de modelos para ajudar os alunos a pensar. Relativamente à **reorientação das práticas de ensino** da professora, debrucei-me sobre os contributos da reflexão sobre o trabalho realizado, ao longo da trajetória, sobre as dificuldades, os desafios experienciados e a forma como Beatriz perspetiva futuramente as suas práticas.

No capítulo que se segue analisarei de uma perspetiva macro o projeto de colaboração, evidenciando os diversos aspetos que caracterizam a prática de ensino de Beatriz, deixando uma análise mais detalhada de tarefas significativas, para o capítulo a seguir.

A realização de inferências será realizada a partir do que é observável, e dito pelo professor, de forma a compreender as suas práticas relativas às questões em estudo. Para estreitar a busca da compreensão, os investigadores qualitativos apreendem o que está a acontecer em episódios chave ou testemunhos, que representam os acontecimentos com a sua própria interpretação direta e histórias. “Estas permitem obter uma compreensão existencial do caso” segundo Miles e Huberman (1994, p. 55). Referem ainda os autores, que com os dados qualitativos pode-se preservar o fluxo cronológico, ver exatamente que acontecimentos levaram a que consequências, e obter explicações fecundas.

Capítulo 4 - Conceção e desenvolvimento do projeto de colaboração

Este capítulo incide sobre a conceção e desenvolvimento de um projeto de colaboração focado na construção, pelos alunos, do conceito de número racional, introduzido a partir da sua representação na forma de fração. Começo por destacar a forma como se formou a nossa parceria, as respetivas negociações e ajustamentos à realidade e posteriormente como vivemos a dinâmica de colaboração, como se processou o trabalho realizado em conjunto na preparação das aulas, as reflexões espontâneas, após as mesmas, e as nossas reuniões de partilha de visões, pensamentos, sentimentos e asserções relativamente às aulas vividas e trabalhadas por Beatriz, e vividas e observadas por mim.

4.1 A opção por um trabalho colaborativo

A palavra colaboração significa etimologicamente ato ou efeito de colaborar (colaborar + -ção). Tendo origem no verbo colaborar que aparece no dicionário com o significado de conjugar, a sua origem etimológica aponta para (latim *collaboro*, -are, trabalhar com), tendo diversos significados: trabalhar em comum com outrem_ coadjuvar ou cooperar, agir com alguém para a obtenção de um determinado resultado - ajudar, ou ainda com o significado de participar – trabalhar em conjunto com uma ou mais pessoas na participação de uma obra coletiva, geralmente literária, cultural ou científica.

Segundo Boavida e Ponte (2001) uma pessoa pode decidir envolver-se num projeto colaborativo por diferentes tipos de razões: por um interesse comum numa inovação curricular, para lidar com uma turma difícil, para explorar um tópico novo ou avançar na compreensão de uma certa problemática, para ter a oportunidade de trabalhar com alguém com quem há relações pessoais previamente estabelecidas, ou até como estratégia para alterar as relações de poder na instituição. Refere ainda a autora que num mesmo grupo podem juntar-se pessoas levadas por razões diferentes, mas que encontram uma plataforma de entendimento comum. Para ambas foi o interesse comum por uma inovação curricular que foi a motivação para o nosso envolvimento num projeto de colaboração.

Essa colaboração permitiu um contraponto a “uma cultura institucional caracterizada pelo individualismo e a hierarquia” (…) (Boavida & Ponte, 2001, p. 2) das organizações escolares. Estas “marcadas por uma leitura rígida do currículo e portadoras de uma cultura [tornam] muitas vezes, extremamente difícil ao professor realizar um projeto educativo sem contar com a colaboração de outros intervenientes, igualmente professores ou com outros papéis no sistema” (idem). E não apenas um projeto educativo em geral, mas ainda mais o será, de acordo com os autores, “para os projetos de investigação sobre a prática, cuja conceção, desenvolvimento e divulgação envolvem um conjunto alargado e diversificado de atitudes e competências e se deparam, na maior parte dos casos, com muitos e inesperados obstáculos” (idem). Para Boavida e Ponte (2001) na realização de uma investigação sobre a prática, a colaboração oferece importantes vantagens, que a tornam num valioso recurso sendo várias as razões para que isso se verifique: (i) Maior energia no empenho num objetivo comum fortalecendo-se a determinação no agir, (ii) Acréscimo de segurança para inovar e experimentar dadas as competências, experiências e perspetivas diversificadas; (iii) Melhores condições, para enfrentar incertezas e obstáculos que surgem, dada a criação de sinergias que possibilitam uma reflexão acrescida pelo diálogo e pela partilha (p.3).

Para Boavida (2005) o diálogo é a peça chave da permuta, salientando que “a partilha e a mutualidade é considerada não em termos de realizar o mesmo trabalho de investigação, mas, antes, em termos da compreensão do trabalho uns dos outros, das relações estabelecidas e da conversação entre os ‘colaborantes’ como fatores que caracterizam um projeto de colaboração e uma investigação colaborativa” (p. 145).

No projeto que tínhamos em vista os nossos acordos e também os nossos diferentes pontos de vista, teriam de ser objeto de negociação e fruto de diálogo e conversação.

> A colaboração como um processo emergente, permeado de negociações, onde é importante os participantes irem para lá de estereótipos de modo a poderem repensar as suas perspetivas acerca uns dos outros. Este processo implica interdependência e um contínuo dar e receber, requer a tomada de decisões conjuntas, envolve uma

> responsabilização coletiva pelas direções a prosseguir e nele as soluções emergem através de um modo construtivo de lidar com as diferenças (p. 146)

Apesar de intuir que a interpretação dos significados das ações da professora no contexto da problemática em curso – a construção do conceito de número racional a partir da fração, pela primeira vez, no 1º ciclo – poderia ser objeto de uma maior compreensão do problema, se informado por elementos do paradigma colaborativo, fui tomando consciência da importância dessa opção à medida que mergulhava nas características do próprio paradigma. Indo ao encontro de Boavida e Ponte (2001) a "colaboração é adequada nos casos em que os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objectivos que a todos beneficiem" (p.3).

O nosso objetivo comum, para a professora e para mim, é em última análise, as aprendizagens dos alunos. Estamos é em planos diferentes; e portanto, os nossos contributos são diferentes. Quando me refiro a planos diferentes, não me refiro a desníveis mas à possibilidade de contribuir de forma diferentes para o objetivo em questão. Cada uma de nós tem no seio desse projeto, objetivos específicos. A professora tem por objetivos ter alguém com quem planear, pensar, analisar, refletir, na preparação das aulas, acerca das próprias aulas, dos desafios e dificuldades que as tarefas planeadas fizeram surgir no decurso da sua implementação. Eu acompanhar o processo de planeamento, de análise e escolha das tarefas, as dúvidas e inquietações da professora, os seus entusiasmos, as suas frustrações, refletir conjuntamente sobre um trabalho planeado e implementado pela professora, passando eu na fase de concretização à de observadora, embora participante, pois estava inserida na comunidade. Esse distanciamento permitiu-me um outro nível de análise, que levava posteriormente junto da professora, assim como ela me trazia, através da sua própria voz, os sentimentos experienciados e as razões das suas opções em plena ação.

O projeto de colaboração consistiu na preparação conjunta e holística da unidade didática dos números racionais não negativos a partir, nomeadamente do estudo de documentos curriculares, da planificação de escola e de tarefas e textos selecionados, assim como na construção de uma cadeia de tarefas focada em grandes ideias[19] de Lovin

[19] "big ideas"

&Van Walle (2006) e de Fosnot & Dolk (2001) e enquadrada numa trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995) orientada para a construção de número racional.

O projeto teve, essencialmente, duas fases: a de conceção e a de desenvolvimento.

4.2 Instituindo o projeto de colaboração

Escolhida a problemática da minha investigação — que foi clara para mim desde que me candidatei ao mestrado em didática da matemática, colocou-se a questão de como escolher o professor com quem iria trabalhar. Aos poucos¸ dado os contornos que o meu projeto foi tomando, fui-me vendo sem "parceiro de viagem", apesar da variedade de professores, colegas e amigos que estariam na disposição de trabalhar de boa vontade comigo, e de se aventurarem na descoberta do desenvolvimento do sentido de número quando se alarga o universo dos números naturais para os números racionais, "entrando" pelo mundo inquietante e desafiador da construção do conceito de número racional e do significado das diversas representações, concretamente e especialmente a de fração, partindo da compreensão desta para o de outras representações, nomeadamente decimal, percentagem e numeral misto.

A questão que reduzia drasticamente o universo de possíveis companheiros de viagem, prendia-se com o facto de as primeiras aprendizagens das frações passar a ser trabalhada no 1º ciclo, e de forma mais enfática no 3º ano de escolaridade com a introdução do PMEB. Desta forma, como professora do 2º ciclo, não era no universo dos meus colegas que encontraria parceria para este trabalho, nem tão pouco no dos meus formandos, mesmo os do 1º ciclo, pois estes estavam no ano anterior a lecionar os anos que faziam a entrada do novo programa, portanto, o 1º e o 3º ano de escolaridade, o que faria com que dada a continuidade pedagógica que é critério das suas escolas, lecionariam durante este ano letivo, o 2º e os 4º anos de escolaridade. Assim, lancei um desafio a estes meus colegas e pedi-lhes que me ajudassem a encontrar um professor que fosse entusiasta, disponível emocionalmente, que acarinhasse desafios e inovador, pois o que iria fazer seria completamente novo, e também muito corajoso para trabalhar com alguém que não conhecia. Foram portanto, uns formandos do Programa de

Formação Contínua de Professores de Matemática do 1ºciclo, grupo do qual fui formadora o ano letivo anterior, que contactaram Beatriz e lhe apresentaram o meu desafio. Encontrei, desde logo, no primeiro encontro informal na escola, nos primeiros dias de aulas, e na sua própria sala de aula, uma colega muito calorosa confiante e bem-disposta, que me acolheu entusiasticamente. Este pequeno encontro serviu apenas para sermos apresentadas mutuamente e para combinarmos um futuro encontro.

Foram necessários ainda dois ou três pequenos encontros com a colega para nos conhecermos um pouco mais, e para esclarecermos mutuamente o que é que uma procurava na outra. Estes encontros informais foram muito importantes para o início do nosso projeto de colaboração, pois de uma forma não planeada, íamos partilhando "pedaços soltos" das nossas próprias vivências pessoais enquanto, simultaneamente, íamos tomando consciência das expetativas mútuas.

Fui-me apercebendo que não bastava ir às aulas. Beatriz falava-me dos seus receios face às novas exigências do programa e pedia-me ajuda para a planificação das aulas propriamente ditas e das tarefas delineando um percurso coerente e consistente, para o esclarecimento de dúvidas relativamente a determinados conceitos, assim como, para o debate de ideias antes e depois das tarefas desenvolvidas. Estava claro que era uma relação de partilha mútua de benefícios que ambas pretendíamos. Nesta fase do início do trabalho, encontrávamo-nos em início de Outubro e apresentei por escrito uma proposta de projeto de colaboração (ver anexo 3).

A proposta foi de bom grado aceite por Beatriz e assim ficou instituído que o projeto de colaboração teria três campos de incidência principais: Preparação, concretização e reflexão. Estes campos, bem como os papéis que desempenhámos ao longo do projeto encontram-se representados na figura 17.

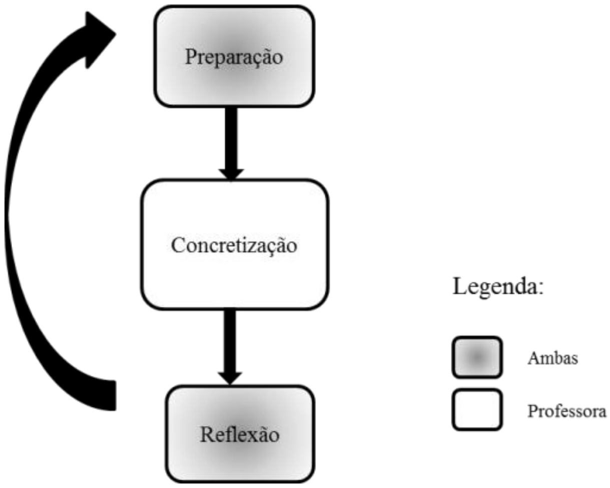


Figura 17- Definição de papéis no projeto de colaboração

O campo "Preparação" focou-se na planificação da possível trajetória de aprendizagem, para a unidade didática dos números racionais, informada por diversos documentos curriculares, didáticos, científicos e outros de responsabilidade mútua, apesar da professora, ter direito à última palavra, pois é a sua sala de aula, os seus alunos, o seu contexto de trabalho e o seu próprio trabalho que servirá de estudo ao meu projeto de investigação.

O campo " Concretização" da trajetória de aprendizagem foi da responsabilidade da professora exclusivamente, tendo no entanto, a minha presença constante na sua aula, "atrás da máquina", como observadora. Assumi-me, contudo como observadora participante, pois passei a fazer parte da comunidade de aprendizagem, tornei-me membro dessa comunidade, se bem com um papel muito concreto – a gravação das aulas. Os alunos sentiam liberdade para me questionar e para me considerar uma mais-valia nos momentos de trabalho no grupo mas a professora assumiu a liderança do processo ensino-aprendizagem. O apoio que dava a Beatriz era o meu olhar sobre as coisas, olhar de um observador atento e que pretendeu ser construtivo, valorizando-a, reforçando-a, com um olhar ou um gesto cúmplice e discreto que não lhe retirasse o seu papel de líder e participante do processo de ensino e aprendizagem dos seus alunos.

Relativamente ao campo " Reflexão", consistia em análises retrospetivas da prática da professora, após as aulas, informalmente e espontaneamente, assim como em reuniões preparadas para análise de todo o percurso realizado sobre as aulas, de responsabilidade conjunta, e com o objetivo de compreender o percurso dos alunos, analisar a evolução das aprendizagens ao longo do percurso, reformular o percurso previsto previamente, decidir, infletir, de novo preparar e analisar.

Definido o projeto e aceite mutuamente, fomos encontrando "formas de trabalhar entre os elementos da equipa (…) propiciadoras do trabalho conjunto" (Boavida & Ponte, 2001, p.6), ousando aventurarmo-nos num projeto de trabalho colaborativo que teria de conciliar as nossas intenções e os nossos planos, assim como o imprevisto que nos desafiava a uma colaboração mais enérgica, na medida em que de nós exigia capacidade para negociar e decidir sobre o que não é possível antecipar e prever.

Toda a colaboração, é um processo emergente, marcado pela imprevisibilidade e recheado de negociações e decisões (Grey, referido por Stewart, 1997). "Neste processo, é fundamental que os participantes manifestem abertura no modo como se relacionam uns com os outros, dispondo-se a um contínuo dar e receber, assumindo uma responsabilização conjunta pela orientação do trabalho e sendo capazes de construir soluções para os problemas no respeito pelas diferenças e particularidades individuais" (Boavida & Ponte, 2002, p. 45, 46).

Os nossos papéis estavam, portanto, definidos no nosso projeto de colaboração: preparámos conjuntamente a unidade didática, analisando e selecionando tarefas das mais variadas fontes tendo por direção as orientações curriculares e uma perspetiva de ensino consonante com as mesmas e com a nossa própria forma de viver a Matemática tendo a Beatriz sempre a última palavra na sua escolha. A prática na sala de aula foi da responsabilidade professora tendo-me mantido como observadora participante pois vivi em tempo real e no local toda a implementação da trajetória. Após as aulas nos momentos informais e a curto prazo nas reuniões mais formais voltávamos a um trabalho de colaboração na análise e reflexão sobre as mesmas, redefinindo a trajetória face aos desenvolvimentos percecionados.

A partir do momento em que definimos o projeto de colaboração e os papéis por nós assumidos nessa colaboração Beatriz, convidou-me, desde logo, a começar a entrar na sua sala de aula e a partilhar algumas aulas de matemática de uma outra unidade didática: a orientação espacial. Aliciou-me o seu convite por poder conhecer melhor o seu contexto de trabalho e ainda numa fase em que podia estar presente como uma convidada amiga podendo ela começar a sentir-se mais à vontade comigo, assim como os seus alunos, antes de aparecer atrás de uma máquina de filmar e como observadora. Sobretudo, porque não sendo ainda "equipa", o papel de observadora poder-me-ia colocar num papel de avaliadora, situação que me desagradaria muito. Nesses primeiros encontros, Beatriz manifestou-me algum incómodo relativamente aos pedidos de autorização aos encarregados de educação dos alunos para a filmagem das aulas, por "poder não conseguir explicar-lhes exatamente o que eu fazia e qual era o objetivo e ainda como isso poderia ser bom para os seus alunos" (R5, 15). Não compreendendo de início os seus receios que atribui a alguma insegurança, dispus-me, no entanto, a acompanhá-la na reunião de pais, do início do ano, e juntas explicarmos o nosso projeto. Tivemos oportunidade de o fazer salientando os aspetos inovadores e potencialmente favoráveis às aprendizagens dos alunos nesta área. Foi com surpresa que verifiquei a forma como colocou aos pais, de uma forma muito séria, profissional e simultaneamente muito carinhosa, as razões que a levaram a aderir a este projeto de colaboração, salientando a importância dele para todos nós. Ela, professora, beneficiaria do acompanhamento de outra professora, na preparação e concretização de uma unidade didática que constitui uma inovação curricular. Eu, como professora colaboraria dando o contributo da minha experiência e teria como benefícios poder realizar o meu estudo. Os alunos seriam também beneficiados desta nossa colaboração pois era pensando nas suas aprendizagens que realizávamos, o nosso trabalho.

Percebi que não fora a insegurança o que motivara Beatriz a apresentar-me aos pais, mas o fato de os considerar colaboradores no seu projeto, de dar aos seus alunos o melhor ensino possível. Envolvendo-os, e garantindo a sua adesão (que foi pedida por escrito também), promoveu em nós a confiança mútua.

Ao longo de duas semanas passei algumas aulas com Beatriz e os seus alunos num contexto informal em que eles trabalhavam as questões relativas à orientação espacial. Esses momentos permitiram-me percecionar a sua cultura de aula, os códigos implícitos e explícitos e foi inclusivamente importante perceber que o ambiente relaxado e espontâneo, aparentemente muito informal, tinha subjacente uma grande organização, responsabilidades partilhadas e ainda um grande respeito pelos sentimentos experimentados e pelas vivências de cada um que se projetavam nas atividades aparentemente, por vezes, a despropósito. Subjacente às suas ações, apreendi significados que revelavam intencionalidades.

Posteriormente, iniciámos as nossas reuniões com a intenção de preparar a unidade didática mas durante algumas reuniões "perdemo-nos" em muitas questões didáticas e pedagógicas umas proporcionadas pelas aulas que partilhei, outras pelas nossas próprias experiências a propósito de uma tarefa, de uma orientação metodológica, por assuntos tratados na reunião de ciclo ou a propósito da reunião de ano que Beatriz tinha de preparar pois era a coordenadora do 3º ano de escolaridade e assumia, portanto, as funções inerentes a essa coordenação, nomeadamente escolher o percurso de ensino, a planificação do trabalho para o ano, os momentos em que trabalhar as unidades didáticas e as sequências de tarefas. Nessa altura, dispus-me a partilhar algumas reuniões de preparação da unidade didática dos racionais e a alargarmos o nosso trabalho ao grupo do 3º ano. Depois de realizada duas reuniões em que estive presente, Beatriz transmitiu-me que receava que o ritmo das reuniões não se conciliasse com o ritmo e profundidade que necessitávamos para a preparação da unidade didática e propôs-me avançarmos podendo as colegas usufruir do nosso trabalho posteriormente.

Dedicámo-nos, então, a bom ritmo durante duas semanas à preparação da unidade didática e de uma sequência de tarefas que fosse hipoteticamente poderosa (conjetura nossa) para o ensino dos números racionais. Combinámos que analisaríamos um conjunto alargado de materiais e que depois de uma leitura global começaríamos a escolher a tarefas tendo em vista as orientações do programa e as "big ideas" que passarei a designar por "grandes ideias", ideias poderosas relativas às primeiras aprendizagens de frações. Para a identificação destas ideias poderosas apoiei-me, essencialmente, nos autores Van Walle & Lovin (2006) e, também, Fosnot & Dolk (2002) e Fosnot et. al, (2007).

Durante a lecionação da unidade didática, fomos realizando reuniões informais logo a seguir à aula em que debatíamos aspetos diversos da sua realização e fazíamos pequenos ajustes para o dia seguinte. Além disso, fizemos reuniões (ver quadro 1) registadas em áudio, sendo nestas que fazíamos o feedback do trabalho realizado, do percurso percorrido e procedíamos a alguns ajustes, acertos, trocas e mesmo avanços tendo em conta a perceção de ambas acerca dos acontecimentos da aula e das reações dos alunos. Nestas reuniões partíamos para uma reflexão mais profunda e mais distante no tempo, depois da visualização dos vídeos.

Quadro 7 - Reuniões realizadas com Beatriz

Reuniões				
Código	Data	Conteúdo	Característica	Meio de recolha de informação
RI01	22 Set 11	Apresentação mútua e convite para o projeto colaboração	Informal	Notas de campo
RI02	24 Set 11	Definição dos interesses mútuos na colaboração	Informal	
R1	26 Set 11	Negociação do projeto	Formal	
RP1	13 Out 11	Apresentação do projeto de colaboração aos EE	Formal com EE	
RP2	26 Out 11	Preparação da unidade	Formal com colegas 3º ano	
RP3	03 Nov 11	Preparação da unidade	Formal com colegas 3º ano	
R2	05 Nov 11	Preparação da unidade	Formal	Gravações áudio
R3	16 Nov 11	Preparação da unidade: Às voltas com o DSN natural	Formal	
R4	23 Nov 11	Preparação da unidade: Ainda às voltas com o DSN natural	Formal	
R5	24 Nov 11	Preparação da unidade: Tarefas, metodologias e programa	Formal	
R6	25 Nov 11	Preparação da unidade: Grandes ideias, estratégias e modelos	Formal	
R7	26 Nov 11	Preparação da unidade: Antecipando formas de resolução, argumentos	Formal	
R8	16 Jan 12	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	
R9	Jan	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	
R10	Fev	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	

4.3 Preparando a trajetória de aprendizagem

Durante uma semana eu e Beatriz, preparámos intensivamente a unidade didática “Números Racionais”, unidade em que se pretende a construção do conceito de número racional numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Operando com essencialmente com números inteiros no 1º e 2º ano de escolaridade (tendo havido contacto com o número racional através da identificação de partes da unidade como metades, terços, quartos, de uma forma intuitiva e ligada a contextos de vida dos próprios alunos) pretende-se agora ampliar o universo dos números em que irão operar, construindo o conceito de número racional e desenvolvendo flexibilidade na escolha das formas de representação mais adequadas para a resolução de problemas da vida real.

As metas de aprendizagem providenciam ao professor uma direção para a trajetória hipotética de aprendizagem. Simon (1995) usa este termo “trajetória hipotética de aprendizagem” para se referir a uma previsão (uma conjetura do professor) quanto ao caminho pelo qual a aprendizagem pode avançar. Esta é hipotética porque não se pode conhecer à partida. Caracteriza-se por uma tendência esperada (p. 135). A aprendizagem dos alunos é idiossincrática, individual, peculiar mas poderá existir alguma regularidade no processo de aprendizagem. A trajetória hipotética de aprendizagem providencia ao professo uma lógica para escolher um determinado desenho de ensino, no entanto, isso apoia-se no melhor palpite acerca de como essa aprendizagem poderá prosseguir. O autor refere-se à metáfora de “viajando à vela” para explicar o plano da viagem, as vicissitudes do clima, das marés que fazem infletir a direção por momentos, prosseguindo na descoberta do conhecimento por onde se vai passando, demorando o tempo de visita em cada local em resultado das interações com as pessoas ao longo desse caminho. O caminho que se vai fazendo é a trajetória atual, o que se planeou a trajetória hipotética de aprendizagem.

Fosnot e Dolk (2002) preferem a metáfora de “paisagens de aprendizagem”. As “grandes ideias”, estratégias e modelos são importantes pontos de referência numa jornada com os alunos através da paisagem de aprendizagem. Os caminhos para esses pontos de referência, essas marcas, não são necessariamente lineares, existindo muitos caminhos e não apenas um. Como numa paisagem real, os caminhos de dão voltas e por vezes voltam para trás, entre um ponto e outro, o caminho não é direto. As crianças não poderão, portanto seguir essas ideias e estratégias e marcos de uma forma ordenada e sequencial. Devem ir em várias direções como numa exploração, lutar para entender e dar sentido ao seu mundo matematicamente. Quando caminhamos numa paisagem procurando o horizonte, o horizonte torna-se claro. Os professores têm de manter o horizonte no seu pensamento quando planeiam as atividades, quando interagem, questionam e facilitam as discussões. Mas os horizontes não são pontos fixos na paisagem, mudam constantemente.

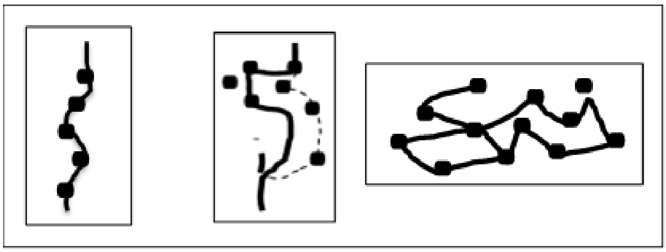


Figura 18 - Modelo linear, Trajetória de Aprendizagem Hipotética, Paisagem de Aprendizagem (Fosnot & Dolk, 2006)

A nossa opção não foi de todo percorrer uma linha contínua da tarefa mais simples, em termos de exigência cognitiva à mais complexa, mas, definir algumas linhas orientadoras de um percurso e pontos de referência[20] de passagem obrigatória mas não sendo determinado o momento em que essa passagem se dava. A imagem escolhida é a da paisagem de aprendizagem. Havendo pontos-chave no percurso, propiciados pela atividade que for sendo desenvolvida pela tarefa, esses pontos de referência na paisagem poderão ser visitados um pouco ao sabor do próprio percurso, por onde "a beleza da paisagem" nos for levando. Contudo, certamente que o professor se certificará que todos foram visitados e que selecionou tarefas e uma sequência de tarefas que permitirá passar por todos. Contudo, quaisquer inflexões no percurso farão parte da própria viagem. Os pontos de referência na paisagem estão explicitados na figura que se segue (resultado de uma adaptação da "paisagem de aprendizagem" de Fosnot et al., 2007).

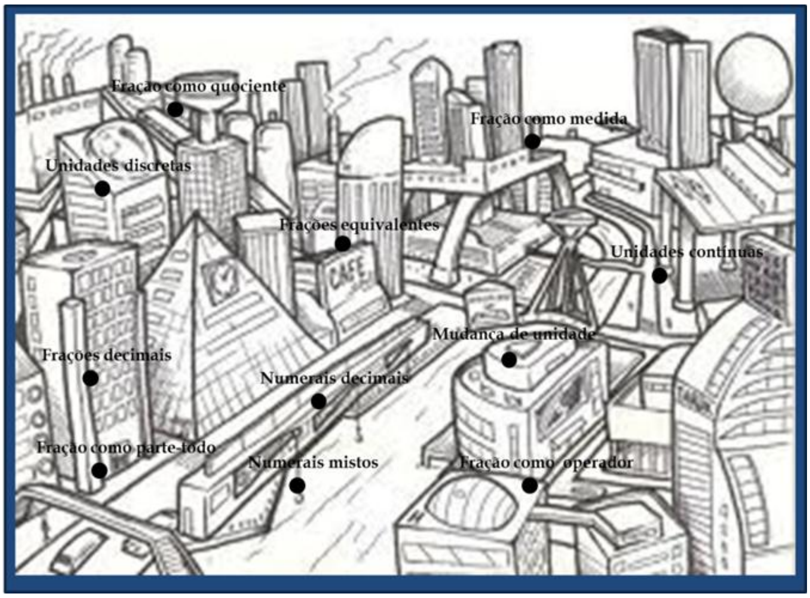


Figura19 - A "paisagem de aprendizagem" simplificada dos números racionais

[20] "landmarks", no original

Ao conjeturar uma trajetória e as suas fases, fomos tomando consciência de um percurso a percorrer ao longo do tempo e dos pontos de passagem, assim como antecipámos uma progressão no desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Sendo a fração um conceito reconhecido como complexo e que desafia professores e alunos do ensino básico há que assumir essa dificuldade e que nos prepararmos de forma especial para essa aventura.

As fases pensadas para a trajetória de aprendizagem, para as primeiras aprendizagens das frações, tendo em conta as dificuldades dos alunos e apoiadas no percurso sugerido por Van Walle & Lovin (2006), foram as seguintes:

I. Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração;
II. Da simbologia da fração ao "sentido de número fração";
III. Do "sentido de número fração" à noção de equivalência de frações;
IV. Da noção de equivalência, às múltiplas representações do número racional.

Apresento na figura 21, um exemplo da sequência de aprendizagem conjeturada:

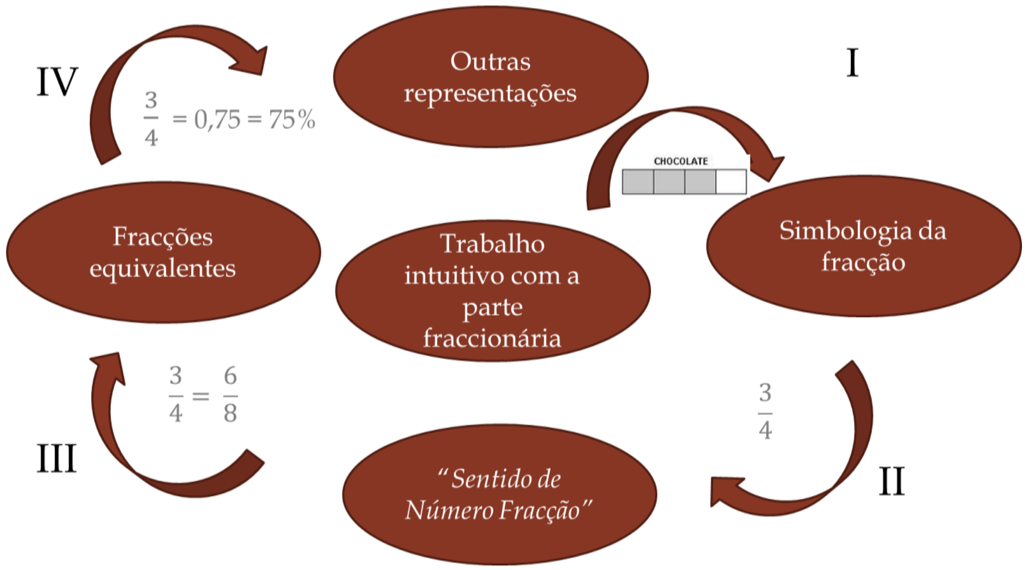


Figura 20 – Um exemplo das diversas fases da trajetória

Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração: a partir do significado parte-todo, a simbolização – a escrita e leitura da fração. Da simbologia da fração ao "sentido de número fração", trabalhando outros significados da fração e as grandes ideias da trajetória de aprendizagem. Do "sentido de número fração", à fração equivalente pois compreendendo que a fração é uma relação, há várias frações que representam a mesma relação. E das frações equivalentes às múltiplas representações, pois as frações cujo denominador é uma potência de 10 dão origem à representação na forma de numeral decimal e as frações cujo denominador é a segunda potência de 10,ou seja, 100, são as percentagens. As frações são relações, os decimais e as percentagens relações com particularidades.

4.4 A escolha das tarefas

As tarefas escolhidas eram como diz Beatriz " Problemas abertos para [os alunos] terem a hipótese de seguirem vários caminhos… (R8, 22) ". Essa foi a condição de partida. Uma questão que os desafiasse! E pudesse ser objeto de uma intensa discussão matemática. Tendo consciência que por vezes o que constitui um desafio depende de circunstâncias internas a cada pessoa mas que também tem influencia a forma como o professor o coloca. A ideia de desafio de Beatriz tem ressonâncias na ideia de Stein (2001) de "tarefa provocadora"[21] : "uma tarefa suficientemente rica para provocar o pensamento do aluno e discussão" (p. 110). A própria autora refere que "a mesma tarefa não provoca o mesmo grau de investimento em todas as salas de aula" (p.110).

O combinado foi, portanto, fazermos primeiro, uma escolha, individualmente, tendo em atenção a nossa própria experiência e pormos a decisão da escolha à consideração das duas, depois de as analisarmos detalhadamente. " Analisámos detalhadamente algumas tarefas tentando que não houvesse influência mútua. Tu fazias a tua análise, eu a minha e depois falávamos sobre a potencialidade de cada uma das tarefas e as razões porque as escolheríamos" (EF, 45).

Por potencialidade da tarefa referimo-nos não só à sua capacidade de "provocar o aluno" como à possibilidade de conter uma estrutura matemática emergente. A realização das tarefas, pelas duas e análise dessa matemática emergente permitiu identificar não só as grandes ideias matemáticas a trabalhar como, estratégias a usar e modelos. Apoiámo-nos nas ideias de Fosnot e Dolk (2002) e Van Walle & Lovin (2006), "a paisagem de aprendizagem" e o percurso para as primeiras aprendizagens das

[21] " a provocative task" expressão no original de Stein, 2001

frações, decimais e percentagens que se concretizou na sequência prevista, de acordo com as quatro etapas da trajetória e orientada pelas grandes ideias matemáticas estruturantes.

Compreendido o propósito, e as clássicas dificuldades do trabalho com os números decimais e a fração, foi delineada uma forma estratégica de abordagem ao planeamento da unidade. Ambas escolheríamos previamente tarefas que a nossa experiência e a dos nossos pares, considerassem adequadas aos objetivos da unidade e discutiríamos a sua potencialidade depois de as resolvermos, e de realizarmos debates em torno das ideias que iriam emergindo. Pensaríamos então na melhor sequência para as tarefas tendo em atenção a estrutura da matemática (grandes ideias matemáticas) e o nível de desenvolvimento do pensamento dos alunos.

No quadro que se segue encontram-se identificadas as tarefas escolhidas e as datas de realização e a sua origem.

Quadro 8 - Trajetória de aprendizagem planeada

Etapas	Tarefas	Origem	Data
I	T1_"De quantas formas se pode dividir um quadrado em quatro partes iguais?" T2_ " Dobragens e mais dobragens" T3_ "Pintando azulejos"	Bono (1990) Walle & Lovin (2006) Ese Setúbal (2008)	29 Nov. 10
II	T4_" A visita de estudo e a distribuição das baguetes"	Dolk & Fosnot (2002)	30 Nov. 10
	T5_ "Procurando partilhas justas"	Walle & Lovin (2006)	6 Dez. 10
	T6_ " À procura de partes fraccionárias"	Walle & Lovin (2006)	7 Dez. 10
	T7_ " A discussão do João e da Maria"	Provas Nacionais de Aferição do 6º ano (2001)	7 Dez. 10
	Tarefa revisitada: T5_ "Procurando partilhas justas" T8_ "Contando partes fraccionárias"	Walle & Lovin (2006)	9 Dez. 10
	T9_ "Maior ou menor ou igual a 1?"	Adaptada de Walle & Lovin (2006)	Não realizada
	T14_ " O muro das fracções"	Walle & Lovin (2006)	7 Jan. 11 Antecipada
	T10_" Quanto falta ou quanto passa da unidade?_ Misto"	Adaptada de Walle & Lovin (2006)	9 Jan. 11
	T11_ "Do todo às partes, das partes ao todo e do todo e das partes à fracção" T12_ "As tampinhas do Carlos"	Walle & Lovin (2006)	Não realizada Não realizada
	T13_ " As bolas de pingue-pongue"	DGIDC (2009)	10 Jan. 11
	T19_ "Cálculos com fracções"	Adaptada da Escola Inglesa (2003)	11 Jan.11 Tarefa acrescentada à sequência
III	T14_"O muro das fracções"	RNP (1993)	Realizada antecipadamente
IV	T15_"O depósito de gasolina"	DGIDC (2009)	16 Jan.11
	T16_ "As garrafas de água mineral"	Planificação da escola	17 Jan. 11
	T17_ "Comparando números racionais"	Adaptada da Escola Inglesa (2003)	10.Mar. 11
	T18_ "Sou bom a calcular"	Adaptada da Escola Inglesa (2003)	17 Mar.11

A escolha das tarefas a realizar teve por base as grandes ideias matemáticas que podem emergir a partir da resolução das tarefas, e que serão o horizonte matemático de Beatriz, para as suas tomadas de decisão nas ações. Apoiámo-nos nas grandes ideias de Fosnot (2007):

1. As frações expressam relações entre as partes e o todo;
2. As frações podem ser representadas por um quociente;
3. As partes não têm de ser congruentes para serem equivalentes;
4. Para comparar frações a unidade têm de ser a mesma;
5. Para a equivalência a razão tem de ser constante;
6. A multiplicação está relacionada com a fração (3/4 = 3 x ¼);
7. As frações podem representar razões;
8. As frações podem ser pensadas como operadores;
9. Para adicionar ou subtrair frações é necessária uma unidade comum;
10. Se a unidade for 1 podemos trabalhar com decimais usando a aritmética dos números inteiros;
11. As propriedades dos números inteiros são válidas para os números racionais;
12. A multiplicação e a divisão de números racionais são relações de relações;
13. A multiplicação e a divisão por 10 fazem a unidade andar para a esquerda e para a direita numa representação decimal;
14. Se os numeradores são comuns comparam-se os denominadores;
15. Na representação decimal os algarismos em diferentes valores de posição estão relacionados por potências de 10.

Também considerámos as grandes ideias de Van Walle & Lovin (2006, p. 255):

1) As partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade; a unidade pode ser um objeto ou uma coleção de objetos. De forma abstrata a unidade é 1. Na reta numérica a distância entre 0 e 1 é a unidade.
2) As partes em que se divide a unidade têm nomes especiais e “dizem-nos”, quantas são necessárias para fazer a unidade. Por exemplo, são necessários três terços para fazer uma unidade.
3) Quanto mais partes se usam para fazer uma unidade mais pequena é essa parte; oitavos são mais pequenos que quintos.

4) O denominador da fração indica por que número foi dividida a unidade, de forma a produzir a parte pretendida. Logo, o denominador é o divisor. O denominador indica a parte considerada. O numerador de uma fração “diz-nos” quantas partes da fração (parte indicada no denominador) são consideradas. O numerador é um multiplicador indicando o múltiplo da parte fracionária;
5) Duas frações equivalentes são dois caminhos para descrever a mesma quantidade usando diferentes partes fracionárias. Por exemplo, na fração 6/8 se os oitavos passarem a ser metades, então cada par de oitavos é um quarto. Os 6/8 representam a mesma quantidade que ¾.
6) Os números decimais são outra forma simples de escrever números racionais. Ambas as formas têm valor. Maior flexibilidade é ganha se se compreender como estão relacionadas.
7) A base dez do sistema de numeração decimal estende-se até ao infinito em duas direções: cada ordem para a esquerda do número aumenta dez vezes em relação à anterior; cada ordem para a direita do número diminui dez vezes em relação à anterior.
8) A vírgula é uma convenção que indica a posição da unidade.
9) As percentagens são simples, centésimas, e estas são uma terceira forma de escrever números racionais.
10) A adição e a subtração de números racionais representados na forma decimal, estão baseados no conceito fundamental da adição de números inteiros respeitando o seu valor de posição;

Como se pode ver no quadro que se segue as tarefas foram classificadas tendo em conta dois domínios: a organização do trabalho na sala de aula com os alunos e o tempo de duração. O trabalho foi sempre de pares ou de grupo antes da discussão com o grande grupo – a turma. Quanto ao tempo de duração, as tarefas foram: (i) de curta duração se estavam previstas para 20/30m; (ii) de uma aula; ou (iii) de duas aulas, as realizadas em contexto de congresso matemático.

Quadro 9 – Tipologia das tarefas

	Organização do trabalho	
Tempo	Pares	Grupo
Curta duração	T1,T2,T3, T5, T6, T11**, T14***, T18***	T8 T9** T10
Uma aula	T7 T12** T15	T16
Duas aulas*	_ _ _ _ _	T4 T13

A trajetória foi preparada tendo em conta dezasseis tarefas na fase inicial. No entanto, ao longo da concretização não foram realizadas três, foram antecipadas duas e acrescentadas duas outras tarefas, a T18 e T19. Tendo por base uma metodologia de resolução de problemas, todas as tarefas constituem problemas, diferenciando-se estes na forma de organização do trabalho, no grau de desafio matemático e tempo de duração das tarefas, tentando-se desta forma proporcionar uma experiência matemática diversificada.

Contudo Beatriz realizou todas as tarefas mais tarde, noutros momentos em que julgou oportuno voltar ao trabalho com os números racionais e enviou-me o *feedback* desse trabalho.

4.5 Concretizando a trajetória de aprendizagem

A primeira abordagem à noção de fração tinha sido realizada na primeira etapa designada (I) *Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração*. Neste primeiro momento realizaram-se três tarefas (ver quadro 8) trabalhando-se a noção intuitiva de fração como uma parte designada por fracionária, de uma unidade; ou seja, as partes que resultam quando a unidade ou o todo é dividido em partes iguais, designado por Lovin & Van Walle (2006, p. 67) por partes justas[22].

[22] " fair shares" expressão no original

A tarefa 4 “A visita de estudo e a distribuição de baguetes”, de Fosnot & Dolk (2002) para trabalhar ideias matemáticas relacionadas com as frações, será analisada, em detalhe, no capítulo 5. Foi a quarta tarefa da trajetória de aprendizagem planeada tendo por finalidade o desenvolvimento do sentido de número fração[23] designação dada à segunda etapa da trajetória de aprendizagem (II). Esta é das etapas mais longas da trajetória pois considerámos ser necessário desenvolver um conjunto diversificado de tarefas para trabalhar o conceito complexo de número racional e a representação na forma fracionária. Passo a descrever sumariamente as tarefas (T4 a T13), identificando as ideias matemáticas a serem trabalhadas. Estas constituem as tarefas da segunda etapa da trajetória (II) *Da simbologia da fração ao “sentido de número fração”.*

A tarefa 5 “Procurando partilhas justas” teve no horizonte a ideia de que a partilha implica uma distribuição justa e que portanto, todas as partes de uma unidade, resultam de uma divisão em partes iguais. Van Walle e Lovin (2006) consideram este, o primeiro grande objetivo no desenvolvimento da noção de fração. Podem consultar-se todas as tarefas no anexo 7.

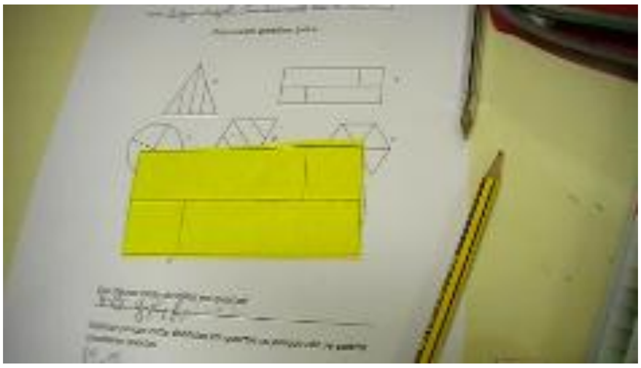


Figura 21 – Procurando partilhas justas

Nesta tarefa são dadas várias figuras geométricas divididas em quatro partes. Pede-se ao aluno que escolha as que representam quartos, e que justifique. Os autores consideram muito importante, os “não exemplos”, e discuti-los, também. A figura 21 mostra um momento em que Beatriz trabalhava o “não-exemplo”. A figura é composta por quatro partes que não são congruentes.

[23] “fraction number sense” expressão no original utilizada por Van Walle e Lovin (2006)

Sugerem também que as tarefas de partilha[24] sejam exploradas em tarefas adicionais, paralelamente à sequência apresentada pois consideram-nas essenciais, para um desenvolvimento sólido dos conceitos de fração. Beatriz realizou diversas tarefas deste tipo, para além desta que se encontra na trajetória, usando outros modelos. Os autores distinguem modelos de área de modelos de medida ou comprimento. Nos primeiros, encontram-se as peças circulares que Beatriz designou por “queijos”, regiões retangulares (simples retângulos de papel), ou com outro forma, a representação no geoplano ou em papel ponteado ou quadriculado, os *pattern blocks*. Nos segundos, considerou as barras de *Cuisenaire*, as linhas numéricas, segmentos de reta, tiras de papel (tipo serpentina). Considerou ainda conjuntos de modelos, em que a unidade é um determinado conjunto de objetos.

A tarefa 6 “À procura de partes fracionárias” tem no horizonte a ideia de que as partes fracionárias tomam o nome das partes que são necessárias para formar uma unidade. Beatriz foi trabalhar com unidades diferentes contínuas e discretas, procurando encontrar partes fracionárias. Ao mesmo tempo, ia nomeando (dava nome às partes) e representando, também formalmente. Pode-se ver nas figuras 22 e 23, uma das situações que trabalhou, usando oito rebuçados e pedindo que identificassem quantos rebuçados estariam em cada quarto. Disse-lhes: “imaginem que têm pratos para colocar os rebuçados, quantos pratos necessitariam e quantos rebuçados colocariam em cada prato?” (PPF,2).

Figura 22 – Os oito rebuçados divididos em quatro partes.

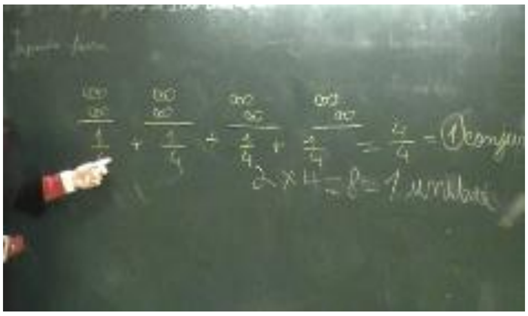


Figura 23 – A estratégia usada para encontrar a quarta parte

[24] Designação de Van Walle e Lovin (2006)

Beatriz utilizou ainda outros modelos, os "queijos" (sectores circulares), e os "blocos padrão"[25],para representar partes fracionárias diversas, desta vez, trabalhando com a unidade contínua. Na figura, pode-se ver um aluno a verificar quantos sectores amarelos cabiam na unidade, para os poder nomear. Ao referir que ainda não tinham nome para aquela parte, Beatriz desafia-o, a descobrir que parte é da unidade.

O trabalho com a identificação de partes através dos diferentes modelos permite identificá-las, nomeando-as (por exemplo, três partes iguais perfazem uma unidade, são terços). No horizonte desta tarefa permaneceu para Beatriz a ideia de comparar as diferentes partes entre si, levando os seus alunos a inferir que quantas mais partes forem necessárias para completar a unidade, menor é a parte.

A tarefa 7 " A discussão do João e da Maria" será analisada detalhadamente no capítulo 5 e tem como objetivo o trabalho da natureza relativa da fração, compreender que a fração é uma relação entre dois números e que portanto, a quantidade que representa depende da unidade considerada.

A tarefa 8 "Contando partes fracionárias" pretende que os alunos comecem a pensar na contagem das partes fracionárias, "da mesma maneira que contam maçãs" (Van Walle & Lovin, p. 258). A grande ideia a trabalhar por Beatriz será a de que necessitam saber o número de partes iguais que perfaz uma unidade para as designar (por exemplo, se são necessárias dez partes iguais para perfazer uma unidade, então as partes fracionárias são designadas por décimos, como se pode ver na figura 24. A contagem faz-se enumerando, o número de décimos. A partir da contagem pode-se saber quantos décimos faltam para ter uma unidade, ou para ter duas, ou se já passou da unidade. Usando um das situações trabalhadas por Beatriz, décimos, é uma unidade e um decimo. Faltam nove décimos para ter duas unidades. Três décimos é menos que metade. Para ter metade da unidade, em décimos, têm de ser cinco. Então, faltam dois décimos para a metade e sete décimos para ter uma unidade.

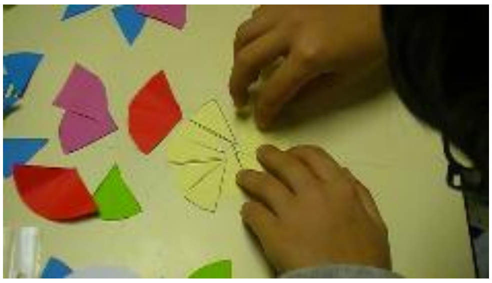


Figura 24 – Contando partes fracionárias

[25] "pattern blocks"

A tarefa 9 “Maior, menor ou igual a 1” foi planeada tendo por objetivo comparar partes fracionárias com a unidade. Não foi realizada durante a unidade didática, como se tinha previsto inicialmente, pois os alunos já tinham estabelecido estas relações na tarefa anterior. Decidiu-se, portanto, avançar, e deixar esta tarefa para um outro momento em que Beatriz sentisse necessidade de voltar a estabelecer estas relações usando os modelos, outra vez.

Durante a tarefa 8, Beatriz acabou se aproximar também da noção de equivalência de frações, de uma forma mais rápida, do que a esperada. “Eles adoraram os queijos. Sobrepondo as fatias, descobriam outras formas de representar a fração inicial” (R5,9).

Dessa forma, foi sua opção depois durante a reflexão realizada após esta aula, não realizar a tarefa 9, e antecipar a tarefa 14: “O muro das frações”, desenvolvendo com outro modelo, a noção de fração equivalente. Esta tarefa é proveniente do Rational Number Project (RNP, 1993) e foi proposta por mim, a Beatriz, que a aceitou após a nossa exploração conjunta da tarefa e das suas potencialidades tendo em atenção, a procura de frações equivalentes.

Esta tarefa 14 constituía a única da etapa (III) *Do ”sentido de número fração” à noção de equivalência de frações.* A grande ideia a trabalhar por Beatriz, era a de que duas frações equivalentes são dois caminhos para descrever a mesma quantidade, usando diferentes partes fracionárias. Beatriz começou por construir o muro com os seus alunos, e por o interpretar.

Figura 25- O muro das frações

Figura 26- A família das metades

Cada uma dos andares é uma barra (semelhante às barras de download do computador). A primeira está dividida em duas partes iguais, a segunda em três partes iguais, e assim sucessivamente até à última barra que está dividida em doze partes iguais como se pode ver na figura 25. A professora depois de designar as partes representadas com os seus alunos, respetivamente, metades, terços, etc…, desafia-os a encontrar partes do muro que possam ser representadas por outra quantidade. Uma metade, pode ser representada por dois quartos, por três sextos, e de outras formas como mostra a figura 26. Encontradas frações da família das metades, Beatriz desafia os alunos a encontrar outras relações entre partes.

Seguidamente Beatriz voltou à sequência prevista e trabalhou a tarefa 10: “Quanto falta ou quanto passa da unidade?_ Numeral Misto” retomando ideias já trabalhadas na tarefa 8 mas aprofundando e sistematizando. Organizou um grande cartaz no quadro, e à medida que os alunos realizavam as suas descobertas, iam-no preenchendo, depois de aprovadas as conclusões (fig. 27). Umas frações não chegavam à unidade, outras passavam e outras ainda eram exatamente a unidade. Beatriz desafiou os alunos a usarem os “queijinhos” para os ajudar a pensar. A escolha dos sectores circulares, como modelo para ajudar a pensar, baseou-se no fato de a sua forma geométrica, permitir verificar quantas partes perfazem a unidade, e portanto “ver” o que falta e o que passa. Comparar a fração com unidades de referência, neste caso a unidade, facilita a comparação entre frações e permite ter uma perceção da quantidade que representa a fração, enquanto número: a sua personalidade quantitativa.


Figura 27 – Cartaz das conclusões


Figura 28 – Quantas partes perfazem a unidade?

Esta perspetiva aponta para o de desenvolvimento do sentido de número. Embora não determinem o quociente, entre os dois números, o numerador e o denominador, é o número que representa a fração que está a ser estimado, e portanto a noção de fração como um quociente. Beatriz desafiou os alunos a usarem os “queijinhos” pois dado serem sectores circulares, permitem perceber o que perfaz a unidade e portanto ver o que falta e o que passa.

A tarefa 11 " Do todo às partes, das partes ao todo, e do todo e das partes à fração", assim como a tarefa 12, " As tampinhas do Carlos", são propostas por Van Walle e Lovin (2006) e designadas por tarefas do tipo "parte-todo". Apesar de as considerarmos tarefas muito válidas e com valor, sentimos que os alunos estavam a necessitar de uma tarefa em que fossem mais autónomos no seu trabalho, e estas tarefas exigiam metodologia de trabalho mais dirigida por parte da professora. Apesar de não terem sido concretizadas nesta altura, Beatriz realizou-as posteriormente. Decidimos portanto, avançar para a última tarefa da segunda etapa, a tarefa 13: "As bolas de pingue-pongue".

A tarefa foi escolhida a partir de um conjunto de materiais disponibilizados pela Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC, 2009) quando da implementação do PMEB (2007) e foi proposta por mim. O desafio colocado aos alunos era o de encontrarem coleções de bolas que respeitassem as condições da etiqueta da figura 29.

Figura 29 – As bolas de pingue-pongue

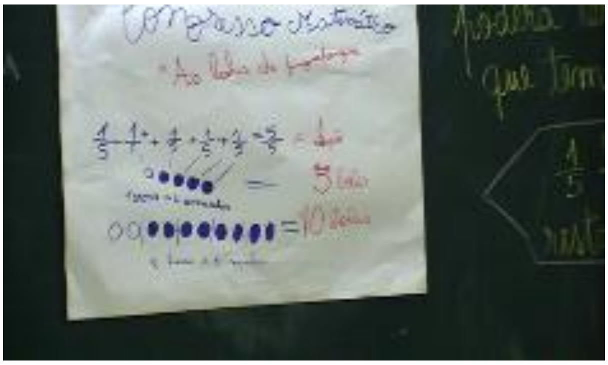


Figura 30- Coleções de bolas: o cartaz

Beatriz realizou a tarefa em duas aulas, em contexto de Congresso Matemático. A primeira de resolução do problema e realização dos cartazes e a segunda de apresentação e discussão das estratégias usadas e das soluções encontradas. Dado que se tratava de um problema em aberto, Beatriz trabalhou as várias soluções e ponderou, com os alunos, outras possíveis soluções, tentando a generalização. A grande ideia a trabalhar é a de que as frações podem representar razões. No cartaz (fig. 30) é possível ver uma das possíveis duas das possíveis soluções: 1 bola branca e 4 amarelas ou 2 bolas brancas e 8 amarelas. Depressa inferiram que os números possíveis para as coleções de bolas tinham de ser múltiplos de 5.

A tarefa 19 “ Cálculos com frações” não estava prevista na trajetória e surgiu dada a necessidade manifestada por Beatriz de se sentir mais segura face às aprendizagens realizadas, pelos seus alunos, durante o percurso realizado até ao momento. Portanto, decidiu, realizar uma pequena ficha de cálculo com números racionais representados na forma de fração. “ Sinto mesmo vontade de perceber melhor o que eles aprenderam” (R5, 12).

Figura 31 – Operando com frações

A grande ideia trabalhada foi a da fração como um operador, compreendida também a partir do seu significado parte-todo, de um conjunto de unidades discretas (fig. 31). Metade de 16 rebuçados, são 8 pois podem-se constituir dois subconjuntos de 8 rebuçados. Esta constituiu a última tarefa da segunda etapa da trajetória.

A quarta etapa da trajetória (IV) *Da noção de equivalência, às múltiplas representações do número racional* contempla três tarefas: T15, T16 e T17.

Seguiu-se a tarefa 15 “O depósito de gasolina” retirada de um conjunto de materiais da DGIDC (2009). A grande ideia a trabalhar era a representação da fração na reta numérica (fig. 32).

Figura 32 – O depósito de gasolina

Inicialmente a representação geométrica da fração foi realizada, em modelos de área (figuras geométricas), de acordo com a nomenclatura de Van Walle e Lovin (2006). Depois passou-se a um modelo de barra (muro da frações) que os autores consideram um modelo linear e, portanto, mais próximo da reta numérica. De seguida, Beatriz trabalhou a representação do depósito de gasolina e relacionou-a com o segmento de reta de 0 a 1 de uma reta numérica.

A tarefa 16 “ As garrafas de água mineral” foi objeto de análise detalhada no capítulo 5. Tem como objetivo comparar quantidades na representação decimal e estabelecer a relação entre a fração e o decimal. Perspetivando o significado de fração enquanto medida, Beatriz usa a reta numérica para localizar e posicionar as quantidades.

A tarefa 17 “ Comparando números racionais”, última tarefa da foi uma tarefa adaptada da Escola Inglesa (2003). O grande objetivo da tarefa é os alunos compararem os números racionais representados na forma de fração, decimal e percentagem, comparando as diversas representações entre si. A escolha dos números foi muito cuidadosa, pois a professora tinha todo o interesse em se trabalharem números que servissem de referência em futuras tarefas (fig. 33).

Figura 33 – Comparando números racionais

Os números escolhidos são todos menores que a unidade, havendo diversas representações da metade: na forma decimal, percentagem, fração. Nas representações da metade na forma decimal aparecem duas representações similares cinquenta centésimas e cinco décimas. Estas duas representações geram muitas vezes confusão nos alunos, que as consideram diferentes por haver mais “um zero á direita”, e portanto, parecer que o número é maior dez vezes. Beatriz tem por objetivo que os seus alunos entendam que o número é o mesmo havendo apenas uma mudança de unidade. Outros dois números escolhidos foram as quinze centésimas e as cinquenta e uma centésimas para que fosse possível a Beatriz trabalhar com os seus alunos o valor de posição dos algarismos na forma decimal.

Na tarefa 18 “Sou bom a calcular”, Beatriz apresentou diversos cálculos com números racionais representados na forma decimal, fração e percentagem. Os alunos apresentavam o seu resultado na representação que mais lhes conviesse. Na figura 34, é possível ver um dos erros cometidos pelo aluno.

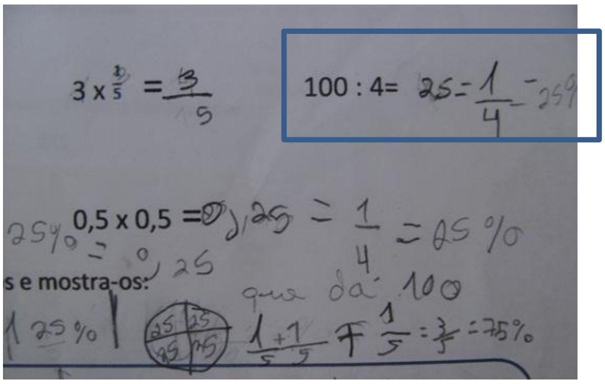


Figura 34 – Sou bom a calcular

O aluno parece relacionar a quarta parte com a percentagem, mas não evidencia ter percebido que a quarta parte é um número inferior à unidade, e que não poderá representar vinte e cinco unidades. Beatriz usou os cálculos realizados pelos alunos, e os “seus erros”, para voltar a trabalhar as grandes ideias, relacionando-as e aumentando assim, a sua compreensão, acerca dos números e das operações com números racionais.

Para Beatriz, um erro consiste numa conceção momentânea e a razão que a leva a revisitar tarefas ou a escolher outras para voltar a trabalhar as mesmas ideias é “provocar” mudanças nessa conceção.

4.6 Entre a trajetória realizada e a planeada

Foram previstas dezasseis tarefas mas acabaram por se concretizar dezoito tarefas após a análise e reflexão em torno do percurso planeado e nem sempre pela ordem pensada, pois por vezes, os alunos relacionaram ideias, seguindo um percurso diferente do conjeturado. Beatriz acompanhando o pensamento dos alunos, ia infletindo a trajetória pensada à partida, depois da nossa reflexão conjunta após as diversas aulas. A figura 35, mostra como, ainda na segunda etapa da trajetória, se deu o "salto" para a tarefa 14 " O muro das frações" que constituía única tarefa da terceira etapa: (III) *Do sentido de número fração" à noção de equivalência de frações*. A terceira etapa da trajetória ficou diluída na segunda etapa: (II) *Da simbologia da fração ao "sentido de número fração".*

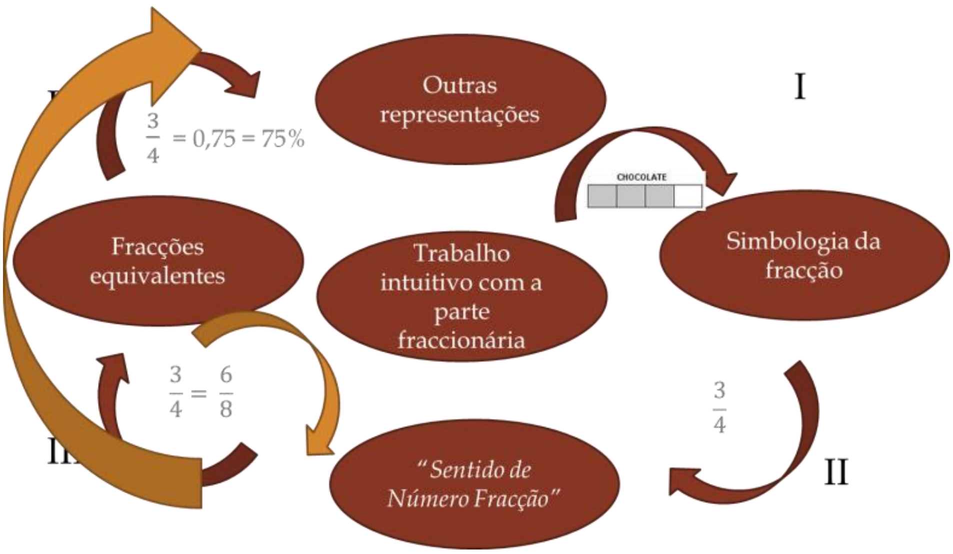


Figura 35- As tarefas da trajetória planeada e concretizada

Nesta figura, as setas a amarelo indicam a inflexão ao percurso planeado. As tarefas de comparação, com a unidade, e com a metade, acabaram por se realizar depois dos alunos encontrarem frações equivalentes de uma forma intuitiva (sem regra), por domínio da compreensão da relação entre dois números que representam um terceiro: a razão entre eles.

Foram também acrescentadas tarefas à trajetória pelas razões já apontadas no ponto anterior. O percurso realizado foi portanto, ajustado, momento a momento tendo em consideração, a progressão no desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Inicialmente a trajetória não estava planeada para um tempo tão dilatado. Acontece que fomos sentindo necessidade de, a certa altura, espaçar as tarefas previstas e acrescentar outras não previstas. Apercebemo-nos que o tempo fazia falta, ao amadurecimento das ideias. Beatriz cuidava de as manter "vivas", trazendo-as à memória, em qualquer momento adequado, relacionado com outros temas. Prolongámos portanto, um pouco, no tempo, a nossa colaboração e as tarefas foram-se espaçando. A figura 36 representa essa ideia temporal.

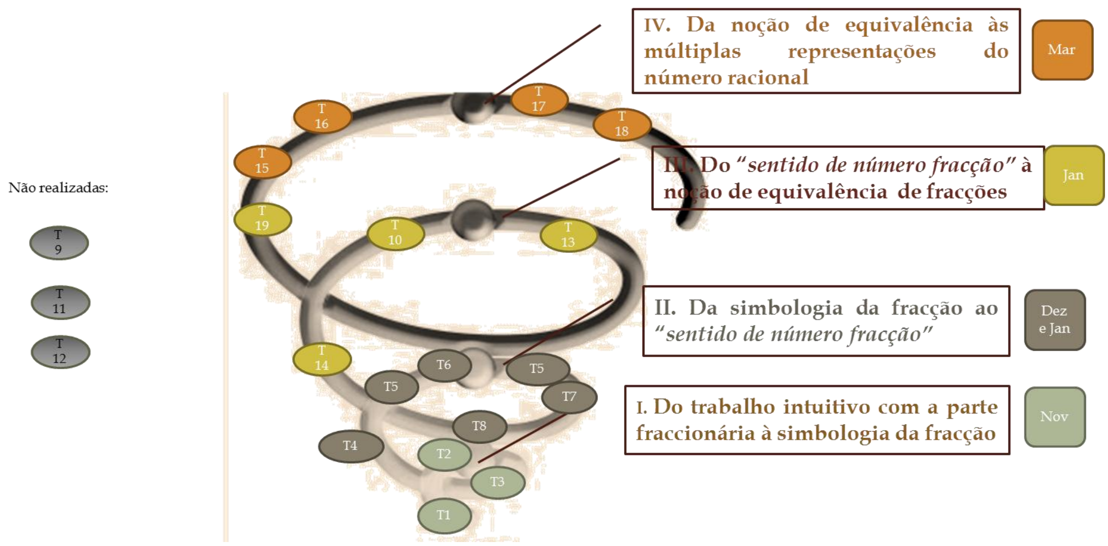


Figura 36 – A representação das tarefas no tempo

No início, as tarefas sucediam-se e à medida que o tempo passava fomos realizando tarefas mais espaçadamente. Isso permitia a Beatriz intercalar outros temas e voltar aos números racionais. Esta ideia tem ressonâncias na forma como no currículo inglês se fazem o tratamento dos temas. O mesmo tema é revisitado, com aprofundamento, várias vezes no ano.

Capítulo 5 – Beatriz

Neste capítulo irei analisar as práticas da professora, no que se refere ao trabalho de ensino orientado para a construção do conceito de número racional, introduzido a partir da representação na forma de fração. Estruturo-o em cinco secções principais. Na primeira apresento Beatriz, enquanto pessoa e profissional e o seu contexto de trabalho. Refiro ainda as motivações que a levaram a aderir ao projeto colaborativo. Nas restantes secções, debruçar-me-ei, sobre quatro momentos significativos da trajetória de aprendizagem, associados a várias das suas etapas.

5.1 Encontrando Beatriz

Nas seções que se seguem descrevo as minhas perceções, sobre Beatriz, tendo por base, o que observei durante o tempo em trabalhámos juntas, e as conversas que fomos tendo, formais e informais.

5.1.1 Esboçando um rosto e uma personalidade

Beatriz é uma jovem mulher com cerca de trinta e poucos anos, de aparência relativamente frágil, simpática e calorosa, deixando ver imediatamente, depois do primeiro contacto, uma forma de relação aberta e franca. Fui-me apercebendo ao longo do tempo em que a acompanhei da sua imensa força interior, de uma sensibilidade profunda em relação aos outros, a que o dom da escuta não é alheio. Observei muitas vezes a forma como se relacionava com os alunos, os pais ou familiares deles durante muito tempo após as aulas e da relação que estabelece com os colegas e os auxiliares de ação educativa assim como com a coordenadora de escola, pois estive presente em muitas aulas, reuniões e encontros formais e informais em que contactámos com muitas pessoas da comunidade educativa que a envolve. Preocupa-se com o bem-estar dos que a rodeiam e tem a perceção do que pode fazer para contribuir para esse bem-estar.

Constatei também a sua afetividade relativamente à sua família, por diversas conversas que vão aparecendo entrelaçadas com o nosso trabalho realizado muitas vezes fora de horas e entrando um pouco pelo seu tempo livre, já de si tão reduzido, dada a exigência da sua vida familiar como dona de casa, esposa e mãe de dois meninos, um com cinco anos e outro com um ano. Foi notória a sua enorme capacidade de trabalho e a sua capacidade de gestão, priorizando, nos diversos momentos, o que considerava ser mais importante. Alia a estas características, um sentido de humor incrível que tornou a convivência fácil e o trabalho um desafio.

Sentia-a, a maior parte das vezes, confiante mas percecionei alguma insegurança face ao que se espera de si, pois é exigente consigo mesma e gosta de se sentir realizada com o que vive e faz. Falando de si mesma Beatriz diz "…Sou muito exigente comigo própria…" (R8,1) e "Eu quero as coisas imediatas não gosto de esperar…Nem sempre é bom ser assim!" (R8,2). Estas palavras revelam que é, também, um pouco impaciente, procurando rapidamente respostas que a satisfaçam. No entanto, essa insatisfação aparece ligada a uma capacidade de introspeção, de reflexão sobre si mesma e sobre os acontecimentos que lhe permite munir-se das ferramentas que necessita para se ultrapassar, ultrapassando a frustração. Foi visível o seu gosto por inovar, por aderir a desafios – "Gosto de tudo o que é novidade, sempre gostei de aderir a coisas novas…" (EI,127) – demonstrando a sua vontade de, experimentar, inovar e ousar.

5.1.2 Conhecendo a experiência de Beatriz como professora

Beatriz é professora há catorze anos, tendo passado por diversas escolas de um concelho próximo de Lisboa. Permanece há três anos na mesma escola a acompanhar uma turma do 1.º ao 3.º ano de escolaridade com convicção que a acompanhará até ao final do 1.º ciclo, dada a continuidade pedagógica ser um critério de escola. Esta situação é muito do seu agrado, o que a fez, em momentos decisivos optar por se manter ligada à escola.

"No primeiro ano tive um ano numa escola, depois um bocadinho mais longe…Nos quatro primeiros anos tive um ano em cada escola, depois do primeiro ano de serviço passei para quadro de zona pedagógica, e depois… estive contratada um ano e depois passei a quadro de zona pedagógica. Este ano é a primeira vez que levo um grupo do 1º ao 4º ano.” (EI,33)

Trabalhar de forma continuada no tempo com um grupo de alunos é muito do seu agrado referindo consistentemente a necessidade de tempo para as aprendizagens e para a relação, sendo as suas opções profissionais orientadas por esse valor: o melhor para os seus alunos.

Posso ficar numa escola qualquer do agrupamento. Fiquei nesta pois tenho uma continuidade pedagógica… é um critério de escola tanto para os alunos, como para os professores há uma continuidade no trabalho que é desenvolvido, o estímulo é outro também. (EI, 62-65) Tanto para os alunos como para os professores, isso é bom… (EI,69).

Desde sempre quis ser professora do 1º ciclo afirma, referindo-se ao facto de não se recordar dessa sua determinação tão precoce mas da sua mãe lha recordar, sendo essa história contada numa memória da sua infância: “… da minha infância não me recordo grande coisa… mas a minha mãe diz que sim, desde cedo que eu sempre quis ser professora primária.” (EI,91).

Recordando a sua primeira aula e a sua primeira turma, fala com alguma comoção da experiência difícil e simultaneamente gratificante que teve com os seus primeiros alunos sentindo-a como “(…) mais um estímulo para continuar a carreira que tinha escolhido.” (EI, 78).

No primeiro ano de serviço, fiquei colocada na escola (...), uma escola de intervenção prioritária e gostei muito, por muitas razões… Era o primeiro ano de serviço, não é? Estava fascinada com a saída do curso fiquei com um 1º ano de escolaridade que era o que eu mais desejava à saída do curso e tinha um grupo de colegas que era espetacular… a escola era de intervenção prioritária, os alunos era um grupo muito fraquinho (EI,71). (…) Eram meninos muito carentes afetivamente, socialmente… Lembro-me da sensação de ter uma turma nas mãos e não saber o que fazer… Eram meninos muito carentes, era uma escola muito problemática, tinha mesmo fome na sala, muitas crianças com fome na sala. Faltaram coisas, muitas coisas… (EI, 290)

Considera que o seu percurso de escola em escola durante alguns anos foi muito importante para o seu desenvolvimento pessoal e profissional salientando que “por todas as escolas onde tenho passado tenho gostado do ambiente, não houve uma escola que eu possa dizer que não gostei" (EI, 82). Contudo ao descrever a sua experiência com o seu primeiro grupo de alunos evidenciam-se as dificuldades com que se deparou desde logo no início da sua carreira.

Beatriz parece ter encarado essas dificuldades como verdadeiros desafios pois parece ter encontrado os recursos internos necessários para lidar com elas deixando na sua memória boas recordações e gratidão: " (…) trabalhei muitas coisas que aquela turma precisava, muito para além dos conteúdos académicos. Foi muito necessário!". E conclui na sua passagem pelo passado que tem "tido sorte pelas escolas por onde tenho passado". (EI,79). Assume a sua opção de professora do 1º ciclo como uma opção consciente e da sua própria vontade, sentindo-se muito bem nesse papel, tanto mais que adquiriu habilitações para ser também professora de Educação Física, nunca tendo contudo vontade de seguir esse caminho.

Já leciono há 14 anos, tirei o curso no Piaget em 96, depois fiz uma equiparação à licenciatura, para ficar então com o grau académico de licenciatura, noutro ramo do 2º ciclo, de Educação Física que também é uma área de ensino... (EI, 20)

A sua identificação com a profissão prende-se não só com os conteúdos de ensino, mas essencialmente com a sua identificação com os meninos em início de escolaridade e com a sua vontade de aprender tão "à flor da pele". Ao referir-lhe ser sempre bom ter outra opção noutra área profissional nos tempos que correm, Beatriz mantém firme a sua ideia de contribuir para as primeiras aprendizagens da Língua, da Matemática e do Estudo do Meio assim como das áreas das Expressões, encontrando na monodocência uma realização pessoal mas também uma grande exigência. É com paixão que afirma "Gosto muito desta faixa etária e por enquanto não me fascina e por enquanto não ambiciono mudar a minha opção" (EI, 27) considerando a monodocência simultaneamente "uma dificuldade e um grande desafio" (EI, 117), tendo "o professor de ser multifacetado, de "aprender a tornar-se "bom em tudo", não pode descurar nenhuma área" (EI, 118).

Beatriz atribui a sua determinação em ser professora desde muito cedo ao imenso gosto que tem de trabalhar com crianças pequenas. Pensa ter sido a imagem da sua própria professora " uma professora antiga que veio de Bragança para cá" (EI, 95) e a relação que estabeleceu com ela que a marcou tão definitivamente apesar de se recordar de alguém “que tinha uma forma especial de educar os alunos” com “uma estrutura muito rígida” (EI, 96) mas que contudo a acabou por influenciar de forma muito positiva:

> Não sei bem porquê! Inconscientemente estimulou-me… Depois consegui ter uma ligação futura, fiz questão que me assinasse a fita de curso, houve ali uma ligação, morava em Almada, conhecia os meus pais, não houve outro sonho que me tivesse empatado ou baralhado as ideias, foi sempre um sonho sempre que eu quis, sempre, sempre, pensei em ser professora primária, gosto muito de crianças, e… é a fase da descoberta em que eles estão muito verdes, e nós ajudamos… Querem saber tudo, nós ajudamos a aprender… (EI, 99)

Considera que as crianças que iniciam a escolaridade têm uma grande curiosidade e estão muito disponíveis para aprender sendo isso que a cativa particularmente neste ciclo de escolaridade: “É esta curiosidade que me atrai neles, o quererem saber tudo…” (EI, 105). E acrescenta com algum orgulho sentir que nestas idades “(…) o professor ainda tem um papel importante” (EI,110).

Sente uma grande responsabilidade enquanto profissional de dar o melhor aos seus alunos, não se poupando a esforços para o conseguir. Apercebi-me da sua confiança, conquistada em muitos momentos, por um caminho pessoal de autoconhecimento e conhecimento do que ensina e como ensina, mas também de alguma insegurança relativamente às solicitações que lhe são dirigidas e relativamente às quais receia estar aquém das expetativas:

> Eu tenho medo de cair no erro “eu estou a dar desta forma, então, é a melhor forma de dar”. E não é… Eu acho que alguém… Quem estiver de fora que me possa dizer ajudar-me, esclarecer questões e dúvidas (…) Se eu estou insegura deixo transparecer isso aos meus alunos e tiro-lhes a segurança. Eu não quero isso para os meus alunos. E se há alunos com dificuldades isso ainda se irá agravar mais… Outras experiências vão-me ajudar sentir-me o mais segura possível, para transmitir essa segurança aos meus alunos. (EI,139)

Mantém por isso uma grande vontade de receber toda a ajuda possível e faz todas as formações que pode, tentando desse modo tornar-se mais sensível e aberta às diferentes didáticas. Frequentou recentemente o Programa de Formação Contínua em Matemática, para professores dos 1º. e 2º. Ciclos do Ensino Básico (PFCM) na Escola Superior de Educação de Setúbal, considerando ter sido uma imensa ajuda para a sua forma de lidar com a matemática, as ideias centrais do currículo e na escolha das tarefas assim como na forma de as explorar, tendo em vista as aprendizagens a realizar.

> (…) fiz o 1º ano de PFCM, e lembro-me que com a formadora (...), trabalhámos muito exaustivamente essa noção [sentido de número], e conseguimos fazer em conjunto um trabalho muito interessante, tinha um grupo muito fraquinho…. Fizemos trabalhos muito interessantes com o número, com os alunos… (EI 211).

Curiosamente ainda sem falar dos motivos que a levaram a aceitar tão prontamente trabalhar em colaboração comigo neste projeto, para além da sua imensa vontade de se valorizar profissionalmente, adquirindo mais conhecimento curricular, didático e pedagógico, começa a tornar-se visível a sua apetência para as questões relacionadas com os números. Falando da sua experiência desse ano no PFCM dispõe-se entusiasticamente a partilhar comigo o portefólio que realizou na altura referindo:

> O meu portefólio foi todo baseado na noção de número, não foi só uma tarefa, todas se canalizavam para o número e a noção de número…estou a lembrar-me das tarefas dos cromos e das diversas formas de contagem. Posso enviar-te o meu portefólio … (EI, 239)

Após a realização da formação e da reflexão realizada após as aulas e no portefólio final, afirma ter-lhe ficado daí uma sensibilidade diferente para a abordagem dos conceitos matemáticos através da apresentação de tarefas desafiadoras que têm por horizonte o trabalho das grandes ideias chave do Programa de Matemática do Ensino Básico:

> Sim, ficou-me uma sensibilidade daí… O programa, vou ser sincera, vou lendo aos bocadinhos à medida que vamos introduzindo uma “nova matemática” trabalhando com o programa de matemática, não o li todo, todo sozinha……mas sozinha e isolada sublinhando o que é importante para trabalhar aqui vou fazendo aos poucos à medida que vamos abordando as temáticas… e depois analisamos em conjunto, com a (…) (EI, 251).

A vontade de trabalhar em conjunto é uma constante no seu discurso, parecendo sentir-se mais segura por poder partilhar e discutir a escolha de tarefas e a antecipação de dificuldades e de estratégias de resolução. Refere ser muito importante esse trabalho de pares apoiado na experiência dos anos anteriores: “Vemos o que foi feito, fazemos outras em virtude daquelas, fazemos a nossa planificação, mas sim é sempre um trabalho de conjunto que até à data tem funcionado bem” (EI,163).

Beatriz é uma pessoa e uma professora entusiasta, muito positiva, com uma relação muito próxima dos alunos, dos seus pais, encarregados de educação, avós e outros familiares e bastante ambiciosa relativamente aos seus objetivos de trabalho com os diversos interlocutores.

Os minutos que antecediam a aula, os intervalos que Beatriz não aproveitava para falar com os alunos enquanto estes lanchavam, pois podiam ficar a lanchar na sala enquanto ela arrumava a sala ou o armário ou preparava qualquer coisa para o momento que se iria suceder na aula, eram permanentemente ocupados na interação com os outros ou comigo. Não raras eram as vezes que os colegas entravam na sala para partilhar momentos da vida na escola, assim como encarregados de educação que tinha chamado ou que vinham por sua iniciativa, sobretudo, no princípio ou no fim das aulas.

5.1.3 Conhecendo o contexto de trabalho de Beatriz

Beatriz leciona uma turma de 3.º ano de escolaridade com 28 alunos, numa escola do concelho de (…), no turno da tarde, assumindo na escola ainda as funções de coordenação do 3.º ano de escolaridade e de avaliação de desempenho de alguns dos seus colegas. Os seus alunos têm idades compreendidas entre os 7 e os 8 anos, são de diversas origens sócio económicas, dezasseis rapazes e doze raparigas tendo dois alunos necessidades educativas especiais. Conta para lidar com as dificuldades desses alunos, com a professora de apoio, que está algum tempo por semana na sua sala.

A escola foi integrada no final do ano passado num outro agrupamento no contexto da incorporação de escolas em mega agrupamentos, situação gerada pelas mudanças ao nível da gestão da escolar. Beatriz teve oportunidade de optar entre manter-se no agrupamento, ou na escola, ficando a pertencer no primeiro caso ao quadro do novo agrupamento e no segundo caso, mantendo-se no quadro do agrupamento mas tendo que mudar de escola e de alunos. A sua opção foi realizada tendo em vista a continuidade de trabalho com os seus alunos:

> O ano passado era do Agrupamento da (…), mas como mudámos de agrupamento agora a nossa escola ficou a fazer parte do Agrupamento (…) (EI,45), "Puseram-nos ao critério escolher…A escola (…) o ano passado fazia parte do agrupamento da (…) se não quiséssemos ir, teríamos de integrar uma das escolas do Agrupamento da (…) .A

> nossa ligação é à escola, ao continuarmos ligados a esta escola teríamos de ficar neste agrupamento… se não quiséssemos teríamos integrado uma escola do agrupamento, pronto, é o que eu disse… é o que eu disse eu peguei numa turma que trabalha nesta escola, o que me vincula não é o agrupamento, que para mim tanto faz, mas um grupo de alunos. (EI, 49).

Mais importante que a escola são os alunos a quem Beatriz se sente vinculada como sua professora, o que denota que sente uma responsabilidade na caminhada que com eles realiza, que valoriza e onde investe, pondo por vezes, o interesse dos seus alunos à frente de outras questões logísticas. Reparei pela forma como sente a escola muito espírito de missão. Por estas qualidades verdadeiramente reconhecidas nos seus pares, foi-me apresentada como candidata a participante no meu projeto, pelos colegas da sua escola, que foram meus formandos no PFCM.

5.1.4 Percecionando as motivações de Beatriz para um trabalho colaborativo

Senti desde o início o seu imenso agrado de Beatriz em poder, através do trabalho conjunto, aprender mais, ter acesso a outras perspetivas, poder partilhar os momentos das suas próprias aulas, debater com alguém num momento vivido conjuntamente o que se viveu e o significado dessa vivência assim como de implicações para o futuro, nas suas próprias aulas. Também percecionei, uma vontade de averiguar a validade do seu trabalho, de todas as suas intuições que por vezes fugiam às ideias “mais fortes” manifestadas no quotidiano das escolas. Senti que Beatriz precisava de ver legitimado o seu trabalho (ao seu próprio olhar) e, mais ainda, de sentir que as suas perceções tinham fundamento:

> Ainda, por cima, alguém com uma experiência diferente, mais formada nesse sentido, ajudar-me, sei lá… e esclarecer dúvidas que eu tenho. Ajudar-me lá esta! Esclarecer-me acerca das dúvidas que eu tenho. E também a fazer-me sentir mais segura em relação ao meu trabalho… (EI, 141).

Ter segurança no ensino da matemática, confiar nas suas intuições acerca do desenvolvimento e da progressão da aprendizagem dos alunos, assegurar-se que o seu conhecimento da matemática era suficientemente forte para se sentir segura, foi o que senti de mais forte na adesão de Beatriz a este projeto de colaboração. As mudanças quase exigidas neste momento de mudança de pareceram trazer legitimidade a todas estas questões, também a muitos desafios, tendo aberto portas a interrogações que os professores isoladamente já não conseguem, nem querem responder. Tal como Beatriz manifestou sente falta de trabalhar com os seus pares, está aberta a toda a ajuda possível, nomeadamente a formação. Neste momento as motivações internas para a formação são mais fortes que as externas. Não são os créditos necessários à progressão na carreira mas a enorme vontade de trabalhar a didática da matemática que a movem.

Beatriz sente que ao longo dos anos o paradigma de ensino da Matemática mudou desde os seus tempos de aluna, em que recorda a forma como aprendeu determinados conceitos, nomeadamente o conceito de fração " (…) só sei que era preciso saber que se dividia uma pela outra, e mais nada! Nem sei porque o fazia…" (R8) e o que se pretende com a "nova matemática " como chama às mudanças de perspetiva que o programa introduz, é muito mais do que isso. "Para mim, a Matemática não fazia qualquer sentido. Era assim, porque era assim!" (R8). Não era necessário segundo Beatriz compreender. Neste sentido e referindo que há imensa coisa que aprendeu de uma forma e hoje consegue compreender de outra, diz que começou a infletir trabalhando os conceitos, os procedimentos, as técnicas de cálculo mas também a flexibilidade de pensamento, desenvolvida, por exemplo, através da multiplicidade de estratégias:

> Sim porque isso é uma estratégia, então, eu agora quero que apliquem outras… Já sabem o algoritmo então vamos fazer de outra maneira…Aos poucos eu fui querendo que fossem fazendo de outras formas, não por estar errado mas por haver outras formas, por exemplo, no apoio ao estudo tenho feito tarefas utilizando a reta graduada… Eu também não tenho muita formação neste sentido, percebes? (RI, 270)

O fato de, em muitos momentos da nossa conversa, vir ao de cima aquilo em que se sente desconfortável no ensino da matemática, parece revelar também humildade e uma enorme vontade de ultrapassar dificuldades, dispondo-se, assim, a fazer face a desafios, como este, de se entregar a um trabalho que lhe iria exigir muito, do seu tempo e da sua energia. Não conseguir estar à vontade na reta numérica, foi uma das situações de desconforto que foi referindo ao longo do tempo, no trabalho com os números racionais.

Reconhecer os campos difíceis de trabalhar na matemática faz parte do conhecimento profissional do professor. Nomeadamente, e no caso concreto, a representação na reta numérica, a representação de números racionais não inteiros é uma das dificuldades que os investigadores apontam como comum. Acontece a muitos alunos em muitas salas de aula, e em momentos de avaliação final haver dificuldades na representação na reta numérica. Beatriz ao evidenciar essa dificuldade evidencia também a sua reflexão acerca do que ensina e de como ensina.

Parece que Beatriz tem uma grande preocupação em garantir as aprendizagens doa seus alunos, criando momentos de trabalho individual, autónomo, depois de outros momentos de trabalho em que o contributo e a discussão tomam uma dimensão mais social.

> Em relação à matemática, como é que eu sei que o que lá ficou? Quando aplico uma tarefa do âmbito das que foram trabalhadas mas que eles resolvem sem qualquer intervenção da minha parte… eles recorrem sempre a nós quando não entendem… e então faço uma sistematização constante…Ainda hoje, por exemplo, acabámos a temática da orientação espacial e eles sozinhos, estiveram a preparar-se para a ficha de avaliação mas hoje pegámos no manual e eles sozinhos resolveram as questões. As poucas intervenções que houve foram só nesse sentido 'Tenho de fazer assim tal e qual ou posso criar um código à minha maneira'? (RI, 318)

Tomando consciência durante a nossa conversa que se realizam tarefas com objetivos diferentes em momentos diferentes no processo de ensino e aprendizagem, foi clara a ideia que a escolha das tarefas é uma das responsabilidades do professor. A gestão do que fazer e quando, que constitui o momento da planificação do trabalho a realizar, é uma das primeiras funções do professor. Beatriz ao refletir sobre a escolha das tarefas de uma forma geral para este ano de trabalho, refere ter realizado mudanças face ao ano anterior.

> Tive de trabalhar todas as tarefas até agora mas este ano, tenho manual. Estive a pensar que vou usar o manual para apoio, mas está muito compactado e eles perdem-se muito com tanta informação e então acabo por usar só se houver tempo e para sistematizar…. (EI, 353).

Explicita que a escolha das tarefas e o planeamento de todo o trabalho, está relacionada com os alunos, muito claramente com o contexto que os envolve: familiar, social – que se reflete nas suas aprendizagens e na forma de aprender. Ao posicionar-se como professora face à aprendizagem dos seus alunos, Beatriz assume ser "muita ambiciosa à partida" (EI, 345) e depois ter de adequar as suas expetativas à realidade " depois tenho de cair na realidade e tenho de ter em atenção a turma e a sua adesão às tarefas. Depende do gosto deles e daquilo que eles fazem… Não tenho de lhes impingir nada… (EI, 346).

Esta opção em aderir ao desafio de comigo trabalhar é de todo coerente com a sua forma de estar, encontrando nesta oportunidade uma possibilidade de "aprender mais, e refletir mais, acerca do meu trabalho com a matemática" (EI, 113).

Aprofundando os motivos que a levaram a aderir a este trabalho de colaboração, explicita com entusiasmo que tem uma maneira de ser que a leva a estar aberta a novos desafios.

> Gosto de tudo o que é novidade, sempre gostei de aderir a coisas novas, e acho que é assim… este ano é uma novidade para todos nós, não é só para mim… a nova matemática, e eu sinto necessidade de ter muitos recursos, preciso da ajuda de todos, preciso de recursos que me ajudem… havendo assim possibilidades como esta, se houver de agarrar eu agarro, para aplicar da melhor forma a "nova matemática". E eu sinto necessidade de ter alguém que me ajude a ver e trabalhar a nova matemática, uma pessoa, uma instituição, e com uma oportunidade como esta… (EI, 128).

Sentindo-se, portanto, num momento de mudança e de mudanças, numa fase em que a reestruturação do programa de Matemática traz desafios aos professores do ensino básico e, em particular, do 1º ciclo, Beatriz decide ser proactiva, tentando encontrar formas de agarrar o que chama curiosamente de "nova matemática".

5.2 Abordando intuitiva e informalmente a noção de fração

5.2.1 Preparando o trabalho com Beatriz

As três primeiras tarefas foram, pensadas para a familiarização dos alunos com o conceito de fração, partindo do trabalho intuitivo com a fração para a simbologia da fração. Esta opção vai ao encontro das recomendações de Van Walle e Lovin (2006), ao enfatizarem que, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, é importante, os alunos, desenvolverem um conhecimento intuitivo das frações, antes de passar a um conhecimento mais formal. A seleção destas tarefas teve em conta a sua experiência matemática anterior: o trabalho com metades, terços, quartos, como partes da unidade que representam o inverso das relações de multiplicação, o dobro, o triplo, a quarta parte… e a representação dessas partes, usando modelos tão simples, quanto folhas de papel. Em primeiro lugar tomavam contacto com uma parte de um todo (parte fracionária) e em seguida, o foco estava na contagem de partes fracionárias.

Beatriz realizou a primeira abordagem à noção de fração, na aula do dia 29 de Novembro de 2010, em que foram exploradas as três tarefas introdutórias da trajetória planeada, que perfaziam a sua primeira etapa: Da simbologia da fração ao sentido de número fração. As tarefas foram: T1- "O lenço do marido da professora", T2 – "Dobragens e mais dobragens" e T3 – "Pintando azulejos".

O quadro 10 mostra a paisagem de aprendizagem para o trabalho com estas três tarefas:

Quadro 10 – As grandes ideias para as três primeiras tarefas, adaptadas de Fosnot (2007).

As grandes ideias	
❖ Frações são relações parte-todo ❖ Frações são quocientes ❖ Frações podem representar uma divisão com um quociente menor que 1 ❖ Frações são quantidades (medida) ❖ As frações podem ser pensadas como operadores;	❖ As frações podem ser pensadas como operadores; ❖ Com frações unitárias, quanto maior o denominador, menor é a parte ❖ As partes não têm de ser congruentes para serem equivalentes ❖ Para comparar frações a unidade têm de ser a mesma

5.2.2 Concretizando o trabalho

Apresentando a tarefa

Na primeira tarefa, "De quantas formas se pode dividir um guardanapo em quatro partes iguais?" Beatriz sugere que dividam um guardanapo (representado por uma folha de papel de cor) em quatro partes iguais, de todas as formas que conseguirem. O episódio 1 mostra como a professora lançou este desafio aos seus alunos:

Episódio 1[26]: O lenço do meu marido

P- Estava eu ontem a passar a ferro este lenço do meu marido… Qual é a forma geométrica deste lenço?

Vários alunos - É um quadrado.

P - Fiz um jogo. Dividi o lenço em quatro partes iguais (e faz dobrando de forma a ficar com quatro quadrados) e descobri uma maneira de dobrar o meu lenço em quatro partes iguais

Várias vozes - E ficámos com quadrados mais pequenos.

P - E eles são iguais?

Várias vozes – Sim.

P - São congruentes… são geometricamente iguais. Foi uma forma que eu descobri. Será que há formas diferentes de dobrar o quadrado em quatro partes iguais? É isso que agora vão descobrir.

A2 - Sem ser a que já fizeste?

P_ Também podes fazer essa. Vou dar-vos folhinhas… Têm de ser em quatro partes iguais pois na gaveta onde eu os guardo só cabem se os dobrar.

Tomás - Tenho uma dúvida…

P - Diz Tomás.

Tomás - Tenho de fazer de todas as maneiras no mesmo quadrado?

P - Não, a professora vai dar muitos quadrados.

Como o episódio revela, Beatriz ligou as dobragens a um contexto da vida familiar, pelo que rapidamente, a sua designação inicial, foi abandonada. E assim, a tarefa passou a ser conhecida como "o lenço do marido da professora" ficando desta forma guardada, no "álbum de memórias da turma".

O episódio também mostra, a introdução do conceito de figuras geometricamente iguais, ou congruentes, realizado por Beatriz. A professora reforça a ideia dos alunos de "os quadrados serem iguais" reformulando a resposta e introduzindo, maior rigor na linguagem matemática.

Equivalentes mas não necessariamente congruentes

Nesta primeira tarefa, a grande ideia a desenvolver era a de que uma fração da unidade, neste caso, "um quarto" cabe quatro vezes na mesma unidade, quando esta é

[26] Nos episódios apresentados nesta seção, utilizei a letra P para designar professora. Os alunos são designados em geral, por A1, A2,… exceto, quando foi possível nomear, ou quando me fizer sentido, para melhor compreensão dos diálogos, nomear os alunos.

dividida em partes iguais (partilha equitativa). O episódio 2 ilustra um momento da aula em que Beatriz procura trabalhar estas ideias.

Episódio 2: Há muitas maneiras de dividir um quadrado em quatro partes iguais.

P - Qual foi a unidade que trabalhámos aqui?

Vários alunos - O quadrado.

P – Uma unidade que era o…

Vários alunos – … o quadrado.

P - Partimos todos da mesma unidade, certo?

Vários alunos – Sim…

P - O quadrado! Mas fomos dividir a unidade em quatro partes iguais. O que representa cada uma destas partes? (Vai apontando para cada uma das quartas partes das diferentes figuras.)

Vários alunos - Quartos…

Outros - A quarta parte!

P – Portanto, ao dividirmos… dividimos todos, em quatro partes, e selecionamos um quarto de cada uma, apesar de haver muitas formas de dividir um quadrado em quadrado em quatro partes iguais. Há muitas maneiras diferentes… Há muitas maneiras de dividir um quadrado em quatro partes iguais.

A1 - Pois há!

P – Muitas… mas cada uma destas partes representa...

Vários alunos - Um quarto!

P - Mas cada uma representa…

A2 - Cada uma dessas partes representa a quarta parte.

A análise deste episódio permite evidenciar ainda que Beatriz trabalha a ideia de quarta parte, mas também começa a sensibilizar os alunos para a unidade, da qual a quarta parte é uma, de quatro. Ao dobrarem a folha estão a trabalhar com uma única unidade, obtendo partes (quartos) dessa unidade. Trabalha a ideia do que é uma unidade contínua. Através das intervenções que faz, Beatriz sublinha que há muitas maneiras diferentes de dividir um quadrado em quatro partes iguais, embora todas elas representem um quarto. A figura 25 representa algumas dessas divisões realizadas pelos alunos que Beatriz afixou no quadro, onde são visíveis diversas representações de um quarto. A professora sensibiliza, assim, os seus alunos para uma ideia importante: que a quarta parte se pode representar de muitas maneiras. Neste caso, representou a quarta parte de diferentes maneiras geométricas. A compreensão do número nas suas múltiplas representações é um indicador do desenvolvimento de sentido de número. Neste caso, de sentido de número racional.

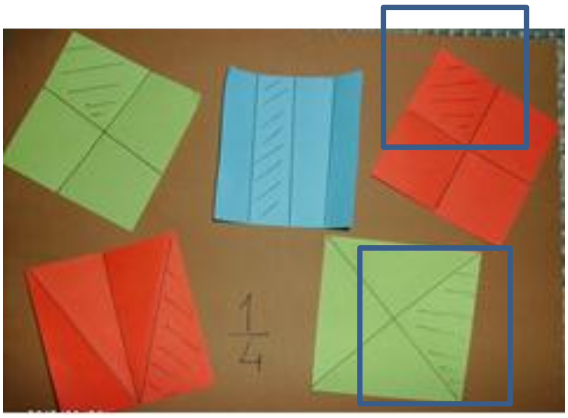


Figura 37- Formas de dividir quadrados em partes iguais

Outra grande ideia trabalhada por Beatriz, foi a de que, cada uma dessas partes, apesar de terem diferentes formas (quadrados, retângulos, triângulos, trapézios), são equivalentes, isto é, representam a mesma quantidade. E ainda a ideia de que para serem equivalentes não terem de ser necessariamente congruentes.

Emergindo a noção de fração como quociente

Só depois de "um quarto" ser uma palavra que parecia ter significado para os alunos, representado nessas muitas formas diferentes, é que Beatriz pergunta como poderá representar essa parte da figura, passando à representação formal, na forma de fração (figura 37). Uma vez que a representação simbólica da fração representa uma convenção complexa e muitas vezes enganosa para os alunos (dois números representam um terceiro), torna-se mais importante acentuar o significado da expressão no contexto (saber o que é um quarto de uma figura, uma figura que foi dividida em quatro partes iguais) do que atribuir nomes aos dois números que constituem a fração. Progressivamente à medida que vai acompanhando o domínio que os alunos têm de fração, Beatriz recorria à sua representação formal ($\frac{1}{4}$).

Contar partes como maçãs

Contar partes fracionárias, aconselham Lovin & Van Walle (2006), "tão simplesmente como contar maçãs" (p.67), ou outros objetos, é uma boa forma de compreender os dois números, utilizados no quociente que representa a fração. Apesar de se tratar de uma convenção, e fazer parte daquilo que é para dizer “que é assim” é importante levá-los a compreender o significado desses números e a sua relação com a unidade. Só depois de Beatriz ter trabalhado a contagem de cada uma das partes, designando-as: um quarto, dois quartos, três quartos, quatro quartos… é que Beatriz passou a representar de forma simbólica, com a linguagem formal da matemática (Fig. 38).

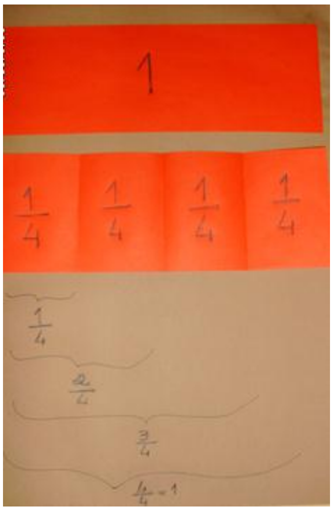


Figura 38 – A contagem de partes fracionárias

Tendo ainda como intenção perceber a relação entre o numerador e o denominador da fração, relacionando a fração com a divisão, Beatriz passou para a segunda tarefa, “ Dobragens e mais dobragens”, escolhendo desta vez retângulos para dobrar ao meio, depois outra vez ao meio e ainda outra vez ao meio. Desta forma, trabalhou com os alunos, a noção de metades, quartos e oitavos, verificando por dobragem as relações entre essas partes e encontrando partes fracionárias que os alunos contavam “como maçãs” comparando umas com as outras.

Relações de relações

Ao pedir para dobrar ao meio, Beatriz relaciona este gesto com a divisão por 2, e escreve que se obtém metades. O mesmo com a divisão por 4, obtendo quartos e por 8 obtendo oitavos. Relaciona as operações multiplicação e divisão, que é outro indicador de desenvolvimento do sentido de número, e sensibiliza os alunos para uma lógica no universo numérico, que é a lógica multiplicativa. Um quarto, é metade de metade, e um oitavo é metade de um quarto ou metade da metade da metade. Beatriz realizou as dobragens e construiu o cartaz que está representado na figura 39.

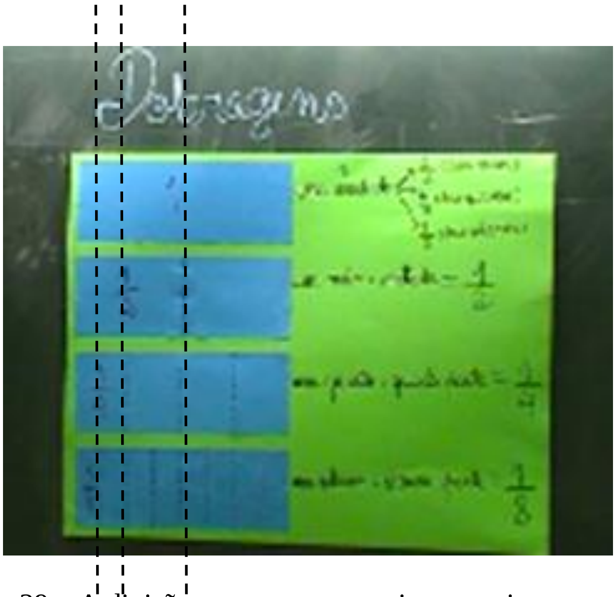


Figura 39 – A divisão em partes: ao meio, ao meio e outra vez ao meio

A escolha de metades, quartos e oitavos, não foi um acaso. Poder-se-ia ter escolhido trabalhar metades, terços e quartos, mas a escolha destes números permitiu evidenciar as relações entre eles, e deixar os alunos despertos para essas relações.

Relações entre partes

Apesar de Beatriz não ter falado da expressão “fração equivalente” ao manipularem as folhas que tinham dobrado respetivamente em duas, quatro e oito partes realizavam comparações entre o tamanho das partes. Beatriz deixou propositadamente suspensa essa ideia para aprofundar mais tarde, ideia que no entanto foi explicitada: “… um quarto, dois quartos, olha é o mesmo que uma metade e o mesmo que quatro oitavos!”. A figura 40 mostra as relações estabelecidas por Beatriz, com os seus alunos:

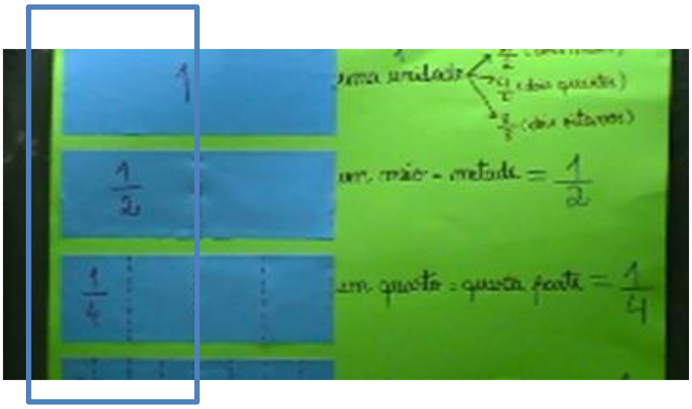


Figura 40 – A relação entre diferentes partes (um meio e dois quartos)

Beatriz apercebeu-se que depois de dobrarem “o lenço do marido da professora” e o dobrarem em quatro partes iguais de várias maneiras, os seus alunos compreenderam a ideia de que há muitas formas geométricas de representar uma mesma quantidade (equivalência de figuras), mas também, de que duas formas geometricamente iguais, congruentes, podem representar-se por várias frações. A própria Beatriz manifestou a sua surpresa com o desenvolvimento das ideias e o encadeamento: “ se eu quisesse trabalhava já hoje a noção de fração equivalente. Podia ir por aí…”. A questão que discutimos posteriormente é se efetivamente não teria trabalhado já essa noção, ao que Beatriz me respondeu: “Pois é, isto é muito interessante… trabalhar a noção não é dar a regra. De que serve saberem apenas uma regra?”

O fato de ter emergido a noção de fração equivalente, está relacionada com a escolha dos números, que permitiram estabelecer essas relações. A escolha cuidadosa dos números nas tarefas, é crucial, no percurso que os alunos irão realizar em torno das grandes ideias escolhidas pelo professor. Podem conduzir a caminhos previstos ou imprevistos. Como diz Beatriz: “… ter consciência de tudo é impossível, mas há que lidar com tudo mesmo assim!”

Emergindo a noção de fração como operador

Na terceira tarefa desta primeira etapa “ Pintando azulejos”[27], Beatriz pedia aos alunos que pintassem em azulejos, metades, quartos, oitavos de todas as maneiras possíveis. Os azulejos estavam divididos em oito partes iguais como mostra a figura 41.

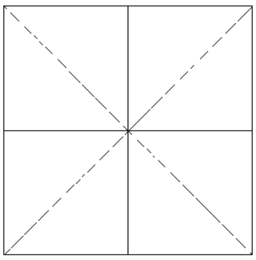


Figura 41 – O azulejo que se pretendia que os alunos pintassem

Beatriz apresenta a tarefa sensibilizando-os para o número de triângulos que compõem a unidade como se pode ver no episódio 3:

[27] Todas as tarefas em que Beatriz apresentou uma ficha de trabalho, como é o caso desta, encontram –se no anexo 7.

Episódio 3: Cada uma dessas partes, desde que tenha quatro triângulos pintados, é a metade!

P - Estamos a trabalhar com esta unidade (aponta para o quadrado).

P - A nossa unidade, o nosso quadrado, está dividida em quantas partes?

Vários alunos – Oito.

P – Oito triângulozinhos', certo?

Vários alunos – Sim...

P - Cada um, é portanto…

Vários alunos – Um oitavo

P – Todos os oito triângulos, todas as oito partes compõem o quê?

Vários alunos - Um oitavo.

P – Todos os oito triângulos compõem o quê? (repetindo)

Vários alunos - A unidade.

P - Muito bem. Para pintarem metade, quantos triângulos pintaste?

A3 – Duas.

P - Quantos triângulos?

Vários alunos - Oito.

P – Então, para pintar a metade do quadrado, quantos triângulos pintamos?

A4 – A metade.

P - Ter a metade do quadrado ou ter quatro triângulos, quatro das oito partes têm sempre…

Vários alunos - A metade.

P - Cada uma dessas partes, desde que tenha quatro triângulos pintados, é a metade!

A5 – Pode ser qualquer triângulo?

P – Podem ser quaisquer quatro triângulos, desses oito.

Ao pintar os azulejos os alunos já não estão presos à representação da fração (os dois números que se relacionam) mas ao terceiro que ele representa. Se se pretende pintar metade desse azulejo (que se encontra dividido em oito partes iguais) tem de pintar quatro (Fig. 42). De forma não explícita, Beatriz "toca" nos significados fração como operador (metade de oito é quatro, tem de se pintar quatro azulejos dos oito) e também razão (pinto um em cada dois azulejos).

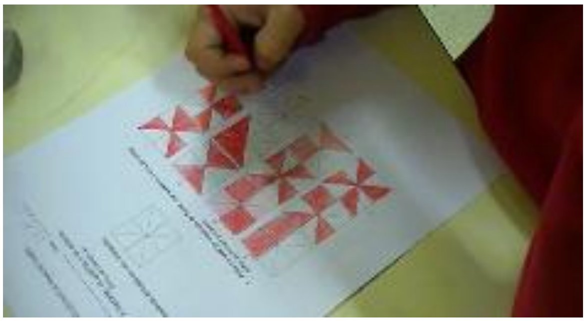


Figura 42 – Representação da pintura de metade dos azulejos de formas

Ao pretender que os alunos o façam de todas as formas possíveis continua a trabalhar as noções de equivalência e de congruência. Os diferentes azulejos são equivalentes mas não congruentes.

Ao pintar a metade e a quarta parte num azulejo dividido em oito figuras, Beatriz não estabelece a ligação entre o numerador como o número que ” conta (enumera) as partes e o denominador como o número de partes em que está dividida a unidade. Lovin & Van Walle (2006) condensam esta ideia dizendo que “os símbolos da fração são apenas um atalho para dizer “quantas” e “ “quais” partes da unidade” (p.67), sendo redutor e mesmo enganador dizer que o denominador indica as partes em que está dividida a unidade.

Ao apresentar o quadrado estamos a trabalhar a unidade contínua e logo a relação parte-todo. Contudo, se considerarmos cada um dos triângulos a unidade temos um conjunto de oito triângulos que constituem uma unidade discreta, e aqui a fração pode aparecer no seu significado de operador.

Ainda de uma forma leve Beatriz tocou a questão da mudança da unidade e da necessidade das unidades serem iguais para que as partes sejam congruentes.

Em qualquer destas tarefas foi uma escolha de Beatriz ter tarefas pequenas (cerca de 20 minutos) cada, deixar os alunos manipular os papéis que representavam o lenço e encontrar partes equivalentes a um quarto do lenço mas não congruentes por diversos modos de dobragem, usar o papel quadrado ou retangular, no caso da tarefa 2 como modelos para ajudar a organizar o pensamento, e escolher as intervenções a ter ou a não ter, como na situação em que lhe apetecia continuar a aprofundar a noção de frações equivalentes.

5.2.3 Refletindo com Beatriz

No final desta aula Beatriz constatou ter tocado em muito mais ideias do que aquelas que pensou à partida, pois a interação com os alunos permitiu ir mais além, ainda das potencialidades que vislumbrara nas tarefas, à partida.

Recordando a paisagem de aprendizagem na qual viajava “Beatriz passou com os seus alunos nos marcos “ pudemos assinalar os caminhos por onde Beatriz caminhou com os seus alunos, na figura 43.

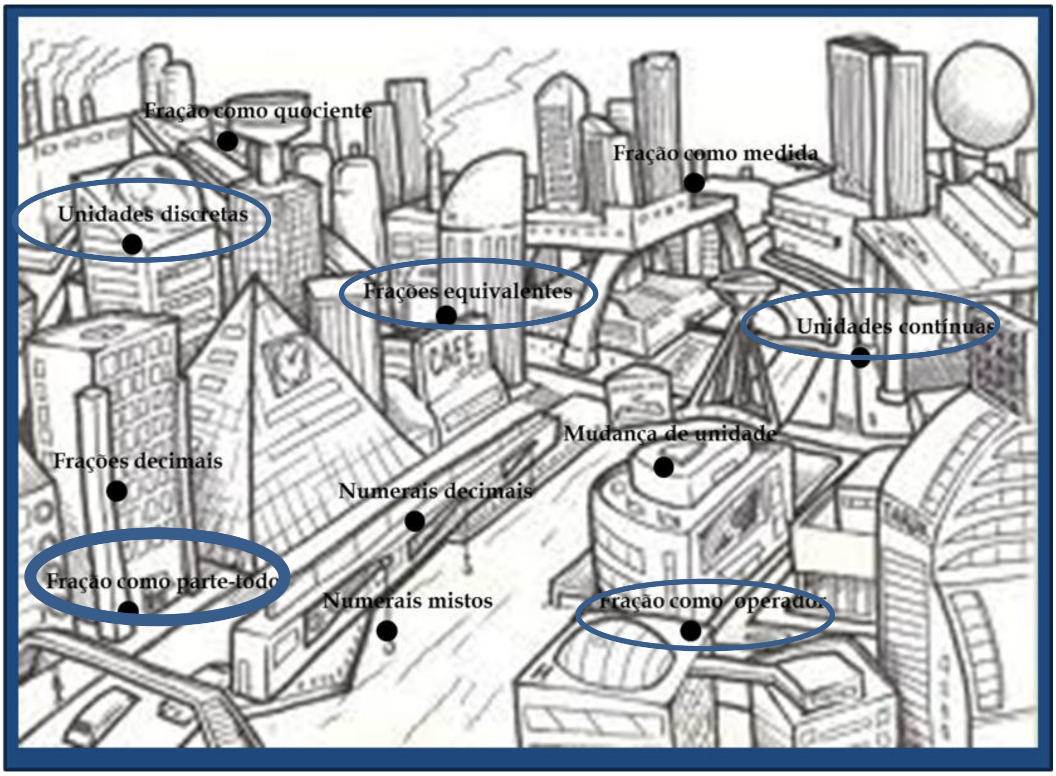


Figura 43 – A “paisagem de aprendizagem” das frações, decimais e percentagens simplificada

A passagem por esses marcos de referência foi breve, em alguns deles. Contudo foi como um pequeno reconhecimento ao terreno em que irá trabalhar com os seus alunos, e o que lhes dará essa passagem, será uma certa familiaridade. Outras ideias mais fortes se trabalharão “em cima” destas, se conectarão com estas ganhando um novo sentido, quando ligadas a outras.

Beatriz reflete sobre a terceira tarefa, a dos azulejos dizendo ter sido para além de lúdica, muito mais forte matematicamente do que parecia. Refere Beatriz que dizer a um aluno “pinta 1/8 do azulejo ou pinta 0,125, não é o mesmo” (EF, 512). É um dos contextos em que a fração simplifica imenso a interpretação da situação. “A fração tornou tudo mais percetível neste contexto" (EF, 511). Pintar um oitavo de um azulejo que está dividido em oito triângulos é direto, reflete Beatriz, " é 1 de 8, a parte de um todo" (EF, 375). "Giro, foi pedir que pintassem um quarto de um azulejo que estava dividido em oito triângulos" (EF, 513). Reflete Beatriz, "eles tinham de procurar equivalências" (EF, 405). Ou recorrer ao significado operador, referi, pois a quarta parte de 8 é 2. Ao pintarem de formas diferentes a metade da figura, mantinham a quantidade, a equivalência, mas as figura pintadas já não eram geometricamente iguais. Diz Beatriz: " metade da unidade pode ser representada de muitas formas" (EF, 414), tal como nos guardanapos em que "cada uma das partes é sempre um quarto mas as partes podem ser de diferentes formas de cada vez que dobro, o guardanapo" (EF,385).

A nossa reflexão terminou no final dessas tarefas com a ideia de que simples tarefas podem ser poderosíssimas se bem trabalhadas, pois apesar de serem simples e de aparentemente só terem uma resposta, a forma de trabalhar essa resposta pode condicionar tudo. Beatriz salienta, verifiquei como é importante, "não limitar as respostas apenas a uma solução. Mesmo tendo respostas fechadas, e sendo únicas mas há várias formas de podermos trabalhar essas respostas" (EF, 408). O problema, a dificuldade refere Beatriz é que "eu não vejo logo a potencialidade de algumas tarefas. Só daquelas que já realizei" (EF, 596), " e depois não sei porque escolher umas ou outras" (EF, 598).

5.3 Um problema de partilha equitativa: Trabalhando a personalidade quantitativa da fração

A tarefa " A visita de estudo e a distribuição das baguetes " (Fosnot e Dolk, 2002) foi a quarta tarefa da trajetória de aprendizagem planeada, tendo por finalidade o desenvolvimento do sentido de número fração[28] designação dada à segunda etapa da trajetória de aprendizagem (II) *Da simbologia da fração ao "sentido de número fração*. Aparece na sequência das três primeiras tarefas analisadas anteriormente, pretendendo

[28] "fraction number sense" expressão no original utilizada por Van Walle e Lovin (2006)

fazer emergir uma grande ideia: “quão grande uma fração é”, a fração como quantidade, a personalidade quantitativa da fração[29].

5.3.1 Preparando o trabalho com Beatriz

Com esta tarefa Beatriz introduz as frações usando um problema de partilha equitativa para suportar o desenvolvimento de grandes ideias matemáticas. A partir das resoluções dos alunos e das suas representações do problema, utilizando a baguete como um modelo para pensar, conjetura que os alunos vão apurando a fração como um quociente passando pelo seu significado parte-todo.

Antecipando estratégias e grandes ideias matemáticas emergentes

Um dos aspetos negociados no nosso projeto de colaboração foi o nosso contributo para a escolha das tarefas a realizar na sala de aula, depois de exploradas e debatidas entre nós, antecipando estratégias, e tomando consciência da matemática que ia emergindo ou que poderia emergir. Durante este momento, cada uma de nós, trouxe um conjunto de tarefas que considerava potencialmente “boas tarefas”.

Resolvi apresentar a Beatriz “A visita de estudo e a distribuição de baguetes”[30] (anexo 7) tarefa adaptada de Fosnot & Dolk (2002) para desenvolver em contexto de Congresso Matemático tendo em vista criar e modelar ideias matemáticas relacionadas com as frações, a partir de uma situação de partilha equitativa. A tarefa, assim como o contexto de trabalho, surgiu, pois, nas nossas reuniões sob a minha proposta.

Não explicando as razões que me levavam a propor esta tarefa no contexto de um congresso matemático, e não fazendo qualquer “apresentação inicial” (não expliquei de imediato a Beatriz os motivos que me levavam a propô-la), chegada a minha vez de apresentar propostas, apresentei a tarefa, contando-a como uma história, à medida que elaborava um cartaz onde organizava os dados para neles podermos trabalhar seguidamente.

[29] Lamon 2005

[30] Fosnot e Dolk, 2002

Partilhei, portanto com Beatriz que uns alunos tinham ido realizar uma visita de estudo a três locais diferentes: o oceanário, o jardim zoológico e o pavilhão do conhecimento, e tinham levado sanduíches para o lanche, umas baguetes compridas. No final da visita, os alunos estavam um pouco indignados com a injustiça. Parecia pois, que uns tinham recebido maior quantidade do que outros. O quadro resume a distribuição das baguetes realizadas pelos grupos de alunos.

Quadro 11 – Distribuição de baguetes na visita de estudo

	Nº de alunos	Nº de baguetes
Oceanário	5	3
Jardim Zoológico	5	4
Pavilhão do Conhecimento	4	3

Passámos a realizar a tarefa individualmente, seguindo-se a apresentação das estratégias por nós utilizadas e a solução encontrada para o problema colocado: Terá sido justa a distribuição das baguetes pelos diversos grupos?

Realizada a tarefa e partilhando as ideias depressa ficámos presas numa discussão acalorada em torno das nossas resoluções, passando de imediato a pensar noutras possíveis resoluções a serem realizadas pelos alunos. Em pouco tempo mergulhámos em torno de grandes ideias matemáticas estruturantes do conceito de número racional que passámos a consciencializar e a evidenciar tendo em conta o trabalho a realizar com os alunos.

Beatriz ficou completamente cativada pela envolvência que o trabalho nos proporcionou e de onde emergiram as ideias centrais a desenvolver nesta tarefa e nas que se seguiriam.

> Não quiseste de início influenciar-me. Não conhecia a tarefa, nunca tinha feito nada no género mas percebi [que ao não explicar nada inicialmente deixando-a viver a tarefa] que me quiseste deixar livre de ideias de partida para a escolha das tarefas" (R8, 3)

As grandes ideias matemáticas emergentes do trabalho que realizámos foram convergentes com as grandes ideias de Fosnot & Dolk (2002, p. 55): (i) as frações são relações e são relações parte-todo quando relacionadas com conceitos de partilha equitativa; (ii) equivalência não é o mesmo que congruência (as peças de uma figura que representam partes não têm de ser congruentes, apenas equivalentes); (iii) a fração é um quociente e por isso está relacionada com a multiplicação; (iv) o todo importa, torna as partes equivalentes; (v) a divisão e a multiplicação de frações são relações de relações.

O quadro que se segue mostra a paisagem de aprendizagem considerada para a tarefa " A visita de estudo e distribuição das baguetes" de Dolk & Fosnot (2002):

Quadro 12 – A grandes ideias para a tarefa " A visita de estudo e distribuição das baguetes adaptado de Fosnot (2007).

As grandes ideias	
❖ Frações são relações – o tamanho ou a quantidade da unidade interessa ❖ Frações são relações parte-todo ❖ Frações são quocientes ❖ Frações podem representar uma divisão com um quociente menor que 1 ❖ Com frações unitárias, quanto maior o denominador, menor é a parte ❖ Frações são quantidades (medida)	❖ As partes não têm de ser congruentes para ser equivalentes ❖ Para adicionar ou subtrair frações é necessário uma unidade comum ❖ A multiplicação e a divisão são relações de relações ❖ Frações estão relacionadas com a multiplicação (3/5 = 3 x 1/5) e com a divisão (3:5 resulta em 3 das cinco partes de uma unidade)

Foram ainda revisitadas estas grandes ideias de Lovin & Van Walle (2006, p. 251): (i) As partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade; (ii) As partes em que se divide a unidade têm nomes especiais e "dizem-nos", quantas são necessárias para fazer a unidade. Por exemplo, são necessários cinco quintos para fazer uma unidade; (iii) Quanto mais partes se usam para fazer uma unidade mais pequena é essa parte; décimos são mais pequenos que quintos; (iv) O denominador da fração indica por que número, foi dividida a unidade, de forma a produzir a parte pretendida, logo o denominador é o divisor. O denominador indica a parte considerada. O numerador de uma fração "diz-nos" quantas partes da fração (parte indicada no denominador) são consideradas. O numerador é um multiplicador indicando o múltiplo da parte fracionária.

Escolhendo o contexto de trabalho

Essas seriam eram as ideias que Beatriz teria por horizonte no trabalho com os alunos durante o Congresso Matemático, uma discussão coletiva com uma filosofia muito própria que é a de fazer emergir os conceitos matemáticos a partir da envolvência dos alunos na resolução de problemas e da discussão acerca da resolução, dos métodos, e das estratégias utilizados, validando as soluções encontradas ou não, tirando conclusões que servirão de base à resolução de outros problemas, generalizando. A filosofia subjacente ao Congresso Matemático é a da vivência de um trabalho de investigação pelos alunos, em todo similar ao experienciado pelos matemáticos ao longo dos séculos. A matemática não é descoberta, mas construída a par e passo, pelo trabalho destes pequenos investigadores. "O processo de construção de significado é o processo de aprendizagem. Criamos o nosso próprio conhecimento; não o descobrimos" (Dolk & Fosnot, 2002, p. 8).

> A opção de Beatriz por esta forma de trabalhar prendia-se com a necessidade que esta sentia de "deixar os alunos trabalhar de forma mais autónoma" sem ter que estar sempre a "impor-lhe as minhas formas de pensar" (R5, 8).

Durante a preparação do trabalho, ambas fomos vivenciando e experienciando a tarefa e deixando-nos levar pelas ideias matemáticas que iam emergindo, clarificando as nossas próprias ideias acerca das grandes ideias a serem posteriormente trabalhadas com os alunos mas que se tornariam para Beatriz o horizonte matemático a manter, durante a grande discussão coletiva, as ideias a não perder de vista, pois seriam a "sua bússola", durante a viagem que iria iniciar com os seus alunos. Para onde quer que fosse nessa imensa paisagem, estas seriam as suas referências, os seus pontos de passagem obrigatórios que conduziriam as suas intervenções.

Beatriz também escolheu modelos para apoio ao pensamento dos alunos, os modelos que tinham trabalhado na aula anterior, as tiras de papel, as dobragens em papel e agora a baguete; a representação da baguete e a sua partição acabou por constituir para os alunos, um modelo para pensar os números e as operações.

Não foi no entanto, muito liberta que Beatriz se envolveu nesta tarefa. A experiência realizada por nós próprias, envolvendo-nos na realização da tarefa e depois no debate confrontando estratégias convenceu-a do "poder da tarefa". Contudo, senti-a pouco convencida acerca do contexto da tarefa: as baguetes. Para Beatriz, a baguete não é propriamente um contexto do próximo do quotidiano dos seus alunos. "Tem mesmo de ser com baguetes? Ou posso mudar o contexto? Não é usual, os meus alunos comerem baguetes". Esta era a grande questão da Beatriz nos dias que antecediam a aula. Percebi que essa era a questão que a preocupava. Libertei-a da questão dizendo-lhe para escolher os elementos da história que funcionassem melhor com os seus alunos, o importante era manter as questões estruturais da tarefa: o dilema a ser proposto, os números envolvidos, a organização do trabalho de trabalho, a vivência e a grande exploração das resoluções em torno da orquestração de uma discussão coletiva.

5.3.2 Concretizando o trabalho

O dilema colocado aos alunos na tarefa " A visita de estudo e a distribuição das baguetes " que ficou posteriormente com a designação simples de "As baguetes" foi realizado em duas aulas: Na primeira faz-se a apresentação do problema e propõe-se um pequeno debate inicial que tem como objetivo garantir a apropriação do problema por parte dos alunos, ao mesmo tempo que os envolve no contexto. De seguida, os alunos resolvem em grupos o problema e elaboram um cartaz com as suas estratégias de resolução. Na segunda aula é convocado um Congresso Matemático onde apresentam, defendem e apresentam argumentos para as suas ideias quanto à sua resolução, assim como seguem as outras estratégias de resolução, comparando-as, e validando-as após uma discussão orientada pelo professor onde não são alheios os desacordos e considerados como momentos chave para a aprendizagem.

O ponto de partida de um congresso matemático é a resolução de um problema que envolve os alunos na procura de soluções. A realização dos cartazes com as estratégias encontradas para a resolução do problema não são a parte final mas o início de uma grande discussão matemática orquestrada pelo professor, em direção ao horizonte matemático planeado. Nesse momento, dá-se o Congresso Matemático para o qual todos são convocados a partir do momento em que estão aptos a comunicar as suas ideias, soluções, problemas e conjeturas uns aos outros. O que pode ser considerado prova ou argumento convincente, o que é considerado uma ideia forte ou uma estratégia eficiente, ou como podem ser representadas as ideias, o que é falar de matemática, o que pode ser considerado uma ferramenta matemática, o que é uma boa questão matemática, o que serve como uma conjetura é definido na comunidade durante as interações. As respostas surgem das normas socioculturais e hábitos (costumes) que se vão desenvolvendo e de normas sociomatemáticas.

A turma começa a tornar-se uma comunidade a partir do momento em que os alunos estão envolvidos numa atividade, num discurso e numa reflexão.

Envolvendo os alunos através de uma narrativa

Beatriz inicia a aula contando aos alunos uma história que compôs com elementos da própria realidade dos alunos, envolvendo-os na narrativa, suscitando-lhes o interesse pelo problema colocado e desafiando-os a posicionarem-se face à situação colocada: a distribuição do lanche pelos alunos numa visita de estudo. Uma distribuição que estava longe de parecer justa. À medida que vai contando a história vai colocando uma cartolina no quadro onde desenha uma tabela com os locais da vista de estudo. Convida os alunos a sintetizarem a informação na tabela para poderem pensar melhor na situação como se pode ver no episódio que se segue ilustrativo de como Beatriz apresenta a tarefa à turma.

Episódio 1: Será que a distribuição foi justa?

P – Como eu vos disse ontem depois das aulas fui trabalhar com as minhas colegas, e estivemos a planear algumas tarefas…não só de matemática. A professora da escola xxxx contou-me uma experiência que aconteceu o ano passado com a turma dela… Ela tem uma turma muito pequenina e estavam a trabalhar um conteúdo qualquer em estudo do meio … um trabalho de investigação e resolveram fazer uma visita de estudo…

A1 – Aonde professora?

P – A turma foi dividida em três grupos, e cada grupo, foi visitar um local diferente. Vou mostrar o cartaz…

Entretanto a professora afixa no quadro um cartaz com os locais da visita de estudo. Os alunos estão muito entusiasmados a identificar os três sítios e a comentar aonde já foram.

P – Pronto… Alguns de vocês já conhecerão estes três locais mas por agora não interessa nada se conhecem os locais ou não, pois isto é um relato do que aconteceu o ano passado a colegas vossos, está bem?

Os alunos calam-se e ouvem de forma mais concentrada.

P – Então, lembram-se que a turma foi dividida em 3 grupos. Um grupo foi visitar … o outro … e outro… e a visita de estudo foi de manhã. Como a manhã é grande faz falta uma paparoca a meio da manhã. Então a cozinheira arranjou um lanchinho. E arranjou um lanchinho de baguetes. Sabem o que são baguetes?

Várias repostas diversas a propósito do seu próprio lanche.

P – Fui espreitar o lanche do Rafael e ele tem ali uma bela baguete…

A professora mostra a baguete do Rafael.

A2 – Professora, cheira-me a problema de matemática!

P – Arranjou baguetes e então … distribuíram-nas da seguinte maneira: para o Oceanário foram 5 alunos, para Jardim Zoológico também foram 5 alunos…

A3 - A turma ao todo dá 10 alunos.

P - Ainda não colocámos todos os dados, no quadro. Vamos continuar… e para o Pavilhão do Conhecimento foram 4 alunos.

Vários alunos: 14…

P – A turma tinha toda, 14 alunos. Esta é uma turma reduzida tem menos alunos que a nossa. A cozinheira tinha arranjado um lanchinho com baguetes… Vamos lá outra vez… Para o Oceanário foram 5 alunos, para Jardim Zoológico também foram 5 alunos e para o Pavilhão do Conhecimento foram 4 alunos. A distribuição que a cozinheira fez para o lanche dos alunos foi a seguinte… para os 5 alunos do Oceanário, ela deu um saquinho com 3 baguetes…

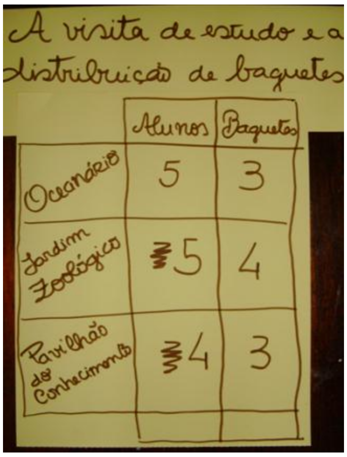


Figura 44 – O cartaz, realizado com os alunos

E vai preenchendo o quadro à medida que vai continuando a história com a ajuda dos alunos.

P – Para estes alunos (os do Jardim Zoológico, deu um saquinho com 4 baguetes, e para os do Pavilhão do Conhecimento, um saquinho com 3 baguetes.

A4 – 10…

A5 – 10 não chega…

A6 – Partem ao meio…

A1 – 10 não chega… não sei…

A4 – 10 não chega, alguém tem de dividir uma baguete ao meio.

A8 – Alguém tem de dividir uma baguete.

As vozes são muitas e é difícil identificar as opiniões que vão sendo dadas, saltando os alunos de ideia em ideia, uns seguindo umas ideias, outros outras. Uma verdadeira “chuva de ideias”…

A3 – Professora … 5 alunos com 3 baguetes têm de dividir ao meio.

Rui - Professora mas assim não é justo…

P – Diz Rui... É injusto porquê?

Rui – Era injusto por que não comiam baguetes inteiras… Ai não… Dois tinham que partir e um fica com uma baguete inteira…

A9 – Três ficam com uma baguete inteira.

P – Vamos seguir o raciocínio do Rui a ver se concordam ou não.

Vários alunos – Eu concordo.

A8 – Três ficam com uma baguete inteira…Em cinco alunos com 3 baguetes têm de dividir ao meio.

Vários alunos – Não é justo!

P – Só um bocadinho… e não se esqueçam do que estão a dizer.

P – Rui, disseste que era injusto porquê? Vamos ver o que ele disse e ver se é justo ou não…

A5 – Assim, alguns não comem.

P - Não, todos vão comer, ninguém vai passar fome.

P – Berta, achas que é justa esta distribuição?

Berta – É injusto.

P – Porquê? Estás a dizer que neste grupo devia de haver 4 baguetes.

Berta – Tinham de haver 4 baguetes e no do oceanário também tinham de haver cinco baguetes e no do oceanário tinham de haver outras 5 baguetes. Assim todos comiam uma.

A7 – Professora, porque há alunos que ficam sem lanchar…

Vários alunos apresentam situações muito criativas.

P – Nós só podemos trabalhar, com estas baguetes. Quando chegaram lá já lá estavam as baguetes. Era só com elas que eles tinham de fazer a sua distribuição…

P – Porque dizem o “só”?

A2 – Por que deviam ter cinco… para os cinco alunos!

A3 – Dois partiam as baguetes ao meio e ficavam com meio.

A4 – Nenhum aluno em nenhum dos grupos ia comer uma baguete inteira.

P – Há algum aluno de algum dos grupos que vá comer uma baguete inteira?

Vários alunos – Não…

P – Há algum grupo em que os alunos comam uma baguete inteira?

A5 – Só um aluno pode comer uma. Os outros comem menos.

P – Então, e isso é justo, dentro do grupo?

P - Como é que nós olhando para ali (o cartaz) sabemos que nenhum aluno vai comer uma baguete inteira?

Ricardo – Por que o número de baguetes é inferior ao número de alunos.

P – Tem de haver justiça. Algum aluno pode comer mais que uma baguete inteira?

A3 – Bem me parecia que estávamos na matemática!

P – Não é possível, estão no local quando se apercebem do número de baguetes em cada grupo. Há algum grupo em que cada aluno coma uma baguete inteira?

A6 – Podemos partir de maneira que dê um bocadinho para todos…

A5 – Podem comer mais de uma baguete…

P – Eles vão comer mais ou menos de uma baguete?

A4 – Só podem comer menos de uma baguete…

P – Mas o que comerem no mesmo grupo tem de ser o mesmo… Justiça para todos dentro do grupo.

A3 – Podemos deitar fora “bocadinhos”?

P – Não, temos de distribuir tudo.

Como se pode ver nos diálogos estabelecidos entre os alunos e a professora, à medida que a história é contada, os alunos vão-se envolvendo e vão fazendo espontaneamente comentários que Beatriz, por vezes deixa passar, outras intervém focando a sua atenção nos aspetos centrais da história e conduzindo os alunos a uma "apropriação do problema" sendo notória a sua determinação na condução do seu grupo em direção a um horizonte que para ela está claro. Muito interessante o comentário de uma aluna que refere "Professora, cheira-me a problema de matemática!" sem que contudo a professora a esclareça. Deixa-a seguir no seu imaginário até que tudo faça sentido. Perante a introdução da história, a aluna não sabia "aonde iria ser conduzida"…

Estando em monodocência a professora trabalha as diversas áreas disciplinares e não parece compartimentá-las. Essa ideia foi posteriormente falada e Beatriz confirma essa perspetiva "holística" de trabalhar as diversas áreas disciplinares. Diz-me: "Quando começo um dia uma história na Língua Portuguesa depois sigo com essa história e trabalho na Matemática, no Estudo do Meio, tento ter um fio condutor que ligue as diversas aprendizagens" (R7).

Beatriz faz uso da narrativa ao colocar a tarefa no centro de uma história. A narrativa foi desempenhando um papel importante no envolvimento emocional dos alunos pois ajuda a criar significado.

A apresentação da tarefa foi feita pela professora sem pressas, levando o tempo necessário para que os alunos se fossem apropriando das condições dadas no problema e dos pressupostos como foi possível seguir no episódio transcrito. Perante a pergunta do aluno se pode deixar bocadinhos, a professora deixa claro "Não, temos de distribuir tudo".

Foi notório o envolvimento emocional dos alunos na situação, analisando a situação apresentada, posicionando-se face ao dilema da justiça da distribuição das baguetes pelos grupos. Sugerem de imediato soluções que a professora vai desviando para os centrar no problema, na contingência da situação que cria o dilema. Claramente, Beatriz trabalha a questão da distribuição por todos os alunos de uma parte igual associada ao valor da justiça, valor a que são muito sensíveis. Ao desafiar a Berta (ver episódio) a dar a sua opinião sobre a justiça ou injustiça e "puxando" por ela para expressar o seu sentimento de injustiça, leva-a a encontrar uma situação simples que reparava a injustiça e que revelava a sua compreensão de que todos comerem uma baguete implicaria ter o mesmo número de baguetes que de alunos. A reflexão realizada de seguida é já em torno do desenvolvimento do sentido de número, ao fomentar a comparação com a unidade, um valor de referência.

Clarificados os pressupostos, todos têm de comer a mesma parte no mesmo grupo, ninguém fica sem lanchar, não podem sobrar bocados, não se podem ir buscar mais baguetes, os alunos começam a ficar “centrados” nas condições de partida e em condições de procurar soluções para esses dados.

Foi com surpresa que ouvi a apresentação da tarefa com a história das baguetes e que a vi iniciar a sua apresentação com uma baguete do lanche de um aluno introduzindo na sua história elementos da realidade dos seus alunos.

O papel do contexto é envolver, ajudar a atribuir significado ao dilema colocado, pelo que o importante não seria serem *bollycaos*, sanduíches ou baguetes mas que a história em que se envolviam lhes fizesse sentido e suscitasse a curiosidade necessária à busca de uma solução, uma vez que a conversação se faz sobre o contexto.“ Quando um contexto é real e faz sentido para os alunos a conversação relaciona-se com o contexto” (Fosnot & Dolk, 2002, p. 28). A situação poderá ser fictícia mas terá de permitir que os alunos sejam capazes de a imaginar e de pensar e agir dentro dos seus parâmetros “ a situação permite que os alunos percebem o que estão fazendo” (p. 29). Se o problema é apropriado pelos alunos e os toca de alguma forma, colocando-lhes um dilema, uma curiosidade, ou se os desafia, começa a ganhar vida.

Apoiando o trabalho dos alunos no pequeno grupo

Durante cerca de uma hora os alunos trabalharam entusiasticamente distribuindo as baguetes pelos alunos de cada grupo tentando identificar a parte de baguete que cada aluno teve direito ao realizarem uma distribuição justa, ou seja, ao fazerem a divisão.

Distribuídos os materiais de apoio ao trabalho, uma folha A3 branca para rascunho e dois marcadores (tendo a professora entregue a cartolina mais tarde) todos iniciaram a resolução do problema recorrendo à representação icónica: partiam do desenho das baguetes e de representações dos alunos (números, cabeças, bonecos) e representavam a divisão a realizar atribuindo a cada aluno quantidade igual de partes. Além de encontrarem dificuldades na divisão em partes, pois nalguns casos ocorria uma mudança de unidade (quinto da metade e não da unidade), deparavam-se também com dificuldades em “nomear” as partes que obtinham esquematicamente. Esse era o principal desafio depois de terem conseguido encontrar um método de resolução, que normalmente seguiam para todos os grupos da visita de estudo.

Beatriz percorreu os grupos todos durante a realização do trabalho, adequando o tipo de apoio à necessidade dos grupos. Para uns bastou uma palavra de incentivo ou uma sugestão relativamente organização do trabalho, noutros, sentou-se e ouvindo as dúvidas ia escolhendo o que dizer de forma a possibilitar o desenvolvimento do trabalho dos alunos sem contudo reduzir o nível de dificuldade da tarefa. Nas suas palavras "queria perceber por onde eles iam, como pensavam" (R5, 10) e refere ainda "dar-lhes um pequeno empurrão se via que estavam meios perdidos" (R5, 11).

Instituindo a cultura de sala de aula

Na aula seguinte Beatriz convida todos a participarem de um Congresso Matemático vivendo o espírito de uma grande comunidade matemática, reunida para conjuntamente analisar os diversos trabalhos e validar as estratégias de resolução. Recorda a primeira discussão realizada, algumas normas que caracterizam a sua cultura de sala de aula, e que vão sendo recordadas criando a identidade dessa comunidade. E convida todos a olharem atentamente os cartazes dos colegas como ilustra o episódio que se segue.

Episódio 2: Convocando os alunos para o Congresso Matemático

P – Na aula passada tinham este problema para resolver: Três visitas de estudo a três lugares diferentes com esta distribuição de baguetes (apontando para o cartaz). À partida olharam para ali e viram que..

Vários alunos – Não havia baguetes suficientes para todos os alunos.

P – E que …

Vários alunos – A partilha não era justa.

P – Então, agora vamos partilhar como todos fizeram. Além da forma de cada um, há outras cinco formas de fazer. Algumas poderão ter erros. Partilharam com o grupo as vossas ideias, chegaram a consensos e nos vossos cartazes está o consenso que o grupo obteve.

A1 – Vamos mostrar a nossa forma de fazer.

P – Para além da tua forma, vais conhecer outras formas de resolução que podem ser iguais às tuas, ou não. Tudo foi construído por vós, e agora, o importante é validar ou não o que se fez.

Vários alunos – Umas serão iguais outras não…

P – Vão comparar as estratégias dos diversos grupos, mas não faz mal se houver algum erro, porque do erro…

Vários alunos – … constrói-se o saber!

P – E não vamos desistir por aqui. A errar é que nós…

Vários alunos – Aprendemos!

> P – Aprendemos com os erros também! Então… A apresentação dos cartazes será de acordo com uma ordem escolhida por mim de acordo com os raciocínios realizados, normalmente uns mais simples, outros um pouco mais complexos, todos podem ser válidos. Portanto, os grupos vão apresentar de acordo com a ordem em que eu numerei os cartazes. Vamos propor aos " matemáticos" do grupo 1 que revelem a sua resolução do problema… Comecem…
>
> O grupo dirige-se para o quadro, onde a professora coloca o cartaz.
>
> Há diversos movimentos na sala, dirigindo-se o grupo 1 do cartaz azul para o quadro. Outros alunos solicitam à professora o seu próprio cartaz.
>
> P - Neste momento não vão precisar do vosso cartaz para nada. Vão ter de se preocupar em ouvir os raciocínios dos vossos colegas e verificar se estão bem. Eles têm de vos convencer que a estratégia deles é correta e depois verificar se é eficaz ou não.
>
> P – Deixem só eles verem primeiro o vosso cartaz! Quem conhece o vosso cartaz são só vocês e eu…

Na cultura da sua aula que vai instituindo à medida que vai vivendo a relação e a interação com os alunos, como podemos ver em algumas das suas intervenções, Beatriz dá importância:

a) A normas sociais para um bom funcionamento da sala, como: a escuta ativa, "Vão ter de se preocupar em ouvir os raciocínios dos vossos colegas"; participação ativa, "Partilharam com o grupo as vossas ideias, chegaram a consensos e nos vossos cartazes está o consenso que o grupo obteve (…) agora, o importante é validar ou não o que se fez."
b) A valores essenciais na formação dos alunos e da comunidade de sala de aula, como: (i) a valorização do saber e da construção do saber pelo trabalho árduo da comunidade "Tudo foi construído por vós" ; (ii) a valorização do trabalho de equipa "Partilharam com o grupo as vossas ideias, chegaram a consensos e nos vossos cartazes está o consenso que o grupo obteve"; (iii) a aprendizagem a partir do erro, "Aprendemos com os erros também"; a responsabilidade partilhada na validação das soluções encontradas e estratégias usadas (alunos e professor corresponsáveis pela validação do trabalho realizado); (iv) a persistência e a disciplina não desistindo perante um erro, "E não vamos desistir por aqui".
c) A normas sociomatemáticas, o que é considerado válido relativamente à matemática, nesta comunidade de aprendentes, como: a diferença matemática, que consiste na distinção entre diferentes estratégias "outras formas de fazer", "o importante é validar ou não o que se fez"; a sofisticação matemática, além de distinguir as estratégias, identificar a sua eficácia para uma dada situação, "Eles

têm de vos convencer que a estratégia deles é correta e depois verificar se é eficaz ou não".

d) Ao trabalho com diversas estratégias e com a verificação da eficácia da estratégia; a professora está a colocar-se numa perspetiva de trabalho com os números, a partir do significado que assumem no contexto do problema, e numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, levando a uma maior compreensão dos números e das operações.

Emergindo a noção de adição de frações

Durante o congresso matemático, Beatriz continuou a suportar e a encorajar o desenvolvimento das ideias dos alunos, através da apresentação das estratégias dos alunos e das suas explicações e argumentos.

No episódio 3 pode-se ver o primeiro cartaz escolhido por Beatriz (figura 45) porque referiu "a estratégia pareceu-me a mais simples de compreender, dividir cada baguete em cinco partes e ir buscar a parte de cada um." A "grande ideia" embebida no contexto do problema é a relação entre a fração e a divisão – a fração é uma divisão, e vai emergindo nas representações dos alunos e sobretudo no diálogo desenvolvido em torno da discussão das estratégias por eles desenvolvidas.

A sua grande preocupação era simultaneamente manter o horizonte matemático, garantir o trabalho das grandes ideias, da estrutura da matemática e simultaneamente do desenvolvimento dos alunos, de todos os alunos. É neste limiar que tem de caminhar. Não pode largar nenhum dos seus objetivos. Uma forma de acompanhar o desenvolvimento dos processos de pensamento dos alunos é pedir que intervenham para "convencer outros colegas" como se pode acompanhar no episódio 3:

Episódio 3: E por que é que essa parte se chama um quinto?

A1 – Não estou a perceber desde o princípio, eu!

Rui (explicando sem ser percetível) – Então, ………

P – Matemáticos, ouviram? A A1 colocou uma questão. Será que vocês a conseguem resolver?

Alunos do grupo – Claro.

A1 – Não percebi, desde o princípio!

Várias vozes – Nem eu, professora, nem eu… (não estavam a perceber)

P – Se calhar, é melhor começar tudo desde o princípio…

Rui – Então, eram cinco alunos e havia três baguetes... Cada a baguete foi dividida em cinco partes.

Gonçalo – Nós dividimos três baguetes em cinco partes.

P – Ou seja, cada baguete foi logo dividida em cinco partes.

Rui – E depois…

P – Por que é que dividiram cada baguete em cinco partes?

Rui – Porque eram cinco alunos. Não podia sobrar…

Gonçalo – Não podia sobrar… Dividimos em cinco e outra vez em cinco… eram cinco alunos.

Rui (sobrepondo-se ao raciocínio do colega) – Fomos dividir outra vez e deu um quinto mais um quinto, mais um quinto.

P – O que é que é um quinto?

(Silêncio)

P – Por que é que essa parte se chama um quinto?

Rui – Por que tem cinco partes divididas e só tem uma pintada.

P – Concordam?

Vários alunos – Sim!

Uma voz – Já estou a perceber…

Alguns alunos – Eu também!

P – E por que dizes que cada um comeu três quintos?

Gonçalo – E depois estes quintos é o que cada aluno comeu (apontando para cada um dos três quintos). Eram três baguetes, cada um comeu três quintos.

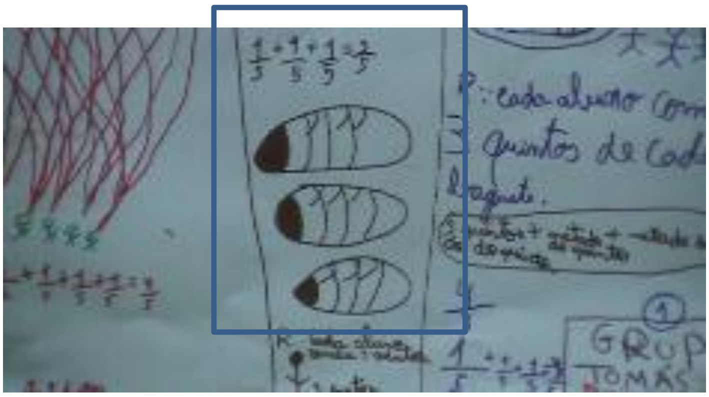


Figura 45 – O cartaz com a estratégia do grupo do Rui e do Gonçalo

“Por que é que dividiram cada baguete em cinco partes?” é a intervenção que a professora faz, que lhes permite explicitar a ideia de que relacionaram a fração com a divisão. Trabalham com quintos porque são cinco os alunos, tendo que obter cinco partes iguais, a ideia de partilha justa inerente ao contexto do problema.

Beatriz insistiu com Rui para explicar a sua resposta que para ele e os do seu grupo podia ser clara mas que para todos os outros podia não o ser. Ao fazê-lo enfatiza outra grande ideia: as frações podem-se somar se a unidade é comum. Na primeira intervenção o Rui faz o raciocínio através da adição, um quinto, mais um quinto, mais um quinto, são três quintos, da segunda vez diz questionado pela professora faz "como que uma generalização" recorrendo à multiplicação das partes (cada um comeu um quinto, três baguetes, três quintos, 3 x 1/5). O grupo do Rui fê-lo de uma forma intuitiva e Beatriz dá força à ideia ao incentivar o aluno para reforçar a sua explicação faz emergir esta ideia.

Emergindo a noção de multiplicação de frações

O quarto cartaz escolhido por Beatriz foi o do grupo do João e continha uma estratégia diferente da seguida pelo grupo do Rui, mas igual à do grupo que tinha apresentado anteriormente. Contudo não estava correta. A primeira intervenção gerou uma grande confusão de ideias no próprio grupo e nos restantes elementos da comunidade. "O que parecia já tão certinho, tornou-se de repente uma confusão… foi como se andássemos para trás" (R5). A primeira grande questão a ser trabalhada por Beatriz foi a do tamanho das baguetes:

Episódio 4: Mas na realidade são as três de tamanhos diferentes ou as três do mesmo tamanho?

Vários alunos – As baguetes não são iguais!

P – Desenhaste-a assim mas não foi de propósito ela ser maior?

João – Não! Bem foi de propósito para se ver melhor porque eram muitas partes, mas são do mesmo tamanho.

P – Mas na realidade são as três de tamanhos diferentes ou as três do mesmo tamanho?

Berto – São do mesmo tamanho.

P – De certeza? Concordamos com isto?

Vários alunos –Sim.

P – Comunidade, está combinado então que as baguetes são todos do mesmo tamanho.

Parecendo ter de andar para trás no percurso já realizado anteriormente, Beatriz reforçou uma vez mais esta ideia, apoiando assim alguns alunos para quem esse passo ainda não estava claro.

Beatriz pediu ao grupo para retomar a apresentação da sua estratégia assumindo todos este pressuposto e apesar da representação pictórica induzir outra ideia. A estratégia que o grupo seguiu foi dividir as baguetes em metades e depois em quintos. Contudo, surge outro impasse de seguida que se prendeu com o fato de nem todos terem recebido uma metade. O episódio que se segue relata a discussão a partir deste momento.

Episódio 5: Por que é meio quinto e não um quinto?

Continua a discussão em torno da apresentação dos colegas.

A10 – Mas o aluno 5 não comeu o mesmo.

João – Pois não, falta uma metade para o 5

A9 – Só comeu a fatia pequena.

P – Como o fariam então? Vamos descobrir!

Os alunos recomeçam a distribuição.

Gonçalo – Partimos em metades.

Berto – Distribuímos cada metade para cada menino. Cada menino, recebe uma metade.

P – O menino 1 recebeu a metade 1, o menino 2, a metade 2 e assim…. Já estão a perceber?

Vários alunos – Sim.

P – E ficaram por aí, não comeram mais nada?

Harry – Ainda comeu mais um destas partes.

P – E a essas partes chamámos…

Gonçalo – Meio quinto!

P – Concordam?

João – Cada aluno comeu metade mais meio quinto.

P – Por que é meio quinto e não um quinto?

A3 – Meio quinto é um quinto de meia baguete.

A2 – Se fosse um quinto teria de ser a baguete inteira .

A6 – Parte e metade é sempre a mesma coisa?

P – Não, parte e bocado é que é a mesma coisa. As partes podem ser metades, quintos, ou outra coisa. Vamos chamar parte aos bocados de baguete, combinado?

A6 e outros alunos – Combinado!

A5 – Esta estratégia é igual à do grupo anterior.

P – Os vossos colegas estão a dizer que esta estratégia é igual à do grupo anterior (cartaz verde).

Vários alunos – É verdade!

Perante a intervenção do colega que questiona o fato de o aluno 5 não ter comido o mesmo que os restantes, João assume o erro (Fig.46). Beatriz sugere então um recomeço do raciocínio: “ Como o fariam então? Vamos descobrir!”. Desta forma incentivou os alunos a uma autorregulação (Fig. 47).

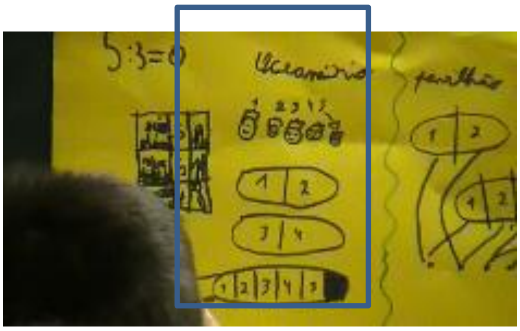


Figura 46 – O erro na estratégia

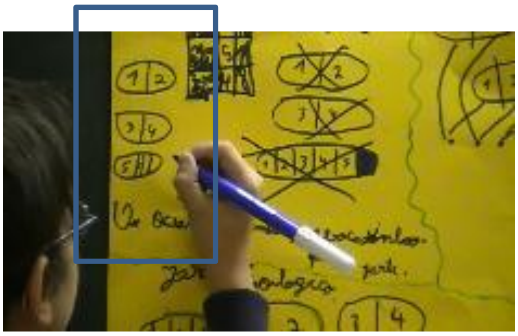


Figura 47 – O recomeço do raciocínio

O erro ao invés de ser “uma pedra na engrenagem”, tornou-se “ motor de arranque” para um novo desenvolvimento, a partir do anterior. O que Beatriz fez foi trabalhar com as confusões dos alunos, sendo estas parte da discussão e não elementos s deixar de fora. Trabalhou no desequilíbrio do aluno, usando as “confusões” para todos darem passos mais seguros no percurso de aprendizagem. Refletindo sobre este episódio que para ela foi surpreendente, refere:

> O trabalho com a estratégia errada foi muito importante, no entanto, não ia prever essa estratégia errada, contudo …senti-me preparada para a trabalhar. Não vou adivinhar as intervenções, a forma como lidam com a dificuldade mas posso estar atenta e aproveitar (R5, 62)

E acrescenta recordando os momentos recentemente vividos: “ Com tão pouco, pode-se criar tanto… bastam pequenas coisas para despertar alguma coisa. Tenho de planificar tudo muito bem para poder fazer uma boa tarefa, mas não é suficiente. Tenho de aproveitar o momento da discussão, no próprio momento” (R5, 134).

Beatriz aproveitou esta estratégia para fazer sobressair uma grande ideia matemática que estava emergente. Cada aluno do planetário recebeu metade de uma baguete e um quinto de metade de baguete. Um quinto de metade é uma relação de relação. Houve aqui uma mudança de unidade que não permite a soma das diferentes parcelas. Para isso têm de arranjar forma de a unidade ser a mesma. Intuitivamente A2 responde que para ser um quinto teria de ser da baguete inteira. Se o quinto é da metade não é quinto. É outra coisa, outra parte da mesma unidade.

Beatriz realizou o trabalho com essa ideia de uma forma mais profunda no seguinte diálogo:

Episódio 6: Duas quintas partes diferentes

Pedro – Nós tínhamos três baguetes. Dividimos ao meio e demos uma a cada aluno. Depois sobrou uma metade. Depois … dividimos a metade em cinco partes.

P – Como se chamará essa parte representada a branco?

A6 – Um quinto.

P – Concordam que ….

Vários alunos – Sim

P – Porquê?

A7 – Porque está dividida em cinco partes.

P – Está certo? Sim…

Vários alunos – Não…

Nuno – Só dividi metade da baguete.

P – Mas o que é a quinta parte?

Perante a discordância a professora pega no cartaz azul.

P – Esta quinta parte (uma baguete dividida em cinco partes) é igual a esta?

Vários alunos – Não…

Foi só metade da baguete que dividimos.

A8 – Ali, a baguete inteira está dividida em cinco.

P – Aqui o que foi dividido em cinco, a metade ou a baguete inteira?

A7 – A metade.

P – Como lhe poderemos chamar?

Pedro – Meio quinto…metade de um quinto.

A8 – Só a metade é que foi dividida em cinco…

A9 – Fica metade de um quinto.

P – Pode ser válido?

Pedro – A metade está dividida em cinco. Então temos metade de um quinto.

Outra "grande ideia" relacionada com o desenvolvimento do sentido de número é a de que um quinto é uma grandeza relativa. Depende da unidade de referência. Beatriz trabalhou com os seus alunos esta ideia que emergiu da necessidade de repartir por cinco alunos a metade de uma baguete. Distinguir um quinto de uma baguete de um quinto de meia baguete e ainda mais converter essa quantidade a um todo comum indicia uma certa destreza com os números e as operações designada por McIntosh, Reys e Reys (1992) sentido de número. Nesta fase esse passo ainda é difícil para os alunos como se pode notar no episódio 7.

Episódio 7: E se em vez dividíssemos a outra metade também em cinco partes?

Nuno – Nós dividimos a baguete inteira em bocadinhos. Mas a outra que sobrou dividimos em cinco partes.

P – Houve uma metade que eles deixaram inteira. E a outra metade que sobrou é que dividiram em cinco bocadinhos, foi?

Nuno – Sim. Mas podíamos ter dividido a baguete toda em bocadinhos.

P – Se dividíssemos a outra metade da mesma baguete em cinco bocadinhos…podia?

Pedro – A baguete toda ficava dividida em 10 partes, porque 5 + 5 é 10.

A1 – Concordo, se dividíssemos em cinco as duas metades havia 10 bocadinhos.

A – Demos uma metade a cada menino mas sobrou uma metade e demos cinco metades de quintos a cada menino. (O aluno queria dizer que deu metades de quintos).

Os alunos não conseguem compreender bem que nome dar à quinta parte da metade. A professora tenta fazê-los compreender que ao dividirem metade da baguete em quintos não tem quintos, mas tem décimos. Beatriz referiu "ter sido difícil compreender esta mudança" e que "foram necessários, outros momentos, outras situações para perceberem esta ideia" (R5, 15). Muitas vezes o trabalho com as "grandes ideias" matemáticas tem de surgir várias vezes, através de diversos tipos de tarefas, o que significa que se terá de passar pelos marcos, os pontos de referência na paisagem de aprendizagem a que aludem Fosnot e Dolk (2002), várias vezes. Não através de um percurso mas de vários, como alguém que faz uma viagem e nunca segue o mesmo caminho para ter diversas perspetivas da paisagem.

Fração como quociente

Só após a discussão da estratégia desenvolvida pelos alunos e da reformulação do raciocínio, pelo grupo acompanhado por toda a "comunidade matemática"[31] é que Beatriz os desafia a explicarem o que significa 5:3. Apesar de os elementos do grupo serem perentórios na resposta, Beatriz quer um esclarecimento mais profundo. Incentiva-os à leitura da expressão à luz do contexto do problema: O que significa escrever 5:3?

[31] "Comunidade matemática" expressão de Van Walle e Lovin (2006)

Episódio 8: A minha dúvida é o que representa 5:3?

P – Agora que já explicaram a vossa resolução, posso colocar uma questão? Têm 5: 3. O que significa?

João – Está errado.

Berto – Foi um engano…

P – Mas não querem pensar nisto? O que são o 5 e o 3?

A7 – Cinco alunos a dividir por três baguetes.

Outros alunos – Não faz sentido!

João – Queríamos dividir as três baguetes pelos cinco alunos (Fig. 48).

P – Mais alguma questão que queiram colocar?

Muitos alunos – Não!

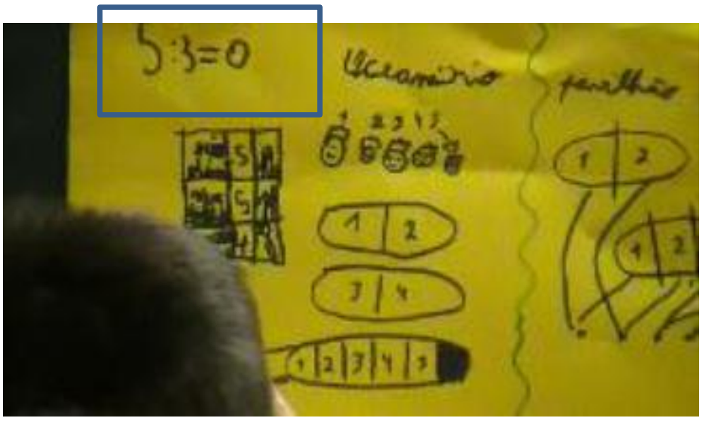


Figura 48 – O significado de 5:3

Beatriz ao suscitar a ligação dos números ao problema, contextualizando, procura atribuir-lhes significado. Apesar desta expressão, estar no cartaz desde o início, e de intuitivamente, os alunos recorrerem à divisão para expressarem a partilha justa, inicialmente incorreram em erro. Ao remetê-los de novo ao contexto do problema, os alunos pareceram resolver a questão sem problemas afirmando ter sido um engano. Beatriz quis certificar-se de que, atribuíam sentido aos números e à operação. Numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, importa que os alunos desenvolvam um conhecimento intuitivo das frações, em que os números tenham estejam associados ao contexto, representem entidades concretas e não abstratas, tenham “rótulos” [32]. Até que, à medida que se desenvolve a sua capacidade de abstração, “os números podem ser separados de tais situações e podem começar a formar um mundo próprio no seu pensamento das crianças” (van Galen, F. et al., 2008, p.15)

[32] “labelled and unlabelled numbers” no original, van Galen, F. et. al. (2008)

5.3.3 Refletindo com Beatriz

Para Beatriz foi novidade trabalhar uma tarefa em contexto de congresso matemático. Se já tinha por hábito ter uma aula em que gostava de dar a voz aos seus alunos, não conhecia a filosofia de trabalho em congresso matemático. Falando sobre essa experiência descreve-a assim:

> Num congresso matemático, para o aluno, há uma partilha, há raciocínios, há conclusões… [o aluno] irá escolher noutra altura uma estratégia a utilizar que poderá servir depois. Ouve os outros e forma como fazem… e porque escolheram fazer assim. Ouvindo os outros vai construindo o seu próprio saber…(R8,7).

Logo após o congresso matemático, Beatriz menciona que " de forma intuitiva, eles trabalharam praticamente todas as grandes ideais relacionadas com a construção do conceito de número racional. Dividiram no número de pessoas para que as partes fossem justas, mesmo sem lhes chamar o nome…" (R10,6).

> Estava lá tudo, não com os nomes, mas estava lá tudo. Como tarefa inicial, não bem a inicial, mas o primeiro grande problema, tinha lá tudo. Podiam-se trabalhar as ideias centrais do conceito de fração a partir da resolução do problema. Contudo, houve pequenas tarefas que já lhes deram essa noção. Se não houvesse a ideia da partilha justa, já trabalhada noutra tarefa anteriormente, se calhar não dividiam igualmente… (R10,8)

Pensando no seu papel como professora, sentiu que algo mudou. Sente o papel do professor noutro nível. Ao nível de um membro entre outro da comunidade de prática, com uma responsabilidade diferente. Mas não o detentor do "poder do conhecimento". Sente que o professor tem o papel crucial de fazer emergir a discussão em torno de ideias matemáticas mas trabalhando essas ideias através das ideias dos alunos, daquilo que vão exprimindo, da sua própria experiência matemática. " "O papel do professor é um papel pouco interventivo… pelo menos como o que era costume ser interventivo" (R8,7). Contudo sente necessidade de intervir quando as intervenções dos alunos não ocorrem. "Eu fui muito interveniente, mas por outro lado, não podia deixar passar o tempo. Essa dualidade é constante, eu acho que vai acontecer sempre noutras situações. Esse é o papel difícil que o professor tem. Agir nesse momento… Mesmo sem certezas! (R8,70). E pedindo-lhe que exprimisse como geria essa escolha entre o dizer e o não dizer, Beatriz explicita " [o professor] está a ouvir, a acompanhar a caminhada dos alunos… Se é altura, 'o momento certo e a hora certa' há que colocar as questões centrais. Mas primeiro esperar e depois não largar!” (R8, 46), “essa dualidade existe sempre, constantemente” (R8, 47).

Beatriz refere um aspeto emocional que se relaciona muito com a forma como o professor age com os alunos e o ensino. O fato de sentir insegurança pode condicionar a sua atitude

> (…) Primeiro a minha ansiedade e depois no início, eles estavam muito pouco interventivos. Acabei por intervir mais no início. Até ganhar confiança… Depois o meu papel foi-se tornando pouco interventivo, os alunos foram colocando as questões que eu podia levantar. Mas no início senti dificuldades … (R8, 49)

Explicitando as dificuldades sentidas refere “Não intervir tanto, deixar de ter o papel de primeira protagonista. Eles aprenderam comigo e eu com eles. Neste primeiro congresso, reconheço que o meu defeito, foi ser demasiado interventiva” (R8, 54). E assume que era por receio de não conduzir bem a discussão, de não conseguir levá-los aonde desejava que fossem.

Refletindo sobre o que significava apresentar um trabalho e realizar um congresso matemático, Beatriz compara com os trabalhos que apresenta noutras áreas: “Podem levantar questões, mas não, no estudo do meio não há a preocupação de acompanhamento de um processo, é uma apresentação simples, não dá origem a discussão em torno de conceitos, nem grandes argumentações”. (R8, 28).

Desafiando-a a dar conselhos a um colega para a realização de um congresso matemático, Beatriz salienta de imediato “As tarefas de um congresso matemático, nós temos em primeiro lugar que as fazer. Experimentarmos nós próprios as tarefas, fazê-las nós, sentir as dificuldades do próprio processo. Antecipar as dificuldades e as intervenções dos alunos” (R8, 58). Obviamente que nos questionámos se esta situação não seria generalizável para o professor, independentemente do contexto de trabalho da tarefa. Beatriz reage de imediato: “Claro que sim, o professor deve preparar sempre a tarefa, mas o que me ocorreu de repente foi como a preparação da tarefa, no sentido de a fazermos mesmo e de discutirmos com outros, é muito importante” (R8, 60). O que acontece é que “… ao preparar-me eu sabia que estaria em melhores condições para enfrentar o imprevisto” (R8,66). E numa aula em que se discutem abertamente ideias, o imprevisto acontece.

Refletimos também que esta primeira experiência de congresso matemático tinha sido realizada com a tarefa proposta por Fosnot & Dolk (2002) para o estudo das frações, decimais e percentagens. Contudo, outras tarefas poderiam ser trabalhadas usando este contexto. E a pergunta que surgiu foi, que tarefas? Que características terão de ter as tarefas? Beatriz diz que as tarefas deverão ser " Problemas abertos para [os alunos] terem a hipótese de seguirem vários caminhos (…) que o contexto é importante para permitir a envolvência dos seus alunos, motivando-os, envolvendo-os"(R8, 22). Beatriz menciona "a produção de cartazes, também é importante, concretiza, valoriza, deixa uma marca no tempo que se pode tornar um recurso de sala de aula em momentos seguintes" (R8, 24).

Deixando um remate final no trabalho com este contexto de aprendizagem, pedi-lhe que explicitasse o que considerava ter sido influência desse contexto nas aprendizagens que se foram realizando em torno da tarefa "A visita de estudo e distribuição das baguetes". "Convencer, orientar, verificar, certificar, apresentar outra forma de fazer… perceber se a forma de fazer é válida matematicamente. A apresentação estimula a envolvência dos alunos, ajudou a mantê-lo curioso…" (R8, 32).

Olhando para o trabalho desenvolvido pelos alunos Beatriz considera ser surpreendente na terceira aula da unidade, os alunos terem desenvolvido uma certa compreensão da fração: "como se umas ideias se fossem ligando às outras" (R5, 7). É como se Beatriz estivesse a ver o seu trabalho com as ideias dos alunos, com a imagem de uma grande rede que vai ligando pontinhos criando aos poucos ligações e ligações entre as ideias, desenvolvendo uma compreensão conceptual.

Que compreensão? Que quantidade de compreensão? Usando a imagem do continuum da compreensão de Van Walle e Lovin (2006), a compreensão estende-se num sentido designado por instrumental, quando não existem muitas relações entre as ideias e noutro sentido, designado por conceptual, quando as relações entre as ideias se multiplicam, formando uma grande teia entre as ideias novas e as existentes.

Contudo o trabalho de Beatriz irá também passar pela ligação entre as ideias. Tendo clarificado os pontos de passagem caberia a Beatriz encontrar a forma de passagem. "Ensinar e estudar com problemas, representar e comunicar acerca das conexões entre ideias e temas mais vastos nas quais essas conexões estão localizadas é uma peça essencial no trabalho do professor" (Lampert, 2006, p.435)

5.4 Um dilema em torno do tamanho da unidade: Trabalhando a natureza relativa da fração

Esta tarefa " A discussão do João e da Maria"[33] surge também, na segunda etapa da trajetória (II) *Da simbologia da fração ao "sentido de número fração"* e é a sétima da sequência. Aparece depois de um conjunto de tarefas, de onde foi emergindo o significado de fração como operador, a partir de situações de partilha equitativa e da fração como parte de um todo. A questão da "justiça entre as partes" muito trabalhada por Beatriz na tarefa anterior, "A visita de estudo e a distribuição das baguetes", deixou uma ideia forte: para comparar frações temos de estar referenciados à mesma unidade. Nas tarefas anteriores, o foco esteve na comparação de quantidades relativas à mesma unidade através dos significados de parte-todo e de quociente. Como a professora foi salientando, "podemos comparar, pois temos sempre baguetes iguais".

5.4.1 Preparando o trabalho com Beatriz

A tarefa que propus foi retirada das Provas de Aferição de 6º ano de 2001. Propus a tarefa por a considerar muito interessante, na medida em que permite ao professor inverter os padrões de pensamento que foram sendo usados nas tarefas anteriores. No fundo, um raciocínio inverso, ao que se foi fazendo anteriormente: só podemos comparar duas frações se criarmos uma unidade comum. É a natureza relativa da fração que emerge: só podemos pensar na parte como quantidade se soubermos o tamanho da unidade.

Durante a preparação das aulas, discutimos o interesse da tarefa "A discussão do João e da Maria" para trabalhar a natureza relativa da fração e a professora considerou que poderia proporcionar um debate favorável à clarificação e aprofundamento do conceito. Assim, considerou que seria interessante incluí-la, na sequência.

A tarefa que passou a designar-se por "A discussão do João e da Maria", é uma adaptação da tarefa de Beatriz da tarefa proposta. Perante a questão colocada: "Quem terá comido mais?" (o João comeu metade e a Maria um quarto), que é uma formulação

[33] A tarefa encontra-se no anexo 7

semelhante à da tarefa anterior (das baguetes), há no entanto três respostas possíveis, que dependem do tamanho do chocolate de cada um deles.

A questão colocada inicialmente era a de se seria possível, ambos terem comido o mesmo. Beatriz deixa a questão "mais aberta".

O quadro 15 explicita as grandes ideias a ter por horizonte, no trabalho com os alunos, nesta tarefa.

Quadro 13 – As grandes ideias para a tarefa " A discussão do João e da Maria", adaptadas de Fosnot (2007)

As grandes ideias	
❖ Frações são relações – o tamanho ou a quantidade da unidade interessa ❖ Frações são relações parte-todo ❖ Frações são quocientes	❖ Frações são quantidades (medida) ❖ Frações podem ser pensadas como operadores

Beatriz é muito cuidadosa na escolha das tarefas, procurando encontrar contextos familiares aos alunos, o que revela não só sensibilidade matemática, como também, um profundo conhecimento sobre os seus alunos, que oportunamente usa para ensinar Matemática:

> Não é só colocar um problema que seja giro… é fundamental que esteja relacionado com o dia-a-dia da criança pois desperta-lhes mais o interesse e eles percebem o que é que lá está; é criar-lhes condições para que eles desenvolvam estratégias para resolver aquele determinado problema; (...) é conter determinados ingredientes…que fazem parte da suas histórias de vida, facultar-lhes meios para que o que lhes é pedido fazer mais sentido.34

Este cuidado revela-se, por exemplo, no enunciado da tarefa (Fig.49) que foi adaptado das Provas Nacionais de Aferição de 2001, do 6.º ano de escolaridade: "Sim, foi o avô que gosta muito de oferecer chocolatinhos à neta…foi ligado à realidade deles. Os próprios avós fazem-lhes esses miminhos".

[34] Reflexão de Beatriz feita na sessão de trabalho 8 onde foi analisada a aula em que foi apresentada a tarefa. A quase totalidade, dos extratos do discurso de Beatriz, incluídos neste texto, são provenientes desta sessão ou aula.

A discussão do João e da Maria

Ontem o João esteve em casa da Maria, para fazerem um trabalho de investigação em grupo. Como é costume, o avô da Maria, sempre que a visita, leva-lhe um docinho! E durante uma pausa no trabalho que estavam a fazer, a Maria e o João foram apanhados de surpresa…o avô tinha trazido chocolates!!

No dia seguinte, já na escola, o João e a Maria comentavam um com o outro :

- O meu avô deu-me um quarto de um chocolate ! - dizia a Maria.
- E a mim deu-me metade de um chocolate ! - dizia o João.

Na tua opinião, quem terá comido mais? E quem terá comido menos?

Explica o teu raciocínio.

Figura 49 – A tarefa do João e da Maria

Como se pode constatar, a adaptação feita por Beatriz remetia para um contexto mais familiar aos seus alunos. A história coloca-os no centro de uma história que pode ser a história deles. Além disso, a questão colocada era mais aberta do que a das provas de aferição, o que permitiria encontrar várias soluções em função do tamanho do chocolate. Desta forma, a professora enriqueceu a tarefa criando condições mais favoráveis a uma discussão matematicamente rica.

5.4.2 Concretizando o trabalho

Apresentando a tarefa e o contexto de trabalho

Beatriz apresenta a tarefa à turma, começando por lhes "contar", mais do que ler, a história que dá corpo ao problema. Ainda está a escrever no quadro o título da tarefa e já um aluno reage dizendo que é muito fácil. Beatriz lida com a intervenção salientando, implicitamente, a necessidade de reflexão: "Vocês (…) não se contentam com isso [tarefas muitas fáceis] (…), habituaram-me a mais… então tenho vindo a aumentar o grau de exigência (…). Talvez não seja assim tão fácil quanto parece". Em seguida, diz aos alunos que, em pares, devem encontrar soluções para o problema e que posteriormente todos discutirão as soluções encontradas.

A professora considerou que o trabalho de pares teria vantagem, pois os alunos poderiam ter seguir mais facilmente o raciocínio do colega e partilhar o seu.

Apoiando os alunos no seu trabalho

Os alunos começam a trabalhar verdadeiramente entusiasmados, e Beatriz percorre as carteiras, apoiando-os e respondendo a perguntas que, de início, se prendem sobretudo com a interpretação do problema. Ouve-os, responde às suas questões e vai valorizando as ideias a desenvolver ou dando uma pista para fazer um aluno pensar numa questão.

Núria, que não era ouvida pelo colega, aborda-a para lhe perguntar se os chocolates tinham de ser iguais. Beatriz responde que podem ser ou não pois "não sabemos qual era o tamanho dos chocolates que o avô deu" e acompanha-a ao seu lugar incentivando-a a debater com o seu colega a ideia e reforçando, juntos de ambos, ser bom pensarem na questão daquela maneira. Após o trabalho de pares passa à apresentação e discussão dos raciocínios e verifica que todos se centram na ideia de os chocolates serem iguais e, por isso, o João ter comido mais chocolate do que a Maria,

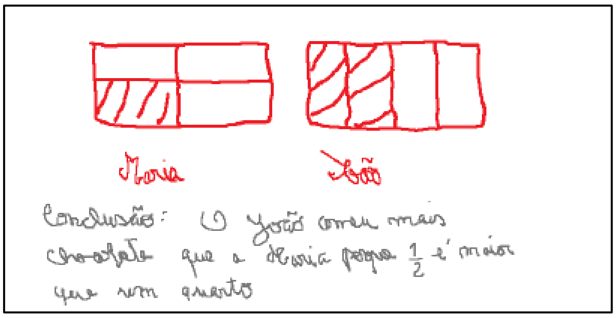


Figura 50 – A conclusão de consenso

Consenso na turma, e muito entusiasmo por parte dos alunos, orgulhosos da sua resolução. Na Beatriz noto a sua deceção: "Então Núria e a tua ideia?".

Toca para o intervalo, os alunos saem e fazemos, como é usual, uma pequena reflexão partilhando ideias e sentimentos. Beatriz está desapontada com a tarefa e com a reação dos alunos, contrariamente ao que tinha acontecido em aulas anteriores em que manifestava abertamente o seu entusiasmo: "Eu queria que saíssem dali várias coisas e não saíam… só estavam concentrados na ideia de que os chocolates eram iguais e como tínhamos preparado a aula antecipadamente sabíamos que isso era apenas uma das hipóteses" (R10, 23)

Trabalhando no desequilíbrio dos alunos

Face à desilusão de Beatriz, disse-lhe parecer-me natural os alunos responderem comparando as frações relativas à mesma unidade, pois essas tinham sido as ideias trabalhadas nas tarefas anteriores. Este era o momento do impasse e até de uma mudança, de um alargar do próprio conceito de fração e, portanto, naturalmente um momento que poderia tornar-se mais difícil de gerir. E devolvi-lhe a questão: O que é que poderia fazer para chegar a trabalhar as ideias que estavam subjacentes à escolha desta tarefa?

Iniciada a aula, determinada e mais tranquila, escreve no quadro: "E se os chocolates forem de tamanhos diferentes?". Propôs, então, aos alunos que voltassem a pensar na tarefa. Estes trabalharam cerca de quinze minutos e depois passou-se à fase da discussão. Neste âmbito, chama ao quadro o par Núria e André. Para sua surpresa, pois tinha-lhe parecido, pela anterior conversa com Núria, que esta aluna punha a hipótese de nem sempre o João comer mais chocolate do que a Maria, constata que, apesar de terem considerado chocolates de tamanhos diferentes, a conclusão a que antes tinham chegado se mantém como se pode ver na figura 51.

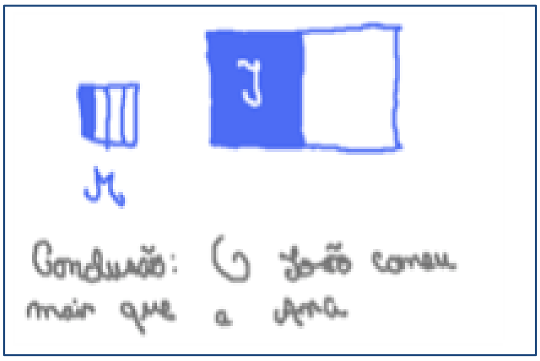


Figura 51 – A conclusão da Núria e do André

É nesta altura que surge o episódio 1, apresentado em seguida:

Episódio 1: Há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João

P: Se os chocolates forem iguais quem é que come mais?

Vários alunos: O João.

P: Porquê?

A1: Porque a metade é maior do que um quarto.

(...)

P: E se houvesse dois chocolates mas fossem de tamanhos diferentes?

Núria: Professora, se fossem dois chocolates há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João. Se o chocolate do João fosse mais pequeno e ele comesse só metade, e se o chocolate da Maria fosse normal, grande (aponta para a figura 52 que foi desenhando no quadro).

P: Todos perceberam?

Algumas vozes: Não!

P: Não? Nem todos estão a olhar atentamente para a Núria. Vamos ouvir a Núria que é ela que está a explicar.

Núria: Se o chocolate do João fosse mais pequenino que o da Maria… se fosse um chocolate mais pequeno que o outro, se calhar até podiam comer a mesma coisa.

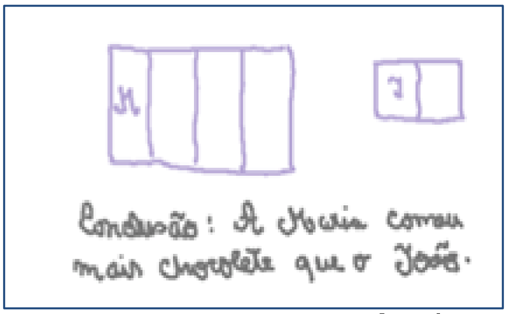


Figura 52 – A representação de Núria

P: E por que é que isto pode acontecer? Por que é que ao ter um chocolate mais pequeno o João pode comer o mesmo que o quarto de chocolate da Maria?

A3: Se a metade é maior que um quarto…

P: Mas porque é que então podem comer a mesma quantidade? (...) Por que é que metade do chocolate do João pode representar a mesma quantidade que um quarto do chocolate da Maria?

Núria: Por que este que é mais pequeno e a quantidade que o João come do mais pequeno pode ser igual… pode ser igual à quantidade que a Maria come … se o dela for o grande.

A6: Pois é professora, concordo!

A4: Se for assim, talvez eles comam a mesma quantidade.

P: Mas porquê? Por que é que pode ter comido o mesmo, ou até menos que a Maria? Como é que isso pode acontecer?

A1: Por que dividimos o chocolate do João em metades e o da Maria em quartos.

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

A7: É mais pequena a parte do chocolate pequeno.

A1: Porque a minha unidade, o meu chocolate é mais pequeno.

P: O que podemos concluir? O que fez mudar as quantidades?

(Alguma indecisão)

P: Esta metade vale o mesmo que esta metade? (aponta para um exemplo no quadro de duas metades de dois chocolates diferentes)

Vários alunos: Não.

P: Porque é que não?

(Alguns murmúrios mas nenhuma voz se fez ouvir)

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

Vários alunos: Não!

P: Então, o que é que podemos concluir?

A7: Porque um chocolate é maior e outro é mais pequeno…

P: Então, o que é que podemos concluir?

(Silêncio)

P: Vamos falar só da Maria está bem? (Desenha dois chocolates um maior e outro mais pequeno e dividi-os em quatro partes). Um quarto do chocolate da Maria é igual a este bocado… (aponta para o quarto do chocolate maior). Concordam que este quarto é maior do que o outro?

Vários alunos: Sim.

P: Porque é que um quarto de um chocolate pequenino e um quarto de um chocolate grande não é a mesma quantidade?

A3: O chocolate não é do mesmo tamanho.

A6: Um quarto de um chocolate pequeno é mais pequeno que um quarto de um chocolate grande.

(...)

Como este episódio revela, para Núria a questão da natureza relativa da fração foi uma intuição imediata. Para os colegas não, pois mantinham-se presos à ideia das partes tomando como ponto de referência a mesma unidade. A professora tentou acompanhar a ideia da aluna, que claramente respondia às suas expectativas sem, contudo, deixar de "trazer consigo" os alunos que não viam ainda a possibilidade da mudança de unidade mesmo depois dessa hipótese, ter sido considerada por todos.

A importância do tamanho da unidade

Na sequência planeada, a tarefa "A discussão do João e da Maria" requer uma mudança de perspetiva relativamente às tarefas anteriormente exploradas. A comparação de duas frações, referenciadas a uma mesma unidade, era já simples para os alunos. A discussão gerada em torno desta tarefa deixa de ser óbvia se se considerar a hipótese de "o todo não ser o mesmo", de se estarem a comparar frações de quantidades diferentes. O conflito cognitivo gerado obriga a uma mudança na forma de pensamento relativamente aos problemas anteriores pois a mudança no tamanho do chocolate condiciona as quantidades consideradas. A ideia forte desta tarefa foi o trabalho com a natureza relativa da fração que Nunes e Bryant (2009) identificam como a principal dificuldade no entendimento do conceito de fração: "As frações causam dificuldades porque elas envolvem relações entre quantidades (...) [e] o ensino deve incluir um foco sobre as relações lógicas envolvidas neste conceito" (p. 1).

Ao sentir as suas dificuldades, numa situação que lhe pareceu à partida não levantar grandes questões, sentiu desilusão em termos emocionais assim como alguma insegurança. O conflito cognitivo gerado internamente - "como sair desta situação de impasse?", uma vez que os alunos estão centrados na resposta óbvia e "não ouvem as vozes dissonantes de um ou dois colegas que apontam intuitivamente para outra solução", provoca-lhe sentimentos de desalento e insatisfação.

Beatriz contudo devolve aos alunos a questão, recomeçando a tarefa e convida-os a mudar de perspetiva: "E que acontece se os chocolates não forem iguais?". Apesar dos seus sentimentos e da frustração face à aparente impossibilidade de os alunos saírem do impasse, persiste na resolução mas dá-lhes um ponto de partida para o seu raciocínio.

A noção de fração como relação entre duas quantidades trouxe novos desafios.

5.4.3 Refletindo com Beatriz

No final da aula voltámos a conversar sobre as conclusões que se tinham tirado, sobre a reação dos alunos à nova situação colocada e os sentimentos e pensamentos de Beatriz. Estava notoriamente mais aliviada, embora cansada e um pouco insegura quanto a se todos teriam compreendido a ideia da natureza relativa da fração. Refere ter ficado com a sensação de alguns alunos continuarem a "olhar para uma metade como uma metade e para um quarto como um quarto" como um valor absoluto, como no caso dos números naturais. Diz "É preciso voltar aqui… mas de momento, senti-os cansados" (R5, 13). Recordámos, então, que estávamos no início do trabalho com o conceito de número racional, que esta era a primeira tarefa da segunda fase da trajetória e que havia outras pensadas para desenvolver esta grande ideia. Beatriz refere que a tarefa doze da trajetória permitiria "trabalhar esta ideia com unidades discretas" recorrendo a "modelos como rebuçados, berlindes ou lápis", pelo que decide antecipá-la e apresentá-la "na próxima aula".

A meio da unidade "Números racionais não negativos" reunimos novamente para refletir sobre o desenvolvimento da trajetória real, avaliar a continuidade do trabalho a realizar e delinear possíveis alterações ao trajeto planeado. Ao perguntar a Beatriz qual a tarefa que considerava ter sido crucial no percurso realizado até ao momento, foi perentória:

> A discussão do João e da Maria". Foi a que correu pior de todas! Pela minha atitude de ser muito dirigida e aquela coisa… de ter criado uma expetativa e não ter acontecido. Havia várias hipóteses e mesmo havendo uma luzinha por parte de uma aluna, não seguiram essa ideia. (...) Era maior [a sua expetativa] … Que chegassem mais longe. A grande maioria só se limitou a uma hipótese. (R10, 21)

A professora apercebeu-se que apesar de ter preparado esta tarefa antecipando respostas possíveis, só compreendeu a sua dificuldade e, paradoxalmente, o seu poder, em plena realização do trabalho com os alunos: "Foi um erro meu…pensar que era mais fácil!" Considerou que o facto de terem realizado esta tarefa na sequência da das baguetes talvez tivesse induzido os alunos a considerarem os chocolates de tamanhos iguais: "Nas baguetes nós estávamos a trabalhar com a mesma unidade para que a distribuição fosse justa! Se a unidade não fosse do mesmo tamanho o que aconteceria?".

Para Beatriz, o facto de os alunos não terem prontamente respondido ao problema, foi dececionante. No entanto, ao visualizar novamente a aula, toma consciência que a resposta dada era coerente com as grandes ideias trabalhadas, o que mostrava a compreensão que os alunos tinham, até ao momento, de fração e que lhes permitiu ter bases para discutir a ideia que se seguia: o todo importa, uma das grandes ideias referidas por Fosnot & Dolk (2002):

> Esse era o objetivo final da tarefa, uma grande ideia, a parte de um todo… um todo que pode ser diferente,… eu queria que eles assumissem logo desde o início. Isso é bom, é ótimo e eu não dei valor a isso que é uma conquista fantástica (...) não a via como uma tarefa muito ambiciosa. Estava a vê-la como (...) muito condicionada a uma determinada resposta e tudo o mais… se bem que as respostas poderiam ser diversas (...) Quando a Núria me colocou a questão (...) [é que] eu fui vendo que os outros não a acompanhavam (...) Porque possivelmente não estava assim tão segura…

Beatriz só se apercebeu verdadeiramente da dificuldade da "grande ideia" para os alunos durante a aula. O momento de impasse vivido foi angustiante para a professora mas também foi a chave da compreensão que se foi desenvolvendo:

> Eu depois até vi que ao levantar o véu eles começaram a responder muito bem, a considerar outras hipóteses de resolver o problema, agora porque é que eu não esperei? Não sei… a minha atitude como professora… Eu quero as coisas imediatas não gosto de esperar…

Beatriz é muito reflexiva, questionando-se interiormente sobre as suas ações numa perspetiva de autorregulação. Referindo-se à antecipação das dificuldades sentidas pelos alunos considerou bom antecipá-las mas natural não se poder saber "toda a viagem antes de ter viajado" uma ideia que evoca uma metáfora de Lampert (2001) que compara o trabalho de ensino "à navegação de um pesado barco num imenso e tumultuoso mar" (p. 446). Explica ainda:

> Podemos antecipar muita coisa mas tudo não. Cada vez me apercebo mais que há caminhos que os alunos percorrem que nem sempre prevejo. Nesta tarefa, creio que por inconsciência, não antecipei certas coisas que levantaram, que tiveram influência noutras que daí advieram… com grande valor, não só para a noção de fração como do cálculo com frações.

Beatriz refere, também, o facto de o seu conhecimento sobre os números racionais se reportar essencialmente ao do seu tempo de aluna e da unidade "Números racionais não negativos" contemplar a construção do conceito de número racional a partir da noção de fração com uma abordagem diferente:

> Eu já dei o ano passado estas noções de fração (metade, terça parte, quarta parte) mas não relacionei com os decimais (…) e tinha boas notas [a Matemática] mas nunca mais estudei frações e agora tudo isto é novo, e não é como quando eu estudava.

Enfatiza, ainda, a necessidade do professor aprofundar o conhecimento profissional ao longo do seu percurso e destaca que uma das vias possíveis é desenvolver um contínuo trabalho de colaboração.

Na sequência planeada, a tarefa "A discussão do João e da Maria" requer uma mudança de perspetiva relativamente às tarefas anteriormente exploradas. A comparação de duas frações, referenciadas a uma mesma unidade, era já simples para os alunos. A discussão gerada em torno desta tarefa deixa de ser óbvia se se considerar a hipótese de "o todo não ser o mesmo", de se estarem a comparar frações de quantidades diferentes. O conflito cognitivo gerado obriga a uma mudança na forma de pensamento relativamente aos problemas anteriores pois a mudança no tamanho do chocolate condiciona as quantidades consideradas. A professora considerou esta tarefa verdadeiramente desafiante para ela, pois descobriu, durante o trabalho com os alunos, potencialidades que não vislumbrara antes. Ao sentir as suas dificuldades, numa situação que lhe pareceu à partida não levantar grandes questões, sentiu desilusão em termos emocionais assim como alguma insegurança. O conflito cognitivo gerado internamente - "como sair desta situação de impasse?", uma vez que os alunos estão centrados na resposta óbvia e "não ouvem as vozes dissonantes de um ou dois colegas que apontam intuitivamente para outra solução”, provoca-lhe sentimentos de desalento e insatisfação mas, simultaneamente, serve de motor para uma mudança na sua própria atitude levando-a a repensar o seu papel na orientação da discussão. A tarefa desenvolvida revelou-se poderosa não por ter sido fácil para os alunos, mas por ter alguma complexidade e gerar neles “alguma incoerência face ao que tinham trabalhado antes”. Beatriz refere que as dificuldades experienciadas podem ser contornadas com um bom conhecimento dos conteúdos matemáticos a trabalhar e salienta a necessidade de reconstrução do seu próprio conceito.

5.5 Um problema de medida: Conectando representações

“ As garrafas de água mineral “ foram a décima sexta tarefa realizada e está integrada na última fase da trajetória de aprendizagem (IV) *Da noção de equivalência, às múltiplas representações do número racional*. A tarefa surge quando o domínio do trabalho com a fração já é notório, existindo alguma desenvoltura na representação da fração, e na compreensão dos seus diversos significados. O objetivo desta tarefa é o trabalho estabelecer a relação entre a fração e o decimal tendo em vista desenvolver a flexibilidade no uso das diversas representações, promovendo-se desta forma o desenvolvimento de “sentido de número fração”.

5.5.1 Preparando o trabalho

Beatriz escolheu “ As garrafas de água mineral” (Fig. 53) para trabalhar as grandes ideias relativas aos números racionais, na forma decimal, em paralelo com a fração, por a considerar muito forte nas conexões entre as duas representações.

As garrafas de água mineral
(Ficha de trabalho **G**)

Observa com atenção as garrafas que tens no teu grupo e que estão representadas na imagem:

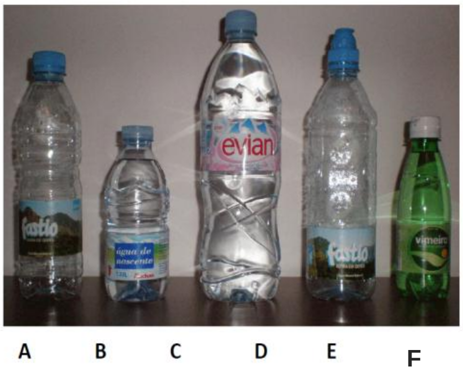


Figura 53 – As garrafas de água mineral

Na primeira parte do trabalho, pretende-se que os alunos recorram à comparação entre as capacidades das garrafas e que as representem na reta numérica numa linha numérica dupla, na representação decimal e em fração. Numa segunda parte, estabelecem as relações entre as quantidades de água das garrafas e comprovam (verificando quantas vezes a água de uma garrafa cabe na outra) verificando as relações estabelecidas entre as representações. A "paisagem de aprendizagem" desta tarefa está representada no quadro 16.

Quadro 14 – As grandes ideias para a tarefa " As garrafas de água mineral", quadro adaptado de Fosnot (2007)

As grandes ideias	
❖ Se a unidade for 1 podemos trabalhar com decimais usando a aritmética dos números inteiros ❖ As propriedades dos números inteiros são válidas para os números racionais ❖ Os decimais são frações cujo denominador é uma potência de 10	❖ Na representação decimal os algarismos em diferentes valores de posição estão relacionados por potências de 10 ❖ A equivalência é preservada quando as diferentes partes são combinadas

Fosnot e Dolk (2002) ressalvam como uma grande ideia matemática: a de que na representação decimal, os algarismos em diferentes valores de posição estão relacionados por potências de 10, acentuando Lovin & Van Walle (2006) as seguintes ideias estruturantes para a compreensão do número representado na forma decimal: (a) os números decimais são outra forma simples de escrever números racionais sendo importante compreender as relações entre a forma de representação decimal e a forma de fração, assim como ganhar flexibilidade no uso dessas relações; (b) a base dez do sistema de numeração decimal estende-se até ao infinito em duas direções: cada ordem para a esquerda do número aumenta dez vezes relação à anterior; cada ordem para a direita do número diminui dez vezes em relação à anterior; (b) a vírgula é uma convenção que indica a posição da unidade; (c) a percentagem é uma fração de denominador 100, representa simples centésimas constituindo, uma terceira forma de escrever números racionais; (d) as operações adição e a subtração de números racionais representados na forma decimal, estão baseadas no conceito fundamental da adição e subtração de números inteiros respeitando o seu valor de posição.

No primeiro momento, a tarefa pedida aos alunos é ordenar as garrafas por ordem crescente da sua capacidade antes, e depois, da leitura dos rótulos (Fig. 54).

1. Coloca as garrafas por ordem crescente de capacidades e completa.

_____ < _____ < _____ < _____ < _____

2. Coloca, de novo, as garrafas por ordem crescente, mas usando as capacidades que podes ler nos rótulos. Completa.

Figura 54 – A primeira parte da tarefa

No segundo momento, a tarefa é posicionar os números que representam as diversas capacidades das garrafas indicadas nos rótulos, na reta numérica, e relacionar as quantidades entre garrafas, tal como está pedido para a garrafa A e C em 3.1 (ver figura 55).

3. Posiciona as diferentes capacidades das garrafas na reta numérica:

0 ———————————————— 1L

Compara as diferentes garrafas e responde:

3.1. **Quantas garrafas A são necessárias para encher uma garrafa C?** _________

Mostra como pensaste.

3.1.1. Que podes concluir sobre a capacidade das garrafas **A** e **C**?

____

____

____

____

____

Figura 55 – A segunda parte da tarefa

De forma similar, foram pedidas outras relações, entre as diversas capacidades das garrafas, noutras alíneas da ficha que ajudava a estruturar o trabalho a realizar, e a manter um registo do trabalho que ia sendo realizado com as respetivas conclusões, de uma forma muito semelhante ao que se faz num trabalho experimental (ver anexo 7).

A forma como a tarefa é colocada parece ser "bem dirigida", uma tarefa pouco aberta, quase de sistematização dos conhecimentos previamente adquiridos. As perguntas são direcionadas para respostas muito específicas. Parece não haver lugar à descoberta. Não foi, no entanto, esse, o caso. Nesta tarefa, estes alunos abordam pela primeira vez, a representação do número racional na forma de numeral decimal, que designamos simplesmente, por decimal. Beatriz teve por intenção introduzir a representação decimal, estabelecendo relações, entre as duas representações: fração e decimal através da reta numérica, trabalhando-a de forma "dupla".

5.5.2 Concretizando o trabalho

Apresentando a tarefa

De fato, Beatriz apresenta a tarefa tendo por base essa ficha de trabalho mas o trabalho desenvolvido na aula não ficou confinado à resposta, às questões colocadas. Como se irá ver, Beatriz "solta-se do papel" e orienta a discussão tendo no horizonte as ideias chaves a trabalhar, e centra-se no momento, na viagem que passam a fazer nessa paisagem de referência, gerindo as interações dos seus alunos e caminhando num trajeto que foi passando por pontos de referência, mas um trajeto que será único, para estes alunos e esta professora. Impossível repetir-se passo por passo, numa outra turma, num outro lugar.

A aula decorreu no dia 17 de Janeiro de 2011. Depois dos alunos se sentarem na sala que estava previamente organizada, com as mesas agrupadas formando cinco espaços distintos de trabalho para cinco grupos, e de estes se sentarem de imediato nos seus lugares, chegaram à sala de aula outros alunos oriundos de uma turma de 2º ano cujo professor faltou. Os alunos dessa turma foram distribuídos pelas outras salas de aula, tendo ficado na da Beatriz, seis alunas. De imediato, a professora organizou um grupo de trabalho para estas alunas que passaram a realizar o trabalho que lhes tida sido, distribuído pela sua professora.

Beatriz apelou de imediato à colaboração de todos para a tarefa difícil de trabalharem juntos numa sala:

> Sabem que eu hoje vou-vos pedir ajuda. Para além dos meus vinte e quatro alunos tenho mais seis emprestados. Isto hoje é uma aula, a trinta. Difícil, isto não é para qualquer um, sozinha, não vou conseguir dar a minha aula a trinta alunos. Todos têm de ajudar. Vou precisar da vossa ajuda. Sabem em quê? (GAM0, 1)

Perante a resposta dos alunos que referem terem de se ouvir, e para isso, não poderem falar ao mesmo tempo, faz-se um silêncio cooperante que contrasta com o burburinho entusiasmante do início da aula, perante as garrafas de água que já haviam vislumbrado, junto aos materiais da professora. Foi curioso ver a rapidez com que todos entenderam a sua corresponsabilização no trabalho, a desenvolver em conjunto, e aconteceu tudo de forma tão pacífica e com tão poucas palavras que se tornou notório um conjunto de hábitos implícitos, e aceites por todos. Beatriz, falando mais baixo, começa a apresentar a tarefa, e o tom da sua voz, baixa e pausada, para os manter suspensos, na expetativa da tarefa a desenvolver. ”Hoje para a nossa aula de matemática vamos ter uma tarefa que se vai chamar ´As garrafas de água mineral’” (GAM 0, 2) diz, escrevendo no quadro o nome da tarefa. De seguida, entrega a cada grupo, as cinco garrafas de água vazias.

Os alunos tomam contato com o material, mexendo nas garrafas e olhando para os rótulos, enquanto Beatriz prossegue nas orientações iniciais entregando uma ficha de trabalho, e solicitando aos alunos que se apercebam das semelhanças entre as garrafas que têm em cima da mesa e as da figura da sua ficha de trabalho[35]. Esta ficha tem as questões colocadas aos alunos. A professora salienta que irão realizar a ficha em duas partes, parando para o trabalho de discussão no grande grupo, após cada um dos dois momentos de trabalho no grupo.

Apoiando o trabalho dos alunos

Beatriz e os alunos trabalharam arduamente, desbravando os caminhos da diversidade de representações do número racional, pensando reflexivamente e com flexibilidade, “saltando de representação em representação”, usando as ferramentas que

[35] Ficha no anexo 7

possuíam: os conhecimentos adquiridos até ao momento, as ideias que já tinham, materiais de suporte ao pensamento e o seu próprio esforço num pensamento ativo e reflexivo que se deixava "ver" na participação na tarefa e no discurso matemático. De acordo com esta metáfora de Lovin &Van Walle (2006), Beatriz, foi a responsável pela obra, cuidando não só de fornecer os materiais como de envolver os seus "homens" e cuidar da melhor utilização das ferramentas disponíveis.

Beatriz começa por clarificar o que pretende com a tarefa, como poderá ser acompanhado no episódio 1, mas não os deixa a sós na tarefa. Penso que a sua opção se relacionou com a preocupação que manifestou abertamente na preparação das aulas. Fazendo muitas perguntas, e não dando respostas, foi sustentando o pensamento dos alunos encaminhando-os para uma forma de trabalhar que envolvesse uma reflexão sobre o que faziam.

Episódio 1: Para mim não é assim tão claro quanto isso

P – A tarefa de hoje eu chamei "As garrafas de água mineral". Vamos descobrir a quantidade de água que leva cada garrafa e comparar essas quantidades. Irão estabelecendo hipóteses que depois iremos comprovar. Então, têm várias garrafas vazias…

Os alunos começam a tomar contacto com os materiais, tocando nas garrafas, lendo os rótulos (que indicam as quantidades, uns em litros outros em centilitros) e instintivamente colocando as garrafas por tamanhos (Fig.56).

P – Quantas garrafas dei a cada grupo?

Vários alunos – Cinco!

P – As garrafas são iguais ou diferentes?

Vários alunos – São diferentes na marca e no tamanho.

Maria – E na quantidade de água que levam.

P – Por que achas isso?

Maria – Por causa do tamanho.

João – O tamanho indica a quantidade.

Figura 56 – Ordenando as garrafas por tamanhos

David – Pode ser mais baixa, mas maior… no tamanho, na gordura…

Pedro – As mais finas, podem ser mais altas.

Ana – A garrafa pode ser pequena e larga, ou alta e fina e levar o mesmo.

P – Como sabes que são diferentes? Dessas todas qual a que acham que leva mais água? É isso que vamos estudar. Vou-vos dar parte da ficha de trabalho. Vejam se encontram semelhanças entre as garrafas que têm na mesa e as da fotografia da ficha de trabalho.

Após algum tempo em que os alunos olham atentamente para a ficha de trabalho:

P – A foto tem uma legenda e cada garrafa está identificada com uma letra maiúscula. Vamos identificar cada uma das nossas garrafas com as letras respetivas.

Os alunos identificam cada uma das garrafas do seu conjunto. A professora exemplifica:

P – Já têm uma garrafa A e uma garrafa B. Qual delas, leva mais?

David – A mais alta.

P – Não necessariamente. Pode levar ou não. Vocês já disseram que…

Maria – Umas podem ser mais altas e levarem menos se forem mais finas.

P – Então o que podemos concluir?

Vários alunos – Não sabemos.

P – Vamos ter de descobrir. Como o vamos fazer?

Teresa – Podemos encher as garrafas e comparar.

P – David, tens outra sugestão?

David – Podemos ver "os litros" que estão escritos no rótulo. Então, a garrafa A tem zero, vírgula cinquenta litros (Fig. 57).

A professora escreve no quadro 0,50 l.

P – E a outra garrafa? A garrafa B?

Ricardo (e outros alunos olhando o rótulo) – Zero vírgula trinta e três.

Ricardo (apressando-se a responder) – A que leva mais é a garrafa A.

P – Sim? A que leva mais é a garrafa A?

Vários alunos – Claro.

P – Claro? Para mim não é assim tão claro quanto isso!

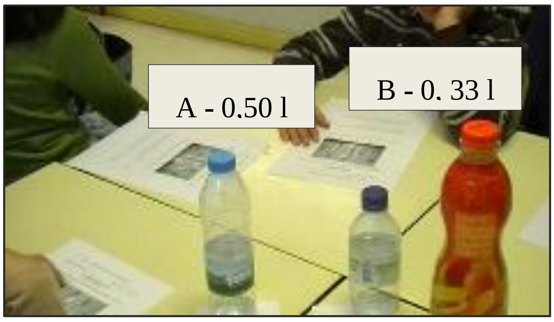


Figura 57 – Lendo os rótulos e comparando

Não estando no horizonte matemático das grandes ideias definidas para o trabalho com os números decimais, nem relacionado com as estratégias antecipadas, ou os modelos que escolheu para trabalhar esta tarefa, trabalha contudo, uma importante ideia matemática: o volume, a capacidade é invariante com a forma. Neste caso, "olhar para o tamanho da garrafa" não é um indicador válido da sua capacidade; pode inclusivamente ser "enganoso". Duas garrafas podem ter a mesma quantidade de água e uma parecer que leva mais. Saliento a sua intervenção perante a resposta de David que diz levar mais água a mais alta: "Não necessariamente. Pode levar ou não (…)"

Beatriz trabalha esta grande ideia do volume, que era crucial dado o contexto que escolheu: capacidades de água de garrafas. E desta maneira, encaminha também os alunos para as capacidades inscritas nos rótulos, que é efetivamente os valores com que ela pretende que eles trabalhem. Contudo, a capacidade é importante, e o contexto parece ser bem relevante, pois podem comprovar as relações entre as quantidades enchendo as garrafas.

Nesta última intervenção Beatriz desafia os alunos a serem mais convincentes e ao mesmo tempo permite que outros alunos que não se encontrem tão envolvidos retomem a atenção e o interesse na questão, podendo, também, de novo ser redito o que já fora dito, de outra forma.

Incentivando a comparação usando números de referência o trabalho dos alunos

No episódio 2 pode-se observar o efeito da intervenção da professora, e a que deu origem no pensamento dos alunos.

Episódio 2: Nem 50 nem 33 chegam a um litro

Rui – 50 é maior que o 33, por isso, o número maior é o que leva mais.

P – E, ao falares em 50 e em 33, algum deles chega a ser um litro?

Rui – Não.

P – Como é que sabes?

Rui – Porque ali no zero, tinha de estar 1. Ainda tenho outra razão…

P – Sim…porque o 0 representa a parte inteira. Chega a um litro?

Rui – O 33 não chega a metade, o 50 chega à metade (Fig.58).

P (voltando atrás) – E a garrafa B chega a um litro?

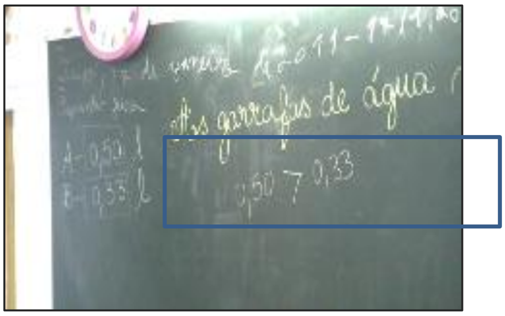


Figura 58 – Comparando capacidades com referência à metade

Vários alunos – Não!

P – Portanto, nem uma nem outra chegam ao litro. Tem 0 litros.

Raquel – Tenho outra maneira…A garrafa A não chega ao litro pois é metade.

P – E a B? Chega ao litro?

Vários alunos – Não…

P – Só olharam para a parte decimal, foi? Não há parte inteira … Nenhuma chega ao litro… Então, vamos para a parte decimal. Ao comparar a parte decimal concluímos…

Pedro – Que a A é que tem mais água, leva mais.

P – Tem mais capacidade. Porquê?

Raquel – 50 é meio litro e 33 não chega ao meio litro.

Beatriz ao não ficar convencida facilmente, "obrigou" os seus alunos a aprofundarem razões, a encontrarem melhores argumentos. Introduz a comparação com o litro e de seguida, são os alunos que se referem à comparação com a metade. A comparação com números de referência é outra das subcategorias do quadro teórico de McIntosh Reys & Reys (1992) sobre o desenvolvimento de sentido de número.

No episódio 3, o terceiro, os alunos vão buscar a garrafa C que leva exatamente um litro. A comparação estabelecida anteriormente com o litro permitiu, de imediato, apontar para a garrafa como a que leva maior quantidade até ao momento.

Episódio 3: Exatamente um litro

P – Temos uma garrafa A e uma B e agora acrescentámos a C. Qual das três leva mais água? (Fig. 59)

Vários alunos – A C!

P – Como é que sabem?

Beatriz – Professora, tem 1 litro…

José – … e mais nada.

João – Leva exatamente 1litro. É a que leva mais.

P – Então como fica?

Vários alunos – A C, depois a A, e depois a B.

E escreve no quadro:

C > A > B

1 > 0,50 > 0,33

P – Quem leva mais?

Vários alunos – A C.

P – A garrafa C leva um litro, exatamente um litro ou um litro mais qualquer coisinha?

Vários alunos – Exatamente um litro.

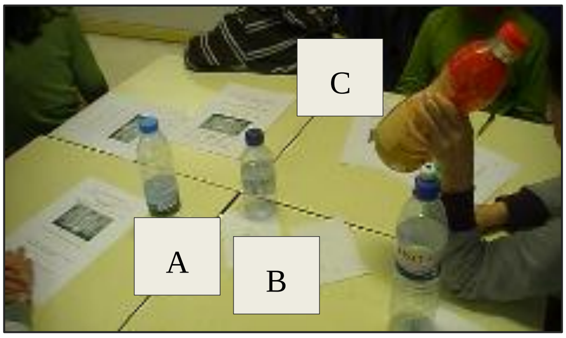


Figura 59 – Qual a garrafa que leva mais?

À medida que se vão tirando conclusões, Beatriz vai sintetizando no quadro as conclusões, de forma mais simples, identificando as garrafas pelas letras designadas, e depois de forma mais formal, escrevendo por ordem decrescente os números como se pode ver no retângulo a cinzar que representa o que a professora. Os alunos fazem-no na sua ficha, das duas formas também. Depois escreve também de forma crescente fazendo a leitura nos dois sentidos.

A garrafa que se segue, a garrafa D, coloca um novo desafio pois tem a sua capacidade escrita em centilitros. Há mudança na unidade de referência.

Episódio 4: O centilitro é maior ou mais pequeno que o litro?

P – Agora vamos à garrafa D. Quanto leva a garrafa D?

Gonçalo – Setenta e cinco milímetros.

Outras vozes – Setenta e cinco centilitros.

P – O que é que lá está escrito?

Vários alunos – Zero…

Outros alunos – Não está nada…

P – Ana… Como é que está lá escrito?

Ana – 75 depois cl.

P – Isto lê-se setenta e cinco centilitros. Ao falar em centilitros, falamos numa unidade maior ou menor que o litro?

Vários alunos – É maior…

Vários alunos – É menor…

P – Vamos ver as garrafas C e D. A água que cabe aqui (garrafa C) cabe aqui (garrafa D)?

Vários alunos – Não!

P – Vamos experimentar… Deitam água na garrafa C e vejam se cabe na D.

Os alunos experimentam. Após algum tempo…

Vários alunos – Professora, sobra… sobra… a garrafa ainda tem água.

P – Continuam a achar que o centilitro é maior do que o litro?

Vários alunos – Não!

P – Porquê?

Luís – Porque despejámos esta para aqui e ainda sobrou.

P – Luís, concordas que a garrafa C (1l) leva mais água que a garrafa D (75cl)?

Luís – Sim.

P – Porquê?

Luís – Porque os 75 cl cabem na garrafa de litro e sobrou espaço na garrafa de litro.

P – Então o que podemos concluir? Que o centilitro é maior ou mais pequeno que o litro?

Luís – Mais pequeno que o litro.

P – Muito bem, e quantas vezes acham que é mais pequeno?

Ricardo – Não sei!

Luís – Nós pusemos a água e ainda há espaço para se pôr mais…

Uma voz – Acho que é 10 vezes…

P – 75 cl chega a um litro?

Vários alunos – Não…

P – Então, 75 é a parte decimal…o centilitro é a parte decimal.Não chega a um litro. Como posso escrever? (Fig.60)

João – 0,75 como as outras que têm menos de um litro.

P – Vamos ver a garrafa A, tenho 50 qualquer coisa…

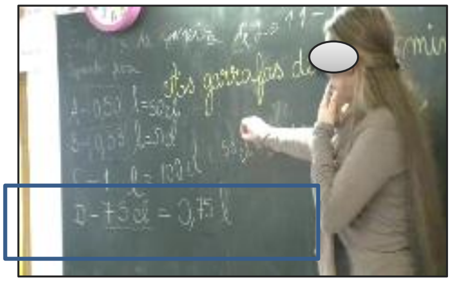


Figura 60 – A relação entre o litro e o centilitro

Ana – Não chega a um litro. É metade do litro.

Rui – Tem 50 cl.

P – Então, como represento 75 cl em litros?

João – 0,75 l.

Beatriz aproveitou muito bem o fato de as capacidades virem escritas em diferentes unidades (litros e centilitros), de forma a passar de uma representação para outra atribuindo sentido, como referência sempre à unidade e usando as medidas de capacidade de uma forma muito intuitiva porque também muito próxima da realidade.

O trabalho de Beatriz relacionou-se com as representações decimal e fração sendo que o trabalho com as medidas de capacidade ao invés de complicar a questão veio simplificá-la pois permitiu dar nomes aos bocadinhos menores que o litro. Desta forma a relação entre litros e centilitros foi trabalhada paralelamente à da relação da unidade com as centésimas.

Estendendo a tarefa: Para além da unidade

Após a comparação da capacidade de todas as garrafas, e de finalmente estarem ordenadas, Beatriz espontaneamente coloca uma questão que constitui uma extensão à tarefa e que trouxe uma compreensão acrescida à ordenação dos números decimais.

Episódio 5: Vamos imaginar que temos aí uma garrafa de litro e meio

P – Vamos imaginar que temos aí uma garrafa de litro e meio.

Bruna – É um vírgula cinquenta (1,50)

P – Uma garrafa de litro e meio no rótulo teria escrito 1, 50. É isso?

Bruna – Sim.

P – Porquê?

Bruna – Porque meio litro é cinquenta. Meio litro mais meio litro, é um litro.

David – Eu tenho outra.

P – Espera, deixa ela acabar.

Bruna – Meio litro mais meio litro faz um litro, mais meio litro, faz um litro e meio.

David – Professora também dá para fazer 3x meio litro.

Nesta altura a professora escreve no quadro:

$$\boxed{3 \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\ \frac{1}{2}}$$

P – Dá para fazer outras coisas mas vamos ouvir primeiro o raciocínio da Bruna. A Bruna disse:

Bruna – Meio litro mais meio litro faz um litro, mais outro meio litro, faz um litro e meio.

A professora vai escrevendo no quadro o raciocínio da aluna (Fig. 61).

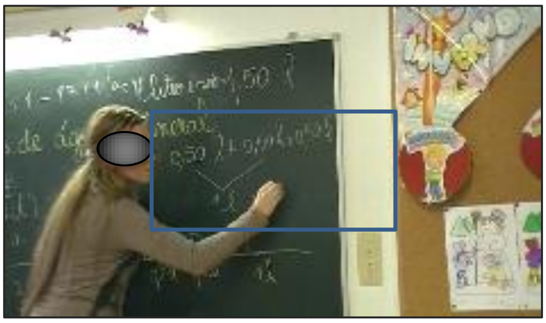


Figura 61 – A relação entre litro e meio e três meios litros

João – Se fosse mais meio litro fazia dois litros.

P – Espera lá, o João disse uma coisa que eu ainda não se tinha abordado. Se eu acrescentasse outro meio litro…

João – Tenho um litro mais meio e mais meio e assim fico com dois.

A professora escreve no quadro usando uma expressão numérica.

P – O que significa então um litro e meio?

João – Mais metade, um litro mais metade.

Maria – Faz lembrar o numeral misto.

P – Faz lembrar. Porquê?

Sandro – Tem uma unidade mais um bocadinho.

Gonçalo – Nem que fosse um litro mais um quarto já era misto.

Rui – Nem que fosse mais uma "migalhinha"…

P – Tinha era de ser mais do que um litro, não é?

Foi muito interessante a associação que Maria, fez ao numeral misto e que Beatriz logo aproveitou, pois todo o sistema de numeração decimal tem subjacente esta "mistura", a de uma parte inteira, e a de uma parte decimal, sendo que o que se passa com a parte fracionária entre 0 e 1, passa-se entre todas as unidades, entre quaisquer dois números inteiros. Esta pareceu-me uma ligação poderosa e uma forma de Beatriz ajudar os alunos a compreenderem a densidade dos números racionais.

Lutando com a representação das capacidades na reta numérica

No episódio 6, Beatriz introduz mais uma garrafa na discussão:

Episódio 6 : "Lutando" com a reta numérica

P – E agora Luís, qual achas que é a garrafa mais fácil de colocar?

Luís –0,25l

Bruna – Para mim não! São os 0,50 porque é logo no meio.

P – Concordam com a Bruna?

Rui – É metade!

Bruna – Pois, é logo no meio.

P – A Bruna acha que é 0,5. Porquê? Os 50 cl são metade de quê?

Vários alunos – Do litro.

P – Então, vamos marcar no meio, os 50 cl.

P – Olha, Bruno, agora vou complicar-te a vida. Mas acredito que aqui os outros "matemáticos" te irão ajudar… Se eu quisesse transformar esse número decimal numa fração como é que eu o faria?

Bruna – Metade, aquilo é uma metade.

P – Então como escreve uma metade, em fração? (Fig. 62)

Vários alunos – Um, traço, dois.

Outros alunos – Um meio.

P – Metade do litro, claro! A nossa unidade é o litro.

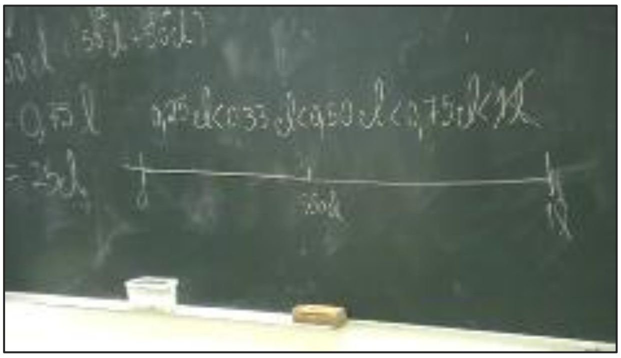


Figura 62 – A relação entre decimal e fração

Como se pode seguir no episódio a seguir, Beatriz vai representando as diversas capacidades na reta seguindo a intuição dos alunos que vão colocando primeiro as que lhe oferecem menos dúvidas. Contudo as capacidades das garrafas (que são as existentes no mercado) são números de referência no sistema de numeração decimal (o meio litro, o quarto de litro, o litro) facilitando a procura de relações e o posicionamento na reta. Aliás, há conexões entre esta tarefa e a das dobragens do papel, a segunda na trajetória, relações que eventualmente terão sido para os alunos ferramentas para o pensamento.

Após a representação da metade e a escrita também na forma de fração, pois Beatriz vai preenchendo a reta, de forma dupla, partiu para a metade da metade e desta vez foi buscar ligações a outro modelo, o dos "queijinhos" que usaram para representar partes fracionárias e inteiras, trabalhando a comparação com unidades de referência (o um, a metade) e para compreender a noção de numeral misto quando se encontravam acima da unidade. Como se verifica no episódio que se segue, os quatro 25 dá 100 estava nas "memórias da turma" na imagem do queijo feito de quartos.

Episódio 7: Saltando entre representações

P – E agora, qual será mais fácil colocar a seguir?

Vários alunos – 25 cl

P – Porquê?

José – É metade da metade do litro.

P – Em fração, 25 cl, em fração quanto é que seria? Aí que esta é tão difícil…

Vários alunos – Pois é!

João – Um traço quatro.

P – Porquê?

Beatriz – 25 cl representa um quarto do litro.

José – 25 x4 é 100, então um litro como é 100, é um quarto (Fig. 63).

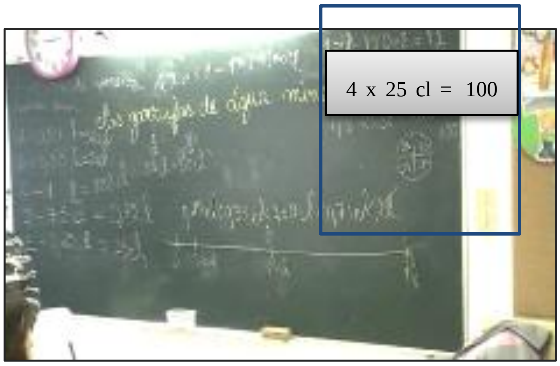


Figura 63 – Quatro quartos é um litro

P – Concordam?

Vários alunos – Não percebi…

José – 4 x 25 como dá 100, é um litro, então como dá 25, é um quarto.

A professora vai para o quadro e recorre a outro “modelo para pensar” a questão.

P – Recordam-se dos “queijinhos”? A minha unidade vale 100, quanto vale cada quarto?

Rui – 4 x 25 é 100, têm razão!

Gonçalo – Os dois 25 de baixo valem 50, os outros de cima 50, faz 100.

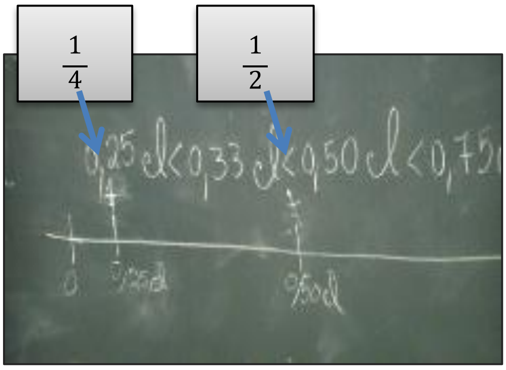


Figura 64 – A relação entre o decimal e a fração

Nesta fase, depois da compreensão revelada, entre as relações do quarto com o litro, o posicionamento na reta era o indicado na figura 64.

De seguida, passaram à comprovação dessa relação enchendo a garrafa de litro com quatro garrafas de 25 cl.

Episódio 8: Comprovando…

P – Vamos verificar se 25cl são um quarto de litro. Peguem nas duas garrafas. Qual é a capacidade da garrafa E?

Vários alunos – 1l.

P –E a desta garrafa, a C?

Vários alunos – 25 cl.

P – Disseram que 25 cl corresponde a um quarto do litro. Então quantas garrafas destas (mostrando a garrafa C), eu tenho de ter para encher esta garrafa (mostrando a garrafa E)?

Figura 65 – A relação entre o decimal e a fração

Vários alunos – Quatro.

P – Então vamos verificar, enchendo a garrafa de litro com a água da garrafa de 25cl. Vamos verificar se cabe lá o líquido de quatro garrafas. (Fig. 65).

Realizaram a comprovação das outras relações estabelecidas. Para Beatriz esse foi um passo trabalhoso mas importante pois verificavam o que pensavam, o que lhes trazia segurança. "Tinham ideias, lançavam-nas e depois ao comprovar a sua ideia tinham a prova. Eles usavam as garrafas para comprovar as medidas " (R10, 7).

"A ideia era: uma garrafa com uma dada capacidade, eles enchiam-na e comparavam quantas vezes cabia (o líquido contido na garrafa) noutra garrafa comprovando as ideias que tinham tido inicialmente, e de que tinham conhecimento da vida do dia-a-dia. Eles enchiam as garrafas e verificavam as relações entre elas: quantas vezes cabiam umas nas outras" (R10, 8). " Verificar por si mesmos é importante, porque fica marcado de outra maneira dentro deles" (R10, 9).

No episódio seguinte pode-se ver como apesar de terem verificado essa relação entre a garrafa de quarto de litro e o litro, a dificuldade em representar na reta.

Episódio 9: Continuando a luta com a reta, usando o erro como estratégia

P – Então vimos que 4 garrafas de 25 cl cabem numa garrafa de litro, enchendo-a. Podemos deduzir que quatro garrafas correspondem a um litro. E a garrafa de 25 cl corresponde a …

Vários alunos – A uma de quatro…

P – Então representa …

Vários alunos – Um quarto do litro.

P – Então vamos lá ver ali na reta… A minha garrafa de litro vai de onde até onde? (Indica todo o segmento de reta). Isto é uma garrafa (apontando o primeiro segmento de reta), isto é outra garrafa… Quantas garrafas? (Fig. 66)

Vários alunos – Quatro.

P –Daqui (0) até aqui (1) tenho quatro garrafas. Então tenho aqui um litro.

Sara – Acho que o espaço é maior…

P – Quantas garrafas destas, vocês têm (referindo-se às garrafas de 25 cl)?

Vários alunos – Quatro.

P – A minha unidade tem de estar dividida em quantas partes?

Vários alunos – Quatro.

P – Então, um litro quantos 25 cl lá tem?

Vários alunos – Quatro.

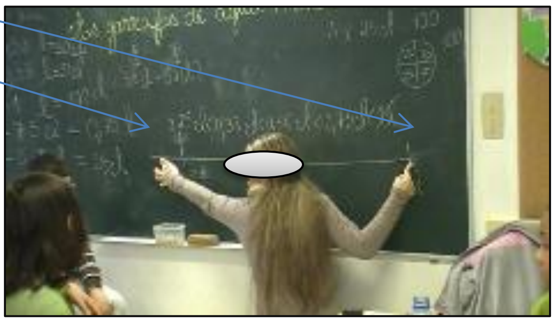


Figura 66 – A divisão da unidade em quatro partes iguais

P – Porquê?

Vários alunos – Por que 25 cl corresponde a um quarto do litro.

Ana – É que assim os 50 cl são maior que um litro (Fig. 67).

João – Assim não dá!

P – Não dá para quê?

João – Para chegar à unidade.

Bruna – Eu sei como podemos fazer professora.

P – Então, Bruna vai lá fazer!

Vai para o quadro e distribui os quatro espaços igualmente.

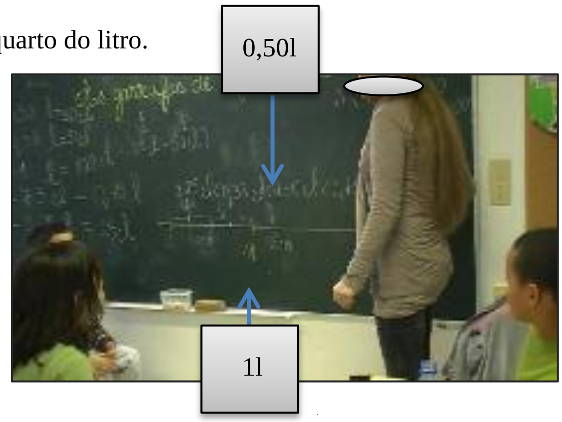


Figura 67 – A relação entre o decimal e a fração

Beatriz suportou o desenvolvimento das ideias dos alunos, deu força a intervenções de alunos mas deixou-os debaterem-se até encontrarem uma solução para a incoerência. Depois de retificada o espaçamento na reta, colocando os quartos no local certo (no meio da metade) Beatriz vai acertando a localização das garrafas na reta, como se pode ver no episódio 10.

Episódio 10: Quanto falta para chegar ao litro?

Bruna – Daqui aqui vão 50, 25, mais 25. Depois mais 50, dois 25 vão até ao litro (dividindo o segmento de reta entre 0 e 1 em quatro espaços iguais, e escrevendo em cada um 0, 25l.)

P – Explica lá melhor aos teus colegas.

Bruna – As quatro partes do litro têm de ser iguais.

O Luís vai ao quadro e explica novamente, por palavras suas, o raciocínio da colega.

Luís – Daqui até aqui temos um quarto, depois outro quarto até ao meio, depois outro quarto, faz três quartos e mais outro, uma unidade (Fig. 68).

P – Quantas partes tem agora a minha reta?

Vários alunos – Quatro partes iguais.

P – Então, um quarto do meu litro é quanto?

Vários alunos – Um quarto!

P – E dois?

Vários alunos – Dois quartos.

P – E três partes do litro?

Vários alunos – É 75 cl.

P – E quatro quartos?

Vários alunos – É a unidade.

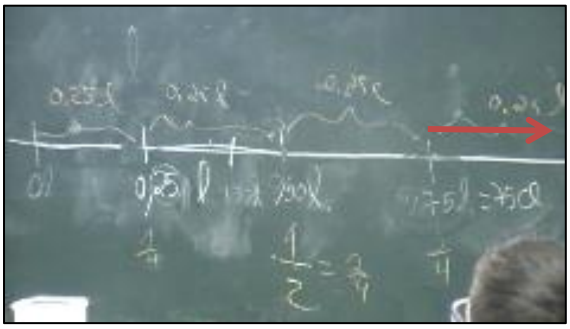


Figura 68 – A unidade dividida em quatro partes iguais

P – Agora ouçam… Quero encher a garrafa do litro.

Já tenho 75 cl. Quero chegar ao litro. Já chega de água? Não preciso de mais?

Vários alunos – Precisa! De mais esta (mostrando a garrafa C, de 25 cl).

P – É fantástico o que me estás a dizer mas agora é preciso que todos o entendam.

P – 75 cl é que parte do meu litro?

Vários alunos – Três partes.

Rodrigo – Para chegar ao litro falta um quarto de litro para chegar ao 100 cl.

Beatriz ao longo desta tarefa tem vindo a desenvolver o significado de fração enquanto medida. Esse significado, visualiza-se de uma forma especial, na reta numérica. “Quando a unidade é 1, de forma abstrata, passamos a ter o número decimal. Na reta numérica a distância entre 0 e 1 é a unidade”. (Lovin & Van Walle, 2006, p. 255)

5.5.3 Refletindo com Beatriz

Beatriz trabalhar os decimais era um momento esperado de forma um pouco ansiosa pois não só tinha sentido que de certa forma, existiam poucas tarefas para trabalhar a noção de número decimal, como sentia à partida grandes dificuldades no trabalho com estes números.

> Do conjunto de tarefas planificado, esta é a única tarefa com números decimais. E a minha questão era: se não sair daqui nada se não acontecesse eles estabelecerem as relações, teríamos de pensar noutra forma. Não podíamos ficar por aqui (R10, 32).

Inicialmente a sua preocupação era que os alunos não relacionassem as ideias novas, com as ideias já trabalhadas de forma a estabelecer as conexões necessárias à compreensão relacional. “Tinha receio de não estabelecerem a associação entre a fração e o decimal. De não haver relação entre as representações dos números, de a tarefa não funcionar. Mas acabou por haver” (R10, 28).

A tarefa foi contudo gratificante: “Eu sabia que a tarefa tinha potencial. Não sabia era como é que se iria concretizar essa situação” (R10, 74). Considerou-a também muito poderosa “pela associação que faz entre a fração e o decimal” (R10, 592).

Mais tranquila com a forma de gerir as discussões matemáticas, mais confiante em si, deixou ir os alunos, deixou-os representar incorretamente na reta numérica e constatar essa mesma incorreção. A própria Beatriz não se sentia confortável com este modelo: " A minha lacuna é a reta numérica. Eu tenho um problema com a reta numérica. Nem eu sei trabalhar bem com a reta, como poderei trabalhar com os alunos?" (R10, 235). Era esta, a questão que a inquietava nesta tarefa, desde o momento, em que a escolheu, tanto mais sabendo que a representação na reta é importante para a compreensão do número racional. Por isso, a razão de escolher um contexto tão próximo da realidade dos alunos e com possibilidade de relacionar com a fração de uma forma prática. De acordo com Lovin & Van Walle (2006) " Os números decimais são outra forma simples de escrever números racionais. Ambas as formas têm valor [referindo-se à fração]. Maior flexibilidade é ganha se se compreender como estão relacionadas".

Beatriz salienta como importante a relação que os alunos estabeleceram entre o numeral misto e o número decimal:

> Os alunos continuam a olhar para o decimal como uma parte fracionária, um número que pode ter uma parte inteira e uma parte fracionária; três garrafas de meio litro enchem uma de litro e meio, estão a trabalhar com a fração. Duas metades formam uma unidade e mais outra metade, uma unidade e meia, o tal litro e meio. A noção de numeral misto de que estão sempre à procura (R10, 48).

Com efeito já no episódio 5 esta relação foi estabelecida com a garrafa de litro e meio:

> Então, e se fossem três garrafas de meio litro? Não deu para comprovar, mas para eles, foi claro. Recordo que disseram que caberiam três garrafas de meio litro. Vimos que duas de meio litro, faziam uma de litro. E se fossem três? (…) (R10, 19-22). Sim, eles sabem que passa do litro. O litro seria a sua unidade de referência. Funcionou bem, eles foram logo buscar a ideia do numeral misto. Eles compreendem quando uma determinada quantidade é muito maior que um litro ou é menor que o litro, ou é igual ao litro (R10, 56) Três garrafas de meio litro, enchem uma de um litro e meio. Convertem a fração (3 x 1/2= 3/2) em misto (1 ½) e agora escrevem também o decimal e relacionam que o que está para lá da vírgula é a parte fracionária e tem de forçosamente escrever-se na forma de fração (R10, 66).

Beatriz foi insistente neste ponto "A parte fracionária pode passar de uma unidade, de duas unidades….nesse caso pode-se escrever o numeral misto… Quando as partes fracionárias perfazem unidades, são números inteiros!" (R10, 63). Considerou, portanto, forte a relação entre a compreensão do que é um numeral misto e um número decimal.

O trabalho com as medidas de capacidade foi do seu ponto de vista facilitador para a compreensão do número decimal:

> Saber que o centilitro é cem vezes menor que o litro foi para mim uma surpresa. Instintivamente ou intuitivamente foi pacífico para os alunos escreveram que 0,75 litros, era o mesmo que 75 centilitros. Perceber que o centilitro é menor que o litro 100 vezes é que foi um pouco mais difícil. (R10, 74).

Apesar do trabalho com os alunos na reta numérica a ter deixado entusiasmada pela capacidade para pensarem as relações envolvidas e as terem conseguido representar, Beatriz manifesta sentir falta de novas oportunidades para que os alunos possam aprofundar a sua compreensão sobre os números decimais e sua representação na reta numérica.

> Sinto falta de outras tarefas. De trabalhar com os números na representação decimal e trabalhar com eles e na reta numérica. Eles têm dificuldades de representação na reta. (…) Sim, mas tem de haver mais, tem de haver mais tarefas em que eles amadureçam estas relações. Mesmo assim, não chega, faltam tarefas (R10, 105).

Durante a sessão em refletimos sobre esta aula, um dos aspetos sublinhados foi o de que ainda faltava trabalhar as percentagens, que acabaram por não emergir, durante esta tarefa nem em anteriores. Beatriz refere quase espantada: “Nós não preparámos nenhuma tarefa para a percentagem. Porquê?” (R10, 142). Acabámos por concluir que na tarefa anterior a esta “O depósito de gasolina” teria sido uma boa tarefa para fazer emergir esse conceito uma vez que a noção de depósito vazio/cheio, induz a pensar numa percentagem. E teria sido uma ideia a ter por horizonte. Beatriz trabalhou-a a partir fração: um quarto de depósito, metade, três quartos mas não chegou a dar o salto. Concluímos ser boa ideia, revisitá-la, tendo a percentagem por horizonte. “Revisitar a tarefa. Utilizando a reta numérica dupla para relacionar, fração e percentagem” (R10, 156).

Pensámos numa tarefa que desse a resposta a Beatriz, mais tarefas para relacionar fração, números decimais e percentagem para ter a convicção que os seus alunos compreendiam e tinham alguma destreza nas múltiplas representações do número racional. Foi neste momento que decidimos adicionar uma nova tarefa de comparação de números racionais adaptada do Rational Number Project, que foi a tarefa 17 “Comparando números racionais”.

Capítulo 6 - Conclusões

Este estudo tem como objetivo compreender o trabalho de uma professora no 3.º ano de escolaridade, desenvolvido no âmbito de um projeto colaborativo, orientado para a construção, pelos alunos, do conceito de número racional, representado na forma de fração, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Concretamente pretende-se descrever e analisar as suas práticas, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem, perspetivando os desafios e dificuldades com que se vai confrontando.

Com esse objetivo pretendi dar resposta às seguintes questões:

Q1. Qual o papel da professora na preparação de uma trajetória de aprendizagem, orientada para a construção do conceito de número racional? Quais as suas perspetivas sobre este processo de construção?

Q2. Como concretizou a professora a trajetória de aprendizagem? O que influenciou essa concretização? Que aspetos considerou facilitarem ou constrangerem a construção do conceito?

Q3. De que modo o trabalho desenvolvido contribuiu para a reorientação das práticas da professora?

Na preparação da trajetória e das aulas eu e Beatriz orientámo-nos pela (i) escolha e sequenciação de tarefas, tendo por horizonte as grandes ideias matemáticas para a construção do conceito de número racional, e na (ii) preparação da professora através da antecipação de tarefas, e da escolha de modelos. Na concretização da trajetória e das aulas a professora centrou-se na (iii) apresentação das tarefas aos alunos e no apoio ao trabalho dos alunos, procurando fazer emergir os conceitos matemáticos e na (iv) discussão das estratégias emergentes do trabalho realizado com os alunos, e no uso de modelos para os ajudar a pensar. Relativamente à reorientação das práticas de ensino da professora, debrucei-me sobre os contributos da reflexão sobre o trabalho realizado, ao longo da trajetória, sobre as dificuldades, os desafios experienciados e a forma como Beatriz perspetiva futuramente as suas práticas.

O ciclo de preparação, ação, reflexão permitia um reajuste constante da conjetura pensada e explicitada na escolha e sequenciação das tarefas.

6.1 Construindo o conceito de número racional

Pretendo de seguida abordar as fases de preparação e concretização das aulas, fazendo uma retrospetiva relativamente ao trabalho realizado durante o projeto de colaboração e evidenciando os aspetos que mais caracterizaram as práticas de Beatriz, emergentes da análise.

6.1.1 Preparação

O projeto de colaboração consistia na preparação da unidade dos números racionais para o 3º ano de escolaridade, tendo em conta a inovação curricular: a construção do conceito de número racional, a partir da noção de fração nos seus diversos significados, e a utilização em paralelo das duas representações: fração e decimal.

Dando resposta à orientação metodológica do programa de Matemática do ensino básico foram pensadas experiências matemáticas diversificadas, tendo-se portanto, realizado diferentes tipos de tarefas.

O projeto de colaboração

Decorria do nosso projeto, uma negociação das tarefas a realizar nas aulas, a partir de uma seleção criteriosa. As tarefas seriam problemas de curta, média ou longa duração (20 a 30 minutos, 1 aula, 2 aulas) e o contexto de trabalho envolvia sempre momentos de apresentação da tarefa pela professora aos alunos em grande grupo, momentos de trabalho em pequeno grupo (dois ou quatro alunos), para dar tempo aos alunos de discutirem ideias entre si, e desenvolverem estratégias de resolução e as representarem. Finalmente, um momento de discussão das estratégias desenvolvidas pelos alunos, para abrir espaço à intensificação de um discurso matemático, em torno das grandes ideias matemáticas que revelam a estrutura que está subjacente à tarefa.

***As grandes ideais matemáticas no horizonte*.**

Beatriz estudou o currículo tendo em vista compreender as metas de ensino, utilizou a planificação do seu grupo de trabalho, reuniu documentos vários, selecionou tarefas e realizou reuniões para a preparação desta unidade didática. Todo este trabalho foi conjunto e ocorreu em reuniões onde partilhámos a escolha de tarefas e analisámos o seu potencial à luz das metas definidas. Ao articular e sequenciar as tarefas que considerámos ser poderosas, com os objetivos pretendidos, escolhemos um caminho que se designou por trajetória de aprendizagem hipotética, sabendo de antemão que seria inevitável, por vezes, fugir a esse caminho, seria inevitável, sem contudo perder a direção pretendida.

Pensando no ensino do número racional e tendo consciência das dificuldades do percurso, pela sua inexperiência no trabalho com o número racional na forma de fração e da própria complexidade do conceito, meticulosamente se definiram as grandes ideias matemáticas a trabalhar – o *nosso horizonte matemático,* se anteciparam estratégias e se escolheram modelos para ajudar os alunos a pensar.

***A escolha e sequenciação de tarefas*.**

Para Beatriz foi central no trabalho os momentos de preparação cuidadosa das tarefas, onde se incluía uma primeira escolha individual, pelos motivos que cada uma considerasse serem válidos, seguida da resolução em conjunto da tarefa e da antecipação dos possíveis processos de pensamento dos alunos. Partilhávamos as resoluções e debatíamos as grandes ideias matemáticas subjacentes que constituíram as grandes ideias a trabalhar. A sequência de tarefas foi projetada tendo em conta as ideias estruturantes da matemática a desenvolver e o conhecimento dos alunos. Os conhecimentos prévios dos alunos que só Beatriz conhecia, foram o ponto de partida para novas aprendizagens, ou seja, as suas ferramentas para a construção do novo conhecimento, assim como a escolha de modelos para ajudar os alunos a pensar. A escolha e sequenciação das tarefas foi pois, um passo decisivo em todo o trabalho desenvolvido, e foi negociado por ambas, à partida, antes do início da unidade e, momento a momento, após cada aula, verificados os progressos no pensamento dos alunos. Foram portanto selecionadas por nós tarefas, neste caso, problemas matematicamente ricos que puderam ser usados para apoiar e servir de andaimes ao pensamento dos alunos sobre frações, decimais e percentagens, tendo em atenção as grandes ideais matemáticas definidas na paisagem de aprendizagem (Fosnot & Dolk, 2002: Fosnot, 2007).

A escolha dos contextos das tarefas e dos contextos de trabalho

Os contextos das tarefas foram cuidadosamente selecionados por Beatriz, que tinha a atenção especial de os colocar aos alunos, como se uma história das suas vidas se tratasse. Foi notório em vários momentos, ouvir Beatriz iniciar uma história e só depois se perceber que colocava um problema que exigia uma solução matemática. A afirmação de uma aluna, na tarefa da baguetes "parece-me que é matemática" e mais à frente "é mesmo um problema de matemática" denota o envolvimento na história, que Beatriz fomentava antes da abordagem matemática. Esta situação é visível em muitos dos títulos das suas tarefas que apenas são indicadores do tema da pequena história: "O lenço do meu marido", "As garrafas de água mineral", "A visita de estudo"… Fui-me apercebendo ao longo do tempo que trabalhámos juntas que este cuidado, com o contexto da tarefa, esta envolvência da tarefa matemática, era um traço da personalidade de Beatriz, como professora.

Os contextos de trabalho com os alunos e as modalidades de trabalho foram também cuidadosamente escolhidos por nós, face ao tipo de tarefa. Todas as tarefas que constituíam problemas foram trabalhadas, a pares ou em grupos, seguidas da orquestração de uma discussão coletiva, depois da resolução das tarefas e da produção de trabalhos. As tarefas mais longas foram trabalhadas em duas aulas, sendo na segunda aula convocado o congresso matemático para a discussão das estratégias e das grandes ideias emergentes. O contexto de trabalho de congresso matemático (Fosnot & Dolk, 2002), ajudou Beatriz a instituir como prática corrente a discussão dos conceitos matemáticos, e a ensinar os seus alunos a posicionarem-se nessas discussões, enfatizando as questões matemáticas. Neste trabalho, o papel do professor é crucial para manter o foco na matemática emergente e nos processos de raciocínio matemático, tentando "levar todos os alunos com ele" (EF, 231)

Compreendi que não era usual Beatriz nas discussões, tornar objeto explícito da discussão coletiva, os conceitos, estratégias e raciocínios. O trabalho desenvolvido em torno da tarefa 4 "A visita de estudo e distribuição de baguetes" em que ambas simulámos um congresso matemático, permitiu a Beatriz aperceber-se da forma como poderia tornar objeto de discussão as questões matemáticas, levando os alunos a exporem os seus processos de pensamento e as suas conceções momentâneas dos conceitos com que trabalhavam, podendo Beatriz aceder desta forma ao pensamento dos alunos, e encaminhar a discussão matemática em direção a horizontes matemáticos.

Beatriz referiu, por vezes, ter sido este contexto de vivência de um congresso matemático que lhe permitiu mudar o seu papel como professora:

> como eu aprendi [no congresso matemático] fui adequando a minha postura e deixei de dar aulas tão dirigidas. A argumentação, o discurso estava mais solto…mas também mais direcionado" (EF, 581)
>
> A partir daí intercalava tarefas realizadas em congresso matemático com tarefas mais simples mas com discussão coletiva… (EF, 584)

Beatriz nesta intervenção ressalvou o mais importante. Passou, mesmo em tarefas mais simples, a dar grande importância às discussões coletivas.

Por outro lado, passou a instituir, como modalidade de trabalho, o trabalho em pequeno ou grande grupo, por considerar central a troca de ideias entre os alunos:

> Nesse sentido mudou completamente. Quem entra na sala e não sabe o que está a acontecer pode pensar que há um burburinho diferente do habitual, mas eles estão a trabalhar com um objetivo e isso é que é importante. Esse barulho é construtivo (EF,587).

A antecipação de estratégias.

Ao preparar o seu trabalho Beatriz salientou muitas vezes não saber quando uma tarefa é boa. Poder escolhê-la por questões de forma, porque parece ser atrativa, ou até só porque o seu contexto é familiar aos alunos não é, certamente, a questão central para a escolha de uma tarefa pelo professor. Fazendo parte do trabalho de preparação, a escolha de tarefas para a trajetória e a sua sequenciação esta sensação foi minimizada, traduzindo-se numa maior segurança face às tarefas a propor. Tal tarefa só é possível, tendo muita consciência da estrutura matemática subjacente à escolha e ao conhecimento dos processos de aprendizagem dos alunos e seu desenvolvimento. Quando Beatriz diz conhecer os seus alunos, refere-se um pouco àquilo que eles sabem, mas também, à forma como aprendem e da qual se foi apercebendo ao longo do tempo.

Resolver a tarefa como o aluno, debater com outro colega os processos de resolução e partir para uma discussão em torno do trabalho desenvolvido, foi uma estratégia adotada por nós, e permitiu ter em atenção, previamente, não só as possíveis estratégias de resolução como também os processos de pensamento usados. Beatriz passou a sentir-se mais confortável com o trabalho que propunha aos seus alunos.

6.1.2 Concretização

Beatriz proporcionou aos seus alunos uma experiência matemática diversificada, apoiada em tarefas criteriosamente selecionadas e encadeadas que puderam fazer emergir as grandes ideias matemáticas relacionadas com o conceito de número racional. Beatriz desenvolveu com os alunos as estratégias que eles próprios explicitaram, usando como ferramentas as ideias emergentes.

A apresentação das tarefas.

Beatriz iniciou as explorações com os alunos começando por apresentar o problema ajudando-os a "dar sentido ao problema", isto é a remetê-los para o contexto, de forma a dar suporte ao seu pensamento e diluindo eventuais mal-entendidos. A apresentação cuidada e sem pressas, que realizou no início das suas tarefas, foi permitindo aos alunos apropriarem-se do problema.

O apoio ao trabalho dos alunos

Após a apresentação das tarefas, Beatriz providenciou espaços de reflexão, de modo a que os alunos se fossem apropriando do problema, tomando consciência deste, à sua maneira e ao seu próprio ritmo. Pedia para refletirem sobre as ideias dos outros alunos e de seguida dava-lhes um tempo para desenvolverem o trabalho e para discutirem ideias (a pares ou no pequeno grupo, conforme o caso).

A orquestração de discussões coletivas

Beatriz instituiu os momentos de discussão coletiva como momentos cruciais para fazer sobressair importantes ideias matemáticas que foram sendo apresentadas pelos alunos. Pediu-lhes para refletirem sobre as ideias dos colegas, num clima de respeito e de coresponsabilização pelas aprendizagens mútuas. Usou a comunicação aluno-aluno ou aluno-professor em momentos críticos, nos quais novas ou importantes ideias são apresentadas à comunidade de sala de aula e parafraseou ditos dos alunos (recontou) para evidenciar o que de mais importante ia sendo referido.

Modelou as atitudes a desenvolver e a instituir na cultura da sala de aula, ao fomentar alunos bons ouvintes, através da forma como ouve as ideias deles, dos seus alunos e respeitadores das ideias de cada um, validando e ouvindo as ideias de todos.

Ensinou-lhes desta forma que a aprendizagem é difícil e requer esforço, mostrando-lhes como se trabalha em conjunto e como se podem ajudar mutuamente. Levou-os a colocar questões, mostrando como é importante pedir explicações para clarificar o que está confuso. Mostrou-lhes que os desacordos não são ataques pessoais mas defesas de ideias, o que é essencial numa comunidade de discurso e que também ela, enquanto aprendente, pode cometer erros e mudar o seu pensamento.

6.2 Reorientando as práticas de ensino

Uma questão que se evidenciou ao longo de todo o trabalho foi a da necessidade de constante reajuste das práticas, por efeitos da própria ação e da reflexão sobre a ação. Esta dinâmica, que decorre do ciclo de ação-reflexão do nosso projeto de colaboração, é visível na figura 69.

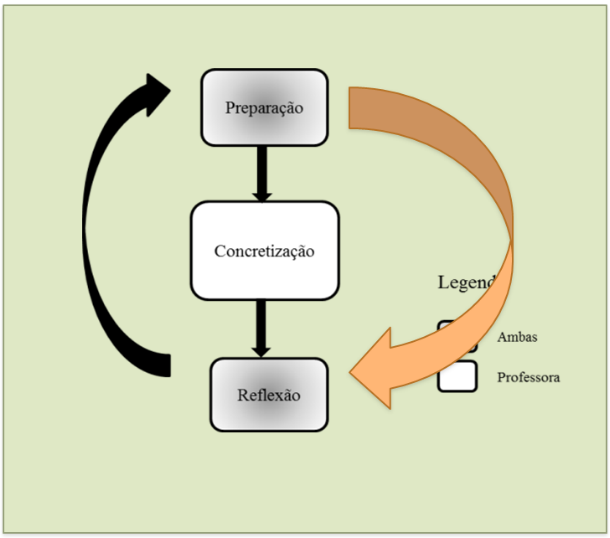


Figura 69 – Ciclo de ação- reflexão

Beatriz investe na preparação para concretizar o seu trabalho e a partir da reflexão sobre a ação, prepara uma nova ação, constituindo este ciclo o reajuste constante de um trabalho preparado em torno de uma trajetória de aprendizagem planeada e conjeturada. O constante reajuste, a modificação da trajetória, é a peça central do ciclo de aprendizagem (Simon, 1995).

A seta a laranja representa a tomada de consciência de uma nova relação no ciclo de ação- reflexão do projeto de colaboração. A preparação é uma predição *para a ação* e projeta a própria ação antecipando uma reflexão *sobre a ação*. O professor torna-se um observador de si mesmo.

Beatriz ao longo do trabalho desenvolvido, durante o projeto de colaboração, foi reorientando as práticas de ensino a vários níveis:

- Após cada aula, a reflexão realizada em torno do trabalho desenvolvido permitiu considerar se o que era pretendido acabou por emergir, ou se seria necessário revisitar essa ideia ou essa tarefa, como aconteceu na tarefa do "Depósito de gasolina". Não tendo emergido a noção percentagem e continuando Beatriz a considerar a tarefa boa para trabalhar esta noção, decide revisitá-la, trabalhando agora com a reta numérica dupla (fração, percentagem).
- Após a reflexão realizada em momentos diversos da trajetória, face às grandes ideias já trabalhadas, Beatriz decide alterar a sequência planeada e antecipar a tarefa 14 "O muro das frações" pois os alunos já tinham intuindo que podiam representar de diferentes formas a mesma quantidade (quando descobrem que metade é equivalente a dois quartos e a quatro oitavos).

Ao nível da própria professora foram visíveis, e percetíveis para a própria, algumas mudanças, relacionadas com os seguintes fatores:

- Gestão das modalidades de trabalho na aula, em particular na diversificação e diferenciação dos momentos de apropriação do problema, de discussão das primeiras ideias, de discussão e negociação de estratégias, na defesa das apresentações, na argumentação, dos raciocínios e das estratégias utilizadas no grande grupo e na validação das conclusões;

- Valorização da estrutura emergente da matemática nas tarefas, passando a dar mais importância à discussão das ideias matemáticas, e instituindo os conceitos matemáticos como objetos, do discurso matemático;
- Gestão da tensão entre os objetivos e a aprendizagem dos alunos, e responsabilização pela sua intervenção na ajuda e a suportar o pensamento dos alunos.

Estas mudanças contribuíram de forma decisiva para uma relação mais gratificante, mais confiante e contudo mais exigente em relação à Matemática:

> Eu este ano apaixonei-me pela matemática, porque descobri coisas magníficas acerca da Matemática. Eu só a via como quando a aprendi. Fórmulas e mais fórmulas, e eu que tenho uma enorme capacidade para decorar… decorava e pronto. Eu apaixonei-me por ela. Andei enganada, estava iludida… adorei o trabalho que realizámos conjuntas por tudo o que falámos e partilhámos. Tenho pena de não continuarmos a trabalhar. A partir deste ano não serei a mesma professora. (RF, 355)

Esta mudança de perspetiva levou-a a encarar de forma mais ativa as dificuldades dos alunos, deixando de se sentir fechada no problema mas desafiada por ele, na medida em que ganhou uma segurança emocional que lhe permitiu não se sentir tão frustrada com as dificuldades. A tarefa do João e da Maria mostra um ponto de viragem na forma como Beatriz passou a encarar a sua frustração, quando as expetativas não correspondiam. Ao sentir as suas dificuldades, numa situação que lhe pareceu à partida não levantar grandes questões, sentiu desilusão em termos emocionais assim como alguma insegurança.

O conflito cognitivo gerado internamente – “como sair desta situação de impasse?” –, uma vez que os alunos estão centrados na resposta óbvia e “não ouvem as vozes dissonantes de um ou dois colegas que apontam intuitivamente para outra solução”, provoca-lhe sentimentos de desalento e insatisfação mas, simultaneamente, serve de motor para uma mudança na sua própria atitude levando-a a repensar o seu papel na orientação da discussão.

Para Beatriz este foi um novo encontro com o conceito de número racional e uma reestruturação do mesmo. “Não me assustava tanto a fração mas como realizar esse trabalho com os alunos com sentido para eles” (EF,508). Ao colocar a abordagem ao número racional a partir da construção do conceito de fração no 1.º ciclo, não é possível esquecer que é a primeira vez que estes professores se defrontam com este desafio.

Precisamente num domínio tradicionalmente difícil para todos, alunos e professores, mas um domínio crucial, na aprendizagem dos números, do cálculo e da álgebra.

6.3 Encerrando o estudo

No momento em que termino este estudo, olho para trás e perpassam em mim, momentos de uma grande riqueza. Tive a oportunidade de estudar questões da didática da Matemática, com as quais convivi diariamente ao longo dos meus vinte e cinco anos ao serviço das aprendizagens da Matemática. Tive acesso a novos conhecimentos, aprofundei e fundamentei outros. Foi como que uma caminhada pessoal de busca de novos sentidos, de procura de outro significados. Evolui, pessoal e profissionalmente.

Entrar na sala de aula do 1º ciclo, para mim, que sou professora do 2º ciclo, foi um desafio imenso. Conheci uma realidade diferente, e alarguei os meus horizontes. As minhas expetativas mudaram relativamente às primeiras aprendizagens da Matemática. Aos alunos do 3.º ano, pode-lhes ser pedido um trabalho exigente do ponto de vista da matemática, com o suporte devido. Para o professor o desafio, é enorme! Além de ter de ser plurifacetado, para dar resposta às diversas áreas da monodocência, tem de se tornar um especialista nas primeiras aprendizagens da Matemática. E o seu trabalho não é apenas dar a conhecer o que existe, é construir o significado matemático do mundo que os rodeia. Passo a passo…

Conhecer Beatriz, a professora, foi aliciante. Durante meses, partilhámos conhecimentos, dúvidas, convicções, receios, descobertas, dificuldades, entusiasmos. Entrarmos num projeto de colaboração permitiu aprofundar mutuamente o conhecimento. Os nossos contributos foram diferentes e beneficiaram-nos reciprocamente. Beatriz recebeu uma atenção individualizada, passou a ter uma companheira de equipa com quem trabalhar, partilhar, dialogar, refletir, antes e depois das aulas. Pôde usufruir da minha experiência de vida, da minha experiência como professora e da minha disponibilidade para a apoiar no planeamento desta unidade didática. Eu tive o privilégio de entrar na sua sala e acompanhar o seu trabalho com os alunos, além de poder compreender as suas intenções de partida, e do fruto da nossa reflexão, acompanhar também as inflexões ao percurso planeado e as razões subjacentes a essas escolhas.

Essa colaboração permitiu-nos dois olhares, duas vontades, duas energias no investimento. As diferentes formas de ver permitiram tentativas de conciliação para as tomadas de decisão e para a reflexão sobre a prática. A gestão dos desacordos, e o apoio mútuo nas decisões permitiram lidar com os obstáculos como se de desafios se tratassem. Encontrando ressonância nas ideias de Lampert (2011), o sentido do que se pode e deve fazer como professor não é uma construção privada: "Tornar-se um *professor ambicioso* significa trabalhar publicamente num ambiente com outros professores ambiciosos" (p. 23).

Por isso, questiono-me: Existirão bons professores? Estará inscrito no seu *ADN* as informações genéticas que determinarão as suas boas práticas? Ou a perspetiva será preparar os professores para que se tornem melhores, porque aprenderam a ensinar?

Deixar o professor entregue a si mesmo, às suas qualidades inatas, à sua experiência de vivências feitas, ao seu isolamento, ou promover o trabalho colaborativo, partilhar e vivenciar experiências de trabalho conjunto orientadas por formadores que ajudem a nutrir essas experiências vividas e acumuladas?

Referências bibliográficas

Anghlieri, J. (2006). *Teaching Number Sense* . London: British Library.

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,15,* 5, 323-341.

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI, *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação .

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. Tese de Doutoramento.* Lisboa: APM.

Boutin, G. G. (1994). *Investigação qualitativa: Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Brocardo, J. (Setembro /Outubro de 2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento de sentido do número. *Educação e Matemática*, 15-23.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classroom that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Donísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: SEM-SPCE.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning* (81-89).

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning trajectories in early mathematics - sequences of acquisition and teaching. Encyclopedia of Language and Literacy.*

Desenvolvimento (pp. 1-7). London. Obtido em 13 de Abril de 2012, de Canadian Language and Literacy Research Rede. Network: http://literacyencyclopedia.ca/pdfs/topic

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2008). Introduction - The discipline and practise of qualitative research. In N. K. Lincoln (Ed.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 1-43). USA: Sage Publications.

Denzin, N. L. (2006). *O planejamento da pesquisa qualitativa: Teorias e abordagens.* Porto Alegre : Artmed.

Dolk, M. & Fosnot, C. (2001). *Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction.* Portsmouth: Heinemann.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas : Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35-53). Lisboa: Escolar Editora.

Dolk, M., & Fosnot, C. (2002). *Constructing Fractions, Decimals and Percents.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Org.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMilllan.

Erickson, F. (1989). Research currents: Learning and collaboration in teaching. *Language Arts 66(4)*, 430-441.

Erickson, F. (1990). *Culture, Politics and Educational Practicse.* Educational Foundations 4, 2:22.

Fosnot C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Fosnot, C. T. (2007). *Investigating multiplication and division. Grades 3-5.* Portsmouth, NH: Heineman.

Freire, P. (1988). *Extensão ou comunicação?* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Ghiglione, R., & Matalon, B. (1992). *O inquérito: Teoria e Prática.* Oeiras: Celta Editora.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can me do about it? In L. Santos, P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.), *Actas do Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes, Educação Matemática: Caminhos e Encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research.* NK.

Hersch, S., Fosnot, C. & Cameron, A. (2005). *Fostering children`s mathematical development. Grades 3-5.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hierbert, J. & Stigler, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the Wordl's Teachers for Improving Education in the Classroom.*New York: The Free Press.

Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal, 14 (2)*, 133-149.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). Columbus: Ohio State University, EEIC, SMEAC.

Kilpatrick, J.; Swafford, J.; Brandford Findell Editores. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Waschington, DC.: National Academy Press.

Kraemer, J.-M. (2008). Desenvolvendo o sentido de número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

Lampert, M., & Blunk, M. (2011). *Talking Mathematics in School.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M., & Ghousseini, H. (2011). *Situating mathematics teaching practices in a pratice of ambitious teaching.* Boston.

Lincoln, Y. S. & Guba, E, G. (1985). *Naturalistic Inquiry.* Beverly Hills CA: Sage Publications.

Mamede E. & Cardoso, P. (2010). Insights on students (Mis)understanding of fractions. In M. M. Pinto, & T. F. Kawasaki (Orgs.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education, Vol 3* (pp. 257-264). Belo Horizonte: Brasil: PME.

Mamede E., Nunes T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quocient situations. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Orgs), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education.* Melbourne, Australia: PME.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12(3)*, 2-8 & 44.

Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C. & Gonçalves, F. (2009). *Números e operações - 3.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 22 de 06 de 2010, de Ministério da Educação: http://area.dgidc.min-edu.pt//materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_NumeroseOperacoes:NPMEB_1 c3 (actualizado22Jun2010).pdf

Miles, M., & Hubbermann, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis.* London: Sage Publications.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 06 de Outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005a). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante 14 (1)*, 89-114.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Nunes, T. (Janeiro de 2006). *Fraction: difficult but crucial*. Obtido em 15 de Novembro de 2011, de T.L.R.P, Teaching & Learning, Research Programme: http://www.edstud.ox.ac.uk/research/

Nunez, R., & Edwards, L. M. (1999). Embodied cognition as situadness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 45-65.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).* Lisboa: APM.

Patton, M. (2002). *Qualitative Research e Evaluation Methods.* London: Sage Publications.

Silva, A. M. (Jan/Mar de 2010). Investigação qualitativa: convicções e exigências. *Investigar em Educação*, pp. 144-177.

Stake. R. E. (2009). *A arte de investigação em estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigaçãoà prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Van de Walle, J. &. (2006). *Teaching Student-Centered Mathematics Gardes k-3.* Boston: Pearson.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravenmeijer, K., van Herpen, E.& Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentagens, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense Publishers.

Vygotsky, L. (1989). *Pensamento e Linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática (tradução). *Journal for Research in Mathematics Education 27(4)*, 458-477.

Anexos

Anexo 1 - Pedido de autorização à Direção do Agrupamento

Ex. Sr.ª Directora do

Agrupamento de Escolas FFFFFFF

Eu, Margarida Maria de Sousa Uva da Gama Nunes e Silva, professora do quadro de nomeação definitiva da Escola Básica 2,3 de Pinhal de Frades, grupo de recrutamento 230 (Matemática e Ciências da Natureza) venho por este meio solicitar autorização para desenvolver na Escola xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, 1º ciclo, um estudo de investigação intitulado "Do número natural ao número racional: Um estudo de dois professores: no 3º ano de escolaridade" que se integra no meu trabalho de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este estudo tem como objectivo compreender como dois professores do 3º ano de escolaridade contribuem para o desenvolvimento do Sentido do Número na construção do conceito de número racional a partir da representação destes números, sob a forma de fracção. Pretende-se portanto, descrever e analisar as práticas de dois professores na preparação das suas aulas, na escolha e exploração das tarefas, e os desafios que se lhes apresentam durante o seu trabalho recorrendo para o efeito a uma metodologia qualitativa e interpretativa, do tipo estudo de caso. O facto do estudo se centrar no 3º ano de escolaridade prende-se com o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico que introduz agora, a noção de número racional no 1º ciclo a partir da noção de fracção.

Assim, contactei, de modo informal, a professora xxxxxxxxxxxxxxxxxx da xxxxxxxxxxxxxxx que se disponibilizou a trabalhar colaborativamente comigo preparando a unidade didáctica, analisando e seleccionando entre as tarefas definidas pelo grupo de professores do 3º ano, e outras que consideremos adequadas, uma trajectória de aprendizagem para este tópico do programa: Números Racionais não negativos.

Neste sentido, venho por este meio solicitar a Vª Ex.ª autorização para que eu possa estar presente, durante o próximo ano lectivo, em algumas das aulas da referida professora, para proceder aos registos áudio e vídeo das mesmas, com vista a recolher dados que sejam objecto de análise no âmbito da investigação que me proponho realizar. Mais declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins e que serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Também e após a vossa resposta, solicitarei autorização para efectuar os registos áudio e vídeo das aulas referidas ao Ministério da Educação (através da DGIDC) e aos Encarregados de Educação da turma (através da própria professora).

Estou disponível para qualquer esclarecimento adicional e agradeço desde já a colaboração.

Com os melhores cumprimentos,

Seixal, 10 de Outubro de 2010

Pede deferimento

____

(Margarida Uva Silva, PQND da Escola Básica 2,3 de Pinhal de Frades)

P.S Os meus contactos:

Telemóvel:91728993

Mail: margaridasilvaani@gmail.com

Anexo 2 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Ex.º Sr. /Ex.ma Srª.

Encarregado de Educação

Venho por este meio solicitar autorização para gravações áudio e vídeo de aulas de matemática, relacionadas com a unidade didáctica "Números Racionais não negativos". Estes registos servirão de base ao trabalho de investigação para a tese de mestrado da professora Margarida Uva Silva realizado no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Trabalharemos, portanto, colaborativamente nesta unidade didáctica, esperando contribuir para uma finalidade comum: aprendizagens matemáticas significativas, para os alunos.

O trabalho de investigação enquadra-se no Desenvolvimento do Sentido do Número, pelo que vai ao encontro de um dos principais propósitos de ensino do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Com efeito, este programa considera muito importante a compreensão dos números e das operações para a fluência do cálculo e a resolução de problemas.

Informo que Margarida Uva Silva solicitou autorização ao Ministério da Educação (através da DGIDC) e à Direção do Agrupamento, declarando que as imagens e registos recolhidos no âmbito do trabalho de investigação não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins e que serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Estamos disponíveis para qualquer esclarecimento e agradecemos desde já a colaboração.

Com os meus cumprimentos

____

A professora

…………………………………………………………………………………………..

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno_______________________________________ da turma __ do ___ ano, venho por este meio autorizar a participação do meu educando nas gravações áudio e vídeo a realizar, na sala de aula, no âmbito da investigação em curso.

Anexo 3 – Projeto de colaboração

Projeto de Colaboração

Descrição do projeto e objetivos

A equipa de trabalho colaborativo será constituída pela professora que leciona o 3º ano de escolaridade, e por mim, investigadora, e terá como objetivos:

Aprofundar modos de promover o desenvolvimento do sentido de número racional, nos alunos, concretamente, na passagem do natural ao racional, a partir da noção intuitiva de fração, através de:

Análise e seleção ou construção de tarefas;

Conceção de uma cadeia de tarefas que possa ser uma possível trajetória de aprendizagem;

Reflexão e análise sobre as aulas em que as tarefas foram exploradas.

Modos de funcionamento e duração do projeto

A realização do projeto incluirá a realização de sessões de trabalho conjunto (três ou quatro sessões) e a observação de aulas pela investigadora. As aulas a observar serão todas as da unidade didática referente à passagem do número natural ao número racional (cerca de duas semanas de aulas).

O projeto desenvolve-se desde Novembro a Fevereiro de 2010 e terá o seguinte desenvolvimento:

Entrevista inicial;

Realização de três a quatro sessões de trabalho conjunto, para analisar documentos e analisar e selecionar tarefas;

Observação de aulas por parte da investigadora à professora durante duas semanas;

Análise e reflexão do desenvolvimento das tarefas após as aulas que decorrerão durante as duas semanas;

Realização de uma entrevista final à professora.

Sessões de trabalho em conjunto

O trabalho a realizar nas sessões conjuntas inclui diversos aspetos da prática do professor que se prendem com aspetos do seu conhecimento do currículo e do conteúdo, da didática e da gestão das aprendizagens na sala de aula. Esse trabalho inclui:

Discussão de textos de orientação curricular e de didática, propostos pela investigadora ou pela professora considerados importantes para o trabalho a desenvolver;

Análise do propósito principal de ensino para o tópico Número e Operações, aprofundamento de conceitos chave a ele associados e discussão dos objetivos de aprendizagem;

Conceção de uma cadeia de tarefas que possa ser uma possível trajetória de aprendizagem;

Antecipação de resoluções diversas por parte dos alunos e de formas de utilização das diferenças e das dificuldades para orquestrar uma boa discussão coletiva;

Reflexão sobre as aulas que vão sendo realizadas e sobre episódios considerados significativos.

Protocolos

Das sessões de trabalho conjunto a investigadora tirará notas de campo para elaborar memorandos;

As aulas serão observadas e vídeo e áudio gravadas por mim, investigadora;

A cadeia de tarefas desenvolvida será divulgada aos professores da escola;

O investigador compromete-se a garantir o anonimato dos professores e dos alunos que participam neste projeto.

Anexo 4 – Guião da primeira entrevista a Beatriz

Guião da entrevista inicial à Beatriz

Introdução

A investigação que se pretende desenvolver intitulada **"Do número natural ao número racional: Um projeto de colaboração com uma professora do 3º ano de escolaridade"** integra-se no trabalho final do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este estudo tem como objetivo compreender o trabalho de uma professora do 3º ano de escolaridade, desenvolvido no âmbito de um projeto colaborativo, orientado para a construção, pelos alunos, do conceito de número racional, representado na forma de fração, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Concretamente pretende-se descrever e analisar as suas práticas, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem, perspetivando os desafios e dificuldades com que se vai confrontando. O estudo inscreve-se numa abordagem qualitativa e de investigação e, em particular, na interface entre o paradigma interpretativo e colaborativo tendo sido realizado neste âmbito, um estudo de caso.

O facto do estudo, se centrar no 3º ano de escolaridade, prende-se com a inovação curricular que introduz agora, a noção de número racional no 1º ciclo, a partir da noção de fração, nos seus múltiplos significados, e em paralelo com a representação decimal.

Objectivos gerais da entrevista

Recolher dados que permitam:

a) Descrever o percurso profissional da professora e a sua relação com a profissão e com a Matemática;
b) Compreender as motivações e expectativas da professora face a este projecto de investigação e à sua colaboração;
c) Compreender perspectivas da professora acerca da Matemática e do ensino da Matemática;

d) Identificar a percepção do professor acerca de S*entido de Número e* concretamente *de Sentido de Número Racional*;
e) Identificar a percepção do professor acerca do Desenvolvimento do Sentido de Número na sua prática.

Objectivos específicos e desenvolvimento da entrevista

Blocos	Objectivos específicos	Desenvolvimento da entrevista	Observações
A Legitimação da entrevista	Legitimar a entrevista e motivar o professor	Informar, em linhas gerais, que se pretende desenvolver um trabalho no âmbito do desenvolvimento do *Sentido de Número* na disciplina de Matemática, dado ser um conceito central no NPMEB e que assume importância crucial num momento em que a introdução dos números racionais, a partir da noção de fracção se passa a fazer no 1º ciclo, 3º ano de escolaridade; Agradecer a disponibilidade da professora para a colaboração neste projecto; Pedir à professora que autorize a gravação da entrevista; Assegurar ao professor o carácter confidencial, anónimo e sigiloso das informações prestadas; Percepcionar as motivações e expectativas da professora face a este trabalho de colaboração.	Tempo médio de duração da entrevista 90m
B Percurso académico e profissional	Recolher dados pessoais Identificar o percurso académico	O que te levou a ser professora? A primeira aula? Sensações? O que sentes em relação à Matemática? Como te sentias, como a aluna que foste? Como a professora que és? O que te acontece relativamente à escolha das tarefas? Como as escolhes? Como escolhes o percurso a seguir num tópico, numa unidade didáctica? Que sentimentos vives durante as aulas de matemática? O que aconteceu numa aula que te tenha deixado muito realizada? E muito frustrada? Que mais valorizas na tua profissão? Que constrangimentos tens relativamente a ela? Como foi escolher o curso? Que tinhas em mente como profissão? Como foi ser professora ao longo do tempo?	Quem é o professor? Como tem sido o seu percurso na

	Identificar o percurso académico Identificar o percurso profissional	Que mais valorizas na tua profissão? Que constrangimentos tens relativamente à tua profissão? Como foi escolher o curso? Que tinhas em mente como profissão? Como foi ser professora ao longo do tempo? Quantos anos de serviço? Que escolas? Que cargos? Que atividades não letivas? Que formação? Principais experiências no âmbito da profissão?	Como tem sido o seu percurso na relação com a sua profissão?
C Adesão ao projecto de colaboração	Percepcionar motivações	Desde logo, te tocou esta temática, pois aceitaste entusiasticamente a minha proposta de colaboração. Porquê?	Que motivação?
D Perspetiva sobre Sentido de Número	Percecionar o significado deste conceito	No NPMEB fala-se no desenvolvimento do Sentido de Número ao longo dos diversos ciclos de escolaridade no trabalho com os números e as operações. O que é para ti, Sentido de Número? Em que pensas quando falo em Sentido de Número? O grupo de trabalho debateu este conceito? Pensou no seu significado e na forma de trabalhar o Sentido de Número?	Que perceção?

	Identificar o percurso académico Identificar o percurso profissional	Que mais valorizas na tua profissão? Que constrangimentos tens relativamente à tua profissão? Como foi escolher o curso? Que tinhas em mente como profissão? Como foi ser professora ao longo do tempo? Quantos anos de serviço? Que escolas? Que cargos? Que atividades não letivas? Que formação? Principais experiências no âmbito da profissão?	Como tem sido o seu percurso na relação com a sua profissão?
C Adesão ao projecto de colaboração	Percepcionar motivações	Desde logo, te tocou esta temática, pois aceitaste entusiasticamente a minha proposta de colaboração. Porquê?	Que motivação?
D Perspetiva sobre Sentido de Número	Percecionar o significado deste conceito	No NPMEB fala-se no desenvolvimento do Sentido de Número ao longo dos diversos ciclos de escolaridade no trabalho com os números e as operações. O que é para ti, Sentido de Número? Em que pensas quando falo em Sentido de Número? O grupo de trabalho debateu este conceito? Pensou no seu significado e na forma de trabalhar o Sentido de Número?	Que perceção?

Anexo 5 – Guião da segunda entrevista, entrevista final, a Beatriz

Guião da entrevista final à Beatriz

Introdução

A investigação que se pretende desenvolver intitulada **"Do número natural ao número racional: Um projeto de colaboração com uma professora do 3º ano de escolaridade"** integra-se no trabalho final do Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este estudo tem como objetivo compreender o trabalho de uma professora do 3º ano de escolaridade, desenvolvido no âmbito de um projeto colaborativo, orientado para a construção, pelos alunos, do conceito de número racional, representado na forma de fração, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Concretamente pretende-se descrever e analisar as suas práticas, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem, perspetivando os desafios e dificuldades com que se vai confrontando. O estudo inscreve-se numa abordagem qualitativa e de investigação e, em particular, na interface entre o paradigma interpretativo e colaborativo tendo sido realizado neste âmbito, um estudo de caso.

O facto do estudo se centrar no 3º ano de escolaridade prende-se com a inovação curricular que introduz agora, a noção de número racional no 1º ciclo, a partir da noção de fração, nos seus múltiplos significados, e em paralelo com a representação decimal.

Objectivos gerais da entrevista

Recolher dados que permitam:

a) Analisar e descrever a preparação da trajetória e das aulas da professora;
b) Analisar e descrever a concretização da trajetória e das aulas da professora;
c) Compreender e descrever as ressonâncias do trabalho realizado e a reorientação das suas práticas.

Objetivos específicos e desenvolvimento da entrevista[1]

Blocos	Objectivos específicos	Desenvolvimento da entrevista	Observações
A Preparação das aulas e trajetória: Olhando para o passado	Compreender e analisar com Beatriz a preparação das aulas e da trajetória, numa retrospetiva	Gostava que me falasses sobre como preparas as aulas relacionadas com a Matemática: Reparei que.... Fala-me um pouco sobre o que fazes para preparar aulas… Que cuidados, tens? A que materiais, recorres? Quais são as principais preocupações?... Durante as reuniões de preparação da trajetória e das aulas lembro-me que frequentemente, conversámos sobre diversos aspetos que também estão relacionados com a preparação de aulas: Resolvemos as tarefas de várias maneiras, conversámos sobre os contextos das tarefas, etc... Gostava de perceber se esta experiência introduziu ou não alguma novidade relativamente ao que costumam fazer na escola, que tu própria costumavas fazer, etc...	Que preparação?
B Concretização da trajetória: Olhando para o passado	Compreender e analisar, com Beatriz, a concretização das aulas e da trajetória, numa retrospetiva, relativamente: À concretização Aos desafios e dificuldades Fatores facilitadores e constrangimentos	Como vês o trabalho que foi desenvolvido com os números racionais? Que aspetos foram fundamentais na construção do trabalho? O que influenciou? Planificámos com conjunto de tarefas e organizámo-las sequencialmente antes de começares a unidade dos números racionais. No entanto, ao longo do percurso forma feitas algumas alterações quer no conjunto das tarefas quer na sequência que delineámos. Gostaria que me falasses das razões que, a teu ver, fundamentaram as alterações. Que balanço, fazes, destas alterações? Porquê? Que desafios e dificuldades, enfrentaste? Que aspetos, facilitaram ou constrangeram a construção do conceito de número racional?	Que concretização?

[1] Tempo médio de duração da entrevista de 90minutos

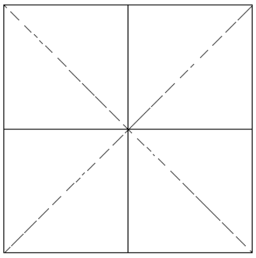
Anexo 6 – Mapa de reuniões

Reuniões				
Código	Data	Conteúdo	Característica	Meio de recolha de informação
RI01	22 Set 11	Apresentação mútua e convite para o projeto colaboração	Informal	Notas de campo
RI02	24 Set 11	Definição dos interesses mútuos na colaboração	Informal	
R1	26 Set 11	Negociação do projeto	Formal	
RP1	13 Out 11	Apresentação do projeto de colaboração aos EE	Formal com EE	
RP2	26 Out 11	Preparação da unidade	Formal com colegas 3º ano	
RP3	03 Nov 11	Preparação da unidade	Formal com colegas 3º ano	
R2	05 Nov 11	Preparação da unidade	Formal	Gravações áudio
R3	16 Nov 11	Preparação da unidade: Às voltas com o DSN natural	Formal	
R4	23 Nov 11	Preparação da unidade: Ainda às voltas com o DSN natural	Formal	
R5	24 Nov 11	Preparação da unidade: Tarefas, metodologias e programa	Formal	
R6	25 Nov 11	Preparação da unidade: Grandes ideias, estratégias e modelos	Formal	
R7	26 Nov 11	Preparação da unidade: Antecipando formas de resolução, argumentos	Formal	
R8	16 Jan 12	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	
R9	Jan	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	
R10	Fev	Análise retrospetiva: reflexão sobre a ação	Formal	

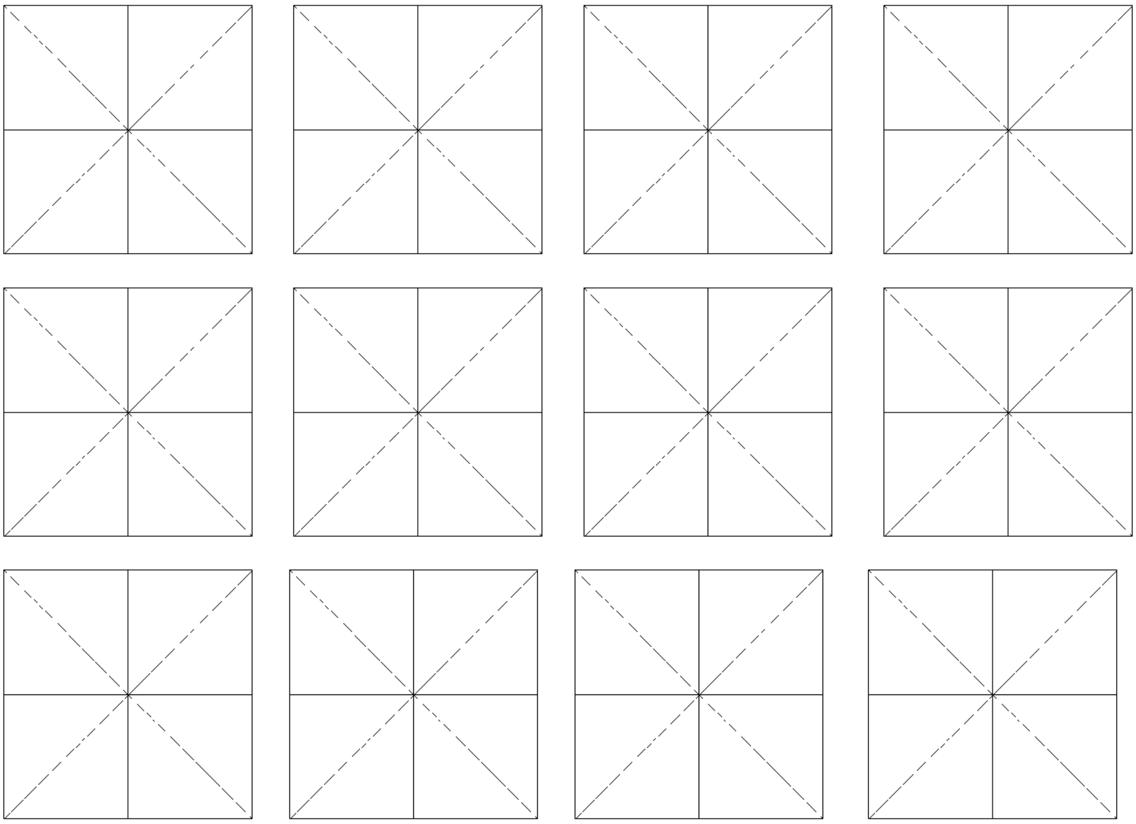
Anexo 7 – As tarefas apresentadas aos alunos[36]

T3_"Pintando azulejos"

Observa o quadrado dividido em oito triângulos:

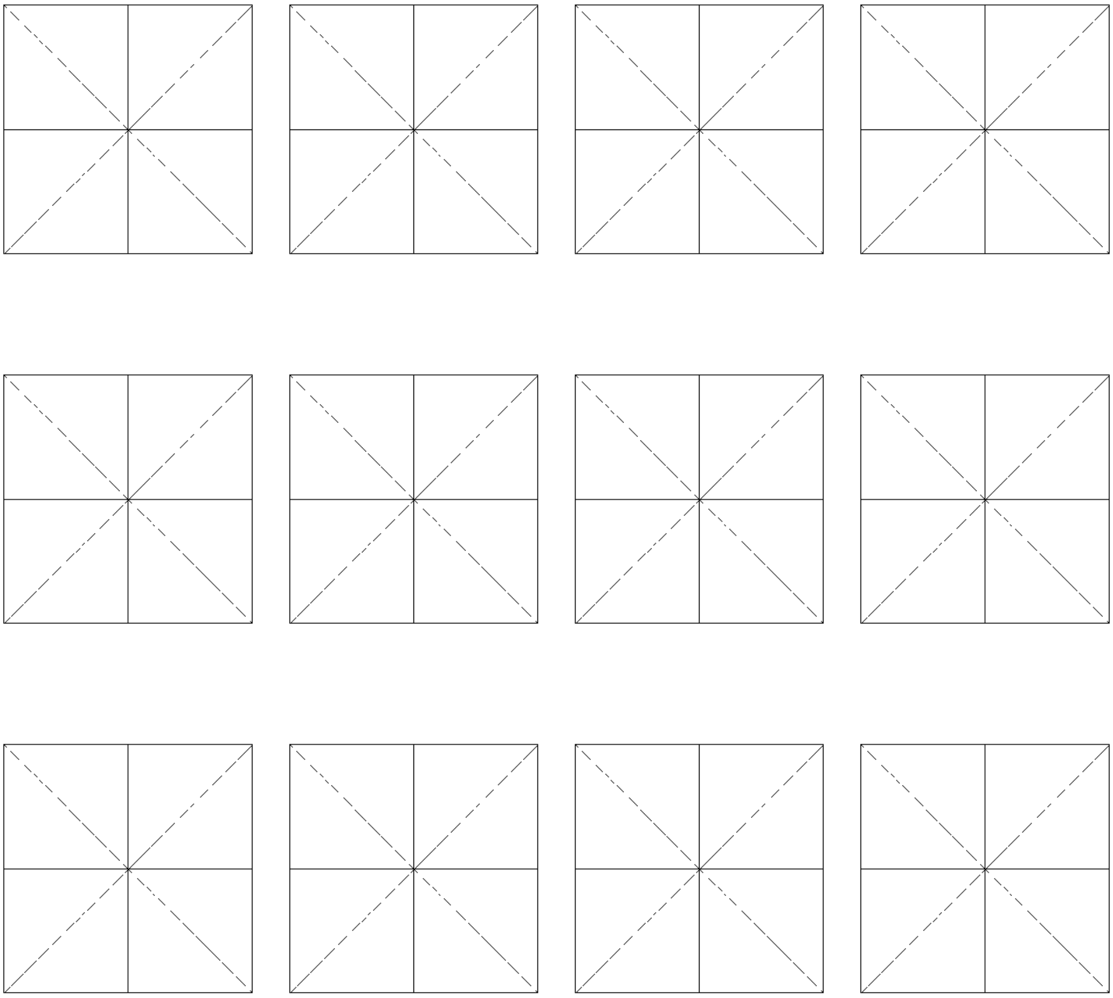


Pinta metade do quadrado da forma que quiseres. Tenta encontrar todas as formas possíveis.

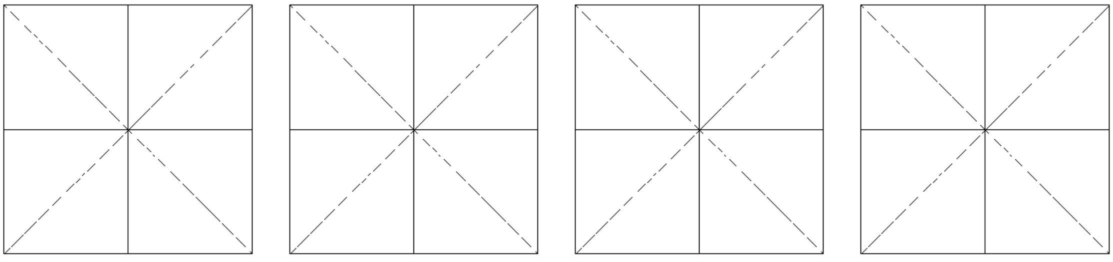


[36] Apenas aquelas em que houve suporte escrito.

Pinta um quarto do quadrado da forma que quiseres. Tenta encontrar todas as formas possíveis.

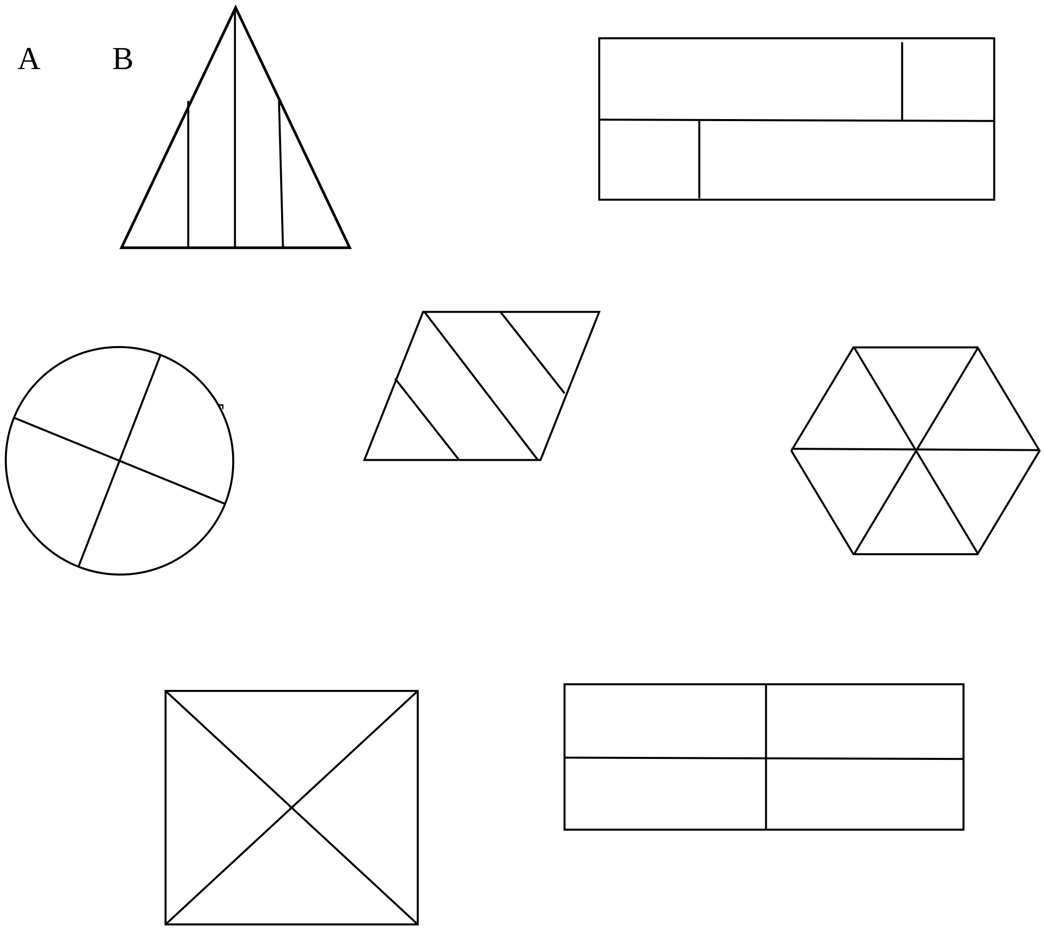


Pinta a oitava parte do quadrado da forma que quiseres. Tenta encontrar todas as formas possíveis.



T5 - Procurando partilhas justas

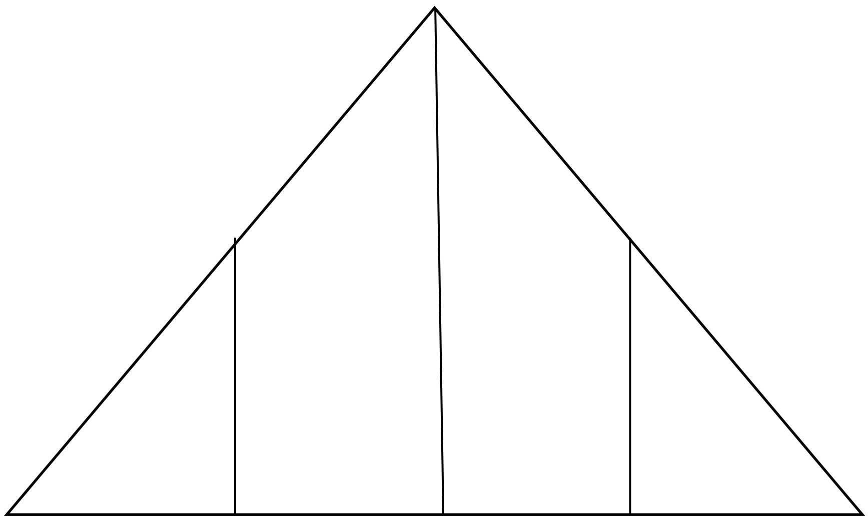
(Ficha de trabalho B)

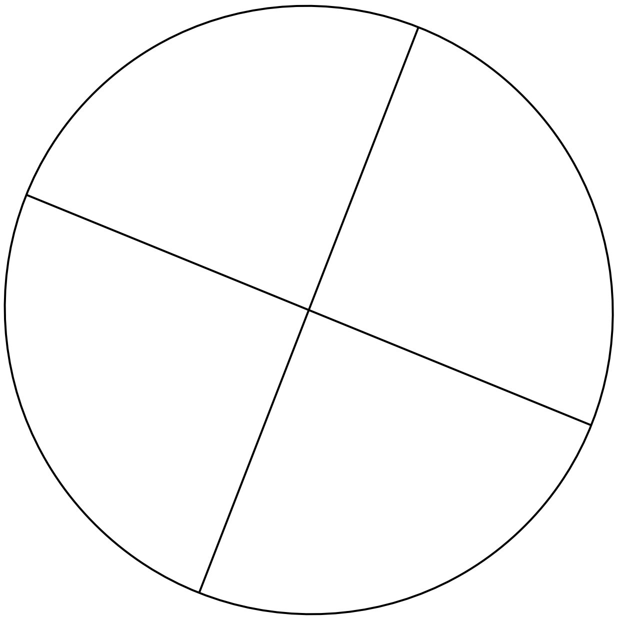


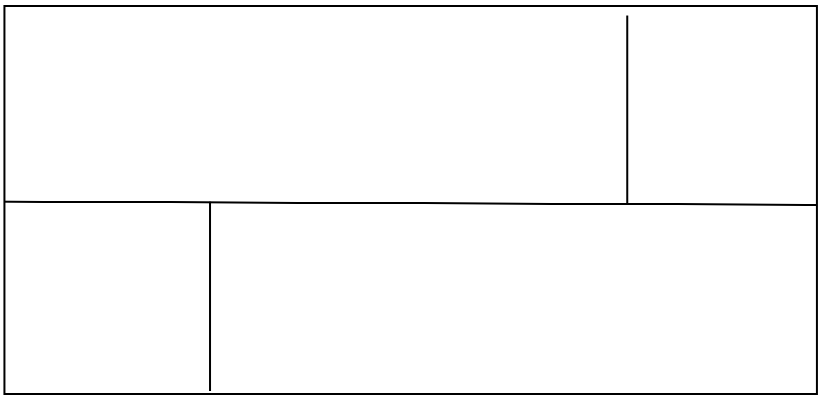
Que figuras estão divididas em quartos?

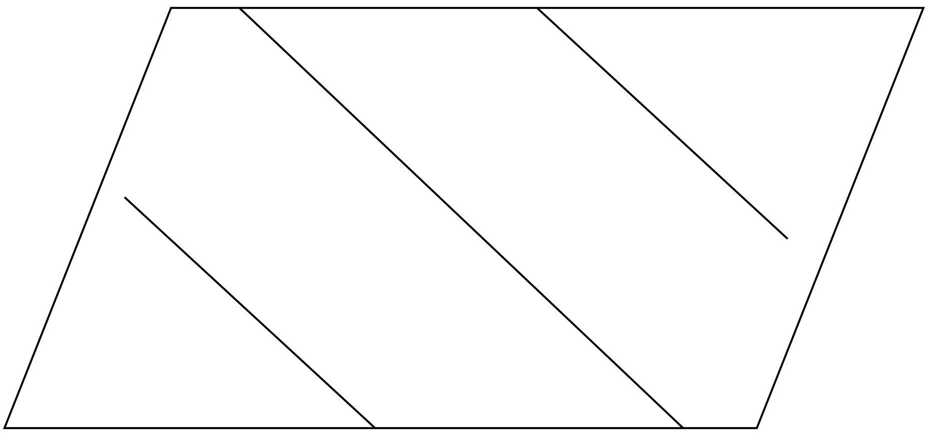
____

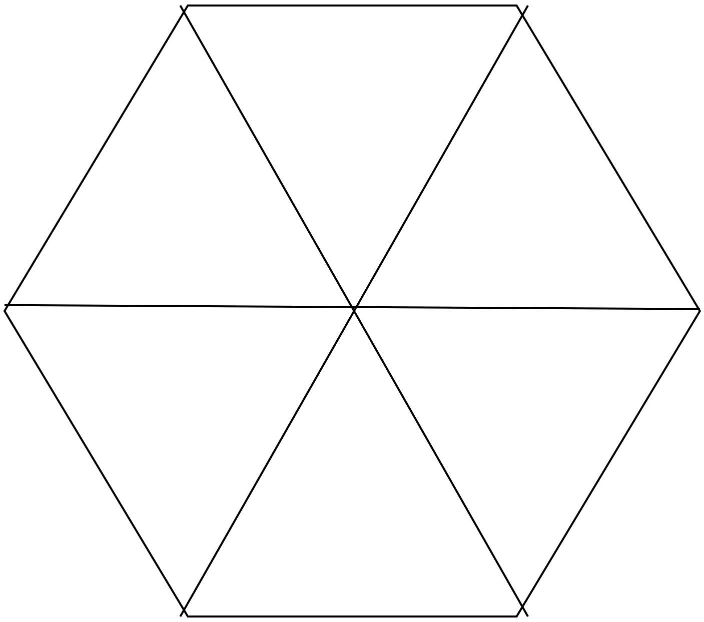
Explicar porque estão divididas em quartos ou porque não se podem considerar quartos.

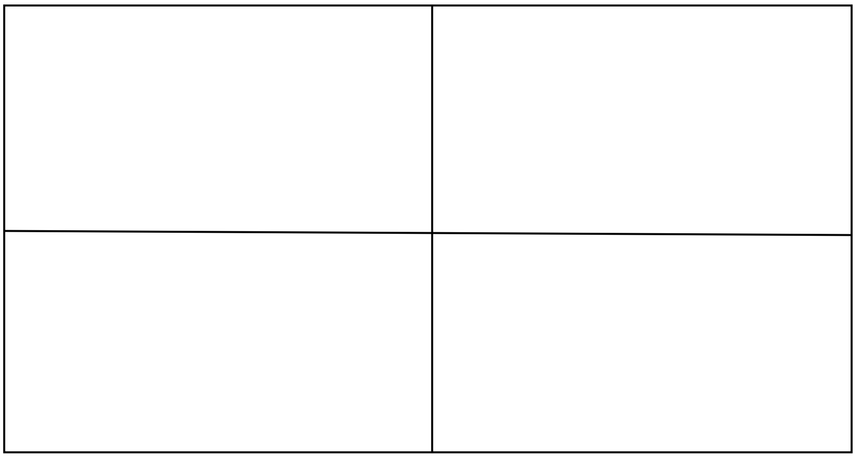


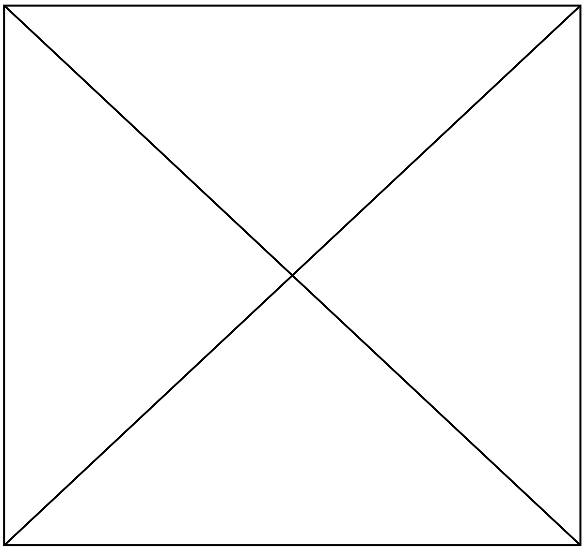












T7 - A discussão do João e da Maria

(Ficha de trabalho C)

A discussão do João e da Maria

Ontem o João esteve em casa da Maria, para fazerem um trabalho de investigação em grupo. Como é costume, o avô da Maria, sempre que a visita, leva-lhe um docinho! E durante uma pausa no trabalho que estavam a fazer, a Maria e o João foram apanhados de surpresa...o avô tinha trazido chocolates!!

No dia seguinte, já na escola, o João e a Maria comentavam um com o outro :

- O meu avô deu-me um quarto de um chocolate! – dizia a Maria.

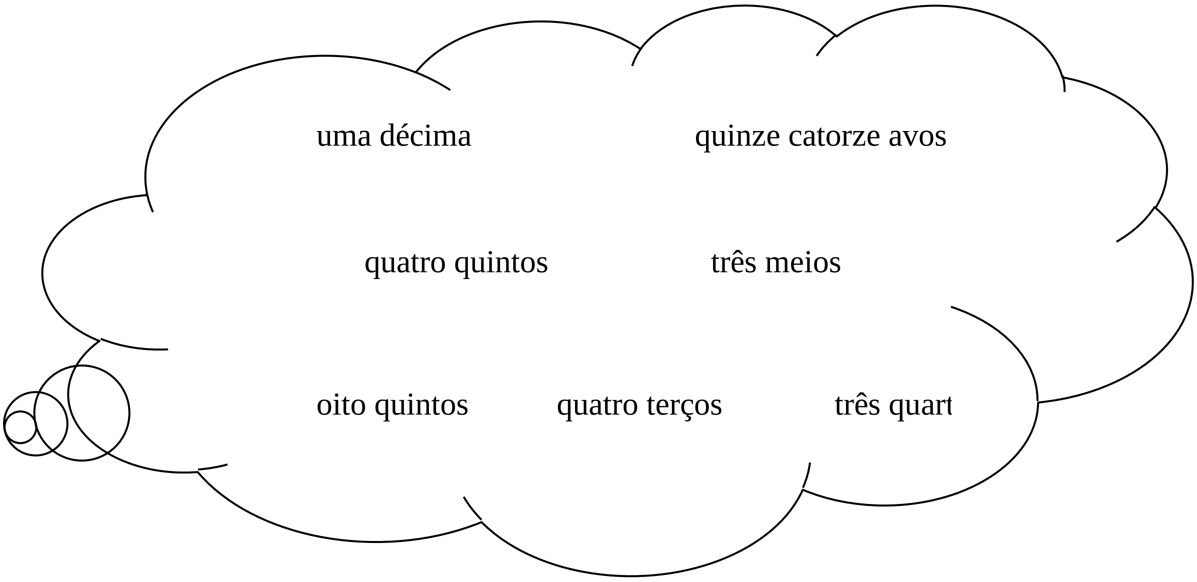
- E a mim deu-me metade de um chocolate! – dizia o João.

Na tua opinião, quem terá comido mais? E quem terá comido menos?

Explica o teu raciocínio.

T9 - Maior, menor ou igual à unidade ?

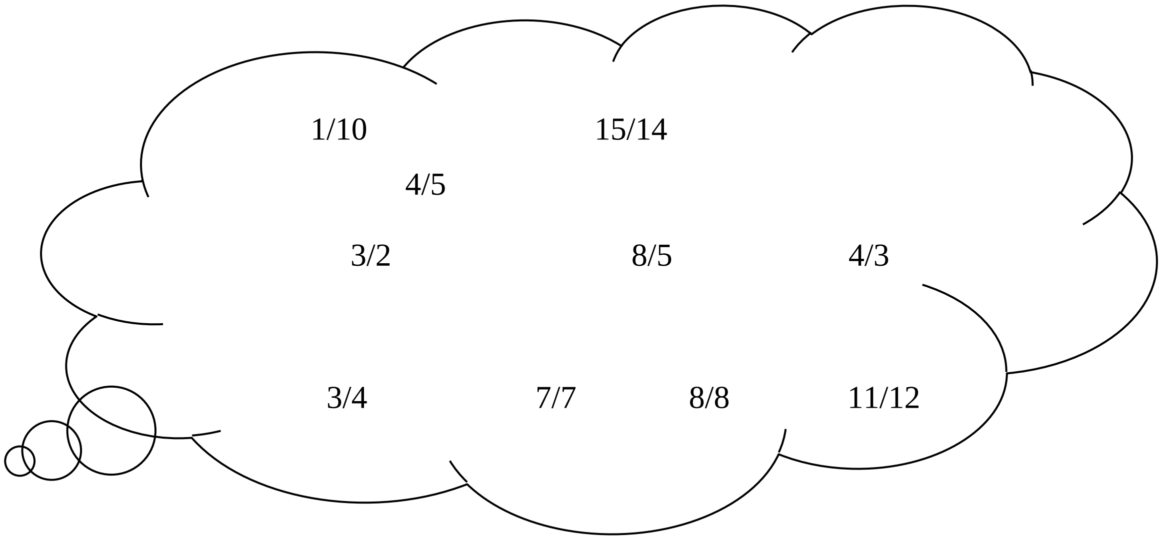
Coloca as fracções da nuvem na tabela, com a ajuda dos diferentes modelos, decidindo qual o lugar correcto:



Menor que 1	Igual a 1	Maior que 1

T10 – Quanto falta para a unidade, ou quanto, passa da unidade?

Completa a tabela usando as fracções da nuvem:



Fracção	A unidade	Falta para a unidade	Passa da unidade	Numeral Misto

T 14 - As Visitas de Estudo e a distribuição das baguetes

Numa turma de 3º ano, a professora relatou aos seus alunos uma situação que ocorreu no ano lectivo anterior com a sua turma:

No ano passado, a minha turma estava a desenvolver um projecto que era muito abrangente, cruzando saberes de várias áreas disciplinares. Um dia, decidimos ir pesquisar dados para o projecto e pedimos a colaboração de alguns Encarregados de Educação que estavam disponíveis para nos acompanhar. Cada um dos grupos de trabalho foi para um sítio diferente já que tinha um adulto perto. Assim, cinco alunos foram para o Oceanário, cinco foram para o Jardim Zoológico e quatro foram para o Pavilhão do Conhecimento. O problema é que a auxiliar da cozinha da escola, ao preparar-lhes baguetes para o lanche, fez apenas dez baguetes e distribuiu-as do seguinte modo: deu três baguetes aos cinco alunos que foram para o Oceanário, quatro baguetes aos cinco alunos que foram para o Jardim Zoológico e três baguetes aos quatro alunos que foram para o Pavilhão do Conhecimento.

	N.º de Alunos	N.º de Baguetes
OCEANÁRIO	5	3
JARDIM ZOOLÓGICO	5	4
PAVILHÃO DO CONHECIMENTO	4	3

A professora, à medida que ia falando, ia afixando no quadro uma folha de papel de cenário para cada um dos grupos onde estavam representadas as respectivas baguetes. E prosseguiu, dizendo:

Na aula seguinte, conversámos sobre como tinham corrido as visitas de estudo. Alguns dos meus alunos do ano passado queixaram-se de que a distribuição das baguetes não tinha sido justa, pois alguns alunos tinham tido mais comida do que outros. O que pensam disto? Será que tinham razão? Eu não tenho a certeza… É porque se tiverem razão, para o ano, tenho que pensar numa situação mais justa.

T 12 - As tampinhas do Carlos

Parte 1 – Do todo e de uma parte, à fração (outra parte)

O Carlos coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu um terço das tampinhas. Quantas tampinhas, perdeu o Carlos?

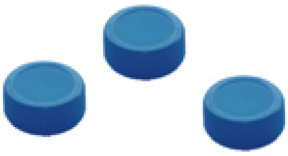
Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas ou cálculos. Podes usar as tuas tampinhas.

Parte 2 – Do todo, às partes

O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas ou cálculos. Podes usar as tuas tampinhas.

Parte 3 – Das partes ao todo

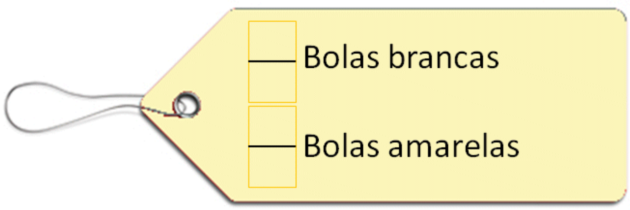


O Carlos continuou a coleccionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua colecção. Quantas tampinhas, passou a ter o Carlos?

Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas ou cálculos.

T 13 - As bolas de pingue-pongue

Observa a embalagem de bolas de 2 cores. Completa a etiqueta de modo que ela represente, relativamente ao total de bolas, a parte de bolas brancas e a parte de bolas amarelas.

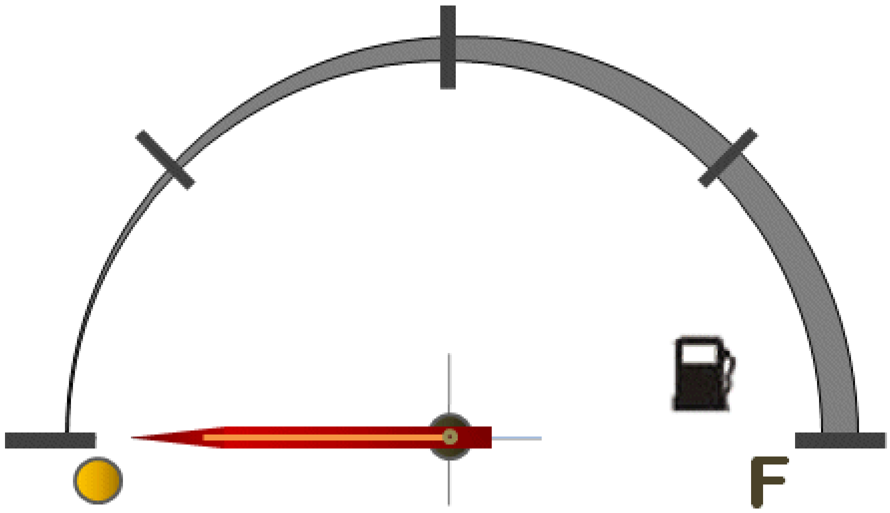


Quantas bolas brancas e amarelas, poderá ter uma embalagem que tem a seguinte etiqueta:

Construam um cartaz para ser apresentado no congresso matemático do 3ºA, explicitando através de palavras ou esquemas o vosso raciocínio. Preparem de seguida a vossa apresentação com a justificação das vossas estratégias.

T 15 - O depósito de gasolina

O Sr. Amílcar tinha o depósito cheio. Foi visitar a filha mais velha e gastou ¼ do depósito. Representa o mostrador do carro quando o Sr. Amílcar chegou a casa da filha mais velha.



Quando o depósito está cheio onde fica o ponteiro? E se no depósito estiver apenas ¼ de gasolina?

T 16_ As garrafas de água mineral

Observa com atenção as garrafas que tens no teu grupo e que estão representadas na imagem:

A B C D E

Coloca as garrafas por ordem crescente de capacidades e completa.

______ < ______ < ______ < ______ < ______

Coloca, de novo, as garrafas por ordem crescente, mas usando as capacidades que podes ler nos rótulos. Completa.

______ < ______ < ______ < ______ < ______

Posiciona as diferentes capacidades das garrafas na reta numérica:

0 1L

Compara as diferentes garrafas e responde:

Quantas garrafas A são necessárias para encher uma garrafa C? ___________

Mostra como pensaste.

Que podes concluir sobre a capacidade das garrafas A e C?

____

____

____

____

____

Quantas garrafas E são necessárias para encher uma garrafa C? ___________

Mostra como pensaste.

Que podes concluir sobre a capacidade das garrafas E e C?

____

____

____

Quantas garrafas E são necessárias para encher uma garrafa A? ___________

Mostra como pensaste.

Que podes concluir sobre a capacidade das garrafas E e A?

____

____

____

____

Se juntarmos as garrafas A e E conseguimos encher a garrafa C? __________

Mostra como pensaste.

Que parte do litro, obtivemos? ____

Completa usando as representações fracionária e decimal.

Então:

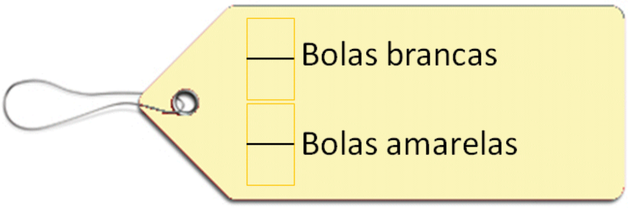
é ___ ou _______________ de


Então:

é ___ ou ________________ de


T 13 - As bolas de pingue-pongue

Observa a embalagem de bolas de 2 cores. Completa a etiqueta de modo que ela represente, relativamente ao total de bolas, a parte de bolas brancas e a parte de bolas amarelas.



Quantas bolas brancas e amarelas, poderá ter uma embalagem que tem a seguinte etiqueta:

Construam um cartaz para ser apresentado no Congresso Matemático do 3ºA, explicitando através de palavras ou esquemas o vosso raciocínio. Preparem de seguida a vossa apresentação com a justificação das vossas estratégias.

T 18 – Sou bom a calcular

Sou bom a calcular...

Nos queijinhos, nas rectas numéricas, no muro das fracções e noutras memórias...

Me irei apoiar!

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{}{2} = \frac{5}{2}$

$\frac{3}{4} + \_\_ = 1$ $\qquad$ $\frac{5}{2} - \frac{}{2} = \frac{}{2} = 1$

$50\% + \frac{1}{2} = \boxed{}$ $\qquad$ $50\% + 25\% =$

$1\frac{1}{2} + 1{,}5 =$ $\qquad$ $3 \times \frac{1}{5} =$ $\qquad$ $100 : 4 =$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ $\qquad$ $0{,}5 \times 0{,}5 =$

Inventa dois cálculos e mostra-os:

Nome: **Como correu?**