A INTEGRAÇÃO DA FOLHA DE CÁLCULO NO ESTUDO DO TÓPICO EQUAÇÕES DO 2.º GRAU NO 9.ºANO DE ESCOLARIDADE

Sandra Nobre
Escola Básica 2, 3 Professor Paula Nogueira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Bolseira da FCT
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT - Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: Neste artigo analisamos o papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no tópico Equações do 2.º grau. Os objetivos são (i) perceber como é que os alunos abordam as tarefas propostas na folha de cálculo, isto é, a que representações recorrem e que tipo de relações estabelecem e (ii) de que modo esse trabalho influencia o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. A análise de dados incide nas produções de uma aluna, Ana, e em alguns diálogos entre os alunos da turma e a professora, que ocorreram durante a resolução de tarefas com a folha de cálculo. Os dados foram recolhidos durante a realização de uma experiência de ensino em tópicos de Álgebra. Verificamos que a folha de cálculo foi importante para Ana desenvolver o seu pensamento algébrico ao longo do estudo do tópico, uma vez que proporcionou a compreensão de significados dos conceitos fundamentais antes da sua aprendizagem formal. Possibilitou ainda o estabelecimento de conexões entre diferentes representações que permitiram o desenvolvimento da compreensão relacional de conceitos e procedimentos estudados no tópico.

Palavras-chave: Folha de cálculo, pensamento algébrico, equações do 2.º grau.

Introdução

Nas últimas décadas as novas orientações curriculares têm vindo a fazer eco junto dos professores de Matemática e na sua prática letiva. A Álgebra é um tema que tem merecido uma especial atenção por ser um campo em que os alunos, habitualmente, manifestam muitas dificuldades. O atual programa de Matemática para o ensino básico (ME, 2007) preconiza uma nova orientação para o ensino da Álgebra, valorizando o pensamento algébrico logo a partir dos primeiros anos. No 3.º ciclo, o propósito principal para o ensino da Álgebra assenta no desenvolvimento, nos alunos, da linguagem e do pensamento algébrico, na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos em contextos diversos. A resolução de problemas é uma atividade privilegiada e o programa recomenda que sejam proporcionadas, aos alunos, experiências informais antes da manipulação algébrica formal. Quanto aos recursos, aponta a folha de cálculo como um bom meio para estabelecer relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos na realização de tarefas e na resolução de problemas.

Segundo Skemp (1976), muitas das vezes, é mais fácil para os alunos obterem uma compreensão instrumental do que uma compreensão relacional. Uma compreensão instrumental requer menos conhecimento e permite obter uma resposta correta mais rapidamente. Contudo, este tipo de compreensão requer memorização e sem a compreensão relacional a aprendizagem não pode ser adaptada a novas tarefas e os alunos não conseguem fundamentar as suas respostas. Por estes motivos consideramos que é fundamental dar especial atenção ao modo como os novos conceitos ou procedimentos são introduzidos de modo a reduzir a possibilidade dos alunos aprenderem apenas por memorização de regras, pelo que devem ser proporcionadas experiências, sempre que possível, que os ajudem na compreensão do significado dos processos utilizados. Neste artigo procuramos analisar como é que uma aluna, Ana, aborda as tarefas propostas na folha de cálculo, no estudo do tópico Equações do 2.º grau, destacando as representações utilizadas e o tipo de relações estabelecidas. Por outro lado, pretendemos perceber de que forma este trabalho na folha de cálculo contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico de Ana.

Pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se no uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais gerais sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efetivamente ser consideradas algébricas.

Pensar algebricamente abrange conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas. Implica flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que o termo Álgebra engloba dois aspetos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. Estes autores afirmam que atualmente há uma tendência para separar estes aspetos, por duas razões: (i) o reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos, nos primeiros anos. Nesta perspetiva, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente.

Reconhecemos que a utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra pois constitui uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, permitindo expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. No entanto, neste estudo, assumimos esta perspetiva mais abrangente de pensamento algébrico, considerando que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

Porquê a folha de cálculo?

A primeira autora deste artigo assumiu também o papel de professora de Matemática dos alunos participantes no estudo do 7.º ao 9.º ano de escolaridade. No 8.º ano, nas aulas de Estudo Acompanhado, a resolução de problemas foi a atividade privilegiada tendo sido incentivado o recurso dos alunos à folha de cálculo. A maior parte dos problemas propostos era provenientes do campeonato de resolução de problemas Sub 14[1]. Ao longo deste ano letivo foi possível verificar pelas resoluções dos alunos uma crescente apropriação da ferramenta quer ao nível da sua utilização, quer ao nível da linguagem por parte dos alunos.

No que respeita a aspetos destacados na literatura, têm sido desenvolvidos vários estudos no âmbito da utilização da folha cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico. Esses estudos mostram que esta ferramenta constitui um recurso pedagógico com grande potencial para a construção de conceitos algébricos, para o estabelecimento de relações funcionais e para representação de sequências ou de procedimentos de natureza recursiva usados, por vezes, na resolução de problemas de Matemática. Os resultados do projeto AnA (Sutherland, 1993) mostram que quando se trabalha com a folha de cálculo os alunos aprendem a entender um símbolo como a representação de um número geral, confirmando os resultados de alguns estudos anteriores. A interação dos alunos com o computador em atividades algébricas suporta o desenvolvimento do pensamento em termos específicos para um pensamento em termos gerais de objetos.

Na folha de cálculo, os alunos ao escreverem fórmulas que relacionem algumas células podem ver os resultados numéricos no computador. Este *feedback* é importante para a atividade dos alunos, pois pode ser suficiente para os incentivar a uma reconstrução das fórmulas utilizadas, o que soluciona o problema encontrado e não apenas para um caso em particular. Isto é um aspeto que reforça o facto da folha de cálculo ser um impulsionador da generalização em Matemática. A visualização do *output* da folha de cálculo suscita uma nova reflexão acerca do problema em causa e, em particular, da fórmula introduzida. Isto estimula a evolução do pensamento matemático, permitindo aos alunos realizar trabalho de investigação (Calder, 2009).

A folha de cálculo é reconhecida por diversos autores (e.g., Ainley *et al*., 2004; Dettori *et al*., 2001; Rojano, 2002) como uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico. A representação simbólica na folha de cálculo das relações presentes num problema é iniciada através da nomeação de colunas e da escrita de fórmulas. Este recurso proporciona um ambiente de trabalho estimulante que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e incentiva os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos (Rojano, 2002). Para além disso, esta ferramenta contribui para que os alunos utilizem a Álgebra com base nas referências das células para expressar o seu raciocínio durante as atividades, criando uma ponte entre a linguagem natural e a notação algébrica (Ainley *et al*., 2004).

O reconhecimento dos elementos envolvidos num problema e o estabelecimento de relações entre eles constitui um passo fundamental para utilizar a Álgebra na resolução de problemas. Trata-se de um processo que pode ser facilitado pela folha de cálculo, como referem Dettori *et al*. (2001). Estes autores consideram a folha de cálculo bastante útil para a introdução da Álgebra, podendo ser um novo meio a integrar na resolução de problemas e ajudar a compreender o que significa resolver uma equação mesmo antes da aprendizagem formal da

[1] Campeonato organizado pelo Departamento de Matemática da FCT da Universidade do Algarve http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub14.html

resolução de equações. Pode ainda facilitar o raciocínio perante um problema, contribuindo para selecionar a informação relevante, e funcionar de forma a introduzir as capacidades de generalização, abstração e síntese, que são fundamentais na Matemática. Estes fatores foram decisivos para que considerássemos pertinente realizar uma experiência de ensino no 9.º ano, com estes alunos, em tópicos de Álgebra, nomeadamente para o estudo das equações do 2.º grau.

Representações na folha de cálculo

A folha de cálculo dá acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005):

Linguagem natural – é possível introduzir e editar um texto em qualquer célula, em particular para a nomeação de colunas;

Introdução de fórmulas – é possível realizar automaticamente operações que envolvem as células que contêm dados do problema ou que resultam de outros cálculos;

Construção de gráficos – a construção de gráficos dinâmicos, a partir de dados numéricos já inseridos;

Registo "variável-numérica" – é uma funcionalidade específica da folha de cálculo que diz respeito ao registo numérico mas, ao mesmo tempo, apela à noção de variável. Permite a variação de valores numéricos, por exemplo, para resolver problemas através da tentativa-e-erro. Esta funcionalidade pode comparar-se à criação de um parâmetro que se pretende estudar.

Uma das funções que torna mais distinta esta ferramenta é o arrastamento, ao longo de uma coluna, da alça de uma célula que contém uma fórmula. Esta ação gera uma "variável-coluna".

Os números presentes nas células da folha de cálculo podem ter uma natureza diversa. Um número pode ser um *input* numérico, um *output* de uma fórmula, ou ainda um *output* de uma sequência numérica gerada automaticamente pelo Excel. No caso em que o número é um *output* de uma fórmula, a aparência corrente da célula é a de um número. No entanto, a célula pode mostrar temporariamente a sua aparência de fórmula. Assim, uma característica importante da folha de cálculo é a de encobrir as fórmulas (ou seja, a parte algébrica), mantendo sempre visível a parte numérica.

A experiência de ensino

No início do estudo do tópico os alunos resolveram uma ficha de diagnóstico com o principal objetivo de se obterem elementos acerca dos seus conhecimentos. Na intervenção pedagógica a resolução de problemas assumiu o papel principal, sendo, no entanto, ainda propostas outras tarefas. Nalgumas situações foi sugerida a resolução com a folha de cálculo. Pretendíamos, nesta fase, que a folha de cálculo servisse de ponto de partida para a aprendizagem formal da Álgebra. Algumas das tarefas iniciais eram problemas suscetíveis de resoluções formais do ponto de vista algébrico. No entanto, primeiramente, foi proposta a exploração desses problemas com recurso à folha de cálculo. Para cada uma destas tarefas foram promovidos momentos de discussão e de síntese, procurando estabelecer uma ponte entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico, se possível a partir dos próprios alunos.

O estudo do tópico equações do 2.º grau

No estudo deste tópico pretende-se que os alunos resolvam equações do 2.º grau completas e incompletas. O programa propõe que os alunos recorram aos casos notáveis da multiplicação, tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios, e que na resolução de equações do 2.º grau seja utilizada a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores, lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente (ME, 2007).

Na planificação desde tópico foi delineado um conjunto de tarefas tendo em conta estas orientações. Na tabela 1 apresentamos a distribuição de tarefas e os principais recursos utilizados. O trabalho na folha de cálculo foi sempre acompanhado por algumas questões resolvidas com papel e lápis de modo a promover articulação entre o trabalho com estes recursos.

Tabela 1: Tarefas e principais recursos utilizados ao longo do estudo do tópico

Tarefas	A-3: Diagnóstico	B-3:As idades dos irmãos	C-3: Factorização	D-3: A bola saltitona	E-3: A experiência no laboratório	F-3: A fórmula resolvente	G-3: Problemas
Recursos	Lápis e Papel	Folha de cálculo	Lápis e papel	Folha de cálculo	Folha de cálculo	Lápis e papel	Lápis e papel

Quando se considerou oportuno, as equações foram trabalhadas em paralelo com a respetiva representação gráfica. Em particular, para alguns dos problemas propostos para resolver na folha de cálculo foi solicitada a representação gráfica para uma melhor compreensão por parte dos alunos do significado de uma função quadrática e das suas soluções. Este aspeto vem ao encontro de Vaiyavutjamai e Clements (2006) que explicam que os alunos até conseguem obter as soluções de uma equação do tipo $(x-a)(x-b)=0$ mas não sabem o que elas representam, não conseguem interpretar o seu significado. Outras dificuldades nas equações do 2.º grau surgem, muitas vezes, associadas ao conceito de incógnita. Didiş *et al*. (2011) corroboram estes autores afirmando que os alunos têm dificuldades em compreender o significado dos símbolos nas equações do 2.º grau e acrescentam que um aspeto que pode melhorar a compreensão é apresentar equações não apenas na forma canónica mas também noutras formas, salientando que este aspeto pode ainda promover um melhor entendimento de técnicas de factorização. Por outro lado, salientam que se o professor encorajar os alunos a utilizar diferentes técnicas na resolução de equações do 2.º grau pode melhorar a compreensão que os alunos têm dessas equações. No seu estudo, com alunos do 10.º ano, Didiş *et al*. (2011) verificaram ainda que os alunos ao aplicarem a lei do anulamento do produto ignoravam o fator nulo, tendo recomendado que é importante que o professor proporcione tarefas que levem os alunos a compreenderem e a assumirem este fator em vez de apresentar esta técnica apenas como uma regra.

Estes aspetos também foram tidos em consideração na planificação deste tópico. Na figura 1 apresenta-se uma imagem, com o ambiente da sala de aula, durante a resolução de uma tarefa com a folha de cálculo.

Figura 1: Turma durante a resolução da tarefa D-3 com a folha de cálculo

Metodologia de investigação

Abordagem e design. No presente estudo pretendemos compreender o contributo da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano, no estudo do tópico equações do 2.º grau. Para tal é indispensável auferir uma visão holística dos fenómenos em estudo, razão pelo qual optámos por uma metodologia qualitativa. Dada a natureza do trabalho, a metodologia segue o paradigma interpretativo uma vez que pretendemos estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994). Esta investigação segue um *design* de *experiência de ensino* com recurso a estudos de caso, onde a primeira autora, assume o duplo papel de professora da turma e investigadora.

Recolha e análise de dados. A recolha documental ocupa um lugar de grande relevo, pois constituiu uma fonte privilegiada para a obtenção de informação. Em sala de aula, procedeu-se à recolha das produções dos alunos, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante traduzida em notas de campo. A análise de dados envolveu essencialmente análise de conteúdo (Bardin, 1977). Depois de transcritas as gravações áudio, os registos da sequência de *frames* no Excel e as entrevistas, procedemos à sua análise.

Resultados

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de tarefas, dando especial atenção a duas que foram propostas para explorar na folha de cálculo. Destacamos nas produções de uma aluna, Ana, aspetos que se revelaram cruciais no desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Tarefa A-3. Nesta tarefa, de diagnóstico, Ana conseguiu determinar termos próximos e distantes e ainda o termo geral de uma sequência em que expressão geradora é um polinómio do 2.º grau, resolveu equações do 2.º grau incompletas utilizando a noção de raiz quadrada, no entanto não concluiu a resolução de uma equação em que deveria utilizar a lei do anulamento do produto. Na resolução de um problema que envolve uma relação entre números a aluna consegue escrever uma equação do 2.º grau que, de seguida, resolve por tentativa e erro. Quanto aos casos notáveis da multiplicação, em que foi pedido para completar espaços em branco como mostra a figura 2, a aluna aparentemente não demonstrou dificuldades na resposta à questão colocada.

7. Completa os espaços em branco.

7.1. $(x+\underline{2})^2=\underline{x^2}+4x+4$ **7.2.** $(\underline{3x}+1)^2=9x^2+6x+\underline{1}$

7.3. $(5x-\underline{2})^2=\underline{25x^2}-\underline{20x}+4$ **7.4.** $x^2-\underline{16}=(\underline{x}+4)(\underline{x}-4)$

Figura 2: Resolução de Ana (ficha de diagnóstico)

Na turma, grande parte dos alunos não respondeu a esta questão e afirmou não se lembrar, pelo que a professora considerou necessário propor outras tarefas que permitissem ampliar a compreensão acerca dos casos notáveis, antes de avançar propriamente para a resolução das equações do 2.º grau completas.

Tarefa B-3. Esta tarefa, proposta para explorar na folha de cálculo, posteriormente resolvida pelos alunos, envolveu a diferença de quadrados (figura 3).

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

1. O Carlos, a Ana e o Ricardo são três irmãos. A Ana tem um ano a mais do que o Carlos e um ano a menos do que o Ricardo.

No outro dia a Ana estava a fazer operações com os números que correspondem às suas idades e disse para os irmãos:

- Comparei o produto das vossas idades com o quadrado da minha idade e descobri uma coisa muito interessante! Vejam se também conseguem descobrir!

Figura 3: Enunciado do problema “As idades dos irmãos”

Inicialmente foi solicitado aos alunos que respondessem à questão “O que poderá Ana ter descoberto?”. Ana começou logo por escrever na folha de cálculo “Ao lermos o enunciado, reparamos que o irmão mais novo é Carlos, Ricardo é o mais velho e Ana é a irmã do ‘meio’”. Depois facilmente introduziu os dados na folha de cálculo para obter a relação pedida no enunciado. Selecionou a idade de Ana como variável independente, na célula E5, e utilizou as fórmulas “=E5-1” para a idade de Carlos, e “=E5+1” para a idade de Ricardo. Inseriu, posteriormente, as respetivas fórmulas para o “produto das idades dos irmãos” e para o “quadrado da idade de Ana” (figuras 4 e 5).

Carlos	Ana	Ricardo		Produto das idades dos irmãos	quadrado da idade da Ana
-1	0	1		-1	0
0	1	2		0	1
1	2	3		3	4
2	3	4		8	9
3	4	5		15	16
4	5	6		24	25
5	6	7		35	36
6	7	8		48	49
7	8	9		63	64
8	9	10		80	81
9	10	11		99	100
10	11	12		120	121

Figura 4: Excerto da resolução de Ana na folha de cálculo

Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos irmãos		quadrado da idade da Ana
=E5-1	0	=E5+1	=F5*D5		=E5*E5
=E6-1	1	=E6+1	=F6*D6		=E6*E6
=E7-1	2	=E7+1	=F7*D7		=E7*E7
=E8-1	3	=E8+1	=F8*D8		=E8*E8

Figura 5: Fórmulas introduzidas na folha de cálculo

Após ter arrastado as alças das células observou os valores, descobriu a relação entre as idades dos irmãos e registou-a, como se apresenta na figura 6.

A ana ao fazer o produto das idades dos irmãos e fazendo o quadrado da sua idade verificou que se somarmos um ao produto das idades do irmão, obtemos a idade da Ana.

Figura 6: Resposta de Ana

A aluna mostrou alguma insegurança na conclusão que tinha registado como se pode constatar pelo diálogo estabelecido com a professora:

> Ana: Eu fiz isto…
>
> Professora: Isso é válido para qualquer idade?
>
> Ana: Sim … [Com o rato, na folha de cálculo, começa a apontar e a comparar os valores das colunas "Produto das idades dos irmãos" e "quadrado da idade de Ana"] -1, 0; 0,1; 3, 4; 8, 9; 15, 16 … Acho que não é isto!
>
> Professora: Mas por que não?
>
> Ana: É um bocado esquisito…

Na questão seguinte, que pedia a explicação algébrica do resultado da alínea anterior, à semelhança de muitos colegas da turma, Ana não apresentou explicitamente a relação que existe entre as idades dos três irmãos pois não contemplou a diferença entre as idades deles, como se pode observar na figura 7.

1.2. Explica algebricamente o que verificaste.

n - idade da Ana

$n^2 - 1$ = produto das idades dos irmãos

u - idade do Ricardo

y - idade do Carlos

$uy + 1$ = quadrado da idade da Ana

$\boxed{uy + 1 = n^2}$ ou $\boxed{n^2 - 1 = uy}$

Figura 7: Resposta da aluna

A aluna apresenta uma legenda com o significado das variáveis e de início escreve igualdades que apresentam um misto de linguagem natural e expressões algébricas. Por fim apresenta duas equações equivalentes como resposta à questão.

Este foi o tipo de resolução mais comum que os alunos apresentaram na discussão. Nenhum aluno da turma expressou a relação esperada pela professora, pelo que foi necessário incentivá-los a partir da apresentação da resolução de uma aluna.

Após o questionamento da professora acerca das relações entre as idades dos irmãos, relacionando-as com o trabalho na folha de cálculo, os alunos chegaram à igualdade e a professora escreveu-a no quadro, $(a-1)(a+1)=a^2-1$. De seguida, a professora questionou a turma acerca da igualdade registada.

> Professora: Ao olharem para ali não reconhecem esta igualdade?
>
> Patrícia: É uma equação do 2.º grau.
>
> Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… Que…
>
> Ana: Lei do anulamento do produto…
>
> Carolina: É aquilo que a professora deu…
>
> Ana: É a lei do anulamento do produto! $a^2-1=a-1 \quad \text{ou} \quad a^2-1=a+1$
>
> Patrícia: Isto é a lei do anulamento do produto?! É do quadrado do binómio!
>
> Carolina: Oh pá eu já disse isso!… Eu não sei nada disso do quadrado do binómio!
>
> Ana: Não, não! Isso ai é outra coisa… A diferença de quadrados!
>
> Professora: É a diferença de quadrados, será?
>
> Ana: É sim por causa que… A professora até deu isso no exemplo no ano passado… Eu lembro-me um pouco disso, por causa do teste intermédio.

Este excerto do diálogo retrata alguma confusão que existe no reconhecimento da igualdade. Ana é uma das alunas que não a reconhece, à partida, apesar de na ficha de diagnóstico, que já foi corrigida, ter dado algumas evidências do seu reconhecimento. Por outro lado, lembra-se deste exemplo que foi tratado no ano passado, em particular, quando foram feitas revisões para o teste intermédio.

Os alunos não demonstraram muitas dificuldades no recurso ao resultado obtido na questão anterior para calcular produtos do tipo 29x31, 79x81, 99x101, 999x1001 que foi de seguida resolvido e discutido. Depois avançaram para a situação seguinte em que os irmãos têm 5 anos de diferença e Ana decidiu utilizar a folha de cálculo tendo descoberto que agora a diferença é de 25, assim como a maioria dos colegas. No entanto uma aluna antecipou-se e generalizou logo, dizendo em tom bem alto para toda a turma: "É sempre a diferença ao quadrado!"

Os alunos fizeram os procedimentos algébricos para explicar algebricamente a validade da igualdade e avançaram para o cálculo dos produtos do tipo 35 x 45.

Por fim na questão em que é colocada aos alunos a situação da diferença das idades entre os irmãos ser *k*, os alunos já não recorrem à folha de cálculo.

> Professora: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for k, o que é que acontecerá?
>
> Ana e Carolina: a^2-k^2 [resposta em simultâneo].
>
> […]
>
> Alguns alunos: $a-k$ vezes $a+k$ é igual a a^2-k^2.
>
> Patrícia: é só substituir o 5 pelo k.

Este diálogo com a turma conduz os alunos à generalização da condição que tinham encontrado anteriormente.

Com esta tarefa foi possível, aos alunos, resolverem um problema na folha de cálculo que envolve idades e deduzirem a fórmula da diferença de quadrados que era um aspeto em que tinham sido detetadas lacunas na ficha de diagnóstico. Por outro lado, permitiu ainda aos alunos a utilização destas igualdades para realizar cálculos, mentalmente, com maior facilidade.

Tarefa D-3. Relativamente à Tarefa D-3 (figura 8), na primeira questão foi pedida a simulação do 1.º salto da bola na folha de cálculo, apresentando também a representação gráfica. Ana começou por inserir os dados na folha de cálculo para obter a altura da bola, não tendo revelado dificuldades na substituição da variável pelo respetivo valor numérico.

> Ana: Primeiro temos de pôr o tempo.
>
> Professora: E depois como sabem a altura?
>
> Ana: Então onde está t vamos substituir pelo tempo.

1. A Carlota atirou uma bola que embateu por diversas vezes no chão.

A bola a partir do momento que tocou no chão descreveu uma trajectória em que a sua altura, em cada instante t, é dada por uma função quadrática.

Na primeira vez, que tocou no chão, a altura A da bola é dada por $A(t) = -20t^2 + 160t$ (A em centímetros e t em segundos).

Na segunda vez, a altura B da bola é dada por $B(t) = -20t^2 + 120t$ (B em centímetros e t em segundos).

Na terceira vez, a altura C da bola é dada por $C(t) = -20t^2 + 80t$ (C em centímetros e t em segundos)

Na quarta vez, a altura D é dada por $D(t) = -20t^2 + 40t$ (D em centímetros e t em segundos).

Por fim, a bola rolou no chão e parou.

Figura 8: Enunciado do problema "A bola saltitona"

No entanto na coluna relativa à altura, inicialmente, inseriu para o instante 0 o cálculo "=-20*0^2+160*0", para o instante 1 "=-20*1^2+120*1", para o instante 2 "=-20*2^2+80*2" e para o instante 3 "=-20*3^2+40*3". A representação da aluna na folha de cálculo foi reveladora de uma compreensão ainda pouco nítida do enunciado, pois era pedida a simulação do primeiro salto e a aluna recorreu também às expressões algébricas das funções que definem os restantes saltos.

Após a minha intervenção, Ana, assim como alguns dos seus colegas recorrem corretamente às expressões para os diferentes saltos.

Ana depois introduziu corretamente os dados na folha de cálculo, recorrendo a uma fórmula, como mostra na figura 9, com os quais obteve, de seguida, a representação gráfica da figura 10.

Tempo	Altura
0	0
1	140
2	240
3	300
4	320
5	300
6	240
7	140
8	0

Tempo	Altura
0	=-20*D4^2+160*D4
1	=-20*D5^2+160*D5
2	=-20*D6^2+160*D6
3	=-20*D7^2+160*D7
4	=-20*D8^2+160*D8
5	=-20*D9^2+160*D9
6	=-20*D10^2+160*D10
7	=-20*D11^2+160*D11
8	=-20*D12^2+160*D12

Figura 9: Resolução da aluna na folha de cálculo e fórmula utilizada

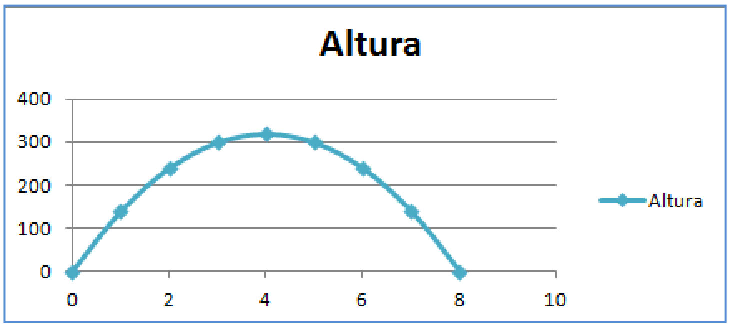


Figura 10: Representação gráfica obtida por Ana do 1.º salto da bola

Nas questões seguintes, em articulação com o trabalho realizado na folha de cálculo, os registos com lápis e papel tiveram também o seu lugar, nomeadamente para indicar a altura máxima que a bola atingiu e o instante em que isso aconteceu, como se apresenta na figura 11 a resposta de Ana.

1.2. Qual é a altura máxima que a bola atingiu? Em que instante a bola atingiu essa altura?

A altura máxima que a bola atingiu foi 320, ela atingiu aquela altura aos 4 segundos.

Figura 11: Resposta de Ana

De seguida surgiu uma questão relacionada com tempo que a bola demorou a embater no chão. Na figura 12 podemos observar a resposta de Ana, que não apresenta dificuldades.

1.3. Ao fim de quanto tempo a bola embateu de novo no chão? Justifica a tua resposta.

A bola embateu de novo no chão ao fim de 8 segundos, devido a ela ter atingido a altura máxima ela vai para de subir, sentido crescente, vai começar a descer, sentido descendente, até que volta a ter altura ∅.

Figura 12: Resposta de Ana

Com a questão 1.4 já se pretende que os alunos interpretem uma condição no contexto do problema. Ana na sua resposta, apresentada na figura 13, não demonstra dificuldades na interpretação da condição. No entanto a sua explicação não é muito clara pois a bola não pára.

1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

Os valores de t são 0 e 8, o seu significado no contexto do problema são a primeira vez que bate no chão, para conseguir atingir a altura máxima, e quando não tem mais altura e pára.

Figura 13: Resposta de Ana

Na questão 1.4, aquando da sua discussão para além do que era solicitado no enunciado foi pedido ainda aos alunos para justificarem algebricamente os valores de *t*. Contrariamente a grande parte dos alunos da turma, Ana rapidamente resolveu a equação recorrendo corretamente à lei do anulamento do produto, como mostra a figura 14.

$$
\begin{aligned}
& -20t^2 + 160t = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & t(-20t + 160) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & t = 0 \vee -20t + 160 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & t = 0 \vee -20t = -160 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & t = 0 \vee t = 8 \qquad C.S = \{0; 8\}
\end{aligned}
$$

Figura 14: Resposta de Ana

A professora reforça ainda a conexão entre as representações que os alunos têm presentes (dados da tabela, representação gráfica e algébrica) para uma ampliação da compreensão do significado da solução da equação.

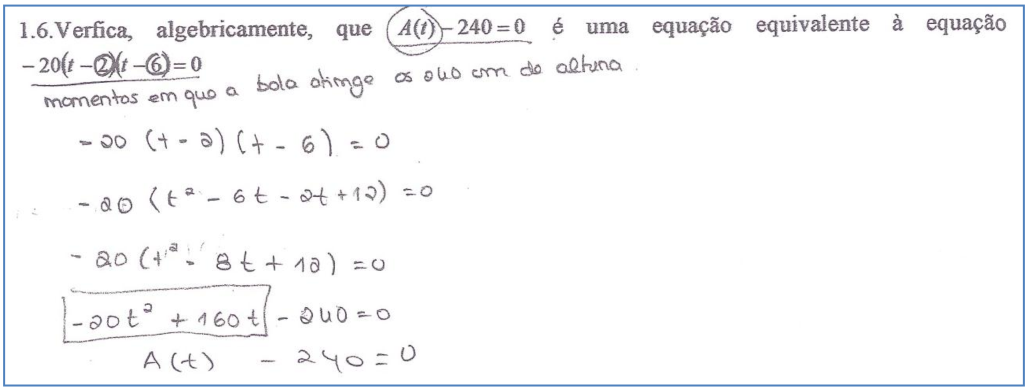
> Professora: … Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observado o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica. … No vosso gráfico quando é que a parábola intersecta o eixo dos xx?
>
> Turma: No 0 e 8.
>
> Professora: Portanto significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Na resposta à questão 1.5, apresentada na figura 15, Ana apesar de indicar corretamente os valores para *t*, revela algumas dificuldades na explicação do significado dos valores encontrados. Estas dificuldades parecem ter sido clarificadas no momento da discussão com a turma.

1.5. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=240$. Explica o significado desses valores no contexto do problema.

Os valores de t são o 2 e o 6, o significado é, os 2 seg onde ela continua a ganhar altitude e os 6 seg, onde a bola perde altitude para regressar à posição de repouso.

Figura 15: Resposta de Ana à questão 1.5


1.6. Verfica, algebricamente, que $A(t)-240=0$ é uma equação equivalente à equação $-20(t-2)(t-6)=0$

momentos em que a bola atinge os 240 cm de altura.

$-20(t-2)(t-6)=0$

$-20(t^2-6t-2t+12)=0$

$-20(t^2-8t+12)=0$

$\boxed{-20t^2+160t}-240=0$

$A(t) \quad -240=0$

Figura 16: Resposta de Ana à questão 1.6

Muitos alunos demonstraram dificuldades na resolução da questão 1.6, apresentada na figura 16, sendo que inicialmente alguns não a resolveram. Ana conseguiu resolver até ao penúltimo passo. Dadas as dificuldades dos alunos e uma vez que alguns já tinham conseguido resolver, uma aluna, a pedido da professora, foi ao quadro e apresentou a sua resolução, acompanhada pela explicação do seu processo de resolução. A professora explicou, por fim, que é possível escrever uma equação do segundo grau como um produto de fatores, deixando visíveis as suas soluções, ou seja, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Conclusão

A integração da folha de cálculo nesta experiência de ensino teve em atenção as orientações curriculares atuais e também o facto de esta ferramenta facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O trabalho realizado anteriormente com os alunos da turma permitiu-lhes alguma familiaridade com a folha de cálculo, uma vez que o vocabulário utilizado neste ambiente é distante do habitual em Matemática – "o utilizador tem de ser ele próprio a criar uma linguagem, pois não existe uma tradução oficial para o ajudar" (Haspekian, 2003, p. 123). Quando o professor de Matemática assume esta função, este tem de procurar construir este vocabulário com os seus alunos: o que representa uma célula, uma coluna, uma fórmula, o que significa arrastar para baixo a alça de uma célula com uma fórmula, o que é o *feedback* numérico devolvido pelo computador, etc.

No estudo do tópico, na folha de cálculo, Ana procedeu à nomeação de colunas, o que lhe permitiu identificar as variáveis presentes nos problemas. Este processo de nomeação de colunas, que permite identificar um conjunto de números com um único nome dá uma imagem da variável, fornece um suporte de apoio importante para a atividade de lápis e papel, sendo uma ação que faz refletir os alunos, permitindo-lhes compreender o seu significado matemático (Wilson, 2007).

Após a nomeação de colunas, Ana prosseguiu para o estabelecimento das relações entre as variáveis identificadas, através da geração de variáveis coluna. Este procedimento associa-se à facilidade de experimentação que o Excel faculta no arrastamento de variáveis célula, assim como, à necessidade da existência de um processo de reflexão (Wilson, 2007). Estas representações, na folha de cálculo, assentes no estabelecimento de relações funcionais possibilitaram-lhe o estabelecimento de relações necessárias que lhe facilitaram a obtenção das respostas pretendidas, o que vem ao encontro daquilo que Dettori *et al*. (2001) afirmam relativamente ao estabelecimento de relações entre variáveis presentes nos problemas com a folha de cálculo. Por outro lado, a folha de cálculo induziu a aluna, assim como os seus colegas, num processo de generalização característico deste recurso, destacado por Calder (2009) e Dettori *et al*. (2001).

As tarefas propostas incentivaram o estabelecimento de conexões entre o trabalho realizado com a folha de cálculo e com lápis e papel. A folha de cálculo permitiu um primeiro contato com a representação gráfica de uma função quadrática. Esta representação, em paralelo com a tabela, e com as representações em linguagem natural, com lápis e papel, possibilitou a Ana a compreensão do significado de resolver uma equação do 2.º grau mesmo antes da aprendizagem formal. Salientam-se também as conclusões a que a aluna chegou, com lápis e papel, recorrendo à linguagem algébrica formal, nomeadamente na resolução de equações. Este tipo de conexões foi essencial para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico como é destacado por Dettori *et al*. (2001). O trabalho, nestes dois ambientes, proporcionou a Ana a compreensão do significado de factorização de uma equação do 2.º grau a partir das suas raízes ou zeros. Segundo Vaiyavutjamai e Clements (2006) e Didiş *et al*. (2011), os alunos devem resolver tarefas que levem os à compressão dos significados ao invés de se limitarem a aplicar apenas procedimentos memorizados.

Destacamos assim que o ambiente proporcionado pela folha de cálculo se mostrou propício para o desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna, no estudo do tópico, sem o constrangimento do uso do simbolismo algébrico (Zazkis & Liljedahl, 2002) tendo também proporcionado a compreensão do significado deste tipo de escrita com lápis em papel. Ana, apesar de não ter demonstrado muitas dificuldades na ficha de diagnóstico, apresentava alguma dificuldade, por exemplo, em relação à diferença de quadrados. Aparentemente, a aluna, no ano letivo anterior apenas desenvolveu uma compreensão instrumental da diferença de quadrados pois reconhece o exemplo mostrado apenas por se lembrar que era o mesmo que tinha sido dado aquando do estudo para o teste intermédio. A folha de cálculo permitiu desenvolver uma compreensão relacional (Skemp, 1976) da diferença de quadrados, que depois usou em situações novas, como no cálculo de produtos. Permitiu ainda ampliar a sua compreensão relacional no que respeita ao significado de raízes ou zeros de uma equação de 2.º grau dando fundamento às suas repostas.

Referências

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2004). Construting meanings and utilities within algebraic tasks. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 1-8). Bergen, Norway: PME.

Arcavi, A. (2006) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale *et al*. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp.29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Calder, N. (2009). Visual tensions when mathematical tasks are encountered in a digital learning environment. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.249-256). Athens: PME.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A, Bishop & R. Lins (Eds). *Perspectives on school algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer.

Didiş, M, Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.*), Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Poland.

Haspekian, M. (2003). Instrumental approach to understand the problems of the the spreadsheet integration. In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.). *Proceedings of the 6th International Conference Technology in Mathematics Teaching* (pp. 118-124). Athens: New Technologies.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). New York, NY: Routledge.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 479-510). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

Sutherland, R. (1993). *Project AnA: The gap between arithmetic and algebra (R000232132). Final report to ESRC*. Institute of Education, University of London.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77.

Wilson, K. (2007). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education*, *8*, 117-132.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Este artigo faz parte do Projeto Mat@Web (Resolução de Problemas de Matemática: Perspetivas sobre uma competição interativa na Web) – Projeto financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (PTDC/CPE-CED/101635/2008).