SEQUÊNCIAS E FUNÇÕES

Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano

João Pedro da Ponte

Ana Matos

Neusa Branco

Setembro de 2009

Esperamos que este conjunto de materiais possa ser útil para todos aqueles que procuram interpretar e pôr em prática as orientações do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (3.º ciclo). Agradecemos vivamente a todos os professores que experimentaram as tarefas contidas neste documento e a todas as pessoas que nos deram sugestões tendo em vista o seu aperfeiçoamento, bem como o das orientações para o professor.

Índice

Introdução

De acordo com os percursos temáticos de aprendizagem que acompanham o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (3.º ciclo), no 7.º ano de escolaridade são trabalhados três tópicos fundamentais da Álgebra: Sequências e regularidades, Funções e Equações. Este conjunto de materiais de apoio constitui uma sugestão de organização do ensino-aprendizagem proporcionada ao professor para os tópicos de Sequências e regularidades e Funções. Naturalmente, muitas abordagens são possíveis, mas entendeu-se útil apresentar aqui uma estratégia compatível com as indicações do programa.

Esta introdução recorda os objectivos gerais de aprendizagem no que se refere à Álgebra e às capacidades transversais do programa para o 3.º ciclo, sumaria brevemente as ideias matemáticas e didácticas fundamentais dos tópicos de Álgebra relevantes para o 7.º ano de escolaridade, apresenta um conjunto de sugestões didácticas gerais para estas unidades e descreve a estrutura destes materiais de apoio. Apresenta, ainda, uma proposta de planificação para as unidades Sequências e regularidades e Funções.

Segue-se um conjunto de tarefas que poderão ser fotocopiadas e distribuídas aos alunos, acompanhadas das respectivas sugestões de exploração específicas para o professor, bem como de exemplos de trabalho feito por alunos[1].

Objectivos gerais de aprendizagem

Matematicamente, Sequências e regularidades, Funções e Equações são três tópicos intimamente interligados, na medida em que as sequências podem ser encaradas como funções de variável natural e as equações constituem uma das formas possíveis de representar relações funcionais. Também do ponto de vista didáctico existe toda a vantagem em trabalhar estes tópicos de modo relacionado. No conjunto de tarefas aqui apresentado, o trabalho feito numa primeira etapa com sequências e regularidades serve de base ao trabalho subsequente com funções, preparando-se o terreno para o estudo das equações.

O trabalho dos alunos nestes tópicos é fundamental para que possam ser atingidos os objectivos gerais de aprendizagem previstos para a Álgebra no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (3.º ciclo). De acordo com estes objectivos, os alunos devem:

- Ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- Compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa;

[1] Todos os episódios apresentados neste documento foram recolhidos por Ana Matos e Neusa Branco, nas suas aulas ou com alunos que se voluntariaram para resolver as tarefas propostas fora das aulas.

- Ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;
- Ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Além disso, o trabalho a realizar no 3.º ciclo, nestes tópicos, deve concorrer para que os alunos desenvolvam as capacidades transversais indicadas no programa, nomeadamente:

- Resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;
- Raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas;
- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Sequências e regularidades

O trabalho com sequências – de figuras, números ou outro tipo de objectos – conduz naturalmente ao estudo de regularidades. Este trabalho é um excelente veículo para promover o pensamento sobre variáveis e funções. Em particular, permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspecto fundamental do raciocínio matemático. Além disso, favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica.

Eis algumas ideias matemáticas importantes a ter em atenção no trabalho com sequências:

- Uma *generalização* acerca de uma sequência pode ser *representada* usando *palavras* ou *expressões algébricas*;
- Para chegar a uma *generalização* são por vezes muito úteis outras *representações* como *tabelas* e *gráficos*;
- As estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser "*locais*", indicando como passar de um termo para o termo seguinte (processo recursivo), ou "*globais*", estabelecendo uma relação de natureza geral que descreve toda a regularidade (relação essa que pode ser representada por palavras ou por uma *expressão algébrica* – o *termo geral*);
- Nas sequências numéricas cujo termo geral é do tipo $an+b$, com $a \neq 0$, a diferença entre termos consecutivos é *constante*;

- Duas expressões algébricas podem ser *equivalentes* e, muitas vezes, há possibilidade de *simplificar* uma expressão algébrica.

É de notar que as questões envolvendo sequências que são apresentadas aos alunos podem ser de diversos tipos. Assim, algumas questões referem-se a sequências que têm uma lei de formação explícita no respectivo enunciado. Noutras questões, a lei de formação está implícita mas é inequívoca pelas condições dadas. Noutras, ainda, em que são dados alguns termos, pode existir uma grande variedade de leis de formação. Nestes casos, não se pode pedir aos alunos que indiquem *a* lei de formação, mas apenas *uma* lei de formação compatível com os termos dados.

Funções

O estudo de funções dá seguimento ao trabalho já desenvolvido a propósito das sequências. É possível identificar regularidades analisando o que sucede aos valores da variável dependente, à medida que a variável independente sofre um dado incremento.

Estes materiais abordam o conceito de função e a representação gráfica de uma função, dando especial atenção à função afim e ao caso particular da função linear. Ideias matemáticas importantes a ter em atenção incluem, por exemplo:

- Uma função é uma *correspondência* tal que a cada elemento do primeiro conjunto (*objecto*) corresponde um e um só elemento do segundo conjunto (*imagem*);
- O conjunto dos objectos é o *domínio* e o conjunto das imagens é o *contradomínio*;
- Uma função pode ser representada por *palavras*, por uma *tabela*, um *diagrama sagital*, um *gráfico* ou uma *expressão algébrica*;
- Uma *função afim* pode ser *linear* ou não linear;
- Uma relação de *proporcionalidade directa* entre duas grandezas é representada por uma função linear;
- Na função linear a taxa de variação é *constante* e designa-se por *constante de proporcionalidade*. Na função afim não linear a taxa de variação também é constante. Contudo, existem outras funções cuja taxa de variação é variável.

Sugestões didácticas

O trabalho nestes tópicos deve revestir-se de um cunho exploratório e investigativo. Por isso, na maior parte destas aulas os alunos trabalham em tarefas que lhes são propostas e que não são apenas exercícios em que têm que aplicar conhecimentos previamente aprendidos. Pelo contrário, trata-se de tarefas em que os alunos têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. O trabalho nestas tarefas constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos. Num ou noutro momento, no entanto, há também que propor a realização de exercícios, tendo em vista consolidar conhecimentos.

Cada uma das tarefas apresentadas foi pensada para ser realizada em regra num bloco. Essa realização inclui três momentos – apresentação, trabalho autónomo dos alunos em grupo, em pares, ou individualmente e discussão colectiva com toda a turma. Este sistema adapta-se muito bem ao tempo escolar de blocos de 90 minutos. Para que isso aconteça é necessário terminar o trabalho autónomo em tempo útil, de forma a dar tempo a uma discussão proveitosa no segundo momento. É importante que a aula tenha ritmo e que se respire um ambiente de trabalho. Por isso, é necessário que os alunos interiorizem que têm um tempo para trabalhar, previamente definido, e depois um tempo para discutir o trabalho feito por todos.

A primeira fase corresponde à apresentação da tarefa e deve ser curta e motivadora. O professor pode distribuir o enunciado escrito com a tarefa, mas deve igualmente referir oralmente alguns dos elementos mais salientes da situação. É muito importante que os alunos compreendam bem a tarefa que lhes é proposta e, por isso, se existirem termos que os alunos não conheçam na descrição da situação ou nas questões iniciais estes devem ser desde logo analisados. O professor deve dar igualmente, nesta fase, indicações acerca do modo de trabalhar bem como do momento em que se iniciará a discussão geral.

De seguida, na segunda fase, os alunos trabalham autonomamente nas questões propostas. O professor deve circular pela sala, verificando se existem dificuldades na resolução das questões. Os alunos, com frequência, colocam dúvidas ou pedem a validação das suas conjecturas e resultados. O professor deve ter em atenção que se responder a todas as dúvidas dos alunos, está a resolver a tarefa no lugar deles. Por isso, na maior parte dos casos, há que responder às perguntas dos alunos com outras perguntas, que os obriguem a pensar um pouco mais. No caso em que o professor se apercebe que um número significativo de alunos não consegue compreender a situação ou formular estratégias de resolução, pode ser preferível interromper o trabalho autónomo dos alunos e realizar desde logo uma pequena discussão colectiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

Finalmente, na terceira fase, realiza-se a discussão final. Aqui os alunos são chamados a apresentar o seu trabalho. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Todos os alunos, de uma forma ou outra, devem ter possibilidade de participar, nomeadamente colocando questões e apresentando argumentos. No entanto, não é necessário que todos os alunos (ou todos os pares ou todos os grupos) apresentem o seu trabalho em todas as aulas, em especial nos casos em que isso pouco acrescenta ao que já foi anteriormente apresentado pelos colegas. Esta dinâmica de aula propicia a análise das situações matematicamente significativas e promove o desenvolvimento das capacidades de comunicar, raciocinar e argumentar. Noutras situações, os alunos que não tiverem oportunidade de mostrar desta vez o que fizeram, poderão ser os primeiros a mostrar o seu trabalho.

Deve ter-se em atenção que o momento de discussão colectiva é fundamental. É reflectindo sobre o trabalho feito – o seu e o dos colegas –, confrontando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Por isso, é necessário valorizar este momento. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões. No final da discussão, o professor, se possível solicitando a participação dos alunos, deve promover a sistematização das ideias fundamentais que foram aprendidas nesta aula.

Em muitos casos, os professores terão que adaptar as tarefas às características das suas turmas. Isso pode envolver eliminar uma ou outra questão, ajustando assim o que é proposto ao que espera do trabalho realizado individualmente, em pares ou em grupos pelos alunos (em 45-60 minutos), de modo a deixar um tempo adequado para a discussão (noutros 30-45 minutos). Por vezes, pode ser adequado dividir uma tarefa em duas partes, propondo aos alunos a realização de trabalho autónomo, seguida de um momento de discussão, depois de novo trabalho autónomo, e, finalmente, nova discussão geral.

Nalguns casos, a realização de uma tarefa pode requerer mais do que um bloco de 90 minutos. Isso pode acontecer, no início, porque os alunos não estão habituados a este tipo de trabalho. Pode também acontecer porque uma tarefa tem questões que envolvem dificuldades imprevistas para certos alunos ou porque contêm um elevado número de questões. O professor deve então decidir se é melhor eliminar uma parte das questões, reduzindo a tarefa, ou desdobrar a sua realização por um bloco e meio ou mesmo dois blocos.

Note-se que o sistema de deixar os alunos trabalhar autonomamente durante todo um bloco, deixando a discussão para o bloco seguinte, de um modo geral, é pouco eficiente, pois os alunos dificilmente têm presente, com a mesma vivacidade, o trabalho anteriormente feito. Deste modo, a discussão geral, que deveria ser uma parte fundamental do trabalho, acaba por ser muito menos rica e participada do que seria desejável. Nestes casos, é preferível fazer uma paragem no trabalho autónomo dos alunos a meio da tarefa e discutir com todos o trabalho já realizado. Depois, no bloco seguinte, os alunos prosseguirão o seu trabalho e terão oportunidade de fazer nova discussão colectiva, com uma sistematização final das ideias fundamentais.

Os alunos devem usar a calculadora nas tarefas que envolvem cálculos com números racionais. Além disso, as tarefas 3 e 5A das Funções pressupõem a utilização do computador (folha de cálculo ou programa de matemática dinâmica[2]), devendo ser realizadas numa sala com vários computadores disponíveis, que permitam aos alunos trabalhar em pares ou, se isso for de todo impossível, em grupos de três. Se o professor não tiver possibilidade de usar esta tecnologia, poderá propor a resolução da tarefa 3 usando apenas papel e lápis ou a tarefa alternativa 5B incluída igualmente neste conjunto de materiais. Noutras tarefas o professor pode recorrer a *applets* ou a recursos multimédia como complemento às tarefas propostas[3].

Estrutura dos materiais de apoio

[2] Como por exemplo o *GeoGebra*, disponível em www.geogebra.org.

[3] Como por exemplo os recursos disponíveis em:
http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos_multimedia/recursos_cd.asp
http://nlvm.usu.edu/
http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/welcome.html.

Em cada tarefa, para além da proposta de trabalho para os alunos, é dado um conjunto de indicações para o professor. Os *Conhecimentos prévios dos alunos* apresentam os conhecimentos e capacidades que estes devem possuir para poderem trabalhar na tarefa proposta. Se os alunos não dominarem de modo satisfatório estes conhecimentos prévios, o professor deverá rever com eles as ideias principais ou propor-lhes a realização de um trabalho preliminar apropriado.

Nas *Aprendizagens visadas* são indicados os principais objectivos de aprendizagem a atingir com a realização da tarefa. Estes objectivos correspondem a uma parte dos objectivos do tópico indicados no programa e correspondem também a alguns dos objectivos das capacidades transversais – Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação matemática.

As *Orientações para o professor* contêm sugestões concretas sobre o modo como pode ser estruturado e conduzido o ensino-aprendizagem, chamando a atenção para alguns problemas que podem surgir. Para além das indicações gerais sobre a organização da aula, contêm, por vezes, aspectos da exploração matemática da tarefa, com eventual indicação dos erros mais comuns que os alunos podem cometer.

As *Explorações de alunos* contêm exemplos de situações ocorridas ou susceptíveis de ocorrer na sala de aula, que ilustram uma variedade de possíveis estratégias e produções dos alunos na realização da tarefa. Estas situações dão pistas ao professor sobre o modo como pode orientar o seu trabalho e ajudam-no a preparar-se para a variedade de respostas que pode encontrar por parte dos seus alunos.

Proposta de planificação

Sequências e regularidades

<table>
<tr><th>Blocos</th><th>Tópicos</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th>Tarefas</th><th>Instrumentos</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">• Termo geral de uma sequência numérica

• Representação

• Expressões algébricas</td><td rowspan="5">• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
• Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
• Simplificar expressões algébricas.</td><td rowspan="3"></td><td>1. Voo em “V”</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2. Azulejos</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3. Explorações Com números</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Propor a representação de sequências de fracções em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples (por exemplo, $\frac{2n}{n+1}$ e $\frac{n+1}{n+3}$).</td><td>4. Sequências numéricas</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>5. Atravessando o rio</td><td>Papel e lápis</td></tr>
</table>

Funções

<table>
<tr><th>Blocos</th><th>Tópicos</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th colspan="2">Tarefas</th><th colspan="2">Instrumentos</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="8">• Conceito de função e de gráfico de uma função

• Proporcionalidade directa como função

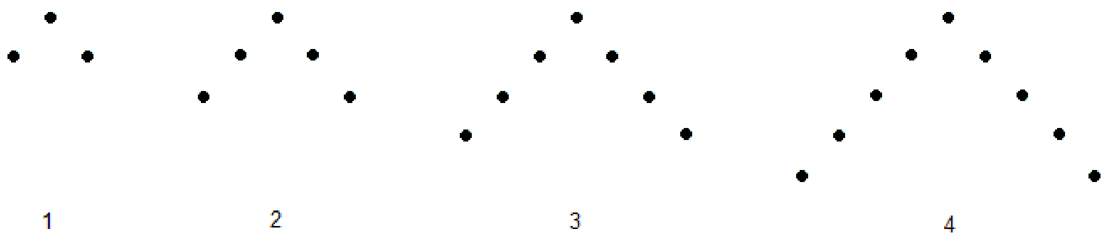
• Função linear</td><td rowspan="3">• Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
• Interpretar a variação numa situação representada por um gráfico.</td><td></td><td colspan="2">1. Ponto por ponto</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">2. Tarifários</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">3. Comparando tarifários</td><td>Folha de cálculo</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações.
• Analisar uma função a partir das suas representações.</td><td>• Identificar o domínio, o contradomínio e determinar imagens de objectos quando a função é dada por uma tabela e por um gráfico.</td><td colspan="2">4. Máquina das perguntas</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="3">• Analisar situações de proporcionalidade directa como função do tipo $y = kx$.
• Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa.
• Representar gráfica e algebricamente uma função linear.
• Relacionar a função linear com a proporcionalidade directa.
• Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções lineares.
• Resolver problemas e modelar situações utilizando funções.</td><td rowspan="3">• Dar destaque ao conceito de função como relação entre variáveis.
• Determinar imagens de objectos quando a função é dada por uma expressão algébrica.
• Propor a análise de gráficos que traduzam casos de proporcionalidade directa em contextos da vida real.
• Identificar a imagem dado o objecto e o objecto dada a imagem, a partir da representação gráfica de uma função linear.
• Propor a representação algébrica de uma função linear sendo dado um objecto não nulo e a sua imagem.</td><td>5A. Perímetros</td><td>5B. Perímetros</td><td>Programa de matemática dinâmica</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">6. Várias representações</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2">7. Combustíveis</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>8</td><td>• Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde esta é crescente, decrescente ou constante.</td><td></td><td colspan="2">8. Passeio a pé</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
</table>

SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES

Tarefa 1 – Voo em “V”

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em “V”. Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis as vantagens para o voo das aves e dos aviões.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?

1.2. Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?

1.3. Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.

1.4. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

1.5. Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.

1.6. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Tarefa 1 – Voo em “V”

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos, os alunos devem ser capazes de:

- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados;
- Saber verificar se um número é, ou não, termo de uma sequência;
- Ser capazes de determinar ordens correspondentes a vários termos;
- Ser capazes de determinar um termo geral de uma sequência.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Formularem e testarem conjecturas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Na maior parte das turmas, esta tarefa pode ser realizada num bloco de 90 minutos, destinando-se os 45 minutos iniciais à realização da tarefas, em pares ou pequenos grupos, e os 45 minutos seguintes à apresentação de resultados e justificações e à discussão de estratégias alternativas.

Na fase de exploração inicial da tarefa pelos alunos, se estes não conseguirem avançar, o professor pode perguntar-lhes que outras representações se podem fazer da informação dada. Os alunos devem ser capazes de concluir por si que esta sequência de figuras pode dar origem a uma sequência numérica relativa ao número de pontos que constitui cada uma das figuras e registar essa sequência de modo a conjecturar uma possível generalização.

Na discussão geral, o professor deve solicitar aos alunos que expliquem o seu raciocínio, mesmo quando isso não é explicitamente indicado no enunciado da tarefa. Deve, portanto, pedir que expliquem o modo como determinam o número de pontos da 5.ª e da 100.ª figura. Além disso, deve analisar com os alunos diversas representações possíveis para a situação indicada. Por exemplo, pode representar os termos numa tabela e procurar completar espaços vazios dessa tabela. Deve também discutir com os alunos o significado de "termo" de uma sequência e "ordem" de um termo pois, é provável que muitos alunos ainda não os consigam usar com fluência na análise de sequências numéricas. Deve ainda esclarecer a noção de termo geral e de expressão algébrica.

Devidamente apoiados, é natural que muitos alunos consigam resolver a pergunta 1.5. Além disso, é provável que, pelo menos alguns grupos consigam na pergunta 1.6 encontrar uma expressão para esta regularidade a partir da generalização expressa na pergunta anterior. No caso de nenhum grupo de alunos o conseguir, o professor pode interromper o trabalho dos alunos na pergunta 1.5 e, colocando questões apropriadas, procurar que eles cheguem a uma expressão algébrica a partir da generalização verbal.

Nesta tarefa, assume particular evidência o estabelecimento de uma generalização a respeito da sequência de figuras apresentada. Os alunos têm assim uma oportunidade para formular e testar conjecturas acerca da lei de formação dessa sequência. Ao apresentarem as suas ideias ao professor e aos outros colegas, oralmente e por escrito, desenvolvem a sua capacidade de exprimir resultados, processos e ideias matemáticos. Ao serem solicitados a escrever uma expressão algébrica, comparando-a com as expressões escritas pelos colegas, estão a aprender a utilizar notação, simbologia e vocabulário próprios da Matemática.

No final da aula os conceitos de termo de uma sequência e respectiva ordem e termo geral devem ser retomados. O professor deve salientar que, numa sequência numérica, cada termo está associado a uma determinada ordem e que a relação existente entre ordem e termo pode ser representada por meio de uma expressão algébrica. Os alunos podem usar diferentes estratégias para identificar esta relação, sendo fundamental que partilhem essas estratégias entre si.

2. Algumas explorações. Nesta sequência, de uma figura para a seguinte ocorre uma transformação, de acordo com uma regra que pode ser representada por uma expressão algébrica linear. Os alunos podem explorar a sequência seguindo duas estratégias: (i) analisam figuras consecutivas e concluem que de uma figura para a figura de ordem seguinte, o número de pontos aumenta duas unidades; (ii) analisam as propriedades geométricas de cada uma das figuras e verificam que é possível decompô-la de modo a relacionar o número de pontos de cada uma com a sua ordem na sequência. Por exemplo, é possível obter o número de pontos da 100.ª figura de diversas formas:

a) Determinando exaustivamente todas as figuras desde a 4.ª até à 100.ª, um processo moroso e claramente inadequado.

b) Determinando uma lei de formação da sequência, através de uma descrição em linguagem natural, e usá-la na determinação do 100.º termo. Por exemplo, “cada figura tem o ‘pássaro da frente’, mais o número de pássaros que corresponde à sua ordem, mais outra vez o número de pássaros que corresponde à sua ordem” (ver adiante o exemplo 2a) de explorações de alunos).

c) Usando a relação entre os termos consecutivos. Sabendo que cada termo se pode obter a partir do anterior adicionando dois pontos, basta observar que partindo da primeira figura, que tem 3 pontos, para a construção da 100.ª figura há que adicionar 2 pontos, sucessivamente, por 99 vezes. Assim, o 100.º termo da sequência será obtido calculando $99 \times 2 + 3 = 201$.

d) Determinando o termo geral da sequência e concretizando para o 100.º termo.

No âmbito da generalização, é provável que surjam da parte dos alunos expressões algébricas diferentes para a sua representação, como: $1+n+n$, $n+1+n$, $n+n+1$, $1+n \times 2$, $1+2n$, $2n+1 \ldots$ O professor deve então referir a possibilidade de simplificar as expressões, indicar o que são expressões equivalentes e clarificar o significado de expressões do tipo $ax, a \neq 0$.

Explorações de alunos

Na exploração desta tarefa é pedido aos alunos que: (i) descrevam uma figura da sequência, correspondente a uma ordem próxima (das que são dadas no enunciado); (ii) descrevam uma figura da sequência, correspondente a uma ordem distante; (iii) analisem se um valor dado é ou não termo da sequência, argumentando em favor da sua posição; e (iv) estabeleçam generalizações. O trabalho que desenvolvem poderá ter, inicialmente, um carácter muito intuitivo, descrevendo o seu raciocínio em linguagem natural, com o recurso a esquemas, à apresentação de cálculos ou mesmo à utilização de símbolos.

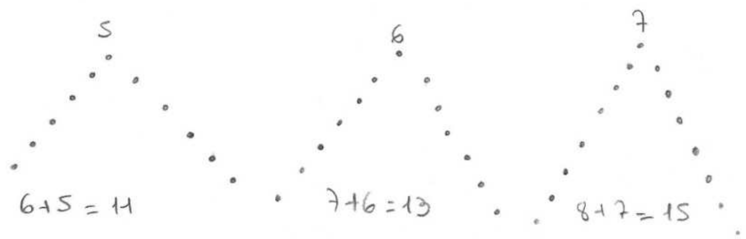
1. Descrição de uma figura próxima. A descrição de uma figura próxima permite aos alunos ter um primeiro contacto com a sequência apresentada, possibilitando-lhes a identificação de regularidades relativas à forma de cada figura e ao número de pontos que a constitui.

a) A partir da análise das *figuras* anteriores os alunos podem reconhecer que, de uma figura para a seguinte, são adicionados dois pontos:

b) Com base na *regularidade* anterior e observando a sequência numérica associada os alunos podem identificar que todos os termos são números ímpares, sendo o primeiro deles igual a 3:

→ Na figura 1 há 3 aves, na figura 2 há mais 2 aves e assim sucessivamente...
→ Todos os bandos de aves têm um número ímpar.

c) A decomposição da figura em partes pode também pode ser útil para que os alunos compreendam a relação entre o número de pontos de uma figura e a respectiva ordem. No exemplo que se segue, a figura é dividida em duas partes. Uma delas tem um número de pontos superior à *ordem* da figura em uma unidade. Na outra, esses dois números são exactamente iguais:



2. Descrição de uma figura distante. A descrição de uma figura distante é uma tarefa mais exigente para os alunos que pode constituir um suporte para o processo de generalização e a construção de um termo geral para a sequência. Os alunos podem descrever essa figura distante.

a) Partindo da decomposição da figura em duas partes e estabelecendo uma relação entre essas partes e a ordem 100:

como as outras figuras, por exemplo na fig. 3 existem 7 pontos e se fizermos uma divisão, ficam 3 pontos em cada lado e um em cima. Assim a 100ª figura vai ficar com 100 pontos em cada lado, e um em cima ficando a fig. 100 com 201 pontos.

R: 201 pontos

101 + 100 = 201

b) Estabelecendo uma relação entre o número da figura e o número total de pontos. Nesta resolução salienta-se o facto de existir um erro formal na igualdade escrita pelo aluno quando escreve: $2 \times 100 = 200 + 1 = 201$. Neste ponto, o aluno evidencia que não compreende a transitividade da relação de igualdade, considerando-a uma relação unidireccional, aspecto que deve ser discutido colectivamente:

A 100ª figura desta sequência terá 201 pontos porque nesta sequência é feita a tabuada do 2 e acrescentando-se um portanto 2x100 = 200+1=201.

3. Pertença de um termo à sequência. As perguntas anteriores proporcionam a identificação de termos próximos e distantes da sequência. Com base nessa observação, os alunos identificam algumas regularidades relativas à sequência numérica correspondente ao número de pontos do termo de cada ordem. A verificação de que um número é ou não termo desta sequência e a sua justificação constituem também um suporte para o processo de generalização.

a) Verificando que a sequência numérica é constituída apenas por números ímpares, os alunos podem justificar que o número 86 não pode ser termo desta sequência:

Não, porque só os numenos ímpanos na sequência, e o número 86 é par.

b) Com base na decomposição da figura em duas partes os alunos podem estabelecer uma relação entre ambas e a sua ordem. Assim, verificam que não existe uma ordem à qual corresponda o termo 86. Por um processo de tentativa e erro, determinam a ordem dos termos próximos, ou seja, verificam que o termo de ordem 42 é 85 é o termo de ordem 43 é 87 pelo que 86 não pode ser termo da sequência:

não, porque 42+42+1=85
43+43+1=87

c) Os alunos podem verificar que um número é termo da sequência determinando a sua ordem. Novamente, a partir da decomposição da figura em duas partes, retiram o ponto que as une e, de seguida, distribuem igualmente os restantes pontos por cada uma das partes. No caso do número 135, obtêm 134 pontos para distribuir equitativamente por duas partes. Depois de realizarem a divisão indicam que o resultado obtido corresponde ao número de pontos de cada uma das partes laterais da 67.ª figura. Os alunos efectuam as operações inversas das inicialmente efectuadas, pela ordem inversa:

Sim, existe. Porque ao retirar um ponto ao 135, fica 134 e ao dividir por 2, dá o nº de pontos de cada lado da figura.

-> 1 ponto

este lado tem 67 pontos

135 - 1 = 134   134 : 2 = 67

<- este lado tem 67 pontos

4. Generalização. A generalização reflecte, em grande parte, o trabalho realizado nas perguntas anteriores, nomeadamente no que se refere à decomposição da figura, identificando o que se mantém constante e o que varia, procurando relacionar essas partes com a ordem de cada figura.

a) Numa primeira abordagem, a generalização pode assumir um carácter informal e ser expressa em linguagem natural como se observa nestas três respostas:

Num lado tem o número da figura, no outro também tem sempre um de base

É o dobro de um numero mais o ponto superior

R: Quando temos um número qualquer somamos mais um ponto e depois com o resultado da soma voltamos a somar com esse número.

b) Com base na descrição da generalização é possível procurar elaborar uma fórmula, recorrendo a símbolos. Os alunos podem começar por recorrer a simbologia que usaram em anos anteriores ou em outras situações:

1 + ? + ?

c) A simplificação de expressões pode ser abordada nesta pergunta, relacionando alguns aspectos com o trabalho que os alunos desenvolveram anteriormente, por exemplo, nas operações realizadas para a determinação de um termo de uma ordem distante:

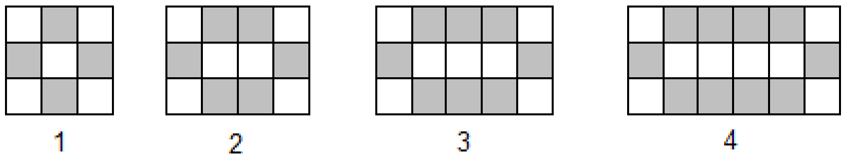
1 + n + n

1 + 2n

1 + 2 × n

Tarefa 2 – Azulejos

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Representa a 5.ª e a 6.ª figuras desta sequência.

1.2. Quantos azulejos, no total, tem a 50.ª figura?

1.3. Que figura da sequência tem, no total, 81 azulejos?

1.4. Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados. Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
…			
n			

1.5. O Jorge sugeriu à Sara que a expressão algébrica $(n+2)+(n+2)+(n+2)$ representa o número total de azulejos em cada figura. Concordas com ele? Justifica a tua resposta.

1.6. A Marta, por sua vez, indicou a expressão algébrica $3\times(n+2)$. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Justifica a tua resposta.

1.7. Indica outras expressões algébricas equivalentes, que possam representar o número total de azulejos em cada figura.

1.8. Recorrendo à expressão algébrica da Marta, $3\times(n+2)$:

a) Determina os termos de ordem 18 e 53. Na situação apresentada nesta tarefa, o que representam os valores que obtiveste?

b) Indica a ordem do termo da sequência que tem 294 azulejos.

Tarefa 2 – Azulejos

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo, na aula anterior, os alunos devem ser capazes de:

- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando as linguagens natural e simbólica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Reforçar a sua compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação usando símbolos matemáticos adequados;
- Mostrar que são capazes de determinar o termo geral de uma sequência, bem como termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
- Saber indicar se um número é, ou não, termo de uma sequência;
- Ser capazes de identificar expressões algébricas equivalentes.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Formularem e testarem conjecturas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa poderá ser realizada num bloco de 90 minutos, destinando-se 45 minutos para a realização da tarefa, em pares ou pequenos grupos, e 45 minutos para a apresentação de resultados e justificações e para a discussão de diferentes estratégias.

Esta tarefa apresenta uma sequência de figuras constituídas por azulejos brancos e cinzentos de forma quadrangular. Os alunos têm oportunidade de analisar a sequência, identificando regularidades e de expressar as suas generalizações em linguagem natural e em linguagem algébrica. Na discussão relativa a esta questão, o professor deve solicitar os contributos dos alunos, procurando que sejam apresentadas e comparadas as diferentes estratégias de análise das figuras e as formas de representação por eles usadas. O próprio professor deve indicar estratégias e representações adicionais, para além das referidas pelos alunos, se o considerar apropriado.

Tal como na tarefa anterior, e de um modo geral todas as tarefas que envolvem sequências, a formulação e teste de conjecturas assume uma importância decisiva. Do mesmo modo, quer durante o trabalho dos alunos, quer na fase da discussão final, a comunicação matemática oral, apoiada em registos escritos, desempenham um papel muito relevante na clarificação de conceitos e de raciocínios matemáticos.

No final da aula o professor deve recordar os diferentes conceitos trabalhados até aqui, reforçando a noção de termo geral de uma sequência e da sua representação por meio de uma expressão algébrica. Os significados de termo e de ordem devem ser mais uma vez recordados pelos alunos. Dado que nesta aula os alunos analisaram expressões algébricas equivalentes e justificaram a sua pertinência com base na análise das propriedades dos termos da sequência pictórica associada, o professor deve chamar a atenção para as propriedades usadas e as transformações algébricas efectuadas, como a propriedade distributiva e a simplificação de monómios semelhantes.

2. Algumas explorações. A esta sequência pictórica os alunos podem associar as sequências numéricas que surgem quando, analisando as propriedades das figuras, se consideram apenas os azulejos brancos, apenas os azulejos cinzentos ou os azulejos que formam cada figura na totalidade. Os alunos podem explorar as sequências seguindo duas estratégias: (i) analisando figuras consecutivas e concluindo que, de uma figura para a seguinte, o número de azulejos brancos aumenta uma unidade, o número de azulejos cinzentos aumenta duas unidades e o número total de azulejos aumenta três unidades; ou (ii) analisando as propriedades geométricas de cada figura e verificando que é possível decompô-la de modo a relacionar o número de azulejos de cada tipo com a ordem da figura na sequência.

As duas primeiras perguntas (1.1 e 1.2) têm como principal objectivo levar os alunos a compreender o modo como as novas figuras são constituídas. Três novas sequências numéricas surgem quando se considera este novo tipo de figuras e contam, isoladamente, os azulejos brancos, os azulejos cinzentos ou o total de azulejos. Os alunos usam a tabela para representar os primeiros termos de cada uma dessas sequências.

Quando completam a tabela, os alunos, para além de indicarem o número de azulejos brancos, o número de azulejos cinzentos e o número total de azulejos usados nas seis primeiras figuras da sequência, devem apresentar uma expressão algébrica para representar cada uma das sequências numéricas. O termo geral da sequência numérica relativa aos azulejos brancos é $n+4$, ou uma expressão equivalente, da sequência relativa aos azulejos cinzentos é $2n+2$, ou uma expressão equivalente. Quanto à sequência constituída pelo total de azulejos de cada figura da sequência pictórica, os alunos podem determinar o seu termo geral de diferentes formas. Podem, por exemplo, analisar novamente as figuras da sequência não fazendo distinção entre os azulejos brancos e cinzentos ou podem escrever a expressão algébrica que resulta da adição das duas expressões algébricas anteriores. Nesta pergunta é natural que surja a simplificação de expressões algébricas e o professor pode referir o que são expressões algébricas equivalentes.

Nesta situação são propostas aos alunos perguntas onde estes podem analisar diferentes expressões algébricas. Nas perguntas 1.5, 1.6 e 1.7 os alunos exploram apenas expressões algébricas relativas ao número total de azulejos de cada figura. Com base nas propriedades das figuras da sequência os alunos podem compreender a equivalência das expressões, dando sentido às regras de manipulação algébrica que permitem demonstrar essa equivalência. Além das expressões referidas ao longo da tarefa, $3n+6$, $2n+n+6$, $2n+2+n+4$ são exemplos de expressões algébricas adicionais que os alunos podem escrever para representar o total de azulejos de cada figura.

Na última pergunta da tarefa, os alunos determinam termos de duas ordens dadas com base numa expressão algébrica que representa o total de azulejos, devendo indicar o significado desses valores nesta situação. O termo de ordem 18 é 60, sendo que este número representa o número total de azulejos da 18.ª figura da sequência. O termo de ordem 53 é 165, pelo que a 53.ª figura tem 165 azulejos. Para determinar a ordem do termo dado os alunos podem resolver a equação $3\times(n+2)=294$. Como estes não resolveram ainda equações deste tipo, podem usar estratégias informais, como realizar as operações na ordem inversa, de modo a determinar a ordem respectiva, 96.

Explorações de alunos

1. Determinar a ordem da figura. Dado o número total de azulejos, os alunos podem usar estratégias que reflectem explorações diferentes da mesma figura. Podem dividir o número total de azulejos (81) por 3, descobrindo que cada linha tem 27 azulejos. Para determinar a ordem da figura, subtraem a 27 as 2 unidades que correspondem às duas colunas laterais:

81:3=27

Cada linha tem 27 quadrados.

27-2=25.

Outra estratégia pode ser subtrair ao número total de azulejos (81) os 6 azulejos pertencentes às duas colunas laterais. Obtém-se o valor 75, que se refere ao número total de azulejos da parte central da figura. Dividindo este valor por 3 (para distribuir pelas três linhas), encontra-se a ordem da figura (25):

81 - 6 = 75

75 : 3 = 25

É o numero 25.

2. *Expressões algébricas equivalentes*. Encarar o mesmo azulejo sob várias perspectivas permite construir diferentes expressões algébricas que representam igualmente o número total de azulejos. Será interessante que os alunos possam aperceber-se do modo como podem transformar certas expressões algébricas noutras, promovendo a manipulação algébrica, sem perder de vista, pelo menos inicialmente, o significado dessas transformações:

N+2 é o número de quadrados
de cada linha como há três
linhas somamos isso três vezes.

O diálogo que se segue, decorrido numa aula em que se realizou esta tarefa, ilustra o modo como os alunos, na discussão geral, podem compreender a equivalência de duas expressões algébricas que já sabiam que representavam o número total de azulejos de cada figura:

Professora – As duas dizem respeito ao número total de azulejos. Será que são equivalentes?
Vários alunos – Sim.
Professora – O que tenho de fazer a $3\times(n+2)$ para chegar a $3n+6$?
Aluno A – [Fazer] Três n.
Aluno B – [E] Três vezes dois.
Professora – E $(n+2)+(n+2)+(n+2)$ também é equivalente a $3n+6$, ou não?
Aluno C – É.
Professora – Como é que sabem que é equivalente? Como é que aparece o 6?
Aluno C – Os 2 todos vão dar 6.
Professora – E a restante expressão? Resta $n+n+n$.
Aluno C – $n+n+n$ dá n.
Aluno A – Não, dá $3n$.

Tarefa 3 – Explorações com números

1. Observa o seguinte esquema:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
…	…	…	…

Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Continua a representação da tabela até obteres o número 40.

1.2. Supõe que esta tabela é continuada infinitamente. Identifica as regularidades que conseguires encontrar.

1.3. Podes prever em que coluna se encontra o número 64? E em que linha?

1.4. Podes prever em que coluna se encontra o número 99? E em que linha?

1.5. Considerando um número qualquer, podes prever em que coluna e em que linha se encontra nesta tabela?

Tarefa 3 – Explorações com números

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando as linguagens natural e simbólica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem aprofundar a sua capacidade de representar simbolicamente o termo geral de uma sequência numérica.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Formularem e testarem conjecturas;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Na maior parte das turmas, o trabalho nesta tarefa poderá corresponder a um bloco de 90 minutos, destinando-se os 60 minutos iniciais à realização da tarefa, em pares ou pequenos grupos, e os 30 minutos seguintes à apresentação de resultados e justificações e à discussão de estratégias alternativas.

Na exploração inicial da tarefa, os alunos podem revelar dificuldades em expressar as regularidades que identificam. Nesse caso, o professor deve salientar a importância de apresentar essas regularidades de um modo claro e com recurso a um vocabulário adequado.

Pode ser também necessário incentivar os alunos a persistirem na procura do maior número de regularidades possível, notando as que se revestem de interesse matemático (isto é, que não sejam triviais). Para isso, pode dar sugestões quanto à procura de regularidades nas colunas, nas linhas ou nas diagonais, de modo a promover uma melhor compreensão da tabela.

Será ainda de esperar que alguns alunos sintam dificuldades em prever a coluna e a linha em que se encontra qualquer número. Nessa situação o professor pode sugerir outros números, para além dos indicados no enunciado da tarefa, pedindo aos alunos para apontarem a linha e a coluna correspondentes. A identificação de um maior número de casos concretos favorece a formulação de generalizações. E ao formularem e testarem essas generalizações, os alunos estão a desenvolver o seu raciocínio matemático.

A discussão geral constitui uma importante oportunidade para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos. Nesta discussão, o professor deve gerir os contributos dos alunos, procurando promover a partilha das regularidades encontradas bem como assinalar a existência de diferentes formas de representação. Esta tarefa promove a comunicação escrita, na medida em que é pedido aos alunos que descrevam na folha de papel as regularidades identificadas – em especial as mais interessantes – recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática. A tarefa proporciona também uma oportunidade de os alunos se expressarem oralmente sobre as regularidades encontradas, no diálogo aluno-aluno, quando a resolvem em pares ou grupo. Os alunos têm de indicar com clareza e usando uma linguagem matemática adequada as suas conclusões de modo a que todos as compreendam e possam verificar se estas são sempre válidas. Podem também observar se chegaram às mesmas conclusões, se chegaram a outras conclusões que querem partilhar ou se, com base nas descobertas dos colegas, conseguem identificar novas regularidades.

Esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos identificarem sequências e regularidades numéricas numa tabela de números dispostos em colunas. Algumas destas sequências são já conhecidas dos alunos pelo que não lhes será difícil formular generalizações usando a linguagem natural. O professor deve procurar que os alunos usem a linguagem algébrica para representar essas sequências. No final da aula deve fazer um balanço das regularidades identificadas e da sua importância para prever a linha e coluna em que se encontra um dado número.

2. Algumas explorações. É possível identificar diversas regularidades na tabela. Por exemplo, quando consideramos as linhas ou as colunas isoladamente podemos observar que:

a) Em cada linha encontramos 4 números naturais consecutivos, por ordem crescente.

b) Em todas as colunas a diferença entre números consecutivos é constante igual a 4 unidades. A sequência presente na 1.ª coluna tem termo geral $4n-4$ (considerando que o primeiro termo é obtido para $n=1$) ou $4n$ (considerando que o primeiro termo é obtido para $n=0$). Todos os números desta coluna são pares e múltiplos de 4.

c) Nas restantes colunas, a diferença entre números consecutivos também é sempre igual a 4. As sequências, em cada coluna, da esquerda para a direita, têm como termo geral as expressões $4n-3$, $4n-2$ e $4n-1$ (considerando que o primeiro termo é obtido para $n=1$) ou $4n+1$, $4n+2$ e $4n+3$ (considerando que o primeiro termo é obtido para $n=0$). Nas 2.ª e 4.ª colunas, todos os números são ímpares e na 3.ª coluna, à semelhança do que sucede na 1.ª coluna, os números são todos pares.

Podemos observar ainda outras regularidades considerando números dispostos nas linhas diagonais e noutras disposições:

d) Observando a tabela de cima para baixo é possível identificar que a diferença entre números consecutivos é de 5 unidades nas diagonais da esquerda para a direita e de 3 unidades nas diagonais da direita para a esquerda.

e) Identificam-se, igualmente, as sequências dos múltiplos de 2, dos múltiplos de 3 ou dos múltiplos de 5:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

f) Podemos tentar localizar, por exemplo, os quadrados perfeitos (que se encontram apenas nas 1.ª e 2.ª colunas), as potências de 2 (que à excepção de 2^0 e 2^1 se encontram sempre na 1.ª coluna):

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
64	65	66	67
68	69	70	71
72	73	74	75
76	77	78	79
80	81	82	83
84	85	86	87
…	…	…	…

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63
64	65	66	67
68	69	70	71
72	73	74	75
76	77	78	79
80	81	82	83
84	85	86	87
…	…	…	…

g) As características desta tabela permitem, também, procurar regularidades relacionadas com a adição ou multiplicação de números que estão em posições específicas. Por exemplo, se imaginarmos um rectângulo ou um polígono com um número par de lados em que os seus vértices correspondem a números da tabela é possível identificar relações entre estes números e proceder, de seguida, à verificação algébrica da regularidade:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
36	37	38	39
…	…	…	…

Adição dos números que se encontram nos vértices opostos:

$$9+27=36$$
$$11+25=36$$

$$4+23=27$$
$$5+22=27$$

$$17+34=51$$
$$18+33=51$$
$$20+31=51$$
$$23+28=51$$
$$24+27=51$$

Nos casos acima exemplificados verifica-se que o resultado da adição dos números que se encontram em vértices opostos de um polígono com um número par de lados é sempre igual. O mesmo acontece em muitas outras situações.

Efectuando a operação de multiplicação com estes mesmos números identificam-se, também, regularidades que são mais fáceis de determinar no caso de se terem apenas dois produtos. Por exemplo, para a multiplicação dos números que se encontram nos vértices opostos do rectângulo e do paralelogramo tem-se:

$$9\times 27=243$$
$$11\times 25=275$$
$$275-243=32$$
$$32=4\times 4\times 2$$

$$4\times 23=92$$
$$5\times 22=110$$
$$110-92=18$$
$$18=4\times 4\times 1+1\times 1\times 2$$

Assim, generalizando para a situação de um rectângulo com $k+1$ colunas e $i+1$ linhas temos:

$$\begin{array}{ccc} n & & n+k \\ n+4i & & n+4i+k \end{array}$$

Adição	Multiplicação
$n+(n+4i+k)=2n+4i+k$	$n(n+4i+k)=n^2+4ni+nk$
$(n+4i)+(n+k)=2n+4i+k$	$(n+4i)(n+k)=n^2+4ni+nk+4ik$
	A diferença entre os produtos é $4ik$.

Identificamos, ainda, propriedades relativas às operações com números das diversas colunas. Por exemplo, se adicionarmos um número da 1.ª coluna a um número da 2.ª coluna, o resultado encontra-se na 2.ª coluna. Isto sucede porque, em geral $(4n_1)+(4n_2+1)$ é o elemento $4(n_1+n_2)+1$, que pertence novamente à 2.ª coluna. De um modo semelhante, pode verificar-se que multiplicando um número da 1.ª coluna por números das restantes colunas obtemos números da 1.ª coluna.

Podemos também procurar saber em que linha e coluna se encontra um determinado número. Por exemplo, o número 64, uma vez que é múltiplo de 4, encontra-se na 1.ª coluna. É possível identificar que se $4=4\times 1$ se encontra na 2.ª linha, $64=4\times 16$ vai encontrar-se na 17.ª linha.

Para determinar a que coluna pertence o número 99, podemos efectuar a sua divisão por 4. Obtemos o quociente 24 e resto 3. Dado que o resto é 3 concluímos que o número 99 se encontra na 4.ª coluna. Adicionando uma unidade ao quociente 24, concluímos que o número 99 estará na 25.ª linha desta tabela.

Em geral, para prever a coluna a que um dado número pertence podemos dividi-lo por 4. Se o resto da divisão inteira for zero, o número estará na 1.ª coluna (onde estão todos os múltiplos de 4). Se o resto da divisão inteira não for zero, o número em causa estará na mesma coluna em que esse resto se encontrar. Para determinar o número da linha em que o número se encontra, basta dividi-lo por 4 e adicionar uma unidade ao quociente.

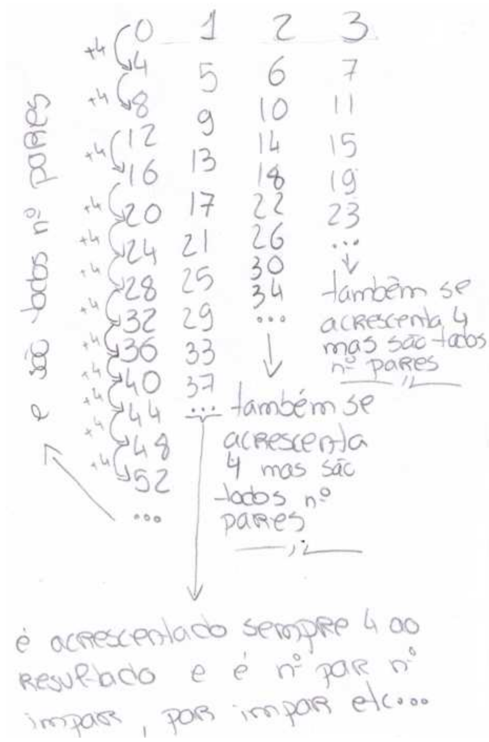
Explorações de alunos

Na exploração desta tarefa será vantajoso que os alunos continuem a representação da tabela. Para além disso, espera-se que estabeleçam generalizações, por exemplo: (i) identificando regularidades em diversas sequências de números existentes na tabela; e (ii) identificando a posição (em linha e em coluna) em que um número estará localizado na tabela.

1. Continuação da tabela. Nesta tarefa os alunos trabalham com uma tabela numérica. Ao procurarem continuar a tabela apresentada, são levados a identificar eventuais regras de formação e a fazer registos:

a) Observando cada linha da tabela, identificam que o número a representar de seguida é o número 20 que fica na 1.ª coluna e escrevem todos os números dessa linha por ordem crescente da esquerda para a direita. A linha que se segue inicia-se novamente na 1.ª coluna com o número consecutivo ao número representado na 4.ª coluna da linha anterior, continuando com os números por ordem crescente, da esquerda para a direita.

b) Observando cada coluna da tabela, identificam quantas unidades devem adicionar ao número anterior, em cada uma. Continuam a tabela coluna a coluna:



2. Identificação de regularidades. Observando a tabela é possível identificar regularidades, quando consideramos os números dispostos em cada linha, em cada coluna, em algumas diagonais ou com outras disposições mais complexas:

a) Os alunos identificam que nas 1.ª e 3.ª colunas os números são todos pares e nas 2.ª e 4.ª colunas são ímpares:

Na 1ª e 3ª linha da vertical são todos números pares
Na 2º e 4ª linha da vertical são todos números impares.

b) Relativamente às colunas constituídas por números pares verificam, ainda, que:

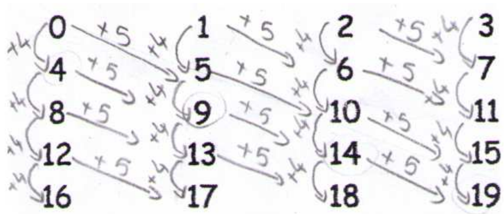
Aluno A – Então e olha lá e se formos à coluna, se nós formos à coluna, à 1.ª coluna da vertical encontramos a tabuada do 4.

Na 1º coluna são os múltiplos de 4, e de 2.

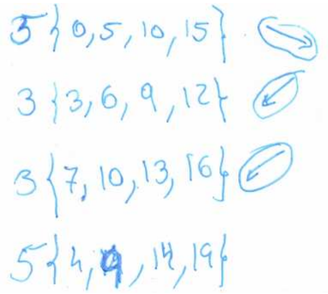
Na 3º coluna são múltiplos de 2.

c) Os alunos identificam a existência de regularidades em algumas diagonais, como por exemplo, sequências de números múltiplos de 3 e de números múltiplos de 5:

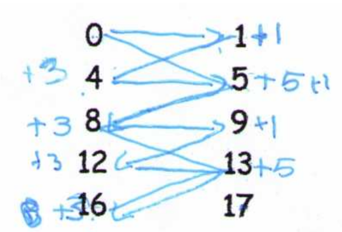
Aluno B – Então, olha, 3, 6, 9 e 12... tabuada do 3, olha, olha aqui...
Aluno C – É a tabuada do 3: 3, 6, 9 e 12. Mas...
Aluno B – 3×1, 3, 3×2, 6, 3×3, 9, 3×4, 12.
Aluno C – Então, mas depois aqui já não há nada... É uma parte da tabuada do 3.
(…)
Aluno B – Olha aqui, 0, 5, 10, 15... De 5 em 5.

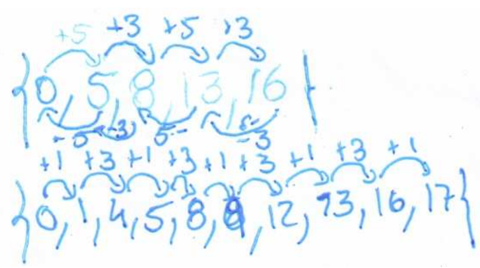


Identificam, assim, diferentes sequências finitas em que a diferença entre termos consecutivos é sempre igual, como por exemplo:



d) Os alunos escrevem ainda sequências de números em que a diferença entre termos consecutivos não é sempre constante, analisando, por exemplo, as duas primeiras colunas de números:





e) Os alunos adicionam os números de cada coluna representados no enunciado e identificam uma regularidade na sequência de somas. Verificam que o resultado é um múltiplo de 5:

0+4+8+12+16 = 40
1+5+9+13+17 = 45
2+6+10+14+18 = 50
3+7+11+15+19 = 55

f) Os alunos adicionam os números de cada linha e verificam que a soma é um número par:

O resultado das linhas horizontais é sempre par

0+1+2+3 = 6
4+5+6+7 = 22
8+9+10+11 = 38
12+13+14+15 = 54
16+17+18+19 = 70

Além disso, analisam as diferenças entre as somas obtidas:

mas, se for a soma dos nºs da horizontal, vai dar o nº ~~seguintes~~ antes 16, vai dar a soma dos nºs seguintes.

Tarefa 4 – Sequências numéricas

1. Determina os cinco primeiros termos de cada uma das sequências seguintes, a partir dos seus termos gerais:

   1.1. $5n-1$
   1.2. $10-4n$
   1.3. $\frac{3n}{n+4}$

2. Considera a sequência de termo geral $3n-1$. Indica se os números 8, 10, 23, 32 são, ou não, termos desta sequência. Para os números que são termos da sequência, indica a respectiva ordem. Apresenta os cálculos que efectuares.

3. Nas alíneas seguintes encontram-se diversas sequências numéricas. Completa cada espaço em branco com o termo que está em falta e justifica a tua resposta.

   a) $1, 2, 3, \_\_\_, 5, 6, 7...$

   b) $2, 4, 6, \_\_\_, 10, 12, 14...$

   c) $1, 3, 5, \_\_\_, 9, 11, 13...$

   d) $3, 6, \_\_\_, 12, 15, 18...$

   e) $1, 4, 9, \_\_\_, 25, \_\_\_, 49...$

   f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \_\_\_, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}...$

   g) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \_\_\_, \frac{5}{2}, 3, \_\_\_, 4...$

   h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \_\_\_, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \_\_\_, \frac{9}{11}...$

   i) $1, \frac{4}{3}, \_\_\_, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \_\_\_, \frac{16}{9}...$

4. Indica um termo geral de cada uma das sequências apresentadas na questão 3.

Tarefa 4 – Sequências numéricas

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem ser capazes de:

- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação;
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando as linguagens natural e simbólica;
- Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Reforçar a sua compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação usando símbolos matemáticos adequados;
- Ser capazes de determinar o termo geral de uma sequência, bem como termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
- Saber indicar se um número é, ou não, termo de uma sequência;
- Ser capazes de explorar sequências envolvendo fracções.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Formularem e testarem conjecturas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa pode ser realizada num bloco de 90 minutos, destinando-se cerca de metade do tempo à realização das questões propostas, em pares ou pequenos grupos, e outra metade à apresentação de resultados e justificações e à discussão de estratégias alternativas.

A primeira questão envolve a determinação de termos de uma sequência numérica dado o respectivo termo geral. O professor deve analisar com os alunos o surgimento de números negativos e a possibilidade de escrever as fracções que surgem nas sequências da pergunta 1.3 na forma irredutível. Essa análise será importante para a realização das questões 3 e 4. Na segunda questão, os alunos devem verificar e justificar se um dado número pertence a uma sequência, conhecido o seu termo geral.

Após a resolução destas duas questões, o professor deve promover um momento de discussão com toda a turma. Nesta discussão os alunos apresentam os resultados obtidos e as principais conclusões da análise destas sequências, nomeadamente no que se refere às regularidades que se podem identificar em cada uma e, nas duas últimas sequências, ao efeito da simplificação das fracções.

Na terceira questão desta tarefa encontram-se várias sequências numéricas, das quais são conhecidos alguns termos. Os alunos devem indicar o termo em falta nos espaços assinalados em cada uma das sequências, com base nas regularidades que identificam. Em seguida, na questão 4, devem escrever um termo geral para cada uma destas sequências numéricas. Tendo em conta a discussão promovida nas questões anteriores, os alunos devem conseguir analisar cada uma das sequências desta questão e estabelecer uma relação entre cada termo e a sua ordem, de modo a determinar o respectivo termo geral. Caso manifestem muitas dificuldades, o professor pode discutir com toda a turma as regularidades encontradas e os termos gerais das primeiras sequências e explorar a possibilidade de simplificação das fracções.

Tal como nas tarefas anteriores, esta tarefa constitui uma boa oportunidade para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e comunicação matemática. Cabe ao professor estimular os alunos a formularem e testarem conjecturas a respeito de possíveis generalizações e promover a comunicação oral e o registo escrito das suas descobertas, ao mesmo tempo que questionam e interpelam os seus colegas.

No final desta aula o professor deve salientar, uma vez mais, que numa sequência cada termo tem uma determinada ordem e que a relação entre ordem e termo é dada pelo termo geral. Com base no termo geral os alunos podem determinar os termos da sequência de várias ordens e a ordem de um dado termo. Conhecendo o termo geral de uma sequência é possível indicar se um número é ou não termo dessa sequência. Devem ainda ser sintetizadas as propriedades das operações com números inteiros usadas durante a resolução da tarefa e os processos utilizados na escrita de fracções na forma irredutível.

2. Algumas explorações. Na questão 1, o segundo termo geral refere-se a uma sequência numérica em que os dois primeiros termos são números positivos e os restantes são números negativos (6, 2, –2, –6, –10). Sendo uma sequência cujo termo geral é um polinómio do 1.º grau, a diferença entre termos consecutivos é constante e igual a 4 unidades. O termo geral seguinte gera uma sequência cujos termos são, em certos casos, números fraccionários. Na sequência com termo geral $\frac{3n}{n+4}$, os alunos podem apresentar os termos $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{12}{8}$, e $\frac{15}{9}$, como resposta a essa pergunta mas o professor deve promover a escrita das fracções na sua forma irredutível.

Na questão 2 os alunos podem seguir duas estratégias:

(i) Determinar alguns termos da sequência e verificar se os números apresentados fazem parte da sequência de termo geral $3n-1$. Procedendo deste modo, os alunos obtêm a sequência numérica 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 e concluem que os números 8, 23 e 32 são os termos que correspondem às ordens 3, 8 e 11. Pelo contrário, verificam que o número 10 não faz parte da sequência uma vez que esta é crescente e os termos 8 e 11 são consecutivos.

(ii) Verificar, pela análise da expressão algébrica, que os termos da sequência são números que têm menos um unidade que os múltiplos de 3. Para verificarem se os números dados pertencem à sequência, basta reconhecer que os números 8, 23 e 32 têm menos uma unidade que 9, 24 e 33, respectivamente. Observando que $9=3\times3$, $24=3\times8$ e $33=3\times11$, os alunos podem identificar as ordens dos termos.

Algumas das sequências da questão 3 são bem conhecidas dos alunos, nomeadamente a dos números naturais, a dos números pares e a dos números ímpares, a dos múltiplos de 3 e a dos quadrados perfeitos. As sequências que envolvem fracções podem suscitar-lhes maior dificuldade. O professor pode sugerir aos alunos a construção de uma tabela para ajudar a compreender a relação entre a ordem e o termo. Na questão 4, esta tabela pode ajudar a determinar um termo geral (ver exemplo mais adiante nas explorações dos alunos).

A tabela que se segue apresenta os termos em falta em cada uma das sequências e o seu termo geral:

Sequência	Termo Geral
a) $1, 2, 3, \_\_\_, 5, 6, 7...$	n
b) $2, 4, 6, \_\_\_, 10, 12, 14...$	$2n$
c) $1, 3, 5, \_\_\_, 9, 11, 13...$	$2n-1$
d) $3, 6, \_\_\_, 12, 15, 18...$	$3n$
e) $1, 4, 9, \_\_\_, 25, \_\_\_, 49...$	n^2
f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \_\_\_, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}...$	$\frac{n}{n+1}$
g) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \_\_\_, \frac{5}{2}, 3, \_\_\_, 4...$	$\frac{n}{2}$
h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \_\_\_, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \_\_\_, \frac{9}{11}...$	$\frac{n}{n+2}$
i) $1, \frac{4}{3}, \_\_\_, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \_\_\_, \frac{16}{9}...$	$\frac{2n}{n+1}$

Explorações de alunos

Nesta tarefa, os alunos devem determinar termos de várias ordens a partir do termo geral, verificar se alguns números são ou não termos de uma sequência dada pelo seu termo geral e completar sequências e indicar um seu termo geral. Os exemplos que se seguem referem-se à questão 3.

1. Sequências de números naturais. Numa primeira fase, a observação da sequência numérica, tal como é apresentada no enunciado, pode favorecer a observação de eventuais relações entre termos consecutivos.

Os alunos podem identificar a existência de uma diferença constante entre termos consecutivos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7…

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14…

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

O recurso a tabelas pode favorecer a determinação, por parte dos alunos, de relações entre os termos e as respectivas ordens:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14… multiplica-se a ordem por 2

3, 6, 9, 12, 15, 18… multiplica-se a ordem por 3

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13… multiplica-se a ordem por 2 e subtrai-se por 1

A identificação de regularidades distintas pode gerar outras estratégias de generalização. É o que sucede no exemplo seguinte em que os alunos identificam que cada termo pode ser obtido adicionando a sua ordem com a ordem do termo anterior:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	n
1	3	5	7	9	11	13	15	17	…	2×n-1

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

1+2=3
2+3=5

Assim, o termo geral pode ser obtido adicionando n com $n-1$:

$n-1$
$n-1+n=2n-1$

Existem sequências numéricas em que a diferença entre termos consecutivos não é constante. É o que sucede na sequência dos quadrados perfeitos. Neste caso a diferença entre termos consecutivos é sempre um número ímpar:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49…

1	2	3	5	5	6	7	8
1	4	9	16	25	36	49	64

+3 +5 +7 +9 +11 +13 +15

Outros alunos podem verificar que nesta sequência numérica se pode obter cada termo multiplicando a ordem por si mesma:

multiplica-se a ordem por ele mesmo

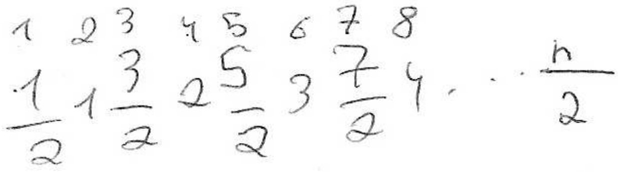
1×1=1
2×2=2
3×3=9 (…)

$n \times n = n^2$

2. Sequências com números fraccionários. As sequências que envolvem números representados na forma de fracção representam um desafio adicional para os alunos, uma vez que há relações que podem encontrar apenas entre numeradores, apenas entre denominadores, entre numeradores e denominadores ou mesmo entre cada um destes elementos e a ordem respectiva de cada termo.

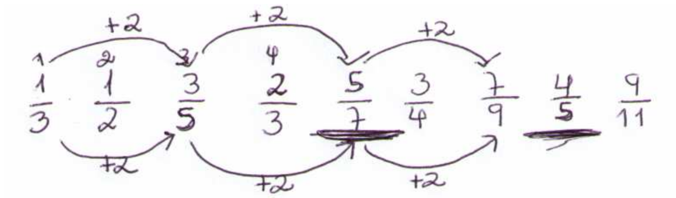
No caso das fracções com denominador 2, pode ser simples para o aluno visualizar 1 como $\frac{2}{2}$, 2 como $\frac{4}{2}$ e assim sucessivamente, obtendo o termo geral $\frac{n}{2}$:

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4 \ldots$$



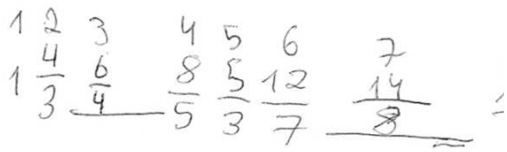
No caso da sequência da alínea h), a existência de fracções irredutíveis pode levar à identificação de regularidades entre termos alternados, isto é, de ordem ímpar ou de ordem par. Este tipo de observação permite continuar a sequência correctamente, mas ao mesmo tempo pode tornar difícil a obtenção de um termo geral:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11} \ldots$$



Nos casos mais complexos, pode ser necessário questionar os alunos sobre termos de ordem mais distante ou sugerir que olhem separadamente para numeradores e denominadores:

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{7}{4}, \frac{16}{9} \ldots$$



Tarefa 5 – Atravessando o rio

1. Para atravessar o rio está disponível um pequeno barco que, em cada travessia, pode levar um adulto ou uma criança ou duas crianças (ou seja, existem apenas três possibilidades). O barco tem sempre que ser conduzido por um adulto ou por uma criança.

   Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

   1.1. Numa margem estão 6 adultos e 2 crianças que pretendem atravessar o rio. Qual é o número mínimo de viagens que o barco tem que realizar para que todos passem para a outra margem?

   1.2. O que acontece se quiserem atravessar o rio:

   - 8 adultos e 2 crianças;
   - 15 adultos e 2 crianças.

   1.3. Descreve como podes resolver este problema se o grupo de pessoas for constituído por duas crianças e um número qualquer de adultos.

   1.4. Escreve uma expressão algébrica que represente o número mínimo de viagens a realizar para que um grupo com *A* adultos e duas crianças atravesse para a outra margem.

   1.5. Sabe-se que um grupo de adultos e 2 crianças tem que efectuar, no mínimo, 81 viagens para atravessar o rio. Quantos adultos pertencem a esse grupo?

   1.6. O que acontece se o número de crianças mudar? Identifica o que se altera no raciocínio que descreveste anteriormente, nas seguintes situações:

   - 6 adultos e 3 crianças;
   - 6 adultos e 4 crianças;
   - 8 adultos e 4 crianças.

   1.7. Escreve uma expressão algébrica que represente o número mínimo de viagens necessárias para:

   - *A* adultos e 3 crianças;
   - *A* adultos e 4 crianças;
   - *A* adultos e 5 crianças.

Tarefa 5 – Atravessando o rio

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas;
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem aprofundar a sua capacidade de representar simbolicamente o termo geral de uma sequência numérica.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Identificarem os dados, as condições e o objectivo do problema;
- Analisarem as consequências da alteração nos dados e nas condições de um problema na respectiva solução;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Traduzir relações de linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Na maior parte das turmas, esta tarefa poderá ser efectuada num bloco de 90 minutos, destinando-se os 60 minutos iniciais à realização da tarefa, em pares ou pequenos grupos, e os 30 minutos seguintes à apresentação de resultados e justificações e à discussão de estratégias alternativas.

Na exploração inicial da tarefa, os alunos podem revelar dificuldades na interpretação do problema proposto. Nesse caso, o professor deve salientar a importância de respeitar as condições do enunciado: (i) o tipo de passageiro que o barco pode transportar de cada vez; e (ii) o facto do barco ter de ser conduzido por um dos elementos do grupo. Após uma interpretação adequada do problema, os alunos devem ser capazes de conceber formas de representação apropriadas e delinear uma estratégia que permita determinar o número mínimo de viagens em cada caso.

Com o trabalho nesta tarefa, os alunos desenvolvem a sua capacidade de resolução de problemas, em especial no que diz respeito a identificar os dados, as condições e o objectivo do problema. A comparação do que se passa quando varia o número de adultos e de crianças permite analisar as consequências da alteração nos dados de um problema na respectiva solução.

Na discussão geral, o professor deve gerir as intervenções dos alunos, procurando promover a partilha de estratégias e formas de representação distintas. Neste momento da aula a comunicação matemática oral, apoiada em registos escritos, assume um papel de grande importância, contribuindo para desenvolver esta capacidade nos alunos.

No final da aula o professor deve reforçar a importância da identificação correcta dos dados, das condições e dos objectivos de um problema. Deve, também, ser reforçada a importância da utilização da linguagem algébrica para representar as relações entre os dados. Além disso, o professor pode usar a situação proposta para mostrar as consequências para a solução de um problema da alteração dos seus dados e das suas condições.

2. Algumas explorações. Quando analisamos a situação de um grupo de 6 adultos e 2 crianças, apercebemo-nos de que, para respeitar o enunciado, é necessário garantir que há sempre alguém que possa conduzir o barco. Iniciar a travessia enviando primeiro um adulto no barco (que segue necessariamente sozinho) gera uma situação que não permite a travessia dos restantes elementos, pois permanecendo o adulto na margem onde chegou, não existe nenhum condutor para fazer o barco regressar à margem inicial. Logo, é necessário que a primeira viagem seja efectuada por duas crianças, para que uma delas possa fazer regressar o barco, permitindo uma viagem de um adulto. Assim, considerando a existência de uma margem A onde está todo o grupo inicialmente e uma margem B onde o grupo pretende chegar, uma estratégia possível será a de efectuar as viagens seguintes:

1 – Duas crianças de A para B;

2 – Uma criança de B para A;

3 – Um adulto de A para B;

4 – Uma criança de B para A;

Nesta altura há 2 crianças e 5 adultos na margem A e 1 adulto na margem B.

5 – Duas crianças de A para B;

6 – Uma criança de B para A;

7 – Um adulto de A para B;

8 – Uma criança de B para A;

Etc.

Ao fim de 8 travessias há 2 crianças e 4 adultos na margem A e 2 adultos na margem B. Como se pode verificar há um conjunto de 4 passos principais que se repetem 6 vezes, isto é, tantas vezes como o número de adultos existente no grupo. No final destas 24 travessias (6×4) encontram-se 2 crianças na margem A e 6 adultos na margem B. Logo, a última viagem é efectuada pelas duas crianças, de A para B. A generalização deste raciocínio permite afirmar que o número mínimo de viagens a efectuar (N) é o quádruplo do número de adultos (A), ao qual se acrescenta uma unidade, isto é, $N=4A+1$. A forma como os passos a efectuar são agrupados pode, no entanto, ser diferente, conduzindo a outros raciocínios também válidos:

1 – Duas crianças de A para B;

2 – Uma criança de B para A;

3 – Um adulto de A para B;

Deu-se a primeira chegada de um adulto à margem B.

4 – Uma criança de B para A;

5 – Duas crianças de A para B;

6 – Uma criança de B para A;

7 – Um adulto de A para B;

Nova chegada de um adulto à margem B.

8 – Uma criança de B para A;

Etc.

Após a chegada do último adulto, é necessário que a criança que está em B regresse a A, para que, juntas, atravessem novamente para B e aí se juntem ao grupo dos adultos. Agrupando as diferentes viagens desta forma, observa-se que há uma repetição do bloco formado pelos passos numerados de 4 a 7, $A-1$ vezes, gerando um total de $4(A-1)$ viagens. A este número é necessário adicionar as 3 viagens iniciais e as 2 viagens finais, ou seja, um total de 5 viagens. Desta forma, conclui-se que $N=4(A-1)+5$. Como ambas as estratégias são válidas, as expressões algébricas que as representam $4A+1$ e $4(A-1)+5$ devem ser equivalentes, o que facilmente se pode comprovar efectuando as operações indicadas na segunda expressão.

Na parte final da tarefa sugere-se que os alunos estudem o que acontece ao número de viagens quando se altera o número de crianças. Verifica-se que, por cada criança além das 2 existentes inicialmente, é necessário acrescentar 2 viagens. Assim, considerando o caso em que há 6 adultos tem-se:

N.º de crianças	N.º de viagens
2	$4A+1$
3	$4A+1+2=4A+3$
4	$4A+1+2+2=4A+5$
5	$4A+1+2+2+2=4A+7$
…	…

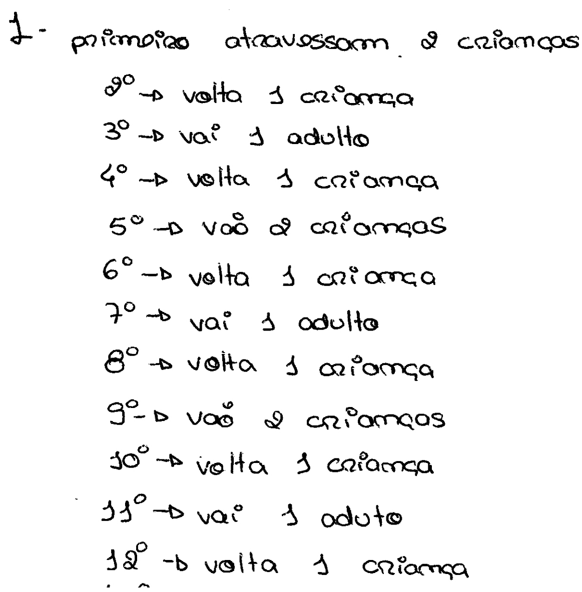
A exploração da tarefa pelos alunos poderá terminar nesta fase. No entanto, a sua continuação para um número variável de crianças leva a ver que, em geral, o número de viagens (*N*) depende do número de adultos (*A*) e do número de crianças (*C*), de acordo com a relação entre as três variáveis: $N = 4A + 2(C-2)+1$, ou, escrito de modo mais simples, $N = 4A + 2C - 3$.

Explorações de alunos

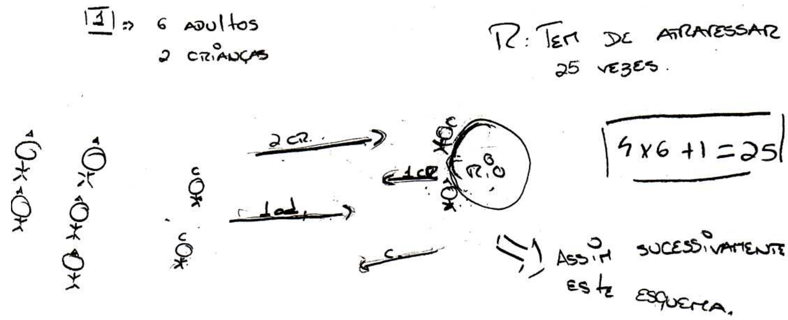
Na exploração desta tarefa é pedido aos alunos para: (i) resolverem o problema proposto, considerando um grupo inicial de 6 adultos e 2 crianças; (ii) resolverem o problema quando se consideram grupos com outros números de adultos; (ii) estabelecerem uma generalização para qualquer número de adultos; (iii) determinarem o número de adultos existente num grupo com 2 crianças quando é conhecido o número mínimo de viagens necessário; (iv) ajustarem a estratégia de resolução utilizada, de acordo com a alteração do número de crianças; e (v) estabelecerem uma generalização para qualquer número de adultos, com diferentes números de crianças.

1. Identificação de regularidades. A exploração do primeiro caso sugerido na pergunta 1.1, permite aos alunos compreenderem a situação descrita para aquele caso específico e detectar as primeiras regularidades. Os alunos podem optar por construir representações diversas para concretizar a primeira situação (6 adultos e 2 crianças): esquemas, desenhos e palavras. Alguns chegam mesmo a relatar exaustivamente toda a estratégia de resolução, como se de uma história se tratasse:

a) Fazendo esquemas ou usando palavras, alguns alunos descrevem na totalidade as 25 viagens. Nos exemplos que seguem encontra-se parte do esquema que realizaram:



b) Fazendo esquemas ou usando palavras, outros alunos referem apenas as quatro viagens iniciais que se repetem para cada adulto, salientando a necessidade de realizar, para além destas, uma última viagem com as duas crianças:



2. Alteração do número de adultos. Após a exploração da situação anterior, são considerados três novos grupos, com vários números de adultos para os quais se deve, novamente, determinar o número mínimo de viagens a realizar.

a) Partindo da situação que envolve 6 adultos e 2 crianças, os alunos verificam que têm agora mais 2 adultos. Para transportar cada um deles para a outra margem fazem mais dois conjuntos de quatro viagens:

2- se hover 8 Adultos e 2 crianças, acrescentamos 2 conjuntos de 4 viagens, logo a 25 acrescentamos 8 viagens, 25+8=33, logo são precisas 33 viagens.

b) Recorrendo à regularidade identificada na situação anterior, indicam que é necessário fazer um conjunto de quatro viagens por cada um dos 8 adultos e mais uma viagem no final para transportar as duas crianças:

-8 adultos e 2 crianças
$8 \times 4 + 1 = 33$

3. Generalização. A descrição das estratégias de resolução para um número qualquer de adultos ocorre em linguagem natural e é traduzida em linguagem simbólica:

É o nº de Adultos x 4+1.
$A \times 4 + 1$

4. Determinar o número de adultos. Para dar resposta a esta pergunta, os alunos necessitam de ter compreendido o modo como se relacionam o número de adultos no grupo e o número mínimo de viagens a realizar. Conhecendo o número de viagens realizadas por um conjunto de adultos e duas crianças os alunos podem determinar o número de adultos por processos aritméticos. Para isso, efectuam as operações inversas pela ordem inversa, isto é, subtraem uma unidade e dividem o valor obtido por 4:

81 viagens

$81 - 1 = 8$

$\frac{80}{4} = 20$

R: faziam parte do grupo 20 adultos

5. Alteração do número de crianças. A alteração no número de crianças não se reflecte no conjunto das quatro viagens relativas a cada adulto. Assim, basta determinar o número de viagens necessárias para transportar as crianças, para além das duas referidas inicialmente. Os alunos verificam que por cada nova criança a transportar para a outra margem são necessárias duas viagens. Os dois exemplos que se seguem referem-se a duas situações concretas – 6 adultos e 3 crianças, 6 adultos e 4 crianças:

$6 \times 4 + 1 + 2$

[27 viagens]

$6 \times 4 + 1 + 2 + 2$

[29 viagens]

FUNÇÕES

Tarefa 1 – Ponto por ponto

1. Para localizar pontos no plano podemos utilizar um referencial cartesiano. O referencial que se vai utilizar é constituído por dois eixos, perpendiculares entre si, que se cruzam num ponto – origem do referencial. Cada um desses eixos tem uma orientação indicada por uma seta e uma graduação, como podes observar na figura 1:

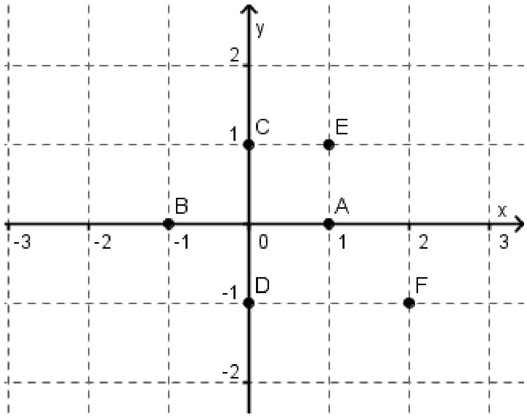


Figura 1

   1.1. Imagina que te encontras na origem do referencial. Descreve como te deslocas desse ponto até ao ponto A efectuando o número mínimo de deslocamentos na horizontal e/ou na vertical.

   1.2. Descreve, igualmente, como te deslocas da origem do referencial para os pontos B, C, D, E e F fazendo o mesmo tipo de deslocamentos.

Observa o referencial cartesiano da figura 2:

- O eixo horizontal designa-se por *eixo das abcissas*, ou eixo dos *xx*;
- O eixo vertical designa-se por *eixo das ordenadas*, ou eixo dos *yy*;
- Cada um dos pontos do plano pode ser representado por um par ordenado de números (x, y). O primeiro valor (x) refere-se ao eixo dos *xx* e o segundo (y) ao eixo dos *yy*.
- x e y são as *coordenadas do ponto*.

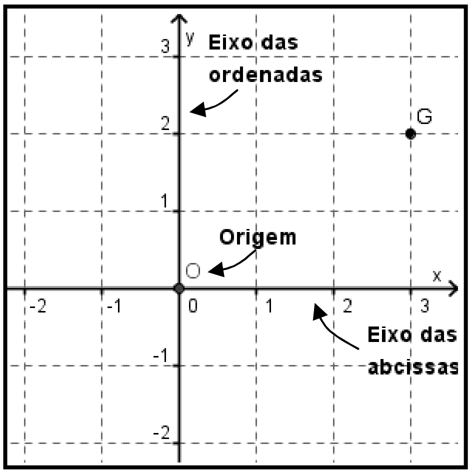


Figura 2

Exemplos:

O (0, 0) – abcissa 0 e ordenada 0 - origem do referencial;

G (3, 2) – abcissa 3 e ordenada 2 (a partir da origem do referencial, deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita e deslocamento vertical de 2 unidades para cima).

1.3. Escreve as coordenadas dos pontos B, C, D, E e F representados no referencial da figura 1.

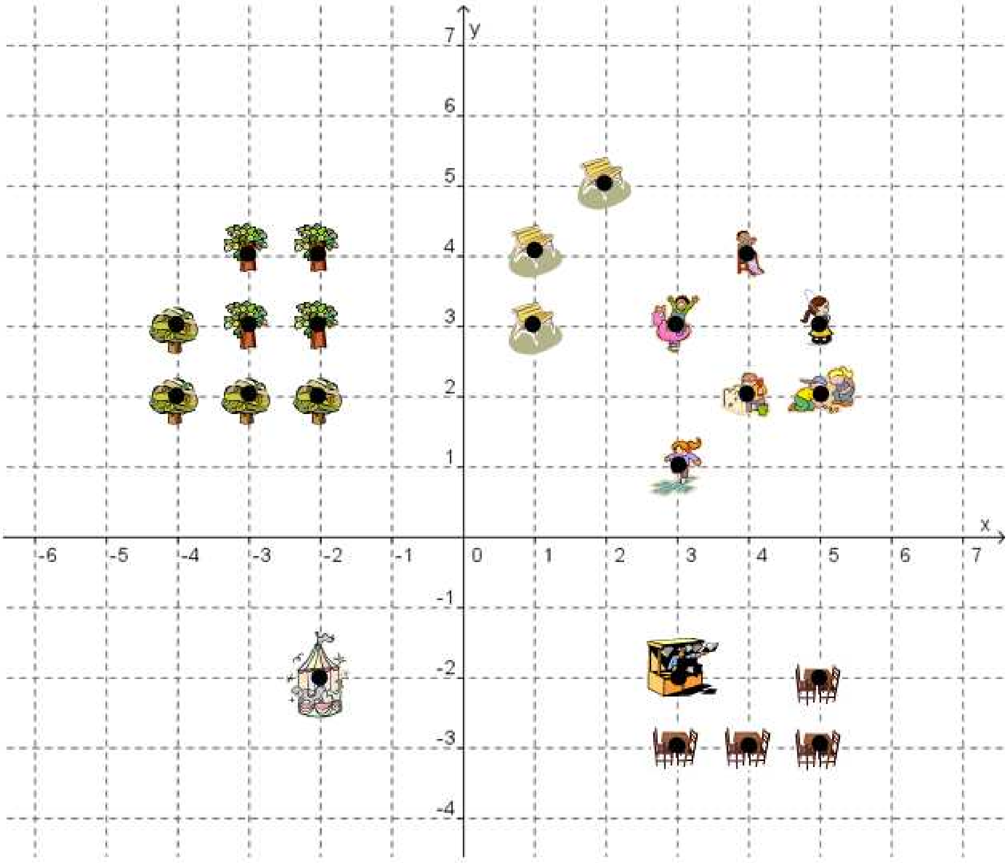
1.4. Observa as coordenadas dos pontos assinalados no referencial da figura 1 e indica:

a) Todos os pontos que têm a mesma ordenada;

b) Todos os pontos que têm a mesma abcissa;

c) Todos os pontos que têm a abcissa igual à ordenada.

2. Colocou-se um referencial num jardim onde está escondido um tesouro. Se te deslocares pelo jardim de acordo com as instruções do mapa do tesouro descobrirás o local onde ele se encontra. Só podes fazer deslocamentos horizontais ou verticais. Regista as coordenadas dos pontos onde te situas no final de cada etapa.



Instruções do mapa do tesouro:

Partida – Origem do referencial.

Etapa 1 – Desloca-te duas unidades para a esquerda.

Etapa 2 – Desloca-te até à árvore mais próxima.

Etapa 3 – Avança 5 unidades para a direita e desloca-te 1 unidade para baixo.

Etapa 4 – Vai até ao quiosque das revistas.

Etapa 5 – Vai até aos bancos na zona superior do jardim e pára no banco mais afastado da origem do referencial.

Final – Vai até ao ponto X (local do tesouro) cuja abcissa é igual à soma das abcissas dos pontos que escreveste na tabela e cuja ordenada é igual à média aritmética das ordenadas desses pontos.

Etapas	**Coordenadas**
Partida	(0, 0)
Etapa 1	
Etapa 2	
Etapa 3	
Etapa 4	
Etapa 5	
Final	X (x, y)

____

Indica a localização do tesouro.

3. Constrói um referencial cartesiano numa folha quadriculada.

   3.1. Assinala os pontos A (–4, –2), B (1, –2), C (1, 2), D (–4, 2), E (4, 3), F (6, 3), R $\left(\frac{5}{4}, 3.5\right)$, S $\left(\frac{17}{4}, 3.5\right)$, T (3, 5) e U (0, 5).

   3.2. Classifica os polígonos ABCD e RSTU.

   3.3. Indica as coordenadas de dois pontos distintos que, com E e F, formem dois triângulos rectângulos isósceles.

Tarefa 1 – Ponto por ponto

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo, ao longo do tópico "Números inteiros", os alunos devem ser capazes de:

- Visualizar posições, direcções e movimentos;
- Identificar a posição de figuras desenhadas numa grelha quadriculada recorrendo à identificação de pontos através das suas coordenadas e desenhar figuras dadas as suas coordenadas;
- Localizar e posicionar números inteiros positivos e negativos na recta numérica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.

No âmbito das capacidades transversais esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa poderá ser realizada num bloco de 90 minutos. Uma vez que estão em jogo conceitos novos para os alunos, a discussão com toda a turma deve ser feita à medida que os alunos forem resolvendo as questões e seja necessário analisar algum aspecto em particular, confrontar significados e consolidar as novas noções.

Nesta tarefa os alunos devem representar pontos num referencial cartesiano e identificar os pares ordenados que correspondem a pontos já representados, usando a simbologia adequada. Uma vez que o conceito de referencial cartesiano no plano é novo para os alunos são de esperar algumas dificuldades. Estas podem surgir, nomeadamente na compreensão dos significados dos termos utilizados: "abcissa", "ordenada", "eixo", "orientação", "graduação", "referencial cartesiano", "origem do referencial". Pelo menos numa fase inicial, é natural que os alunos mostrem preferência pelas designações “eixo dos *xx*” e “eixo dos *yy*”, mas é de usar também as designações “eixo das abcissas” e “eixo das ordenadas”. Os alunos podem sentir também dificuldade em fazer a descrição dos deslocamentos necessários para chegar a cada um dos pontos de forma detalhada, contemplando as duas direcções e os quatro sentidos possíveis. O professor deve estar atento a estas dificuldades e procurar discutir com toda a turma as questões que surjam. Além da comunicação escrita, salienta-se igualmente a importância do uso adequado do vocabulário específico na comunicação oral.

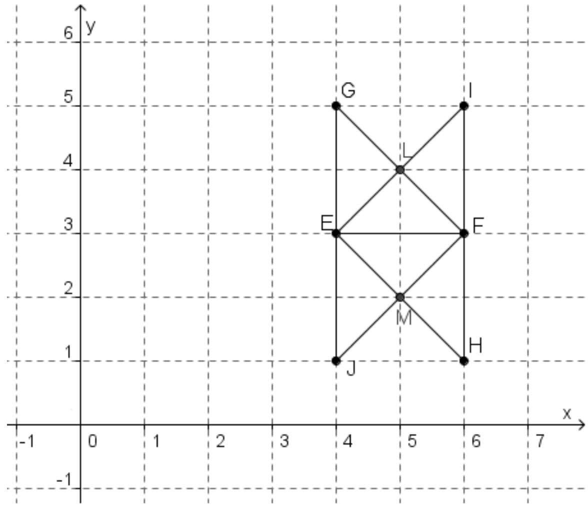
No final da aula o professor deve levar a turma a reflectir sobre as potencialidades da localização de pontos num referencial cartesiano e a importância de o fazer indicando a abcissa e a ordenada de acordo com o que é convencionado. Deve, ainda, ser feita uma síntese sobre os principais termos e conceitos aprendidos nesta aula: coordenada, abcissa, ordenada, eixo das abcissas e eixo das ordenadas.

2. Algumas explorações. Na questão inicial da tarefa, muitos alunos contactam possivelmente pela primeira vez com um referencial cartesiano no plano. O referencial apresentado é constituído por duas rectas orientadas perpendiculares, que se cruzam no ponto O e estão graduadas com a mesma unidade de medida. Trata-se, portanto, de um referencial ortogonal e monométrico.

Os alunos devem descrever o modo de se deslocarem desde a origem do referencial até cada um dos pontos indicados. As observações dos alunos podem sugerir a realização de deslocamentos horizontais e verticais e gerar a necessidade de considerar pares ordenados, onde se convencione a direcção do movimento indicado nas primeira e na segunda coordenada. Segue-se a formalização da notação utilizada e o registo de coordenadas de pontos num referencial do plano. A última pergunta desta questão tem como objectivo levar os alunos a consolidar as noções de ordenada e abcissa.

Na segunda questão é proposta aos alunos uma situação de jogo. Seguindo as indicações dadas e registando as coordenadas dos pontos que correspondem às etapas, obtém-se a informação necessária para descobrir a localização do tesouro. O ponto de partida é a origem do referencial. As cinco etapas correspondem aos pontos de coordenadas (-2, 0), (-2, 2), (3, 1), (3, -2), (2, 5). O tesouro vai encontrar-se no ponto de coordenadas $\left(4, \frac{6}{5}\right)$. Pode ser necessário recordar o conceito de média aritmética para possibilitar a respectiva determinação (conexão com o tópico *Tratamento de dados*).

Na pergunta 3.1, os alunos devem construir os seus referenciais cartesianos do plano, em folhas quadriculadas, e assinalar os pontos dados, tendo em conta as respectivas coordenadas. Alguns pontos têm como coordenadas números fraccionários, representados como fracção ou na forma decimal. Na pergunta 3.2, os polígonos obtidos são ambos quadriláteros (conexão com o tópico *Triângulos e Quadriláteros*). Mais especificamente, ABCD e RSTU são paralelogramos, sendo o primeiro rectângulo e o segundo obliquângulo. A pergunta 3.3 poderá suscitar maior discussão, na medida em que podem ser aceites como resposta os pontos de coordenadas: J (4, 1), G (4, 5), H (6, 1), I (6, 5), L (5, 4) e M (5, 2). Como se pode observar na figura que se segue, EFJ, EFG, EFH, EFI, EFL e EFM são triângulos rectângulos isósceles: J, G, I e H são pontos que pertencem a rectas verticais, perpendiculares a EF, e L e M são os pontos de intersecção das diagonais de dois quadrados de lado EF, que também são perpendiculares. Observa-se facilmente que todos os triângulos têm dois lados congruentes.



Explorações de alunos

Os exemplos que se seguem ilustram o trabalho que pode ser desenvolvido pelos alunos nesta fase inicial do estudo das coordenadas de pontos no plano e algumas dificuldades que eles podem manifestar.

1. Introdução às coordenadas de pontos do plano. A resposta que se segue ilustra o que os alunos, com base numa análise intuitiva, podem descrever para localizar um ponto:

Para o ponto A anda-se uma casa na horizontal para a direita.
Para o ponto B anda-se uma casa na horizontal para a esguerda.
Para o ponto C anda-se uma casa na vertical para cima.
Para o ponto D anda-se uma casa na vertical para baixo
Para o ponto E anda-se duas casas: uma para a vertical para cima e uma na horizontal para a direita.
Para o ponto F anda-se uma casa na vertical para baix e duas na horizontal para a direita.

Mesmo não tendo ainda trabalhado com coordenadas de pontos num referencial do plano, é de esperar que os alunos consigam elaborar uma descrição deste tipo, que lhes pode proporcionar uma melhor compreensão dos exemplos apresentados em seguida, antecedendo a utilização da notação habitual.

Na pergunta 1.2, o uso da notação habitual para o registo das coordenadas requer que os alunos tenham em conta a ordem das coordenadas e não troquem o valor da abcissa com o valor da ordenada em cada par. Na questão 2 os alunos continuam a escrever coordenadas de pontos que lhes são sugeridos pelas pistas do tesouro. Alguns alunos podem não manifestar ainda o domínio pretendido da notação habitual para a representação das coordenadas, aspecto que deve ser trabalhado, por exemplo, com recurso a uma tabela do tipo:

Etapas	Coordenadas
Partida	0,0
Etapa 1	-2,0
Etapa 2	-2,2
Etapa 3	3,1
Etapa 4	3,-2
Etapa 5	2,5
Final	0,0

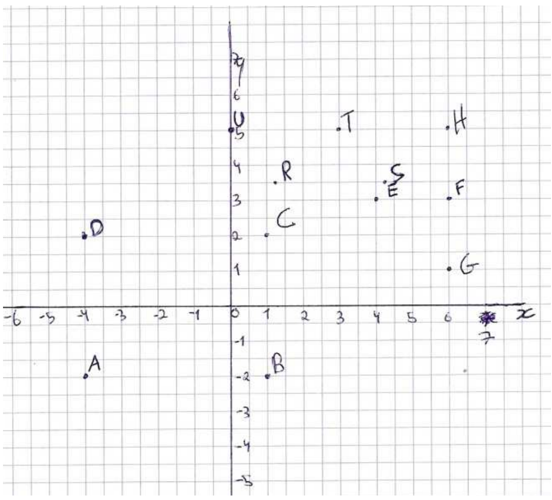
Esta questão permite efectuar conexões com os tópicos *Tratamento de Dados*, *Números inteiros* e *Números racionais não negativos*, na medida em os alunos necessitam de calcular uma média, operar com números inteiros relativos, podendo apresentar o resultado na sua representação fraccionária ou decimal:

$$x = -2 + (-2) + 3 + 3 + 2 = 4$$
$$y = \frac{0+2+1+(-2)+5}{5} = \frac{6}{5}$$

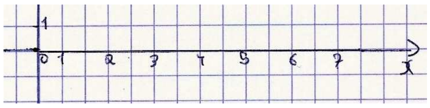
R: O tesouro está no ponto X $(4, \frac{6}{5})$.

2. *Representação de pontos num referencial cartesiano do plano e análise de propriedades de figuras.* A questão 3 desta tarefa requer que os alunos construam, pela primeira vez, um referencial cartesiano. É possível que manifestem alguma hesitação relativamente ao local onde se devem cruzar os dois eixos, à escala a utilizar ou ao comprimento que deve ter cada um deles. Poderá ser necessário, em alguns casos, que o professor assinale alguns aspectos menos conseguidos que podem surgir:

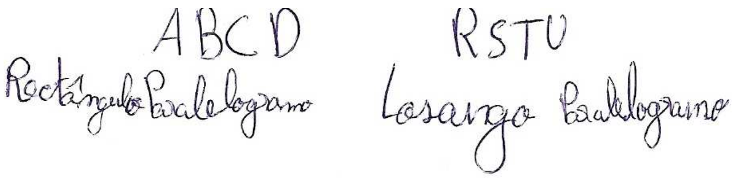
a) a falta de indicação da orientação em cada eixo:



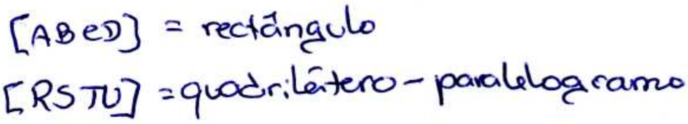
b) a construção de uma escala incorrecta em pelo menos um dos eixos:



Além disso, alguns alunos podem sentir dificuldade na representação dos pontos R e S dado que algumas das suas coordenadas são números fraccionários. São estratégias possíveis, por exemplo, a identificação de $\frac{5}{4}$ com $1+\frac{1}{4}$ e de $\frac{17}{4}$ com $4+\frac{1}{4}$ ou a obtenção das representações decimais correspondentes a estes números fraccionários (1,25 e 4,25). Esta pergunta permite também rever a classificação dos quadriláteros. No exemplo que se segue a classificação do quadrilátero ABCD como rectângulo está correcta, pelo que este polígono é também um paralelogramo. No caso do quadrilátero RSTU, este é um paralelogramo mas não é um losango (ao contrário do que o aluno escreveu) uma vez que não tem todos os lados congruentes:

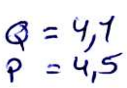


No exemplo seguinte o quadrilátero ABCD é apenas classificado como rectângulo, enquanto o polígono RSTU é classificado como quadrilátero e, mais especificamente, como paralelogramo:

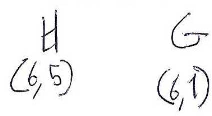


Na pergunta 3.3, tal como já referimos nas “Orientações para o professor”, os alunos podem sugerir pontos diferentes que dão origem aos triângulos solicitados. Apresentam-se, em seguida, quatro pontos distintos que satisfazem o enunciado. A existência de exemplos distintos, por parte dos alunos, pode enriquecer a discussão geral da tarefa:

a)



b)



Tarefa 2 – Tarifários

1. No anúncio publicitário do tarifário "Mais segundos" da empresa de comunicações TELEM pode ler-se:

TELEM, COMUNICAÇÕES

Mais segundos

Tarifário nacional único

Para todas as redes 0,32 cêntimos por segundo

Preço de todas as chamadas até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos. A taxação é realizada ao segundo, após os 5 segundos iniciais.

1.1. De acordo com a informação dada, indica quanto paga o consumidor por uma chamada cuja duração total é de:

a) 2 segundos;
b) 5 segundos;
c) 10 segundos;
d) 15 segundos;
e) 1 minuto.

1.2. Completa a tabela seguinte:

Duração da chamada (em segundos)	Preço da chamada (em cêntimos)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

1.3. Num referencial cartesiano representa graficamente este tarifário até aos 15 segundos.

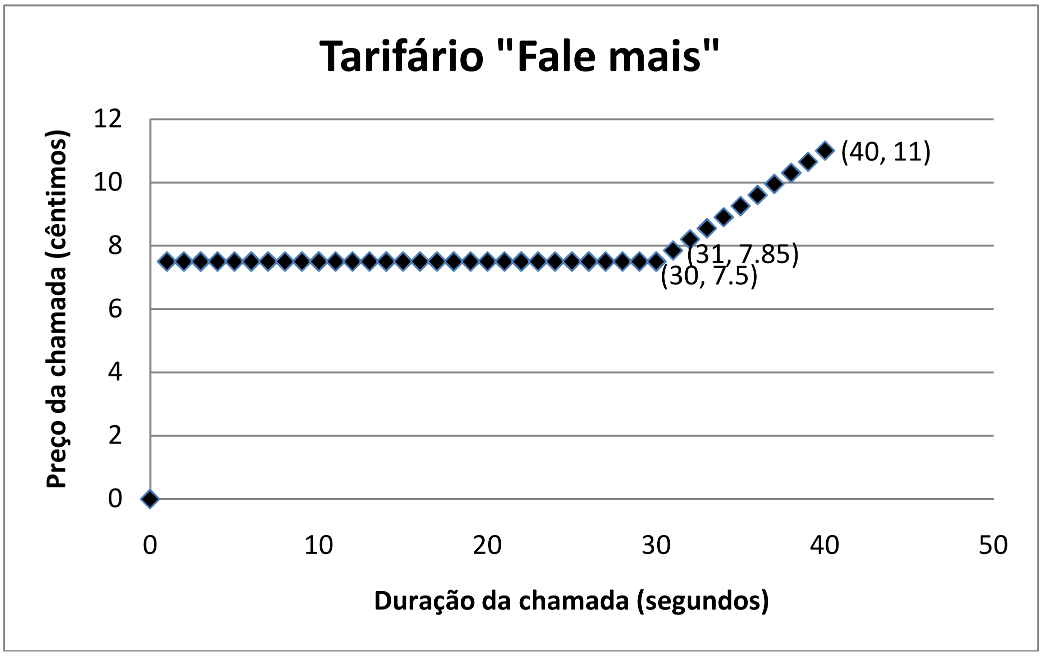
1.4. Indica porque motivo, nos primeiros 5 segundos, os pontos do gráfico estão contidos numa recta horizontal.

1.5. O que sucede aos pontos do gráfico a partir dos 5 segundos?

1.6. Quanto paga um consumidor que realize uma chamada com duração de 3 minutos e 47 segundos?

1.7. E quanto paga por uma chamada com duração de 3 minutos e 48 segundos?

2. Na figura está representada a relação entre o tempo de duração da chamada e o valor a pagar, num outro tarifário, "Fale mais", também da TELEM.



2.1. A partir do gráfico responde às seguintes questões:

a) Quanto paga um consumidor por uma chamada de 31 segundos?

b) Existe alguma diferença no valor a pagar se se falar 10 ou 20 segundos?

c) E existe alguma diferença se se falar 30 ou 40 segundos?

2.2. Completa a tabela que representa este tarifário:

x	0		30	31	37		60
y		7,5				12,75	

2.3. Indica o que acontece em chamadas com menos de 30 segundos, com 30 segundos e com mais de 30 segundos.

Tarefa 2 – Tarifários

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos, os alunos devem compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem reforçar a sua capacidade de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.

Além disso, devem ser capazes de interpretar a variação numa situação representada por um gráfico.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa pode ser realizada num bloco de 90 minutos, destinando-se cerca de 60 minutos para a sua realização em pares ou pequenos grupos e 30 minutos para a apresentação de resultados e justificações e a discussão de estratégias alternativas.

A primeira questão envolve a leitura de um anúncio que contém informações relevantes para a resolução das perguntas que se seguem. Os alunos devem ser capazes de distinguir os dois momentos que se apresentam – o período em que o valor a pagar é constante e o período em que a chamada é taxada ao segundo – e identificar os dados relativos a cada uma delas. Nesta questão e na seguinte os alunos são solicitados a interpretar a variação de uma função dada graficamente, tendo por base a sua noção intuitiva, uma vez que o conceito de função só irá ser explicitamente introduzido na tarefa 4.

Na segunda questão, a informação é dada por um gráfico a partir do qual é possível completar a tabela apresentada. Recorrendo a estas duas representações (gráfico e tabela) os alunos obtêm os elementos necessários para responder às várias perguntas sobre este tarifário.

Esta tarefa permite identificar situações em existem dois tipos de variação – crescente e nula. Além disso, permite trabalhar dois aspectos essenciais da comunicação matemática: a interpretação e a representação de conceitos matemáticos, envolvendo as representações em linguagem natural, num gráfico cartesiano e numa tabela. Na questão 1, os alunos devem perceber que é vantajoso elaborar um gráfico para representar uma situação quando o ponto de partida é um enunciado em linguagem natural e que uma tabela é um apoio eficaz para a elaboração desse gráfico.

Do mesmo modo, na questão 2, os alunos podem verificar que, por vezes, é vantajoso elaborar uma tabela, quando o ponto de partida é um gráfico. A interpretação do gráfico e a resposta às perguntas que são colocadas constitui também uma oportunidade para os alunos desenvolverem a sua capacidade de comunicação escrita.

No final da aula, o professor deve salientar que a descrição verbal, a tabela e o gráfico são três formas diferentes de apresentar informação sobre situações onde existe variação. Deve também analisar com os alunos a relação entre diversos tipos de variação (variação crescente e variação nula) e as características do respectivo gráfico.

2. Algumas explorações. A questão 1 desta tarefa apresenta aos alunos um anúncio publicitário que contém as condições essenciais do tarifário “Mais segundos”. Todas as chamadas efectuadas neste tarifário cuja duração seja inferior a 5 segundos (inclusive) custam 1,6 cêntimos. Assim, qualquer que seja a duração destas chamadas no intervalo]0, 5], o valor a pagar é sempre igual a 1,6 cêntimos. A partir dos 5 segundos iniciais, a taxação passa a ser realizada ao segundo, sendo o preço de cada segundo de 0,32 cêntimos. Assim, uma chamada com duração de 6 segundos custa 1,92 cêntimos. O preço da chamada pode ser determinado efectuando a soma de 1,6 com 0,32, sendo 1,6 o preço constante da chamada até 5 segundos e 0,32 o preço de cada segundo adicional. Como $1,6 = 5 \times 0,32$, os alunos podem também fazer $6 \times 0,32$, para determinar o valor a pagar por uma chamada com 6 segundos de duração. De modo análogo, conclui-se que uma chamada de 7 segundos custa 2,24 cêntimos, e assim sucessivamente.

Na pergunta inicial os alunos devem considerar separadamente estes dois casos, observando que as chamadas com 2 e 5 segundos custam 1,6 cêntimos cada uma, enquanto as restantes podem ser calculadas multiplicando o número de segundos por 0,32 cêntimos. Devem observar que a indicação “A taxação é realizada ao segundo, após os 5 segundos iniciais” significa que para chamadas com duração até 5 segundos, o valor a pagar é constante, 1,6 cêntimos, e que para chamadas com duração superior, cada segundo a mais faz acrescer 0,32 cêntimos a esses 1,6 cêntimos. Continuando o trabalho já iniciado na pergunta 1.1, espera-se que os alunos preencham a tabela sem grande dificuldade. A representação em tabela é um elemento importante na organização dos dados e um suporte fundamental para a construção da representação gráfica. Nas perguntas 1.4 e 1.5 pede-se aos alunos que, com base nas características que o gráfico apresenta, analisem a respectiva variação. No período até aos 5 segundos, existe uma variação nula entre segundos consecutivos, pelo que a função é constante nesse intervalo. A partir daí, a variação é sempre igual a 0,32 cêntimos por segundo, sendo a função estritamente crescente. O professor pode promover uma utilização progressiva do vocabulário adequado, no que respeita à análise da variação e do modo como esta se expressa no gráfico.

Por fim, para calcular o preço de uma chamada com 3 minutos e 47 cêntimos, os alunos podem, por exemplo, verificar quantos segundos correspondem a essa duração e multiplicar esse valor por 0,32. Na pergunta seguinte, para determinar o preço de uma chamada com 3 minutos e 48 segundos podem fazer um raciocínio semelhante ou adicionar 0,32 cêntimos ao valor da chamada correspondente a 3 minutos e 47 segundos.

A segunda questão apresenta um outro tarifário, "Fale Mais", a partir de uma representação gráfica que os alunos devem interpretar. Com base nas coordenadas dos pontos do gráfico os alunos devem observar que:

- Uma chamada com 31 segundos custa 7,85 cêntimos;
- Existe um período em que a função é constante, representado no seu gráfico por um segmento horizontal, o que significa que as chamadas com duração até 30 segundos (inclusive) têm todas o mesmo preço, igual a 7,5 cêntimos (ordenada do primeiro ponto indicado). Assim, não existe diferença no preço a pagar por uma chamada com 10 ou com 20 segundos;
- Após esse período, existe uma variação constante, com o acréscimo, por cada segundo, de 0,35 cêntimos $(7{,}85 - 7{,}5)$. Daí que falar 30 segundos ou 40 segundos dê origem a preços distintos para as chamadas: 7,5 cêntimos e 11 cêntimos, respectivamente.

Neste tarifário não é possível determinar o preço da chamada efectuando a multiplicação entre o preço de cada segundo e o número de segundos de duração da chamada, como no tarifário "Mais segundos". Contudo, a partir dos 30 segundos, a variação é constante, de 0,35 cêntimos por segundo, no sentido crescente. Numa chamada com duração superior a 30 segundos é necessário calcular o número de segundos em que a chamada é taxada ao segundo, ou seja, em quantos segundos a chamada excede os 30 segundos iniciais, e multiplicar esse valor por 0,35. A este resultado adiciona-se o valor pago pelos 30 segundos iniciais, 7,5 cêntimos, e obtém-se o preço total da chamada.

Explorações de alunos

Nesta tarefa os alunos interpretam a informação dada no anúncio publicitário do tarifário "Mais segundos", utilizam-na para responder às perguntas colocadas e representam essa informação num gráfico cartesiano. Relativamente ao tarifário "Fale mais" a informação é dada por meio de um gráfico, cuja interpretação permite completar uma tabela e elaborar um texto que descreva as características do tarifário.

1. Interpretar a informação do tarifário "Mais segundos". Tendo em conta que o preço da chamada até aos 5 segundos é de 1,6 cêntimos, que corresponde a $5 \times 0{,}32$ cêntimos, os alunos podem utilizar estratégias como as seguintes:

\- 1,6 cêntimos
\- 10 × 0,32 = 3,2 cêntimos
15 × 0,32 = 4,8 cêntimos
60 × 0,32 = 19,2 cêntimos

1,6 cêntimos
1,6 cêntimos
1,6 × 2 = 3,2 cêntimos
1,6 × 3 = 4,8 cêntimos
1,6 × 12 = 19,2 cêntimos

Na pergunta 1.6 podem surgir estratégias diferentes de acordo com a interpretação que os alunos fizeram da informação dada. No primeiro exemplo a seguir indicado, o aluno determina o número de segundos que correspondem a 3 minutos e 47 segundos, identifica a constante de proporcionalidade e determina o valor a pagar pela chamada:

3x60 = 180 segundos
180+47 = 227 segundos
227x0,32 = 72,64 cêntimos.
R: Ele vai pagar 72,64 cêntimos.

Um outro aluno recorre a dados que obteve nas perguntas anteriores. Com base no preço de uma chamada com 1 minuto determina o preço de uma chamada de 3 minutos e com base no preço de uma chamada de 15 segundos determina o preço de uma chamada com 45 segundos. Contudo, na parte final do seu raciocínio comete um erro quando procura saber qual o preço dos 2 segundos que faltam determinar, uma vez que usa o valor 1,6. Este valor corresponde ao preço de uma chamada com apenas 2 segundos, que não se aplica neste caso. O professor deve estar particularmente atento a estas situações que se prendem com a interpretação do que sucede primeiros 5 segundos.

19,2 x3 = 57,6 cêntimos

3 x 4,8 = 14,4 cêntimos -> 45 seg.

14,4 + 1,6 = 16 cêntimos

2 seg = 1,6 cêntimos

57,6 + 16 = 73,6 -> R: Paga 73,6 cêntimos por 3 min. e 47 seg.

2. Analisar a variação no tarifário "Mais segundos". A análise do tarifário pode ser feita com base em dois tipos distintos de raciocínio: multiplicativo e aditivo:

Se ele fala 5 ou menos de 5 segundos paga 1,6 cêntimos. Quando se fala 6 ou mais segundos faz-se o número de segundos a multiplicar por 0,32 cêntimos.

Até aos 5 segundos iniciais o valor não varia porque tanto 2 segundos como 5 segundos, o preço é o mesmo.
A partir dos 5 segundos, cada segundo conta com mais 0,32 cêntimos.

Quando nas perguntas 1.4 e 1.5, os alunos procura descrever a variação que ocorre no gráfico, na parte em que o preço é constante e na parte em que é estritamente crescente, podem fazer afirmações como as que se seguem. Note-se que o professor deve incentivá-los a usar vocabulário adequado.

Porque os primeiros 5 segundos são ao mesmo preço.
Depois dos primeiros 5 segundos tem uma constante de proporcionalidade que é 0,32 cêntimos.

3. Interpretar o tarifário "Fale mais". Neste tarifário não constitui uma situação de proporcionalidade directa. Nas chamadas com duração até 30 segundos a variação é nula, sendo o preço das chamadas constante (igual a 7,5 cêntimos). A partir daí, a variação é constante e igual a 0,35 cêntimos. Para determinar o preço de uma chamada com mais de 30 segundos, os alunos podem verificar quantos segundos foram usados além dos 30, calcular o preço correspondente a esses segundos e adicionar ao preço relativo aos primeiros 30 segundos. É o que sucede no exemplo que se segue em que o aluno determina o valor que se paga a mais entre o valor pedido e o valor que obteve para uma chamada com 37 segundos:

0,35 × 7 +
7,5 =
= 9,95

Uma vez que a variação é constante, dividir essa diferença por 0,35 permite determinar o número de segundos adicionais de duração da chamada, número que acresce aos 37.

12,75 − 9,95 =
2,80
2,8 : 0,35 = 8

Utilizando uma estratégia semelhante para determinar o preço de uma chamada com 60 segundos, o aluno pode determinar o número de segundos a mais de duração da chamada relativamente ao valor anterior na tabela, multiplicá-lo por 0,35 e adicionar esse valor ao preço respectivo:

+15

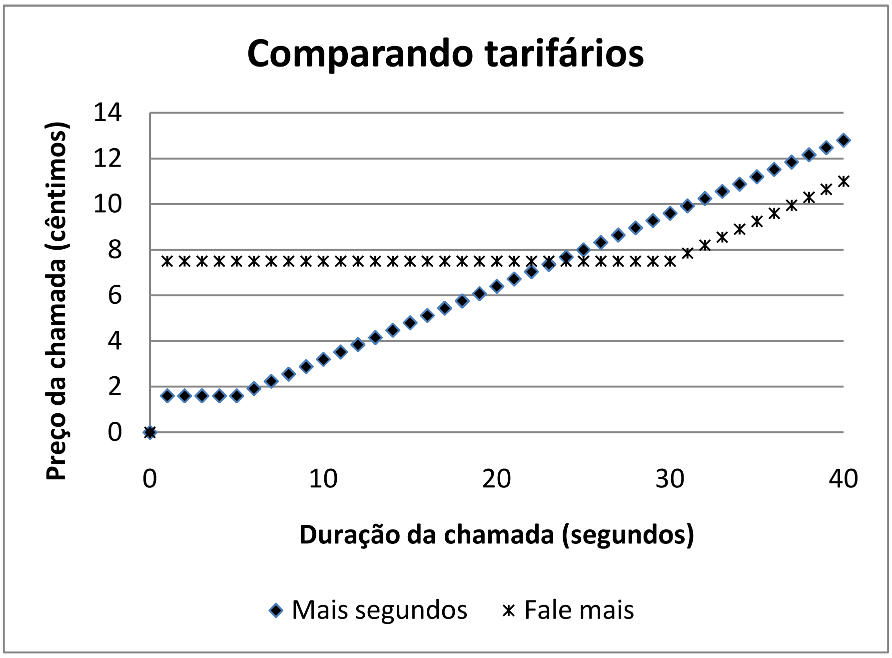
x	0	16	30	31	37	45	60
y	0	7,5	7,5	7,85	9,95	12,75	18

No exemplo que se segue, o aluno descreve em linguagem corrente a informação representada na tabela e no gráfico, salientando as características essenciais do tarifário “Fale mais”:

Até aos 30 segundos o preço é sempre o mesmo (7,5 cênt.), a partir dos 30 seg. para cima cada segundo conta com mais 0,35 cêntimos. Por exemplo 31 seg. custam 7,85 cênt. e 45 seg., 12,75 cêntimos e 60 seg. 18 cêntimos.

Tarefa 3 – Comparando tarifários

1. Na figura está representada a relação entre o tempo de duração da chamada e o valor a pagar por essa chamada, nos dois tarifários da TELEM que estudaste na tarefa 2: "Mais segundos" e "Fale mais".



Tarifário "Mais segundos"

- Até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos.
- Por cada segundo adicional: 0,32 cêntimos

Tarifário "Fale Mais"

- Até 30 segundos (inclusive): 7,5 cêntimos.
- Por cada segundo adicional: 0,35 cêntimos.

1.1. Com base no gráfico, compara os dois tarifários e indica as diferenças que encontras. Assinala as vantagens que cada um deles pode ter para diferentes consumidores.

1.2. Completa, relativamente a cada tarifário, tabela com o preço das chamadas com o tempo de duração indicado:

Duração da chamada (em segundos)	Preço da chamada no tarifário "Mais segundos" (em cêntimos)	Preço da chamada no tarifário "Fale mais" (em cêntimos)
1		
5		
10		
23		
24		
25		
30		
60		
72		
90		
101		
110		

1.3. Qual a diferença no preço de uma chamada com duração de 30 segundos, nestes dois tarifários?

1.4. O Pedro pensa que no tarifário “Fale mais” o consumidor paga chamadas mais baratas que no tarifário “Mais segundos”, se a sua chamada tiver uma duração superior ou igual a 24 segundos. Será verdade? Justifica a tua resposta.

1.5. Se o consumidor tiver um saldo de 50 cêntimos no telemóvel com qual dos tarifários pode falar durante mais tempo? Indica o tempo máximo (em minutos e segundos) em que fala em cada um.

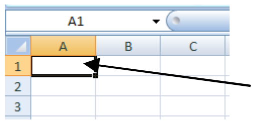
Utilização da folha de cálculo no estudo do tarifário "Taxa Constante"

O tarifário "Taxa constante" é taxado ao segundo desde o início da chamada e o preço de cada segundo é igual a 0,4 cêntimos. Para calcular o preço de uma chamada neste tarifário é necessário saber a sua duração total, em segundos.

Usando a folha de cálculo podes verificar o que acontece quando varia o tempo de duração da chamada e, para cada caso, determinar o respectivo preço.

Elementos básicos numa folha de cálculo

Célula – Rectângulo que se encontra no cruzamento entre uma coluna e uma linha. Para nos referirmos a uma célula, indicamos a letra relativa à coluna, seguida do número relativo à linha. Em cada célula podes introduzir texto, valores numéricos, fórmulas, etc.;

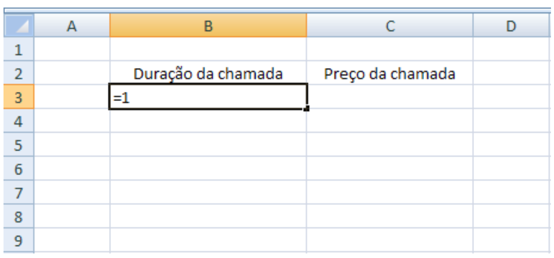


Célula A1

Fórmula – Define o modo como deve ser calculado o valor numa célula. Para introduzir uma fórmula, deves iniciar a tua escrita com o sinal "=".

Para resolver a situação proposta acima segue passo a passo as instruções seguintes:

I – *Introduz texto numa célula.* Coloca o cursor na célula B2 e escreve "Duração da chamada". Coloca o cursor na célula C2 e escreve "Preço da chamada". Na coluna B vão ser colocados valores relativos ao tempo de duração da chamada, em segundos, e na coluna C o respectivo preço, em cêntimos. À célula B3 atribui o valor 1 (podes escrever apenas "1" ou "=1").



II – *Usa uma fórmula para criar uma sequência de números.* Na célula B4 escreve a fórmula "=B3+1". A folha de cálculo vai apresentar, nessa célula, a soma do valor da célula B3 com 1.

	A	B	C	D
1				
2		Duração da chamada	Preço da chamada	
3		1		
4		=B3+1		
5				
6				
7				
8				
9				

	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	
4		2	
5			
6			
7			
8			
9			

III – *Usa a funcionalidade "Arrastar" para copiar uma fórmula para outras células.* Selecciona a célula B4 onde se encontra a fórmula "=B3+1", que indica que vai ser calculada a soma do valor da célula imediatamente acima de B4 com 1. Coloca o cursor no canto inferior direito dessa célula até ter a forma de uma cruz preta. Em seguida, carrega no botão do lado esquerdo do rato e arrasta-o, na vertical, até à célula B10. Na célula B5 surge a soma do valor de B4 com 1, na célula B6 surge a soma do valor de B5 com 1 e assim sucessivamente.

	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	
4		2	
5		3	
6		4	
7		5	
8		6	
9		7	
10		8	

IV – *Determina o preço da chamada.* Na célula C3 introduz o preço de uma chamada de um segundo. Na célula C4 introduz uma fórmula que permita o cálculo do preço da chamada com duração de 2 segundos. Isto pode ser obtido de duas formas:

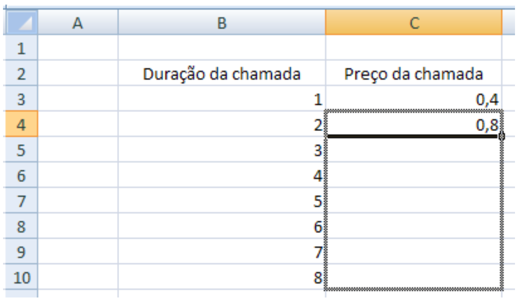
a) Indicando a soma de 0,4 cêntimos e o valor anterior do preço da chamada.

b) Indicando a multiplicação de 0,4 cêntimos pela duração da chamada.

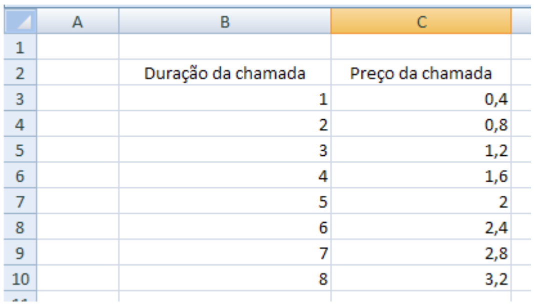
	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	0,4
4		2	=0,4+C3
5		3	1,2
6		4	1,6
7		5	2
8		6	2,4
9		7	2,8
10		8	3,2

	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	0,4
4		2	=0,4+B4
5		3	1,2
6		4	1,6
7		5	2
8		6	2,4
9		7	2,8
10		8	3,2

V – *Usa a funcionalidade "Arrastar" para determinar o preço de chamadas com outros tempos de duração.* Depois de escreveres uma destas fórmulas para determinar o preço da chamada efectua o mesmo procedimento do ponto III. Assim, os valores das células C4 até C10 são calculados do mesmo modo, estabelecendo-se uma correspondência com os valores dos tempos indicados nas células B4 até B10.

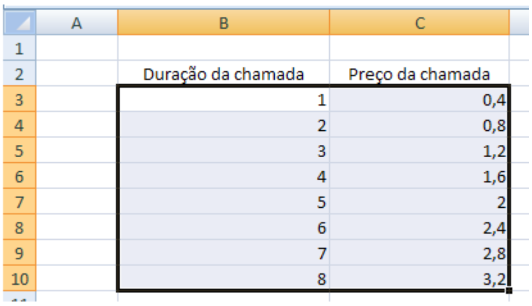


	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	0,4
4		2	0,8
5		3	
6		4	
7		5	
8		6	
9		7	
10		8	



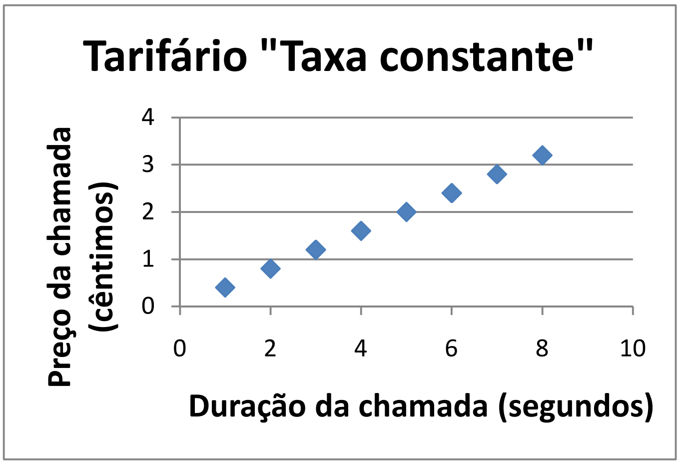
	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	0,4
4		2	0,8
5		3	1,2
6		4	1,6
7		5	2
8		6	2,4
9		7	2,8
10		8	3,2

VII – *Representa os dados graficamente com a ajuda da folha de cálculo.* Traça o gráfico que representa a relação entre o tempo de duração da chamada, em segundos, e o respectivo preço, em cêntimos. Para isso, selecciona as células B2 até B10 e C2 até C10, como mostra a figura:



	A	B	C
1			
2		Duração da chamada	Preço da chamada
3		1	0,4
4		2	0,8
5		3	1,2
6		4	1,6
7		5	2
8		6	2,4
9		7	2,8
10		8	3,2

Em seguida, insere o gráfico na folha de cálculo. Cada ponto no gráfico associa o tempo de duração da chamada, no eixo das abcissas, ao respectivo preço, no eixo das ordenadas.



VIII – *Determina os valores*. Usa a funcionalidade "Arrastar" para determinar os seguintes valores:

- o preço de uma chamada com uma duração de 45 segundos;
- a duração máxima de uma chamada cujo preço não exceda os 55 cêntimos (na tua resposta diz quantos minutos e quantos segundos).

Tarefa 3 – Comparando tarifários

Conhecimentos prévios dos alunos

- Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos, os alunos devem compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem

- Reforçar a sua capacidade de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
- Além disso, devem ser capazes de comparar a variação em duas situações representadas graficamente.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. A tarefa 3 baseia-se na comparação dos tarifários já analisados na tarefa 2, que são recordados aos alunos na nota ao lado do gráfico. A realização da tarefa está prevista para um bloco de 90 minutos, podendo a sua resolução decorrer durante 60 minutos e a discussão com toda a turma nos 30 minutos restantes. Tal como noutras situações, um primeiro momento de discussão parcial pode ser antecipado, se a reacção dos alunos assim o aconselhar.

A tarefa 3 pode ser resolvida usando apenas papel e lápis, mas o professor pode optar por recomendar aos alunos o recurso à folha de cálculo. Caso os alunos nunca tenham trabalhado com este programa, o professor pode utilizar o material "Uso da folha de cálculo no estudo do tarifário Taxa constante" que ajuda os alunos a compreender alguns aspectos básicos no seu funcionamento. Nesta tarefa são indicados alguns passos a seguir e as principais funcionalidades que os alunos devem conhecer para usarem a folha de cálculo nesta tarefa. O professor deve ainda complementar este material com instruções mais específicas sobre a folha de cálculo que os alunos vão utilizar. Note-se que, na mesma turma, os alunos podem apresentar ritmos de trabalho bastante distintos, dada a sua experiência anterior na utilização da folha de cálculo.

Caso não seja possível recorrer à folha de cálculo, os alunos podem usar a calculadora para auxiliar o seu trabalho em cálculos mais complexos, nomeadamente no preenchimento de algumas entradas da tabela.

Nesta tarefa, os alunos interpretam as representações gráficas num mesmo referencial de duas situações com o objectivo de estabelecer relações entre elas. Depois, representam a informação dada graficamente através de tabelas. O estabelecimento de conexões entre estes dois tipos de representação – em gráficos e em tabelas – permite chegar a novas conclusões sobre as vantagens e desvantagens de cada um dos tarifários.

No final da aula poderá ser adequado que os alunos reflictam em conjunto com o professor, sobre a comparação dos dois tarifários que foi feita com base no gráfico e as potencialidades que esta representação, aliada à representação em tabelas, pode trazer para a compreensão da situação em estudo.

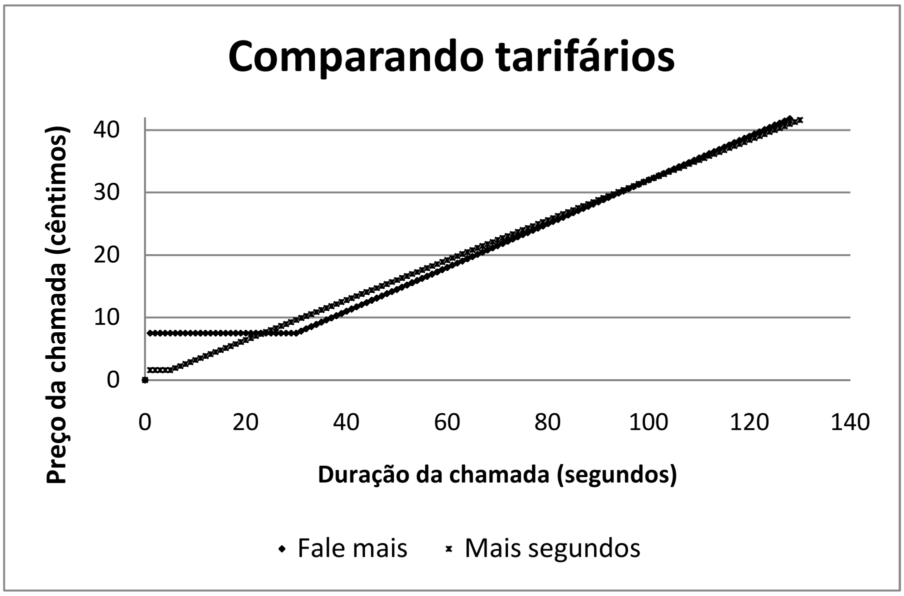
2. Algumas explorações. A tarefa 3 explora a comparação dos dois tarifários da tarefa 2: "Mais segundos" e "Fale mais". Na pergunta 1.1 os alunos assinalam aspectos que observam no gráfico apresentado na tarefa como, por exemplo:

- A ordenada na origem é nula em ambos os tarifários;
- As diferentes durações do período em que o preço inicial é constante: 5 e 30 segundos, respectivamente;
- O facto de uma chamada no tarifário "Mais segundos" ser mais barata até aos 23 segundos (inclusive), custando uma chamada com essa duração neste tarifário 7,36 cêntimos e no tarifário "Fale mais" 7,5 cêntimos. Se a chamada tiver uma duração de 24 segundos é mais barata 0,18 cêntimos no tarifário "Fale mais" que no tarifário "Mais segundos". Prolongando os gráficos ou analisando a tabela verifica-se que vai existir uma nova alteração e uma chamada no tarifário "Mais segundos" volta a ser mais barata a partir de certa altura.

Na pergunta 1.2, os alunos recorrem à representação em tabela para analisar a relação entre as variáveis e também para comparar duas relações. A conexão que estabelecem entre a representação gráfica e a tabela permite-lhes obter diferentes perspectivas da situação e das suas possíveis soluções. Esta exploração contribui para responder às perguntas seguintes, nomeadamente proporcionando pistas quanto à falsidade da afirmação da pergunta 1.4. Analisando as duas representações, os alunos podem verificar que a diferença entre os preços de uma chamada com a mesma duração em ambos os tarifários vai diminuindo à medida que essa duração se aproxima dos 100 segundos, situação em que os preços são iguais.

A observação dos dados da tabela permite determinar o preço das chamadas em cada segundo durante um período prolongado e comparar detalhadamente os dois tarifários. A construção do gráfico com esses valores permite visualizar o que acontece com chamadas de duração superior às apresentadas nos gráficos dados, o que permite constatar que, dada a sua inclinação, as duas rectas se cruzam novamente. O professor deve procurar que os alunos observem atentamente os valores da tabela, identificando qual é o tarifário mais vantajoso para diferentes durações das chamadas.

Na discussão geral, o professor deve procurar que os alunos partilhem as suas respostas a esta questão e não se limitem a comentários de natureza muito geral, promovendo descrições mais completas e detalhadas e a exploração dos conceitos matemáticos que estão na base de cada tarifário.



Com a análise da tabela ou com o cálculo dos preços para chamadas com outras durações é possível verificar que dos 24 segundos (inclusive) aos 99 segundos (inclusive) o tarifário "Fale mais" é mais barato que o tarifário "Mais segundos". O preço de uma chamada com uma duração igual ou inferior a 23 segundos é mais baixo no tarifário "Mais segundos" e o mesmo volta a suceder quando a duração da chamada é superior ou igual a 101 segundos. Se a duração da chamada for igual a 100 segundos, o seu preço é igual nos dois tarifários, como mostra a tabela:

	Tarifários	
Duração	Mais segundos	Fale mais
95	30,4	30,25
96	30,72	30,6
97	31,04	30,95
98	31,36	31,3
99	31,68	31,65
100	32	32
101	32,32	32,35
102	32,64	32,7
103	32,96	33,05
104	33,28	33,4
105	33,6	33,75

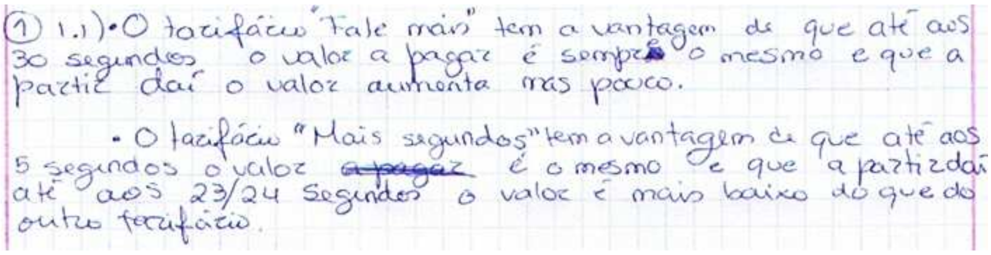
Deste modo, o tarifário "Fale mais" pode ser compensador para consumidor que realizem chamadas com uma duração no intervalo $[24, 99]$. Para quem realizar chamadas mais longas, com duração superior a 100 segundos, o mais compensador será o tarifário "Mais segundos".

A situação relativa ao "Tarifário constante" pode ser estudada usando a folha de cálculo ou mais simplesmente papel, lápis e calculadora. O principal objectivo desta tarefa é levar os alunos a relacionar duas variáveis: a duração de uma chamada e o seu preço. Os alunos podem identificar essa relação analisando a tabela ou o gráfico, que é facilmente construído na folha de cálculo. A última pergunta da tarefa tira partido das potencialidades da folha de cálculo para a compreensão da relação entre as variáveis, dado que se podem observar várias situações e identificar regularidades. Como síntese da aula, deve ser salientado o modo como se podem usar os dois tipos de representação – em gráficos e tabelas – para comparar informação respeitante a situações envolvendo variação.

Explorações de alunos

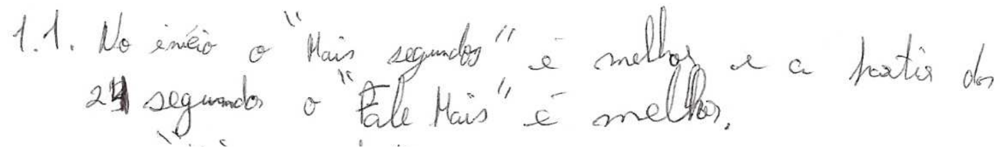
A tarefa 3 baseia-se na comparação entre os dois tarifários da TELEM: “Mais segundos” e “Fale mais”.

1. Características isoladas de cada tarifário. Os alunos podem observar com base no gráfico que no tarifário “Mais segundos” o preço das chamadas é constante para durações até 5 segundos enquanto no tarifário “Fale mais” isto acontece para chamadas com duração até aos 30 segundos:


1 1.1) • O tarifário "Fale mais" tem a vantagem de que até aos 30 segundos o valor a pagar é sempre o mesmo e que a partir daí o valor aumenta mas pouco.

• O tarifário "Mais segundos" tem a vantagem de que até aos 5 segundos o valor ~~a pagar~~ é o mesmo e que a partir daí até aos 23/24 segundos o valor é mais baixo do que do outro tarifário.

2. Identificar o tarifário em que as chamadas são mais baratas para certas durações. Na parte final da resposta anterior e na resposta que se segue os alunos fazem afirmações que especificam qual dos tarifários tem as chamadas mais baratas e para que durações, tendo em conta o gráfico apresentado:


1.1. No início o "Mais segundos" é melhor e a partir dos 24 segundos o "Fale Mais" é melhor.

Esta afirmação não está completa na medida em que descreve o que sucede imediatamente após os 24 segundos, mas não tem em consideração que a relação entre o preço dos tarifários se altera a partir de um certo momento posterior, situação que é analisada nas perguntas seguintes.

3. Analisar os tarifários para chamadas com duração superior ou igual a 24 segundos. Com base na tabela, os alunos observam que uma chamada com 24 segundos custa 7,68 cêntimos no tarifário “Mais segundos” e 7,5 cêntimos no tarifário “Fale mais”, donde concluem que as chamadas passam a ser mais baratas neste segundo tarifário. No entanto, esta situação altera-se para chamadas mais longas, sendo de encorajar a observação do que sucede para durações maiores. A resposta que se segue, portanto, ainda incompleta, uma vez que o que se afirma na pergunta é falso:

1.4 É verdade. Porque a partir dos 24 segundos o preço das chamadas do "Mais segundos" é maior do que no "Fale Mais".

4. Determinar a duração de uma chamada em cada tarifário. No caso do tarifário "Mais segundos" é possível dividir o preço da chamada por 0,32 cêntimos, o que permite concluir que o consumidor que tenha apenas 50 cêntimos no seu saldo pode falar 156 segundos, isto é, 2 minutos e 36 segundos:

"Mais segundos"

50 : 0,32 = 156,25 segundos

No tarifário "Fale mais", esta estratégia não é válida, sendo necessário ter em consideração os 7,5 cêntimos que correspondem ao preço dos 30 segundos iniciais:

50 - 7,5 = 42,5 42,5 : 0,35 = 121,428...

Para além dos 30 segundos iniciais pode falar mais 121 segundos.

Em ambos os tarifários, é também possível utilizar os preços de chamadas com várias durações (neste caso 60, 30, 5 e 1 segundos) até à obtenção do valor pretendido (49,92 cêntimos).

Mais segundos:

19,2 + 19,2 = 38,4
38,4 + 9,6 = 48
48 + 1,6 = 49,6
49,6 + 0,32 = 49,92

2 min e 36 seg.

No caso do tarifário "Fale mais" conclui-se que o consumidor com 50 cêntimos no seu saldo pode falar apenas durante 151 segundos (2 minutos e 31 segundos), isto é, menos 5 segundos do que no tarifário "Mais segundos":

1.5) Fale mais: ~~21 + 21 + 7,5 = 49,5~~

21 + 21 = 42
42 + 7,5 = 49,5
49,5 + 0,35 = 49,85

2 min e 31 seg.

Tarefa 4 – “Máquina das perguntas”

O João pretende utilizar um novo programa no seu computador, a “Máquina das perguntas”. O programa gera ecrãs semelhantes ao da figura 1.

Na caixa da esquerda, deve ser introduzido um elemento, por exemplo, o nome de um país. Na caixa da direita, o programa devolve um novo elemento, neste caso o nome da sua capital. Os temas vão variando.

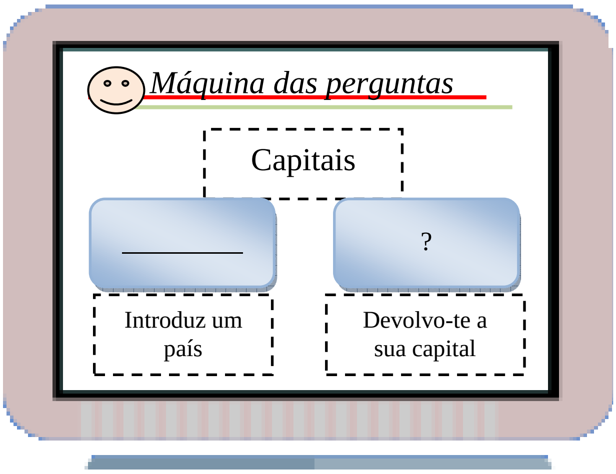


Figura 1

1. No tema “Capitais”, o João introduziu “Eslovénia” e obteve o nome da sua capital, como se pode observar nas figuras 2 e 3:

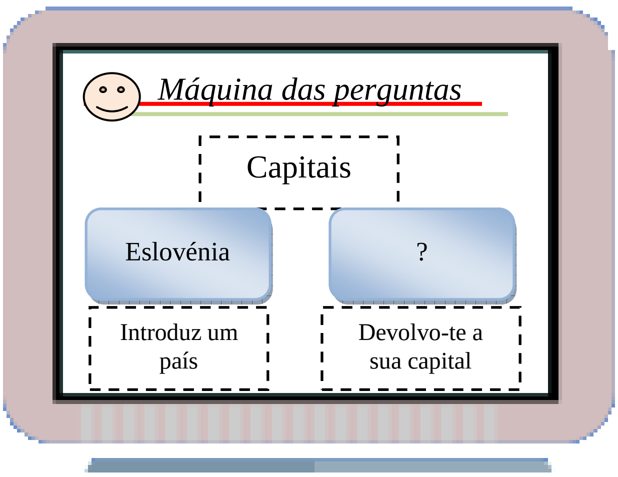


Figura 2

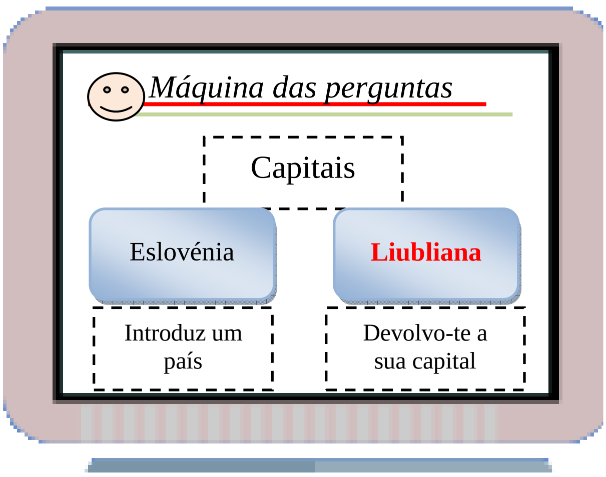
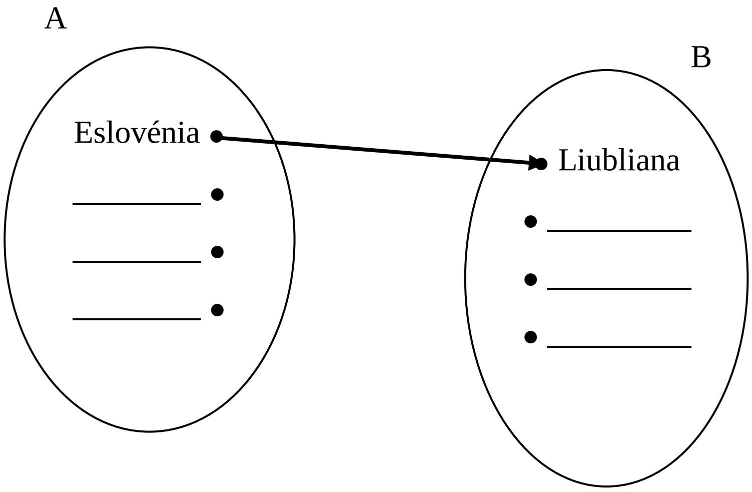


Figura 3

1.1. Sugere três países que o João pode introduzir neste tema e a resposta que o computador lhe devolve.

1.2. Com os países de 1.1 completa os espaços em branco. Estabelece a correspondência entre o conjunto de países A = {Eslovénia, __________, __________, __________} e o conjunto de cidades B = {Liubliana, __________, __________}, colocando as setas que associam os elementos correspondentes no seguinte *diagrama sagital*.



Nesta correspondência observa-se que:

- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital);
- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde apenas um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital) isto é, essa capital é única.

Quando uma correspondência verifica estas duas condições diz-se que é uma *função*:

- Cada elemento do conjunto A designa-se por *objecto*;
- Cada elemento do conjunto B que corresponde a algum elemento do conjunto A designa-se por *imagem*;
- Ao conjunto de todos os objectos, dá-se o nome de *domínio da função* e representa-se por D;

D = {Eslovénia, __________, __________, __________}

- Ao conjunto de todas as imagens dá-se o nome de *contradomínio* e representa-se por D' ou CD;

CD = {Liubliana, __________, __________}

Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento x do primeiro conjunto associa um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto (correspondência unívoca).

2. Os ecrãs seguintes mostram quatro temas: Número de letras, Potências, Raízes e Números menores:

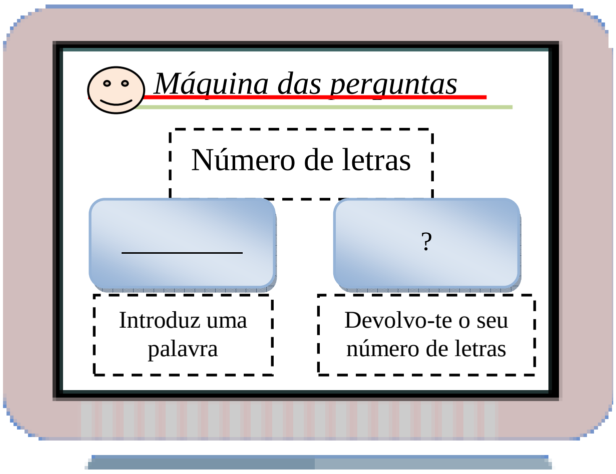


Figura 4

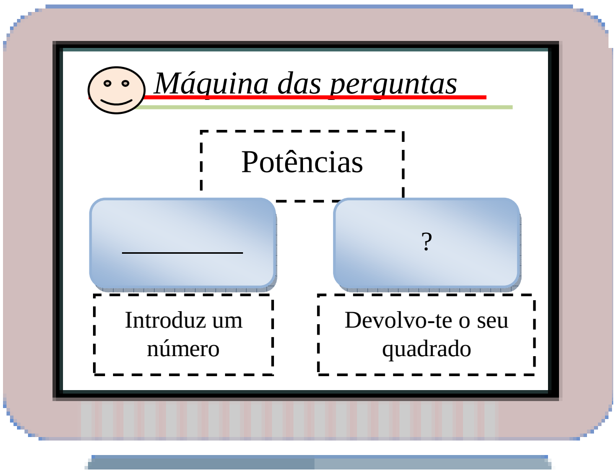


Figura 5

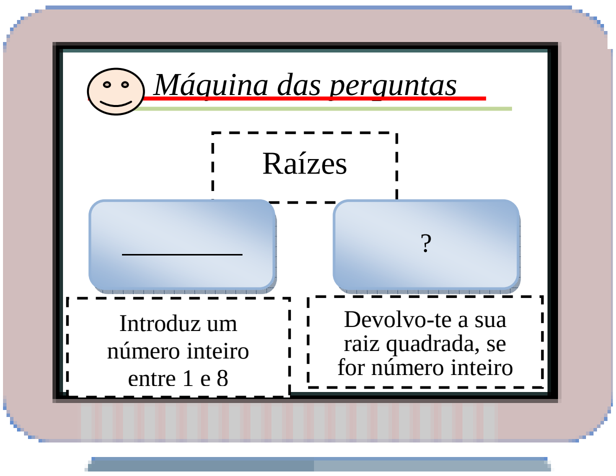


Figura 6

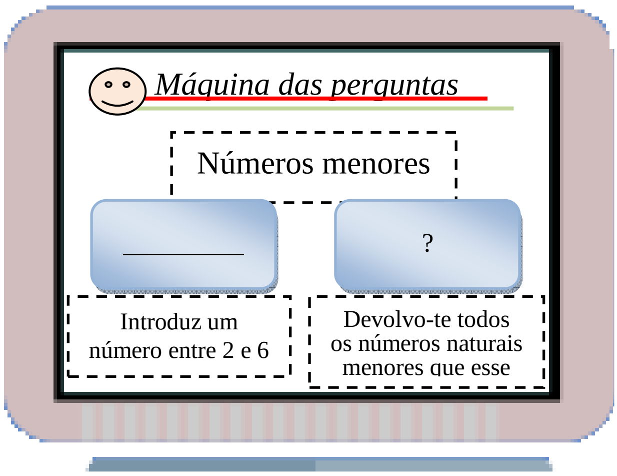
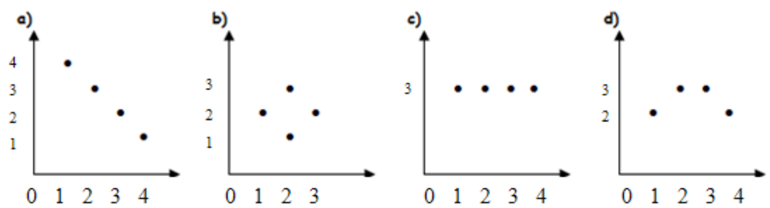


Figura 7

2.1. Para cada um dos temas apresentados, indica três elementos diferentes que o João pode introduzir e as respostas que esperas que o computador devolva. Representa, no teu caderno, cada uma das correspondências que obtiveste usando diagramas sagitais.

2.2. Indica quais destas correspondências são funções. Justifica a tua resposta.

3. Uma correspondência pode ser representada por um conjunto de pontos de um gráfico cartesiano – para cada ponto, a abcissa indica um objecto e a ordenada indica a respectiva imagem. Os gráficos que se seguem representam quatro correspondências:



3.1. Indica quais destas correspondências são funções e quais não o são. Justifica a tua resposta.

3.2. Para cada uma das funções que identificaste em 3.1 indica o domínio e o contradomínio.

4. Na tabela que se segue está representada uma correspondência $x \to y$ entre duas variáveis, em que cada uma delas assume seis valores. Esta correspondência é uma função.

x	2	4	6	9	12	15
$y = g(x)$	1	4,5	3	4,5	6	7,5

4.1. Indica o seu domínio e contradomínio.

4.2. Completa:

a) $g(4) = \_\_\_\_$

b) $g(\_\_\_) = 6$

4.3. Nesta correspondência há dois objectos distintos que têm a mesma imagem. Indica quais são os objectos e a respectiva imagem.

4.4. Constrói um gráfico cartesiano que represente a função.

Tarefa 4 – “Máquina das perguntas”

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado nos 1.º e 2.º ciclos e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem:

- Ser capazes de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
- Conhecer a noção de conjunto e saber representar conjuntos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações;
- Ser capazes de analisar uma função a partir das suas representações.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Compreenderem o papel das definições em Matemática;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa poderá ser realizada num bloco de 90 minutos. Atendendo a que o conceito de função é novo para os alunos, é importante que sejam salientadas as principais noções que devem compreender.

As questões 1 e 2 introduzem as noções básicas respeitantes à definição de função. Após a resolução da questão 1, o professor deve promover um momento intermédio de discussão onde sejam clarificados os significados dos termos definidos e as representações usadas, relacionando-os com o exemplo que é apresentado. Além disso, deve procurar que, progressivamente, os alunos comecem a usar a nova terminologia respeitante às funções.

Nas restantes questões, as funções são dadas através de diferentes representações: por meio tabela ou gráfico. Na última questão os alunos representam graficamente uma função dada por uma tabela.

No final da aula devem ser retomados os conceitos abordados, nomeadamente a definição de função e as noções que lhe estão inerentes: objecto, imagem, domínio, contradomínio. Também deve ser feita uma chamada de atenção para a importância de uma correcta utilização da linguagem das funções. Devem, ainda, ser salientados os diversos modos possíveis de representar uma função presentes nesta tarefa.

2. Algumas explorações. Com esta tarefa introduz-se o conceito de função, enquanto correspondência entre dois conjuntos. O programa de computador vai simulando diferentes regras que permitem associar cada objecto introduzido a uma imagem. Este exemplo ajuda a ilustrar as características que uma correspondência deve ter para ser uma função. É também a partir deste exemplo que se constrói um diagrama sagital e são introduzidas as noções de objecto, imagem, domínio e contradomínio. Na análise de uma função, os alunos devem identificar o domínio, o contradomínio e determinar imagens de objectos quando a função é dada por um diagrama sagital, por uma tabela e por um gráfico cartesiano. No final desta questão é apresentada a definição de função. O professor deve salientar que a definição constitui o critério que permite decidir se uma correspondência entre dois conjuntos é, ou não, uma função.

Na questão 2, são dados quatro exemplos de correspondências. A que diz respeito ao tema "Raízes" não cumpre uma das condições necessárias para ser função, na medida em que não é possível encontrar três quadrados perfeitos entre 1 e 8. Logo, a raiz quadrada de pelo menos um dos números escolhidos pelos alunos não é um número inteiro, pelo que o computador não devolve qualquer resposta quando esse número é introduzido. Existem então elementos do conjunto de partida sem imagem correspondente, o que faz com que não se trate de uma função. A correspondência com o tema "Números menores" também não representa uma função, uma vez que há números entre 2 e 6 que podem ser introduzidos, aos quais corresponde mais que um número natural. Por exemplo, ao número 4,5 o computador pode associar os números 1, 2, 3 e 4, contrariando a condição referente à unicidade. Assim, este grupo de questões permite aos alunos identificar correspondências que são funções e de outras que não o são, justificando as razões pelas quais isso acontece.

Por fim, nas questões 3 e 4, as correspondências são apresentadas na forma de gráfico cartesiano e de tabela, respectivamente. Na questão 3, caso os alunos não interpretem imediatamente a representação gráfica, o professor pode sugerir-lhes que construam diagramas sagitais com a mesma informação, que os ajudem a visualizar a correspondência de outra forma e a decidir se se trata ou não de uma função. No entanto, na discussão, o professor deve salientar que através do próprio gráfico se pode identificar se uma correspondência é uma função, verificando, por exemplo, se há pelo menos dois pontos com a mesma abcissa. Na questão 4, o professor deve voltar a promover o uso adequado da terminologia relativa às funções, procurando que os alunos identifiquem os valores de x com os objectos e os correspondentes valores de y com as imagens. Esta questão permite continuar a trabalhar a compreensão do conceito de função, salientando que o facto de existir um objecto com duas imagens não contradiz a definição de função.

Note-se que o conceito de função é trabalhado pela primeira vez de forma explícita pelos alunos no 7.º ano, pelo que será de esperar que demorem algum tempo até que se apropriem deste conceito e do seu vocabulário próprio. Saliente-se, também, que a exploração de funções cujos objectos são valores numéricos, deve contemplar apenas valores que sejam números racionais não negativos ou números inteiros relativos – que são aqueles que os alunos já conhecem nesta altura e com os quais sabem operar.

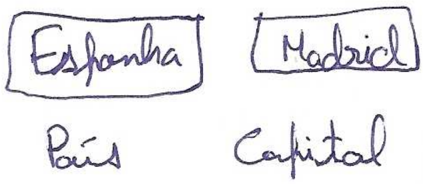
Explorações de alunos

Nesta tarefa pede-se aos alunos que: (i) analisem a correspondência entre os países e as capitais, gerada pelo programa ”Máquina das perguntas”, que é uma função; (ii) identifiquem as correspondências relativas aos temas Número de letras, Potências, Raízes, Números menores e Polígonos, indicando, por exemplo, as que são funções e as que não o são; e (iii) trabalhem com correspondências representadas através de gráficos e de tabelas.

1. Análise de correspondências e identificação de elementos correspondentes. Nas primeiras três questões os alunos contactam com seis correspondências distintas. Numa fase inicial, a forma como é representada a correspondência entre os elementos que são introduzidos e os que são devolvidos pelo computador, pode ser escolhida livremente pelos alunos, tornando-se progressivamente mais elaborada:

a) Os alunos podem começar por indicar que elementos se encontram associados na correspondência usando apenas a linguagem natural ou elaborando uma representação esquemática:

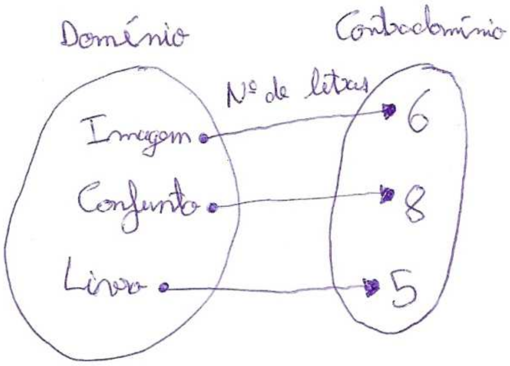
1.1



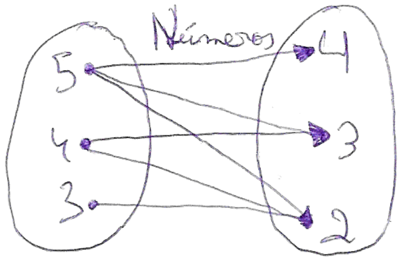
1.1

b) Os diagramas sagitais são outra representação que os alunos devem usar para algumas correspondências:

2.1 Tema – “Número de letras”



2.1 Tema – “Números menores”

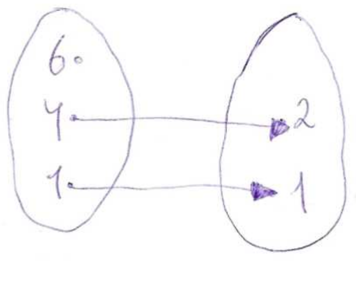


2. Identificação de correspondências que são funções e de correspondências que não são funções. A análise das correspondências apresentadas proporciona o contacto dos alunos com funções e com situações em que falha pelo menos uma das condições exigidas na definição de função.

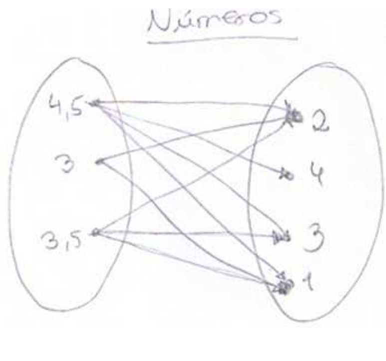
a) Correspondências que não são funções:

No exemplo da esquerda, relativo ao tema “Raízes”, o aluno inclui um elemento (6) que não tem imagem, dado que a sua raiz quadrada não é um número inteiro. Deste modo, falha a condição referente à existência de imagem para todos os objectos. No exemplo da direita, referente ao tema “Número de letras”, o aluno verifica que existe um elemento no primeiro conjunto que tem mais do que um elemento correspondente no segundo conjunto, pelo que falha a condição relativa à unicidade:

2.1 Tema – “Raízes”



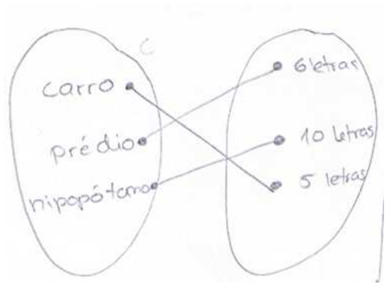
2.1 Tema – “Números menores”



b) Correspondências que são funções:

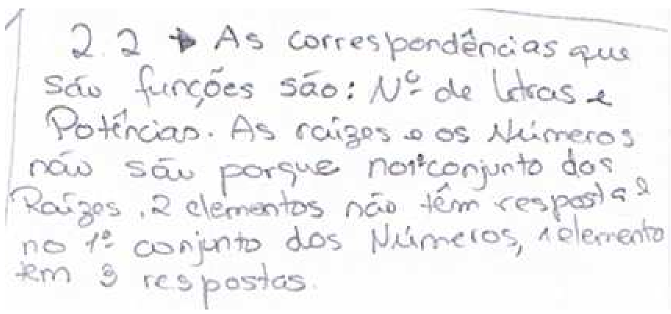
Nestas correspondências, a cada elemento do primeiro conjunto, corresponde um e um só elemento do segundo conjunto:

2.1 Tema – “Número de letras”



c) Algumas justificações:

Tendo em conta a definição de função os alunos podem justificar se uma correspondência cumpre ou não as duas condições exigidas:

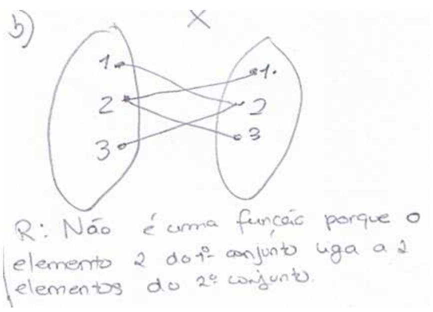


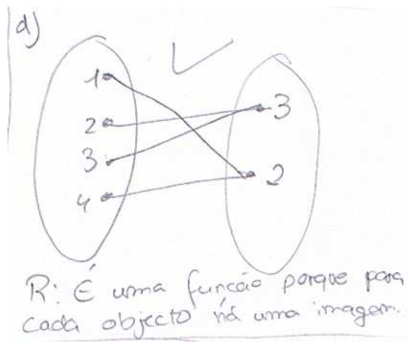
3. Análise de correspondências representadas através de gráficos e tabelas. Complementando o uso de linguagem natural, esquemas ou diagramas sagitais, as representações em gráficos e em tabelas são também modos importantes de representação de uma função.

a) Correspondências representadas graficamente:

Perante uma correspondência representada graficamente, alguns alunos sentem a necessidade de representar a informação que é dada através de um diagrama sagital, ou de outro modo de representação que lhes permita mais facilmente decidir se uma correspondência é ou não uma função:

3.1





Podem também averiguar se uma correspondência é ou não função partindo directamente da observação do gráfico, aspecto que deve ser salientado no momento da discussão geral.

3.1

Como no gráfico, para o 2, estão 2 pontos na vertical não é uma função.

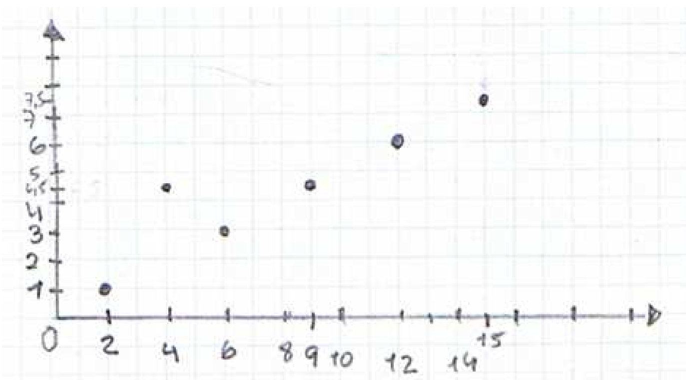
b) Correspondências representadas a partir de tabelas:

Perante a correspondência apresentada através de uma tabela, na questão 4, os alunos podem sentir a necessidade de clarificar, de entre os valores das variáveis *x* e *y*, quais são os objectos e quais as imagens. No exemplo apresentado, é interessante que os alunos observem, uma vez mais, que numa função dois objectos distintos podem ter uma mesma imagem:

Sim. O 4 e o 9 têm a mesma imagem que é o 4,5.

Outro aspecto a trabalhar, na aula, será a representação gráfica da informação contida na tabela, com uma selecção adequada dos valores a colocar no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas. Note-se que a capacidade de relacionar informação dada em diversos modos de representação é um aspecto importante na compreensão do conceito de função.

4.3



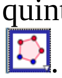
Tarefa 5A – Perímetros

O João tem um trabalho de Matemática para fazer sobre o perímetro de polígonos regulares – polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos também congruentes. A primeira parte deste trabalho refere-se à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro; a segunda parte é semelhante mas diz respeito ao caso do triângulo equilátero.

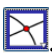
Como o João gosta bastante de programas de computador, decide usar o *GeoGebra* e vai ajudar-te a conhecer este programa.

Segue os passos do João:

I – Constrói um quadrado e um ponto num gráfico do seguinte modo:

- Abre o *GeoGebra* e, no menu *Exibir*, faz aparecer na janela de visualização os eixos coordenados e o quadriculado.
- No quinto ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Polígono Regular* . Desenha um lado e indica o número de lados do polígono regular. O *GeoGebra* cria o quadrado ABCD, cujos lados são os segmentos de recta *a*, *b*, *c* e *d*.
- Define a variável independente, *x*, como sendo igual ao comprimento do lado do quadrado, indicando no campo de entrada a expressão $x = a$ e carregando em *Enter*. O programa marca uma recta vertical que intersecta o eixo dos *xx* no ponto de abcissa *a*.
- Define a variável dependente, *y*, como sendo igual ao perímetro do quadrado. Para tal podes indicar no campo de entrada uma expressão para o perímetro, como se mostra a seguir e carregar em *Enter*.

  O programa marca uma recta horizontal que intersecta o eixo das ordenadas no valor de *y* igual à soma dos comprimentos dos quatro lados do quadrado cujo comprimento do lado é igual ao valor indicado no eixo das abcissas.

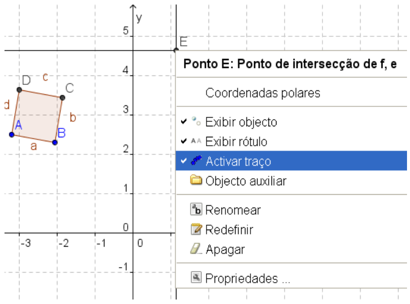
- No segundo ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Intersecção de dois objectos* . De seguida selecciona cada uma das rectas construídas, pressionando sobre elas o botão esquerdo do rato. O *GeoGebra* cria o ponto E que resulta da intersecção pretendida.

II – Regista, para o quadrado que acabaste de construir no *GeoGebra*:

- O valor da abcissa do ponto E e o seu significado neste contexto.
- O valor da ordenada do ponto E e o seu significado neste contexto.

III – Utiliza o *GeoGebra* para construir pontos referentes a quadrados com lados de diversos comprimentos:

- Selecciona o ícone *Mover* . Clica com o botão do lado direito do rato em cima do ponto E. Selecciona a opção *Activar traço* como mostra a figura:



- Clica no ponto B e, sem soltar, arrasta-o.

IV – Regista o que acontece no gráfico. (Sugestão: podes mover os eixos coordenados para melhorar a visualização com o ícone *Mova os eixos coordenados* ).

V – Resolve agora a primeira questão do trabalho do João. Para isso, utiliza a construção que elaboraste no *GeoGebra* e move o ponto B, colocando-o onde considerares mais adequado:

Trabalho – Questão 1

1. As perguntas que se seguem dizem respeito à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado, qualquer que seja o seu valor, e o seu perímetro.

   1.1. Determina o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2,34 cm.

   1.2. Determina quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é 15,52 cm.

   1.3. Completa a tabela com os valores em falta:

x	0,5	1	2	2,34		
y			8		15,52	26

   1.4. Verifica-se que o perímetro do quadrado é directamente proporcional ao seu lado. Explica porquê e indica a constante de proporcionalidade e o seu significado geométrico.

   1.5. Completa a expressão algébrica que representa essa relação de proporcionalidade:

$$y = \_\_\_\_ \times x$$

VI – Na barra de entrada do *GeoGebra* introduz a expressão algébrica. Descreve o que acontece.

Observa que:

Uma função com uma expressão algébrica do tipo $y = k \times x$ (ou $f(x) = k \times x$), $k \neq 0$, tem o nome de *função de proporcionalidade directa* ou *função linear*.

x é um objecto; $y = f(x)$ é a sua imagem; k é a constante de proporcionalidade.

O gráfico de uma função de proporcionalidade directa está contido numa recta que passa na origem do referencial.

VII – Abre uma nova janela de visualização no *GeoGebra* e traça o gráfico da função g que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero ABC e o perímetro correspondente.

VIII – Resolve agora a segunda questão do trabalho do João relativo aos triângulos equiláteros. Para isso podes utilizar a construção que elaboraste no *GeoGebra* e mover o ponto B, colocando-o onde considerares mais adequado.

Trabalho – Questão 2

2. A função g relaciona o comprimento do lado do triângulo equilátero e o seu perímetro.
   2.1. A função g é uma função de proporcionalidade directa? Justifica.
   2.2. Completa:
      a) $g(3) = \_\_\_\_$
      b) $g(\_\_\_\_) = 18{,}3$

      Em cada uma das igualdades anteriores indica qual é o objecto e a respectiva imagem. Explica qual é o significado de cada um destes valores neste contexto.
   2.3. Escreve uma expressão algébrica que represente a função g.

IX – Resolve as seguintes questões adicionais que o João colocou a si mesmo quando olhou de novo para as representações gráficas que obteve:

Questões adicionais

1. Se tiver um triângulo equilátero com 8 cm de lado, qual será o comprimento do lado do quadrado com o mesmo perímetro deste triângulo?

2. Qual será o comprimento do lado do triângulo equilátero que tem o mesmo perímetro que o quadrado descrito pelo João?

Acetato 1

Como usar o *GeoGebra*?

A figura 1 mostra o menu principal e a barra de ferramentas.

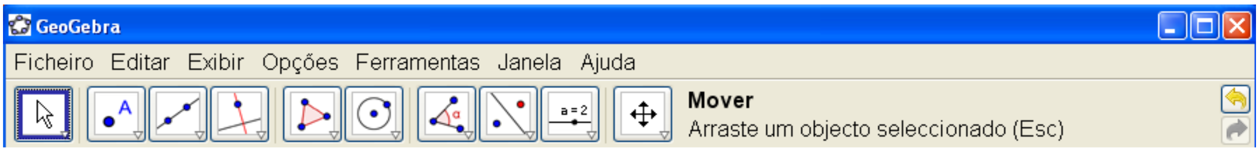


Figura 1

A figura 2 apresenta a janela de Álgebra:

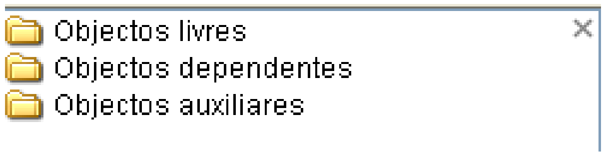


Figura 2

A figura 3 apresenta o campo de entrada:

Figura 3

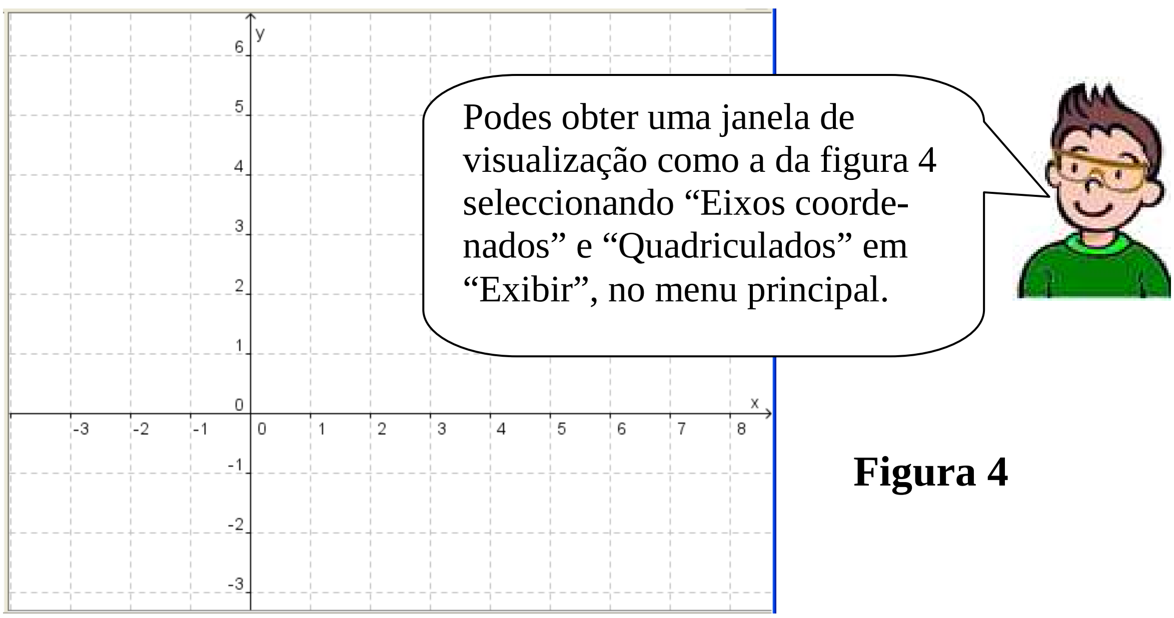


Figura 4

Mais uma informação importante:

Para além dos ícones visíveis na barra de ferramentas, em cada um podemos encontrar mais opções, clicando no triângulo branco que se encontra no seu canto inferior direito. Este triângulo torna-se vermelho e as várias opções surgem por baixo dele, como se vê na figura 5:

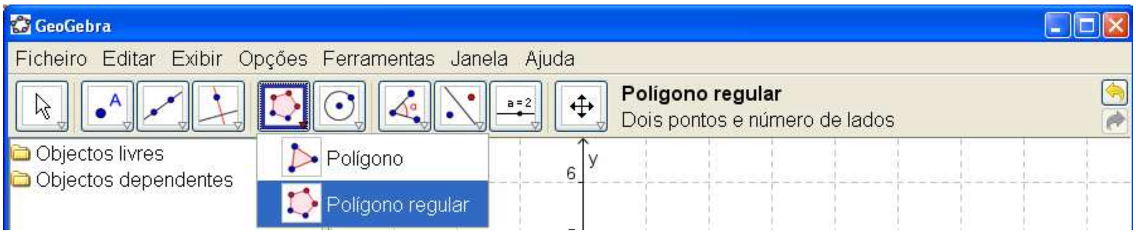


Figura 5

Ao lado da barra de ferramentas aparece a indicação relativa a cada ícone. Como podes observar, neste exemplo surge "Polígono regular. Dois pontos e número de lados". Isto indica que usando o ícone *Polígono Regular* se pode construir qualquer polígono regular indicando dois pontos do plano, que vão ser dois dos seus vértices, e o número de lados que pretendemos que o polígono tenha.

Tarefa 5B – Perímetros

O João tem um trabalho de Matemática para fazer sobre o perímetro de polígonos regulares – polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos também congruentes. A primeira parte desse trabalho refere-se à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro; a segunda parte é semelhante mas diz respeito ao caso do triângulo equilátero.

Segue os passos do João:

I – Determina os perímetros dos quadrados cujos lados têm os seguintes comprimentos:

2 cm   3 cm   4 cm   5 cm

II – Numa folha de papel quadriculado constrói um referencial cartesiano, em que, o eixo das abcissas representa o comprimento do lado do quadrado e o eixo das ordenadas representa perímetro desse quadrado. Marca num referencial os pontos A, B, C e D, referentes aos quatro quadrados da pergunta anterior.

III – Observa os pontos A, B, C e D e representa pontos correspondentes a outros quadrados, com lados de diferentes comprimentos. Descreve o gráfico.

IV – Resolve agora a primeira questão do trabalho do João:

Trabalho – Questão 1

1. As perguntas que se seguem dizem respeito à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado, qualquer que seja o seu valor, e o seu perímetro.

   1.1. Determina o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2,34 cm.

   1.2. Determina quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é 15,52 cm.

   1.3. Completa a tabela com os valores em falta:

x	0,5	1	2	2,34		
y			8		15,52	26

   1.4. Verifica-se que o perímetro do quadrado é directamente proporcional ao seu lado. Explica porquê e indica a constante de proporcionalidade e o seu significado geométrico.

   1.5. Completa a expressão algébrica que representa essa relação de proporcionalidade:

$$y = \_\_\_\_ \times x$$

Observa que:

Uma função com uma expressão algébrica do tipo $y = k \times x$ (ou $f(x) = k \times x$, $k \neq 0$, tem o nome de *função de proporcionalidade directa* ou *função linear*.

x é um objecto; $y = f(x)$ é a sua imagem; k é a constante de proporcionalidade.

O gráfico de uma função de proporcionalidade directa está contido numa recta que passa na origem do referencial.

V – Numa folha de papel quadriculado traça o gráfico da função g que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero e o perímetro correspondente.

VI – Resolve agora a segunda questão do trabalho do João relativa aos triângulos equiláteros.

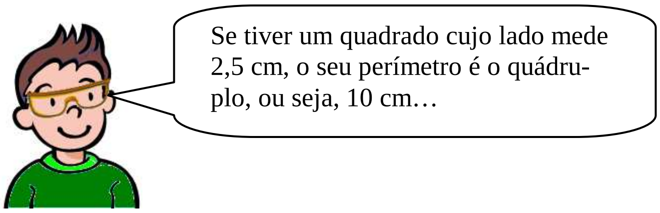
Trabalho – Questão 2

2. A função g relaciona o comprimento do lado do triângulo equilátero e o seu perímetro.
   2.1. A função g é uma função de proporcionalidade directa? Justifica.
   2.2. Completa:
      a) $g(3) = \_\_\_\_$
      b) $g(\_\_\_\_) = 18{,}3$

      Em cada uma das igualdades anteriores indica qual é o objecto e qual a respectiva imagem. Explica o significado de cada um destes valores neste contexto.
   2.3. Escreve uma expressão algébrica que represente a função g.

VII – Resolve as seguintes questões adicionais que o João colocou a si mesmo quando olhou de novo para as representações gráficas que obteve:

Questões adicionais



1. Se tiver um triângulo equilátero com 8 cm de lado, qual será o comprimento do lado do quadrado com o mesmo perímetro deste triângulo?

2. Qual será o comprimento do lado do triângulo equilátero que tem o mesmo perímetro que o quadrado descrito pelo João?

Tarefas 5A e 5B – Perímetros

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem:

- Ser capazes de identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos;
- Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
- Ser capazes de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem reforçar:

- A sua compreensão do conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos;
- A sua capacidade de utilizar as suas várias notações.

Além disso, devem ser capazes de:

- Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa;
- Representar gráfica e algebricamente uma função linear;
- Relacionar a função linear com a proporcionalidade directa.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Compreenderem o papel das definições em Matemática;
- Traduzirem relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. As tarefas 5A e 5B contemplam os mesmos objectivos. O trabalho proposto surge da necessidade de responder a duas questões do trabalho do João. Esta tarefa pode ser resolvida com recurso a um programa de Matemática dinâmica (tarefa 5A) ou usando papel e lápis, caso seja inviável a utilização do computador, (tarefa 5B). Na tarefa 5A são indicadas as instruções que os alunos devem seguir na sua resolução quando utilizam o programa *GeoGebra*. Espera-se que esta ferramenta contribua para uma construção de uma visão mais dinâmica do gráfico de uma função linear, num contexto em que a conexão entre a Geometria e a Álgebra assume particular importância.

É também disponibilizada uma matriz para um acetato com os principais menus e ferramentas que o professor pode apresentar ao iniciar o trabalho com este programa. No entanto, o professor pode construir instruções análogas para a resolução desta tarefa com recurso a outros programas que contenham funcionalidades semelhantes. Note-se que, quando os alunos não estão habituados a usar este tipo de programa, podem necessitar de bastante apoio do professor.

Prevê-se que qualquer das tarefas seja resolvida num bloco (de 90 minutos), ou, se necessário, num bloco e meio. A discussão geral poderá ser feita em diversos momentos, consoante o modo como a turma for reagindo. Uma estratégia possível será a de discutir a questão 1 do trabalho do João e introduzir notação, simbologia e vocabulário próprios das funções lineares, e só depois iniciar a resolução da questão 2 do referido trabalho. Dado que esta tarefa aborda um contexto matemático com que os alunos já contactaram (perímetros de polígonos) estes podem indicar as relações de proporcionalidade directa recorrendo quer à linguagem natural quer à linguagem matemática.

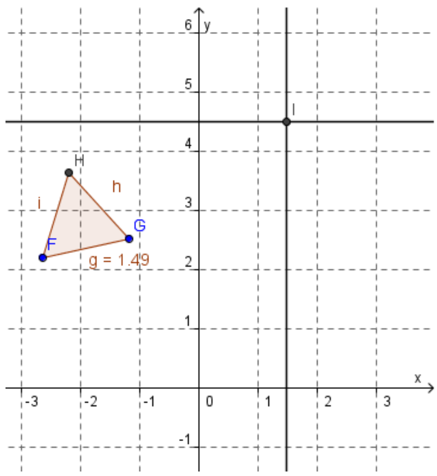
No final da aula deve ser retomado o principal conceito trabalhado – o conceito de função de proporcionalidade directa ou função linear –, chamando a atenção para o papel que nesta função desempenha a constante de proporcionalidade directa. É de salientar, também, o tipo de expressão algébrica desta função bem como as características principais do seu gráfico, e analisar como podem ser representados os diversos membros da família das funções lineares.

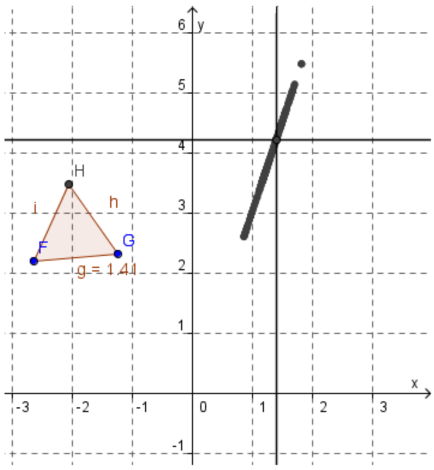
2. Algumas explorações. No início da tarefa 5A são dados aos alunos alguns elementos básicos para utilizar o *GeoGebra*. Seguindo as instruções passo a passo, os alunos começam por utilizar as ferramentas disponibilizadas pelo programa para construir um polígono regular, como o quadrado. Em seguida, representam, num sistema de eixos coordenados, um ponto cuja abcissa representa o comprimento do lado de um quadrado e cuja ordenada representa o perímetro desse quadrado. Este ponto pode ser determinado pelo método sugerido nas instruções (ou seja, como soma dos comprimentos dos quatro lados) mas é possível que alguns alunos o tentem também determinar multiplicando um desses comprimentos por 4, o que constitui também uma estratégia adequada à situação. A forma como este ponto é construído no *GeoGebra* tem como principal vantagem permitir visualizar, de uma forma dinâmica, que o gráfico que representa a relação entre as variáveis é um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta que passa na origem do referencial. Para isso, basta que os alunos arrastem um dos vértices que estão na base da construção do quadrado inicial, fazendo surgir quadrados diversos e os pontos respectivos no gráfico.

Na tarefa 5B o percurso desenvolvido pelos alunos pode ser análogo. No entanto, a construção das representações gráficas é efectuada usando papel e lápis, sem o suporte dinâmico fornecido pelo programa de computador.

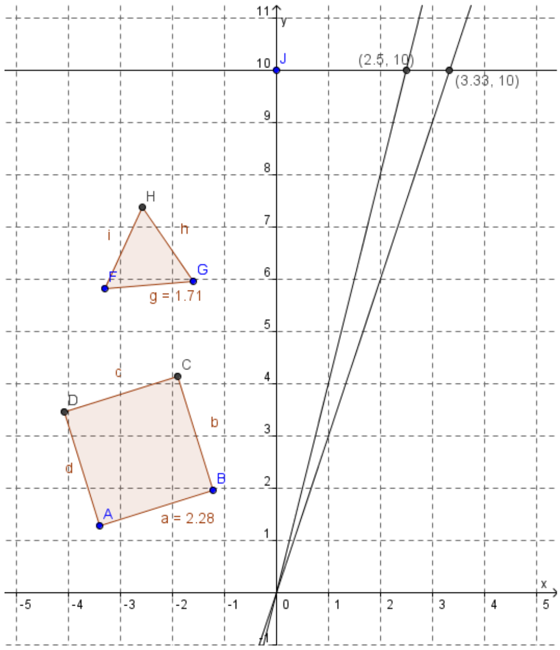
Quando os alunos resolvem a questão 1 do trabalho do João, encontram-se perante uma situação de proporcionalidade directa relativa ao perímetro do quadrado. Os alunos podem explorar essa situação em casos concretos e averiguar se existe ou não proporcionalidade directa, conceito que já trabalharam no 2.º ciclo, indicando a constante de proporcionalidade e interpretando o seu significado geométrico. Com base nesta análise, espera-se que os alunos formulem uma generalização e representem algebricamente esta situação de proporcionalidade directa. Na tarefa 5A, ao introduzirem a expressão algébrica no campo de entrada do *GeoGebra*, surge a representação gráfica desta função, que se sobrepõe aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Este é um ponto de partida para que reconheçam que numa situação de proporcionalidade directa, a função correspondente tem o gráfico contido numa recta que passa na origem do referencial. Na tarefa 5B, o professor deve igualmente procurar que os alunos notem que todos os pontos marcados no gráfico se situam sobre uma mesma recta que contém a origem do referencial. A caixa síntese reúne alguns aspectos importantes que os alunos devem reter, incluindo a definição de função de proporcionalidade directa ou função linear e o uso de notação e vocabulário específicos relativos às funções. O professor deve chamar a atenção para a importância que as definições assumem na Matemática e para a necessidade de usar de forma precisa o vocabulário e as notações desta disciplina.

Na questão 2 do trabalho do João, os alunos fazem uma exploração do caso dos triângulos equiláteros semelhante à efectuada a propósito dos quadrados. Nesta fase, os alunos reforçam o uso da notação específica das funções, determinam graficamente um objecto, dada uma imagem, e uma imagem, dado um objecto, e interpretam o significado dos valores encontrados neste contexto. Pede-se, mais uma vez, que formulem uma generalização, representando algebricamente uma função linear. Os alunos estabelecem uma relação entre a situação de proporcionalidade directa que reconhecem e a função linear que constroem. As figuras seguintes ilustram a construção do ponto I, cujo movimento vai gerar o gráfico da função:





Na parte final da tarefa são colocados dois problemas propostos pelo João, onde se relacionam as medidas dos lados e os perímetros de triângulos equiláteros e quadrados. Se os alunos optarem por utilizar o *GeoGebra*, deslocando o ponto, terão alguma dificuldade em responder com precisão. Os deslocamentos permitem-lhes reconhecer, por exemplo, que, se o perímetro do triângulo equilátero for 9,9 cm, o comprimento do seu lado é 3,3 cm. No entanto, deslocando o ponto não conseguem obter o valor exacto do comprimento do lado do triângulo equilátero cujo perímetro é de 10 cm. Sabem apenas que este está próximo de 3,3 cm. Será importante discutir com os alunos como se pode representar o valor exacto da medida do lado do triângulo equilátero com 10 cm de perímetro, recorrendo a um número representado na forma fraccionária $\left(\frac{10}{3}\right)$ ou à representação da dízima infinita periódica correspondente (3,(3)). A figura que se segue mostra o que os alunos podem obter no *GeoGebra*:

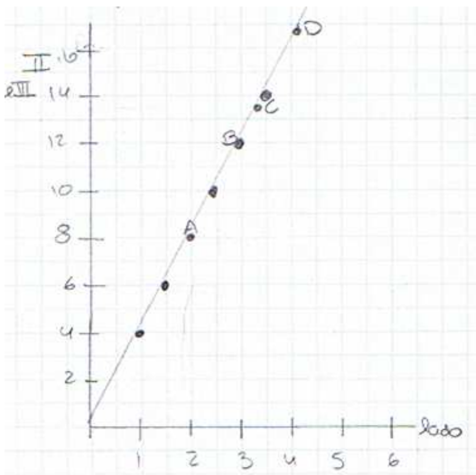


Explorações de alunos

Os exemplos que se seguem referem-se à resolução da tarefa 5B.

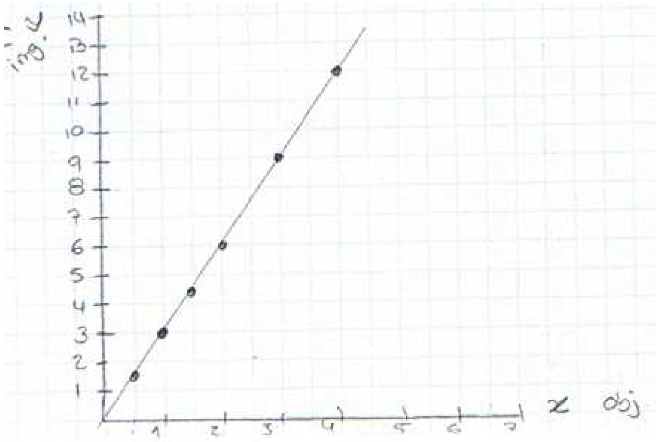
1. Perímetro do quadrado. A primeira parte da tarefa surge com base na resolução da questão 1 do trabalho do João, relativa à relação existente entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro:

a) Representação gráfica:



2. Perímetro do triângulo equilátero. Uma segunda parte da tarefa surge com base na questão 2 do trabalho do João relativa à relação existente entre o comprimento do lado do triângulo e o seu perímetro:

a) Representação gráfica:



b) Existência de proporcionalidade directa. É possível justificar com base na observação do gráfico que existe proporcionalidade directa, referindo que este está contido numa recta que contém a origem do referencial. No entanto, a existência de proporcionalidade directa pode também ser justificada com base na relação que os alunos identificam entre os valores correspondentes de ambas as variáveis.

2.1) Sim, porque a constante é sempre a mesma, ou seja o 3, que vezes o comprimento do lado irá dar o perímetro do triângulo.

VII

2.1 Sim. Porque quando se divide o perímetro pelo lado dá sempre 3.

$y = 3 \times x$

3. Questões adicionais. A questão relativa ao comprimento do lado de um triângulo equilátero de perímetro igual a 10 cm deve levar os alunos a reflectir sobre a distinção entre valor exacto e valor aproximado. Ao dividirem 10 por 3, alguns alunos podem eventualmente indicar como resposta uma aproximação, aspecto que deve ser discutido na aula, para que, em vez disso, procurem representar o valor exacto, como fracção ou indicando a respectiva dizima infinita periódica. Neste momento, podem ser clarificados aspectos relativos à representação de números racionais não negativos.

2) $10 : 3 = 3{,}333\ldots$ / $\frac{10}{3}$

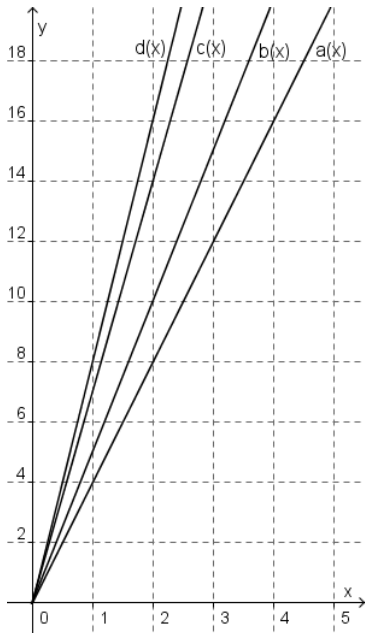
2. $10 : 3 = 3{,}(3)$

R: O comprimento do lado do triângulo equilátero será 3,(3)

Tarefa 6 – Várias representações

1. Considera um polígono regular cujo lado tem 3,4 cm de comprimento e cujo perímetro é 20,4 cm.
   1.1. De que polígono regular se trata?
   1.2. Escreve uma expressão algébrica que represente a função que a cada valor do comprimento do lado associa o perímetro deste polígono regular.
   1.3. Representa graficamente essa função numa folha de papel quadriculado.

2. Na figura estão representadas graficamente as relações entre o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares.



   2.1. Indica:
   - a que polígono regular corresponde cada uma das funções representadas graficamente na figura;
   - uma expressão algébrica que represente cada uma das funções de proporcionalidade directa representadas;
   - a constante de proporcionalidade referente a cada uma das quatro situações.

   2.2. À medida que o valor da constante de proporcionalidade aumenta o que acontece ao gráfico da função?

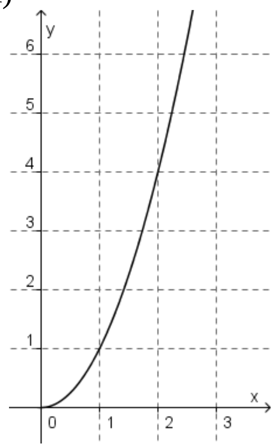
3. Considera a função de expressão algébrica $f(x) = \frac{3}{2}x$:
   3.1. Completa a tabela:

x	-8	-2		1		$\frac{50}{9}$
$y = f(x)$			0		$4{,}5$	

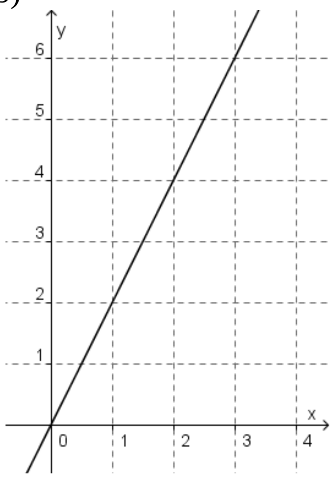
   3.2. Faz uma representação gráfica da função f numa folha de papel quadriculado.

4. Quais dos gráficos seguintes representam uma função linear? Justifica a tua resposta.

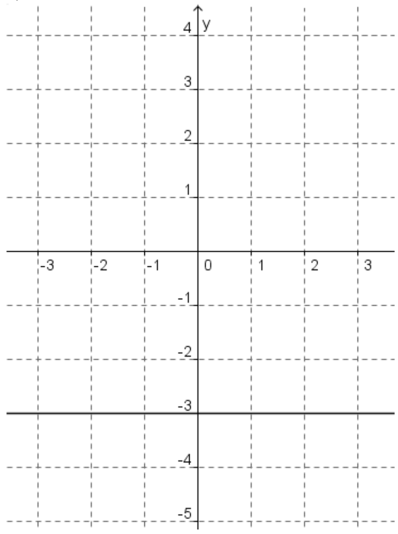
a)



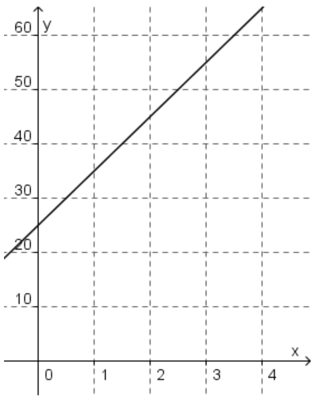
b)



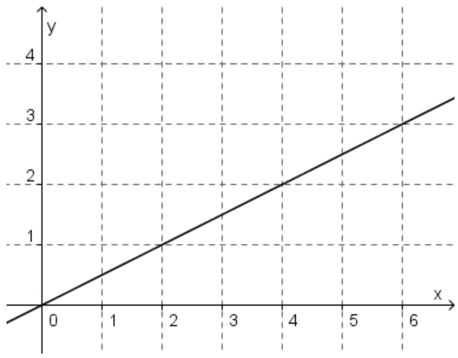
c)



d)



e)



Tarefa 6 – Várias representações

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem:

- Ser capazes de identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos;
- Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
- Ser capazes de identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem reforçar a sua capacidade de analisar uma função a partir das suas representações.

Além disso, devem ser capazes de:

- Analisar situações de proporcionalidade directa como funções do tipo $y = kx$;
- Relacionar as representações algébricas e gráficas das funções lineares.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Representarem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa complementa a tarefa 5, resolvida na sua versão A ou B, continuando a exploração de relações entre o comprimento do lado de polígonos regulares e o respectivo perímetro. Tendo por base este tipo de situações, em que existe proporcionalidade directa, dá-se ênfase ao trabalho dos alunos com diferentes representações da função linear.

Ao contrário das duas questões anteriores, as questões 3 e 4 não apresentam um contexto relativo ao perímetro. Na questão 3 é dada a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa em que a constante é um número racional, representado na forma de fracção. A tabela relativa a esta função que os alunos devem completar solicita a determinação de imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e a determinação de objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal.

Prevê-se que esta tarefa seja resolvida num bloco de 90 minutos. Numa primeira parte da aula, os alunos podem trabalhar nas questões propostas, em pares ou em pequenos grupos (60 minutos), seguindo-se um momento de discussão geral (30 minutos).

Nesta tarefa, os alunos têm oportunidade de interpretar informação dada graficamente, relacionando situações em que há constantes de proporcionalidade distintas. Ao registarem as suas observações por escrito e ao participarem na discussão geral, os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicar oralmente e por escrito, sendo de reforçar o uso de vocabulário próprio de forma adequada. A tarefa proporciona ainda a oportunidade para os alunos trabalharem com diferentes modos de representar uma função e estabelecerem conexões entre essas representações.

No final da aula deve voltar a analisar-se o papel que a constante de proporcionalidade ocupa na expressão algébrica da função linear e a influência da variação desta constante no gráfico da função. Deve também salientar-se o modo como se podem utilizar diferentes formas de representação de uma função para resolver um dado problema.

2. Algumas explorações. A questão 1 diz respeito a um polígono específico que os alunos devem identificar: o hexágono regular. Pede-se que escrevam uma expressão algébrica para a função linear correspondente, dado um objecto (diferente de zero) e a sua imagem. Caso os alunos não consigam resolver de forma imediata esta questão, o professor pode sugerir a elaboração de uma tabela com os comprimentos dos lados de vários hexágonos regulares e os respectivos perímetros, ajudando-os assim a formular uma generalização. A partir de uma situação de proporcionalidade directa, os alunos representam a função algébrica e graficamente.

Na questão 2 surgem, num mesmo referencial, as representações gráficas das funções que relacionam o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares: quadrado, pentágono, heptágono e octógono. Em todos os gráficos, os alunos podem encontrar pontos cujas coordenadas são facilmente identificadas, o que lhes permite também identificar a que polígono corresponde cada uma das situações. Por outro lado, partindo de um objecto (diferente de zero) e da sua imagem podem determinar a expressão algébrica da função linear correspondente. Os alunos devem mencionar as expressões algébricas dessas funções, relacionando assim as suas representações gráfica e algébrica. A análise das várias constantes de proporcionalidade permite aos alunos observar que, à medida que o seu valor aumenta, isto é, à medida que trabalhamos com polígonos regulares com um maior número de lados, a inclinação da recta correspondente também aumenta.

A questão 3 apresenta uma função linear definida pela sua expressão algébrica e é a partir desta que os alunos devem determinar os objectos e imagens pedidos, com os quais preenchem a tabela. Em seguida, constroem a respectiva representação gráfica, em papel quadriculado. Note-se que são utilizados números negativos e números representados na forma fraccionária, para que os alunos tenham oportunidade de trabalhar novamente com este tipo de números.

Por fim, na questão 4, os alunos devem identificar os gráficos que representam funções lineares, justificando a opção tomada com base nas características que eles apresentam.

Explorações de alunos

No início desta tarefa e na sequência do trabalho que desenvolveram na tarefa anterior, os alunos continuam a explorar a relação entre os perímetros de polígonos regulares e os comprimentos dos seus lados. Ao longo de toda a tarefa são exploradas diferentes representações de uma função – em tabela, gráfica e algébrica.

1. Interpretação de gráficos de proporcionalidade directa num mesmo referencial. Para cada um dos gráficos, os alunos identificam pontos que lhes permitem identificar a relação entre as variáveis e assim determinar o polígono a que correspondem.

a) Identificação do gráfico:

b(x) é a função que corresponde ao pentágono porque passa pelo ponto (2,10). A expressão algébrica que representa o b(x) é y = 5 x x. A sua constante de proporcionalidade é 5.

No c(x) há um ponto em que 2 cm de lado correspondem a 14 cm de perímetro por isso é um heptágono porque 2 x 7 = 14 cm de p.

b) Interpretação da alteração do valor da constante. Os alunos podem observar que, quanto maior é a constante de proporcionalidade, maior é a inclinação do gráfico:

Quando a constante aumenta a recta aproxima-se do eixo yy

2. Identificação das representações de uma função de proporcionalidade directa dado um objecto não nulo e a sua imagem. Perante um nova situação de proporcionalidade directa relativa à relação entre o comprimento do lado de um polígono regular e o seu perímetro, os alunos identificam o polígono com base nos valores 3,4 e 20,4 que são dados e apresentam a respectiva expressão algébrica:

20,4 : 3,4 = 6

R: Trata-se de um hexágono regular.

y = 6 x x

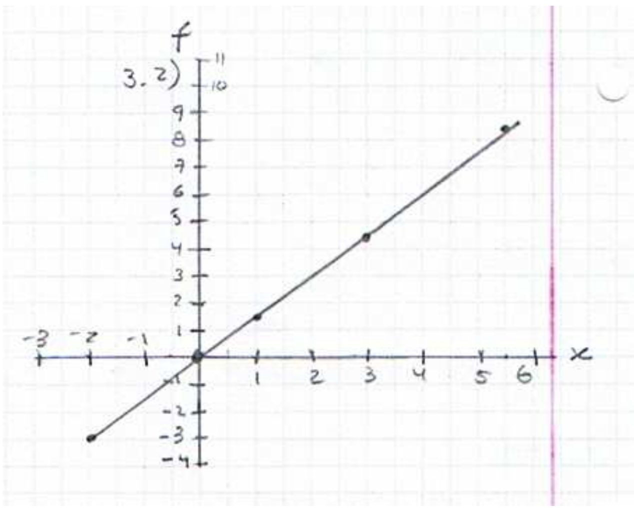
3. Construção de outras representações a partir da expressão algébrica. Devem ser propostas aos alunos situações de proporcionalidade directa que não estejam necessariamente associadas a um contexto. Este exemplo permite relacionar diferentes representações e operar com números na sua representação fraccionária:

a) Representação em tabela:

x	−7	−2	0	1	3	$\frac{50}{9}$
f(x)	−10,5	−3	0	1,5	4,5	$\frac{25}{3}$

$$\frac{50}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{150}{18} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

b) Representação gráfica:



4. Identificação do gráfico de uma função de proporcionalidade directa. Os alunos identificam os gráficos que representam funções lineares, justificando a sua escolha com base nas suas características. Podem, também, indicar porque é que os gráficos a), c) e d) não representação funções desse tipo:

- b) e e) são porque a recta passa pela origem (0,0).
- a), c) e d) não são porque: o a) tem a linha curva e no c) e o d) a recta não passa pela origem.

Tarefa 7 – Combustíveis

1. Lê atentamente a seguinte notícia:

Descida dos combustíveis

O preço de todos os combustíveis estará mais baixo dois cêntimos a partir da meia-noite de hoje, nos postos de abastecimento de combustível em todo o país, segundo avança a Agência Noticiosa Europeia.

Esta é a segunda baixa no preço dos combustíveis no espaço de uma semana, situação que se deve a uma tendência de descida das cotações internacionais do crude e dos produtos refinados.

No entanto, de acordo com indicações do mercado internacional, prevê-se uma inversão na tendência actual de descida, pelo que se espera uma subida dos preços dos produtos petrolíferos refinados durante as próximas semanas. Em contrapartida, prevê-se que o preço do GPL não sofra variações significativas. Este tipo de combustível tem sido cada vez mais procurado pelos consumidores, devido ao seu preço mais apelativo e às vantagens que traz para a preservação ambiental, sobretudo a redução da emissão de gases nocivos à camada de ozono.

Novos preços dos combustíveis nas bombas da Petro-PT:

Gasóleo: € 1, 39
Gasolina: € 1,52
Auto-Gás (GPL): € 0,66

Fonte: Jornal *Mais informação*
03/08/2008

De acordo com os dados da notícia da figura responde às seguintes questões:

1.1. Quanto paga um consumidor que abasteça o seu automóvel com 40 litros de GPL durante o dia 03/08/2008?

1.2. Quanto poupa o consumidor se abastecer o automóvel com 40 litros de GPL apenas no dia 04/08/2008?

1.3. Um consumidor abasteceu o seu automóvel com 38 litros de GPL e pagou 25,08 euros. Abasteceu antes ou depois da descida dos preços?

1.4. O valor a pagar depende do número de litros abastecidos de GPL. Existe uma relação de proporcionalidade directa entre estas duas variáveis. Indica as constantes de proporcionalidade relativas aos dias 03/08/2008 e 04/08/2008.

1.5. Escreve as expressões algébricas que definem as funções que relacionam o número de litros de GPL abastecidos com o preço a pagar por litro, antes e depois da descida.

2. Nos postos de abastecimento da Gás-PT, o GPL está em promoção. Sabendo que a expressão algébrica da função que relaciona $l(x)$ – custo total do abastecimento – e x – número de litros abastecidos – é $l(x) = 0{,}61x$, responde às seguintes questões:

2.1. Qual é a constante de proporcionalidade? Que significado tem essa constante?

2.2. Relativamente a esta função, determina:

a) $l(35)$;

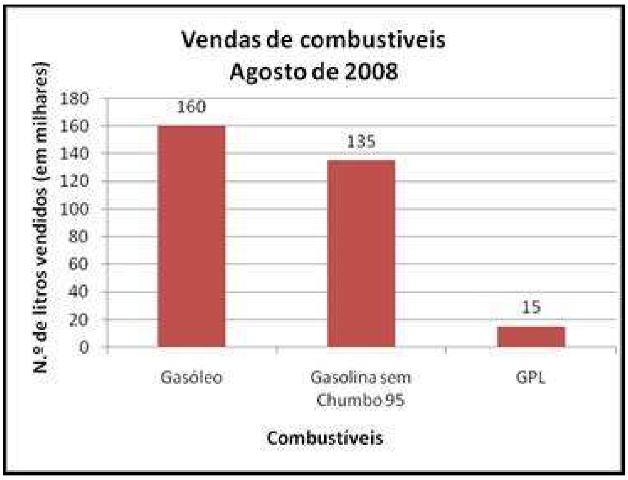
b) O valor de x para o qual $l(x) = 128{,}71$.

2.3. No dia 4, um consumidor abasteceu o seu automóvel com GPL num posto da Petro-PT cujo preço por litro, como vimos na questão 1, era de 0,66 euros, e gastou 36,96 euros. Se tivesse abastecido num posto Gás-PT, quanto teria poupado?

3. Tal como se previa, ao longo do mês de Agosto de 2008 os preços dos combustíveis sofreram várias alterações. Os preços médios por litro praticados num posto de abastecimento da Combo-PT estão indicados na tabela seguinte:

Combustíveis	Preços médios por litro (08/2008)
Gasóleo	€ 1,37
Gasolina sem Chumbo 95	€ 1,51
GPL	€ 0,62

O gráfico da figura mostra o número de litros de cada um dos combustíveis vendidos neste posto da Combo-PT no mês de Agosto de 2008:



3.1. No total, quantos litros de combustível foram vendidos por este posto da Combo-PT em Agosto de 2008?

3.2. Determina quanto dinheiro recebeu este posto durante este mês pela venda de todo o combustível de que dispunha.

Tarefa 7 – Combustíveis

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e no 3.º ciclo, nas aulas anteriores relativas a este tema, os alunos devem:

- Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
- Ser capazes de resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa;
- Ser capazes de interpretar gráficos de barras.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem reforçar a sua capacidade de:

- Analisar uma função a partir das suas representações;
- Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa.

Além disso, devem ser capazes de:

- Resolver problemas e modelar situações utilizando funções.

No âmbito das capacidades transversais, esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Traduzirem relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa pode ser resolvida num bloco de 90 minutos, destinando-se 60 minutos para a resolução e 30 minutos para a discussão geral. Tendo em conta que os alunos já trabalharam com situações de proporcionalidade directa e com a função linear nas tarefas 4, 5 e 6, espera-se que neste caso a resolução não seja muito demorada.

É de notar que esta tarefa inclui algumas questões com carácter problemático. As situações da realidade apresentadas são modeladas por funções de proporcionalidade directa com as quais os alunos devem trabalhar para poderem responder às questões propostas. Na discussão geral, as questões de carácter mais problemático podem gerar contributos diversificados por parte dos alunos, proporcionando situações interessantes de aprendizagem.

Ao longo da tarefa os alunos devem interpretar a informação dada de diversas formas: num anúncio que apresenta a situação a modelar; numa expressão algébrica de uma função dada; e num gráfico de barras. Ao modelarem a situação da venda do gasóleo através de uma função de proporcionalidade directa, os alunos traduzem uma relação expressa em linguagem natural em linguagem matemática.

No final da aula deve ser salientada a importância que as funções têm na modelação de situações da realidade, permitindo resolver os mais diversos tipos de problemas associados a essas situações.

2. Algumas explorações. Os alunos começam por analisar uma notícia de jornal sobre a descida dos preços dos combustíveis. Nesta notícia encontram diversas informações, que devem seleccionar e utilizar para a resolução das questões propostas. Devem, por exemplo, identificar o preço por litro de cada combustível antes da descida de preços, com base no quadro de preços que consta da notícia. Alguns alunos podem não estar familiarizados com as designações dos combustíveis e solicitar esclarecimentos sobre isso.

As primeiras duas perguntas suscitam a determinação do custo de um certo número de litros de GPL, antes e depois da descida dos preços. No entanto, a pergunta 1.2 pode ser resolvida sem a determinação do custo a pagar pelo GPL no dia 4, se os alunos optarem por multiplicar os 2 cêntimos da descida pelo número de litros em causa, o que lhes dá imediatamente o valor poupado pelo consumidor. A pergunta 1.3 leva os alunos a determinar o preço de um litro de GPL, que lhes permite decidir se o abastecimento ocorreu antes ou depois da meia-noite do dia 3 de Agosto. As restantes perguntas da questão 1 retomam conceitos já abordados na tarefa 4, como a generalização da relação entre as variáveis número de litros e custo em euros e a escrita da expressão algébrica da função. Alguns alunos, apesar do trabalho já desenvolvido neste âmbito, podem manifestar ainda algumas dificuldades em usar a notação relativa às funções.

Na questão 2, são também colocadas algumas perguntas de resposta simples sobre um novo fornecedor de combustível. No entanto, é de salientar que começa por ser dada a expressão algébrica da função, da qual os alunos devem obter as informações de que necessitam: constante de proporcionalidade e respectivo significado nesse contexto; determinação de um objecto dada uma imagem e de uma imagem dado um objecto, recorrendo à simbologia adequada. A pergunta 2.2 retoma a utilização de vocabulário específico deste tópico. Os alunos, contudo, podem sentir necessidade de relacionar os dados com o contexto do problema. Na alínea a) desta pergunta devem determinar o custo de 35 litros de GPL abastecido e na alínea b) o número de litros de combustível abastecidos quando o custo foi 128,71 euros. Este valor é bastante elevado comparativamente aos restantes valores que surgem na tarefa, o que pode ser interpretado como uma quantia consumida em mais que um abastecimento (por exemplo, ao longo de um mês). A pergunta 2.3 volta a envolver a determinação de um objecto dada uma imagem (isto é, do número de litros correspondente a 36,96 euros pagos ao posto da Petro-PT) e de uma imagem, dado um objecto (isto é, do custo a pagar ao posto da Gás-PT dado o número de litros já determinado). A partir destes valores, os alunos verificam que a diferença é o valor que foi poupado pelo consumidor.

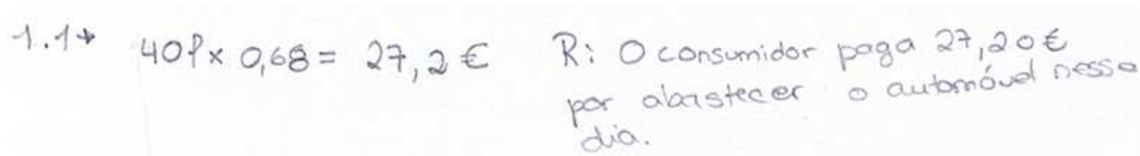
Na terceira questão, os dados referentes a um posto da Combo-PT são apresentados numa tabela (preços médios por litro dos combustíveis no mês de Agosto de 2008) e num gráfico de barras (número de litros de combustível vendidos nesse mês). Nesta fase, é feita uma conexão com o tema *Organização e tratamento de dados*, já trabalhado pelos alunos em anos anteriores. Estes devem relacionar os dados apresentados de diversas formas, relativos a cada um dos combustíveis, para determinar o número total de litros de combustível vendidos no mês de Agosto de 2008 nesse posto e a quantia total recebida pela venda de todo o combustível. Nesta última pergunta é necessário identificar a situação de proporcionalidade directa e usar os conhecimentos anteriores para determinar o valor referente à venda de cada um dos combustíveis no mês de Agosto.

Explorações de alunos

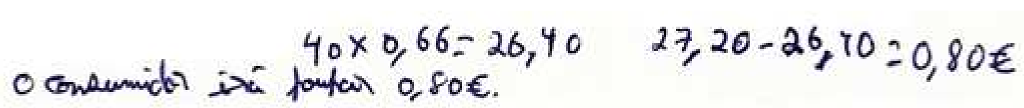
Nesta tarefa pede-se aos alunos que: (i) analisem uma situação de proporcionalidade directa relativa ao consumo de GPL; (ii) explorem uma situação de proporcionalidade directa, conhecida a expressão algébrica da função; e (iii) resolvam problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa.

1. Análise da situação de proporcionalidade directa descrita na notícia de jornal. Após a leitura da notícia, os alunos começam por identificar os dados relevantes para a resolução das diversas perguntas.

a) Os alunos aplicam os seus conhecimentos anteriores sobre proporcionalidade directa à situação apresentada:


1.1→ 40l × 0,68 = 27,2 €

R: O consumidor paga 27,20€ por abastecer o automóvel nesse dia.


40 × 0,66 = 26,40

27,20 - 26,40 = 0,80€

O consumidor irá poupar 0,80€.

Na pergunta 1.3 podem surgir várias estratégias, nomeadamente, a utilização de um processo de tentativa e erro ou a realização da operação de divisão. No exemplo abaixo, o aluno multiplica o número de litros abastecidos pelo preço por litro após a descida de preços, obtendo o valor que foi pago, indicado no enunciado. Caso tal não tivesse acontecido bastaria efectuar um procedimento análogo, com o preço por litro antes da baixa de preços, ou seja, 0,68 €, para obter uma resposta à pergunta.

$38 \times 0{,}66 = 25{,}08$ € R: O consumidor abasteceu depois da descida dos preços.

No exemplo que se segue, o aluno divide o valor total a pagar pelo número de litros de GPL abastecidos e obtém o preço de um litro, o que lhe permite identificar se este corresponde a um momento anterior ou posterior ao da descida dos preços por litro.

$25{,}08 : 38 = 0{,}66$ €

b) Os alunos determinam a constante de proporcionalidade dividindo os valores da variável dependente pelos valores correspondentes da variável independente:

1.4→

03/08/08

$\frac{27{,}2}{40\,l} = 0{,}68$

R: A constante de proporcionalidade é 0,68 €.

04/08/08

$\frac{26{,}4}{40\,l} = 0{,}66$

R: A constante de proporcionalidade é 0,66 €

c) Os alunos escrevem uma expressão algébrica que representa a função. Por vezes, é notória alguma dificuldade no uso da simbologia específica referente às funções:

1.5 Dia: 03/08/2008: $0{,}68 \times x = \ldots$ Dia: 04/08/2008: $0{,}66 \times x = \ldots$

1.5→

3/08/008

$p = 0{,}68 \times x$

4/08/08

$p = 0{,}66 \times x$

2. Análise da proporcionalidade directa com base na expressão algébrica. Conhecendo a expressão algébrica que representa uma função de proporcionalidade directa é possível, por exemplo, reconhecer a constante de proporcionalidade, determinar uma imagem dado um objecto e determinar um objecto dada a sua imagem.

a) O reconhecimento da constante de proporcionalidade directa e do seu significado no contexto do problema é importante para a continuação do trabalho do aluno:

2.1→ A constante de proporcionalidade é 0,61. Significa que cada litro custa 0,61 €.

b) As operações a realizar na pergunta 2.2 pode ser rapidamente identificadas pelos alunos de acordo com a sua compreensão do problema e a resposta pode envolver apenas a indicação dessas operações. Contudo, a utilização da notação própria das funções é um aspecto que os alunos devem desenvolver de um modo progressivo. Sendo esta a última tarefa prevista para este tema, a utilização desta notação deve ser compreendida pelos alunos e estes devem conseguir interpretá-la de acordo com o problema:

$l(35) = 0{,}61 \times 35 = 21{,}35$ €

$128{,}71 : 0{,}61 = 211$ ℓ

3. Interpretação de dados e utilização da proporcionalidade directa na resolução de problemas. A resolução da pergunta 2.3 e de toda a questão 3 envolve a procura de dados necessários para responder os problemas que não são dados de forma directa.

a) Recorrendo a dados já utilizados anteriormente, como é o caso do preço por litro do combustível do posto Petro-PT. Após a determinação do número de litros abastecidos, os alunos podem seguir, por exemplo, as duas estratégias seguintes:

$36{,}96 : 0{,}66 = 56$ litros

$0{,}61 \times 56 = 34{,}16$ €

$36{,}96 - 34{,}16 = 2{,}80$ €

R: O cliente teria poupado 2,80 €.

$\frac{36{,}96}{0{,}66} = 56$ litros

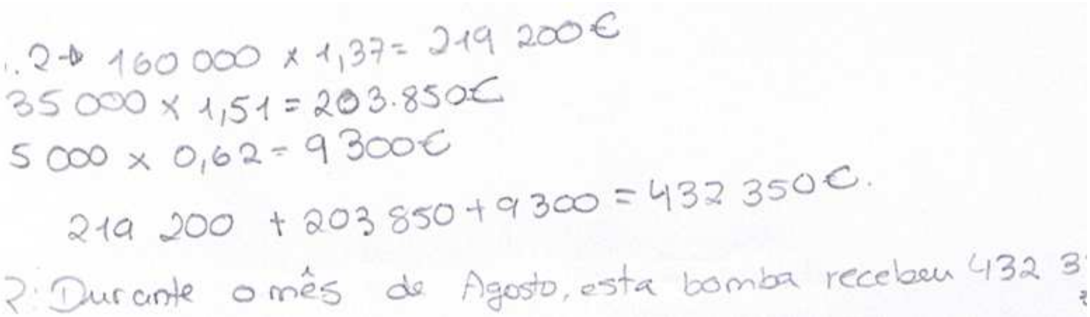
$56 \times 0{,}05 = 2{,}80$ €

Como poupa cinco cêntimos em cada litro poupa ao todo 2,80 €.

b) Recorrendo a dados retirados de uma tabela e de um gráfico. Na pergunta 3.1, por observação do gráfico os alunos determinam o total de litros de combustível vendidos pelo posto no mês de Agosto:

$160 + 135 + 15 = 310$ litros de combustível

Na pergunta 3.2 é necessário relacionar os dados da tabela com os dados do gráfico e, reconhecendo novamente a situação de proporcionalidade directa, calcular o valor recebido pela venda de cada um dos combustíveis e, de seguida, o valor total recebido:



Tarefa 8 – Passeio a pé

Observa os quatro gráficos que se seguem e, com base na informação que eles contêm, escreve uma história sobre os passeios a pé realizados por José e Mariana.

JOSÉ

Gráfico 1
Distância a casa vs Tempo

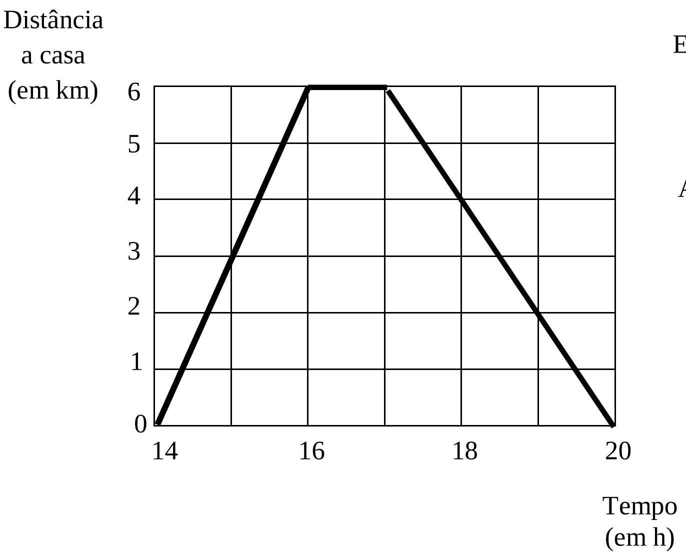
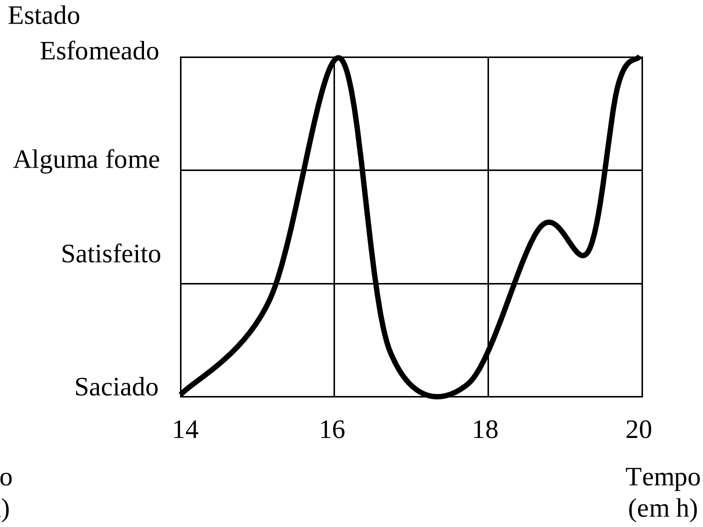


Gráfico 2
Fome vs Tempo



MARIANA

Gráfico 3
Distância a casa vs Tempo

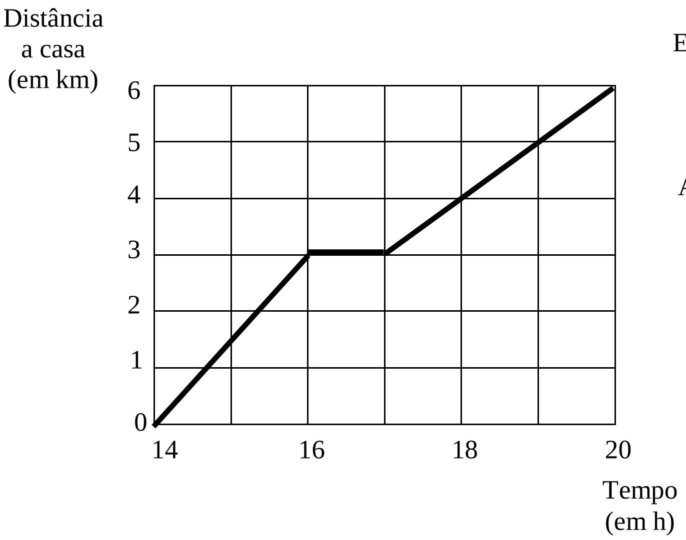
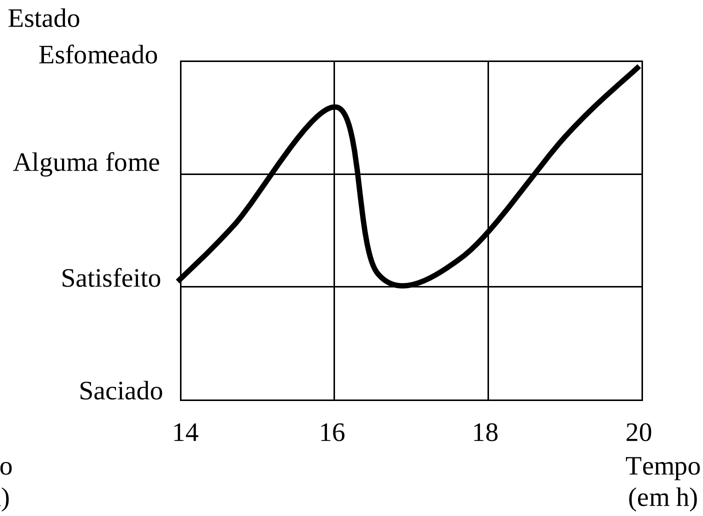


Gráfico 4
Fome vs Tempo



Tarefa 8 – Passeio a pé

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho realizado em aulas anteriores, os alunos devem ser capazes de identificar pares ordenados no plano cartesiano.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde esta é crescente, decrescente ou constante.

No âmbito das capacidades transversais esta tarefa constitui uma oportunidade para os alunos:

- Interpretarem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Exprimirem resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para o professor

1. Indicações gerais. Esta tarefa poderá ser realizada num bloco de 90 minutos, destinando-se os 45 minutos iniciais à sua resolução, em pares ou pequenos grupos, e os 45 minutos seguintes à apresentação e discussão do trabalho por eles realizado e à sistematização das principais ideias a salientar. Pretende-se que os alunos interpretem cada um dos gráficos apresentados, estabeleçam relações entre eles e elaborem uma história que estes gráficos possam representar.

Salienta-se que nos gráficos apresentados existem intervalos em que a variação da função é crescente, decrescente ou constante, sendo a análise desta variação essencial para uma correcta adequação a uma possível história.

Na fase inicial da resolução da tarefa, é natural que alguns sintam dificuldade em produzir um texto adequado à informação representada nos gráficos. Alguns alunos podem mesmo entusiasmar-se pela criação de histórias de grande complexidade. Para evitar que se percam em pormenores menos relevantes, o professor deve salientar a importância de manter a coerência entre as situações que vão propondo e os gráficos apresentados.

A comunicação – oral e escrita – assume um papel muito importante nesta tarefa, pelo que será conveniente, na discussão geral, procurar que os alunos utilizem terminologia adequada e que os diversos grupos partilhem os aspectos focados em cada uma das composições, de modo a que a análise dos gráficos se possa tornar mais completa.

No final da aula deverão ser retomados os principais elementos que os alunos tiveram que identificar nos diversos gráficos para produzirem histórias coerentes e adequadas ao contexto proposto: as coordenadas de pontos específicos, a ordenada na origem e a variação existente em alguns intervalos.

2. Algumas explorações. Comentamos, de seguida, os principais aspectos a ter em atenção na análise dos gráficos.

Gráfico 1. Às 14 h José encontra-se em casa pois o gráfico indica que a essa hora a distância a casa é zero. Entre as 14 h e as 16 h desloca-se a uma velocidade constante e às 16 h encontra-se a 6 km de casa. Deslocou-se a uma velocidade constante pois o gráfico apresenta um segmento de recta entre os pontos (14, 0) e (16, 6). A velocidade pode obter-se determinando a razão entre o espaço percorrido e o tempo levado a percorrê-lo: $v = \frac{6}{3} = 2$ km/h. Assim, em cada instante, é possível saber a que distância de casa José se encontra. A tabela 1 apresenta alguns exemplos para diversos instantes:

Tabela 1

Tempo (em h)	14 h	14 h 30 min	15 h	15 h 15 min	15 h 30 min	15 h 45 min	16 h
Tempo decorrido (em h)	0	0,5	1	1,25	1,5	1,75	2
Distância a casa (em km)	0	1,5	3	3,75	4,5	5,25	6

Entre as 16 h e as 17 h, José mantém-se a 6 km de casa. Às 17 h inicia o seu regresso a casa, onde chega às 20 h. Realiza esta parte do passeio também a uma velocidade constante. Contudo, esta velocidade é inferior à velocidade com que se deslocou anteriormente, uma vez que demora 3 h neste percurso de regresso. Mais uma vez, a velocidade é constante dado que entre os pontos (17, 0) e (20, 0) o gráfico apresenta um segmento de recta. A velocidade, nesta situação é: $v = \frac{6}{3} = 2$ km/h, constatando-se que é menor entre as 17 h e as 20 h do que entre as 14 h e as 16 h. É possível verificar este facto também por meio da inclinação dos segmentos de recta. Atendendo ao valor constante da velocidade, é possível saber a que distância de casa José se encontra, em cada instante. A tabela 2 apresenta alguns exemplos:

Tabela 2

Tempo (em h)	17 h	17 h 30 min	18 h	18 h 15 min	19 h 30 min	19 h 45 min	20 h
Tempo decorrido (em h)	0	0,5	1	1,25	2	2,5	3
Distância a casa (em km)	6	5	4	3,5	2	1	0

Gráfico 2. Às 14 h José não tem fome, está "saciado". Com o decorrer do tempo, a sua fome vai aumentando e às 16 h está esfomeado. A essa hora lancha e a sua fome diminui. Cerca das 17 h sente-se novamente "saciado". Por volta das 19 h, apesar de não se sentir com muita fome, come um pouco e fica quase "satisfeito". Às 20 h sente-se novamente esfomeado.

Relacionando os dois gráficos, verifica-se que José faz um passeio até estar a 6 km de casa e mantém-se a essa distância de casa durante uma hora. Nesse período de tempo lancha e sacia a sua fome. No seu regresso a casa come um pouco, sem efectuar qualquer paragem. Quando chega a casa, às 20 h, está de novo esfomeado.

Gráfico 3. Às 14 h a distância de Mariana a casa é nula, o que significa que ela parte de casa. Entre as 14 e as 16 h desloca-se a uma velocidade constante e entre as 16 h e as 17 h encontra-se a 3 km de casa. Tal como no caso de José, verifica-se que a sua velocidade é constante, pois o gráfico apresenta um segmento de recta entre os pontos (14, 0) e (16, 3). Para determinar a velocidade efectua-se a divisão entre o espaço percorrido e o tempo dispendido nesse percurso: $v = \frac{3}{2} = 1{,}5$ km/h. Assim, é possível saber a que distância de casa Mariana se encontra, em cada instante, do intervalo $[14, 16]$. A tabela 3 apresenta alguns exemplos:

Tabela 3

Tempo (em h)	14 h	14 h 30 min	15 h	15 h 15 min	15 h 30 min	15 h 45 min	16 h
Tempo decorrido (em h)	0	0,5	1	1,25	1,5	1,75	2
Distância a casa (em km)	0	0,75	1,5	1,875	2,25	2,625	3

Após a hora a que se mantém a uma distância de casa constante, Mariana afasta-se ainda mais, agora com uma velocidade inferior à do seu movimento anterior. Desloca-se até às 20 h ficando a uma distância de casa de 6 km. Demora 3 h para percorrer 3 km, pelo que a sua velocidade é menor do que no percurso anterior, em que demorou 2 h a percorrer essa mesma distância. De novo se verifica a existência de uma velocidade constante. Entre os pontos (17,0) e (20, 0) o gráfico apresenta um segmento de recta. A velocidade, nesta situação, é dada por: $v = \frac{3}{3} = 1$ km/h. Mais uma vez, verifica-se que a velocidade é menor entre as 17 h e as 20 h do que entre as 14 h e as 16 h. Tal como sucedeu nos gráficos anteriores, é possível confirmar este facto analisando a inclinação dos segmentos de recta.

Atendendo ao valor constante da velocidade, é possível saber a que distância de casa Mariana se encontra, em cada instante. A tabela que se segue apresenta alguns exemplos:

Tabela 4

Tempo (em h)	17 h	17 h 30 min	18 h	18 h 15 min	19 h 30 min	19 h 45 min	20 h
Tempo decorrido (em h)	0	0,5	1	1,25	2	2,5	3
Distância a casa (em km)	3	3,5	4	4,25	5	5,5	6

<u>Gráfico 4</u>. Às 14 h Mariana está satisfeita. Com o decorrer do tempo, a sua fome vai aumentando e às 16 h está com muita fome, quase "esfomeada". A essa hora lancha e a sua fome diminui. Pouco depois Mariana sente-se "satisfeita". No entanto, a sua fome aumenta a partir daí e, às 20 h, sente-se esfomeada. Relacionando os dois gráficos, verifica-se que Mariana faz um passeio e fica a 3 km de casa, mantendo-se a essa distância de casa durante uma hora. Nesse período de tempo lancha e passa a sentir-se "satisfeita". Às 17 h continua o seu passeio e afasta-se cada vez mais de sua casa. Às 20 h encontra-se a 6 km de casa e está "esfomeada".

A análise dos quatro gráficos em simultâneo permite considerar a situação conjunta de José e Mariana. É lícito imaginar que ambos se conheçam e estejam juntos entre as 16 e as 17 h. Para que isso possa suceder, José e Mariana saem de suas casas às 14 h e dirigem-se a um local que fica a 6 km da casa de José mas apenas a 3 km da casa de Mariana. Após esse período, em que lancham, José regressa a casa e Mariana, pelo contrário, continua o seu percurso, afastando-se de casa.

Explorações de alunos

Os exemplos que se indicam em seguida foram produzidos por alunos trabalhando em grupos de 4 elementos. A forma como os alunos associam os gráficos e as características que salientam em cada um deles influenciam decisivamente as suas histórias. Alguns olham para os quatro gráficos em separado, outros agrupam-nos dois a dois, observando o que sucede a José e a Mariana, e outros, ainda, optam por considerar todos os gráficos em simultâneo.

1. Interpretação dos gráficos "Fome/Tempo" e "Distância/Tempo", em separado, primeiro para José e, depois, para Mariana.

Grupo A

José

Gráfico da fome: à medida que as horas vão passando, ele vai ficando com fome. Quando ficou esfomeado, foi comer até ficar saciado. As horas[4] vão passando e a certa altura ele nem fica com muita fome, nem com pouca fome. As horas passaram e ele ficou esfomeado outra vez.

[4] Os alunos referem-se às grandezas pelas respectivas unidades de medida, facto que é bastante frequente neste nível etário e que deve ser assinalado na discussão geral como um aspecto a melhorar.

Gráfico da distância: O José saiu de casa às 14 e andou 6 km até às 16 h. Voltou para casa às 17 h e andou 6 km.

Mariana

Gráfico da distância: a Mariana saiu de casa às 14 h e andou 3 km até às 16. Das 17 até às 20 h andou 3 km. Ela não voltou a casa, a distância vai aumentar.

Gráfico da fome: às 14 h a Mariana estava satisfeita, às 16 ela ficou com alguma fome. Às 16 h e 30 min foi comer até ficar satisfeita. Às 20 ela estava esfomeada.

Nesta resposta, os alunos analisam o que sucede em cada um dos quatro gráficos em separado. A análise do gráfico “Fome/Tempo” relativo a José tem em conta o aumento ou a diminuição da fome, enquanto que a análise do gráfico relativo a Mariana indica os quatros pontos onde se dão alterações significativas, com referência específica aos diversos momentos e aos respectivos estados de fome. Em relação aos gráficos “Distância/Tempo”, os alunos identificam correctamente o momento de partida de José e Mariana e a distância percorrida em cada parte do passeio. Além disso, referem que José regressa ao local de onde partiu enquanto Mariana se afasta mais 3 km.

2. Interpretação dos gráficos “Fome/Tempo” e “Distância/Tempo”, em conjunto, primeiro para José e, depois, para Mariana.

Grupo B

José

Às 14 h, o José saiu de casa de barriga cheia, pois tinha acabado de almoçar. Durante 2 h percorreu 6 km até chegar ao seu destino. Quando lá chegou estava esfomeada e parou uma hora para comer (quanto mais andou, com mais fome ficou, ficando de novo esfomeado). Às 17 h retomou o seu caminho para casa. Durante o caminho, a sua fome aumentou, e às 19 h comeu uma sandes para saciar um pouco o estômago. Continuou o seu trajecto até casa chegando a casa esfomeado e cansado, às 20 h, depois de 12 km de passeio.

Mariana

Às 14 h, a Mariana saiu de casa satisfeita porque a mãe não estava em casa e ela teve que improvisar o seu almoço. Durante 2 h percorreu 3 km, parando para comer durante uma hora pois estava quase esfomeada. Às 17 h retomou o seu caminho percorrendo 3 km durante 3 h, de novo satisfeita. Quando chegou ao seu destino, às 20 h estava esfomeada.

Grupo C

José

O José saiu de casa eram 14 h.
Andou 6 km até ficar esfomeado e enquanto descansava aproveitou e comeu.
Depois de ter lanchado andou mais 6 km, demorando a chegar a casa 3 h.
Quando chegou a casa estava esfomeado e já eram 20 h.
Antes de chegar a casa, a meio do caminho, comeu um bolo e um sumo que levava

na mochila.

Nota: No primeiro percurso andou 6 km demorando apenas 2 h, enquanto que no segundo percurso demorou 3 h percorrendo a mesma distância, ou seja, no primeiro percurso andou mais rápido do que no segundo percurso. No total andou 12 km.

Mariana

A Mariana saiu de casa eram 14 h.
Já eram 16 h e já tinha andado 3 km.
Demorou 1 hora a lanchar. Depois de ter lanchado continua a andar. Andou mais 3 km ficando esfomeada.

Nota: No primeiro percurso andou 3 km demorando apenas 2 h, enquanto que no segundo percurso demorou 3 h percorrendo a mesma distância, ou seja, no primeiro percurso andou mais rápido que no segundo. No total andou 6 km.

Em ambas as respostas, os alunos analisam separadamente as situações de José e Mariana. A primeira resposta aborda correctamente aspectos específicos do gráfico "Distância/Tempo" como os momentos e os locais de partida e chegada com os vários estados de fome por que passam José e Mariana, apontando diversas acções que podem ter justificado a esses estados: "ter acabado de almoçar", "parar uma hora para comer", "comer uma sandes para saciar o estômago", "improvisar o seu almoço". A segunda resposta apresenta como um ponto importante a análise das velocidades. A existência de respostas abordando diferentes aspectos, por parte dos grupos, deve ser explorada na discussão geral, uma vez que pode tornar mais rica a análise efectuada.

3. Interpretação conjunta dos gráficos "Distância/Tempo" e "Fome/Tempo" para José e Mariana em simultâneo. A análise dos quatro gráficos em simultâneo requer a coordenação de um maior número de aspectos, pelo que pode tornar-se mais confusa para os alunos. No entanto, alguns deles procuram enveredar por essa via, na medida em que o envolvimento das duas personagens em simultâneo abre novas possibilidades às histórias que constroem. É o que sucede numa das resoluções em que os alunos referem que: "José foi a um café às 16 h comer uma sandes. Estava lá uma sua amiga, a Mariana. Almoçaram os dois, beberam um sumo e comeram um gelado de morango". Esta inclusão das duas personagens exige da parte dos alunos a reflexão sobre um possível local de encontro e os respectivos pontos de partida: "O José e a Mariana podem ter-se encontrado no café às 16 h mas a Mariana só mora a 3 km do café e o José a 6 km."

4. Aspectos específicos a salientar. As histórias construídas pelos alunos podem assumir diversos contornos mas devem ser valorizadas tendo em conta o modo como reflectem as características principais dos gráficos. Assim, é importante que assinalem:

a) *Tempos e locais de partida e de chegada.* No caso de José, os alunos podem fazer afirmações como: "Às 14 h, o José saiu de casa de barriga cheia, pois tinha acabado de almoçar"; ou "Continuou o seu trajecto até casa chegando a casa esfomeado e cansado, às 20 h, depois de 12 km de passeio". No que diz respeito a Mariana, alguns alunos referem simplesmente: "Às 14 h, a Mariana saiu de casa satisfeita (…) Quando chegou ao seu destino, às 20 h estava esfomeada"; ou, de forma mais elaborada: "A Mariana saiu de casa às 14 h para ir lanchar ao centro comercial. Quando chegou ao lá já eram 16 h (…) A Mariana às 17 h foi para casa de uma amiga que ficava a 3 km do centro comercial e chegou às 20 h esfomeada."

b) *Distâncias totais percorridas.* Alguns alunos mencionam a distância percorrida (usualmente, indicando o número de quilómetros): José chegou a casa "esfomeado e cansado, às 20 h, depois de 12 km de passeio" e Mariana "no total andou 6 km".

c) *Período em que a distância a casa é constante.* A maior parte dos alunos interpreta as partes constantes dos gráficos, entre as 16 h e as 17 h, como momentos de paragem nos percursos de José e Mariana. Referem, no caso de José: "Quando lá chegou estava esfomeado e parou uma hora para comer (quanto mais andou, com mais fome ficou, ficando de novo esfomeado). Às 17 h retomou o seu caminho para casa". E, no caso de Mariana: "Durante 2 h percorreu 3 km, parando para comer durante uma hora pois estava quase esfomeada." Outra interpretação possível, embora menos plausível, para a permanência de José ou Mariana a uma distância constante de sua casa durante um certo tempo é a existência de um percurso circular com centro nessa casa e raio igual a essa distância.

d) *Velocidades.* Um outro aspecto importante a analisar é a velocidade com que José e Mariana fazem parte dos seus percursos. É o que sucede quando os alunos observam relativamente a José: "No primeiro percurso andou 6 km demorando apenas 2 h, enquanto que no segundo percurso demorou 3 h percorrendo a mesma distância, ou seja, no primeiro percurso andou mais rápido do que no segundo percurso"; e relativamente a Mariana: "No primeiro percurso andou 3 km demorando apenas 2 h, enquanto que no segundo percurso demorou 3 h percorrendo a mesma distância, ou seja, no primeiro percurso andou mais rápido que no segundo".

5. Interpretações incorrectas ou sem justificação aparente.

Grupo D

O passeio do José

O José saiu de casa para dar um passeio às 14 h, foi ao Estádio Municipal para ver o jogo da sua equipa favorita. O jogo começava às 17 h, mas às 15 h e 50 min estava esfomeado. Então começou a andar mais depressa, mas pelo caminho começou a ter fome e às 19 h foi a um café comer um bolo e beber um café, continuou o seu caminho para casa, quando chegou a casa eram 20 h e estava esfomeado.

Nesta resposta, os alunos constroem uma história que contém aspectos incompatíveis com as informações dadas pelo gráfico. Em primeiro lugar, não se apercebem de que a velocidade é constante e afirmam que José começou a "andar mais depressa". Referem também, sem apresentar uma explicação compatível com o gráfico, que o jogo se inicia às 17 h. Por fim, indicam que José parou para ir a um café às 19 h, momento em que terá comido, o que contradiz a diminuição progressiva da distância a que ele se encontra de casa representada no gráfico.

Referências

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. [Acedido em 21/06/2009 de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf]

Algumas das tarefas aqui apresentadas foram adaptadas de livros e artigos com materiais para professores, sendo discutidos do ponto de vista do trabalho com o aluno.

No tópico Sequências e regularidades:

Tarefa 1 - Adaptada de Kindt, M., Roodhardt, A., Dekker, T., Wijers, M., Spence, M. S., Simon, A. N., Pligge, M. A., & Burril, G. (2006). *Patterns and figures*. Chicago, IL: Holt, Rinehart & Winston / Encyclopaedia Britannica.

Tarefa 2 – Adaptada de Wijers, M., Roodhardt, A., van Reeuwijk, M., Dekker, T., Burrill, G., Cole, B. R., & Pligge, M. A. (2006). *Building formulas*. Chicago, IL: Holt, Rinehart and Winston / Encyclopaedia Britannica.

Tarefa 3 – Adaptada de Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Tarefa 5 – Adaptada de Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann. (Esta tarefa tem por base um conjunto de problemas atribuídos a Alcuíno de York, monge inglês do séc. VIII).

No tópico Funções:

Tarefa 8 – Adaptada de Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.