Dissertação de Mestrado

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

DISSERTAÇÃO

O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann

CICLO DE ESTUDOS CONDUCENTE AO GRAU DE MESTRE EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2011

Dissertação de Mestrado

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

DISSERTAÇÃO

O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

CICLO DE ESTUDOS CONDUCENTE AO GRAU DE MESTRE EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2011

Este trabalho respeita o Acordo Ortográfico.

Resumo

Esta investigação tem por objetivo caracterizar o sentido de símbolo de alunos na fase final do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra. Duas questões orientam este trabalho: (i) Que sentido de símbolo revelam esses alunos no modo como resolvem questões envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções? (ii) Qual a relação entre o desenvolvimento do sentido de símbolo dos alunos e a sua capacidade de realização de questões sobre conteúdos específicos do 12.º ano?

A investigação incide num grupo de vinte e um alunos, e aborda com mais profundidade dois alunos do 12.º ano. A recolha de dados é feita através de um teste diagnóstico, duas entrevistas e documentos escritos pelos alunos. Um quadro de referência é a base da caracterização do sentido de símbolo dos alunos, a partir da forma como estes resolvem questões envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções. A metodologia é essencialmente qualitativa (estudos de caso), complementada por alguns aspetos quantitativos, e insere-se no paradigma interpretativo.

O quadro de referência mostrou ser uma ferramenta útil e adequada à caracterização do sentido de símbolo dos alunos. Os resultados indicam uma heterogeneidade quanto ao sentido de símbolo dos diversos alunos, mas apontam para uma maior facilidade no trabalho com as expressões algébricas e maior dificuldade no trabalho com problemas. A manipulação simbólica surge como o aspeto do sentido de símbolo mais desenvolvido e a utilização dos símbolos para conjeturar e generalizar, o aspecto menos desenvolvido. O sentido de símbolo de cada aluno é visível e influencia o seu trabalho com conteúdos específicos de Matemática A: num deles a abordagem tem caráter dominantemente instrumental e no outro a abordagem revela compreensão na forma como desenvolve processos de matematização e abstração.

Palavras-chave: Sentido de símbolo, Álgebra, expressões algébricas, equações, problemas e funções.

Abstract

This research aims to characterize the symbol sense of students in their final stage of secondary education and its relation with the learning of algebra. Two questions conduct this research: (i) What symbol sense do those students show, when working in questions involving algebraic expressions, equations, problems and functions? (ii) What is the relation between the students' symbol sense and their ability to solve questions regarding specific topics of the year 13 syllabus?

The research focuses on a group of twenty one students and involves a deeper study of two students of year 13. Data collection is carried out through a diagnostic test, two interviews and documents written by the students. A reference framework is used to characterize the students' symbol sense, based on the way they solve questions involving algebraic expressions, equations, problems and functions. The methodology is essentially qualitative (case study), complemented by a small quantitative element, and is based on the interpretative paradigm.

The reference framework proved to be a useful tool, adequate to characterize the students' symbol sense. The results indicate heterogeneity regarding the students' symbol sense, but also show that the work with algebraic expressions is easier for the students while they show difficulty when working with problems. Symbolic manipulation appears to be the more developed aspect of symbol sense, while the use of symbols to conjecture and generalize is the less developed one. Regarding the specific topics of Mathematics A, each student symbol sense is visible and influences their work: the approach of one of the students is essentially instrumental, while the other reveals understanding as he develops mathematization and abstraction processes.

Key words: Symbol sense, Algebra, algebraic expressions, equations, problems and functions.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela forma única de me orientar, apoiar e exigir sempre mais. O que aprendi com ele é imensurável.

Ao Professor Doutor Henrique Guimarães, por me ter recebido sem me conhecer, por me ter incentivado a fazer este Mestrado e por me ter ensinado, partilhando nas aulas o caminho que ele próprio percorreu com o seu trabalho de investigação.

Aos Professores Hélia Oliveira, Leonor Santos e João Filipe Matos por me terem levado a aprender, o que tinham para me ensinar. É um prazer conhecê-los.

Ao Dr. Renato Costa, diretor pedagógico da minha escola a quem tenho a sorte de poder chamar amigo. À sua visão de escola que coloca a investigação num lugar de destaque, e à sua forma de incentivar dando valor ao meu trabalho e colocando à minha disposição tudo o que lhe fui pedindo.

À coordenadora dos estudos ingleses e minha querida amiga Paula Ferreira, porque nunca tem dúvidas sobre a nossa amizade e pela enorme importância que lhe dá. Sem o seu apoio incondicional esta tarefa não teria chegado ao fim.

Aos meus três colegas e amigos especiais. A Lena que me transcreveu as entrevistas, a Isabel que me "emprestou" os seus alunos e pôs os meus interesses à frente dos seus e ao Ricardo com quem tanto aprendo só a conversar.

Aos alunos que prontamente acederam em fazer parte do estudo, tornando-o possível. Foi um prazer "conversar" com eles.

A todos os que trabalham comigo, colegas e funcionários do colégio. Pela disponibilidade em ajudar, pela palavra amiga e pelo apoio nas horas mais difíceis.

À Sofia amiga e companheira de viagens, de trabalhos, de desesperos e de muitas alegrias. Este Mestrado permitiu-nos conhecermo-nos melhor e só por isso valeu a pena.

Ao meu pai que não me deixou desistir e me conseguiu dar força quando a sua própria força lhe faltava.

Ao Nuno o meu marido e companheiro que, entre ventos e marés, me garantia sempre que tudo estava bem.

Aos meus filhos, Miguel e Filipe, que são a minha razão de ser, o meu porto de abrigo e iluminam a minha vida. Por nunca reclamarem do tempo que lhes roubei e por me dizerem, cada um à sua maneira, que gostam de mim.

À minha mãe, uma mulher extraordinária.

Índice

Índice de anexos

Índice de figuras e gráficos

Índice de tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivações pessoais

A disciplina de Matemática torna-se mais complexa ao passar para o nível secundário e exige do aluno maior capacidade de abstração e uma crescente flexibilidade para relacionar diferentes conceitos. Mais trabalho e mais dedicação são indispensáveis. Algo que os adolescentes nem sempre estão dispostos a dar. Mas não me parece inevitável que a chama do entusiasmo da maioria dos alunos seja abafada levando-os a perder o interesse e não ver utilidade numa disciplina que lhes pode ser tão importante na sua vida futura. Cada vez mais é preciso que os alunos compreendam o que fazem e encontrem sentido na atividade matemática que desenvolvem. Se isso não acontecer, associarão a Matemática a um conjunto de regras e procedimentos rígidos, ligados a conteúdos compartimentados cuja quantidade é cada vez maior, o que torna impossível a sua retenção e cada vez menos exequível a sua aplicação direta.

A procura pelo que posso fazer para melhor compreender as dificuldades e desenvolver o interesse e a curiosidade dos meus alunos levou-me ao 1.º ano do Mestrado em Didática da Matemática no qual aprofundei conhecimentos na Didática da Álgebra, área da Matemática pela qual sempre tive um gosto especial em trabalhar nas aulas. Kaput (1999) considera importante desenvolver desde cedo o pensamento algébrico e tornar o poder da Álgebra acessível a todos os alunos. Este autor considera que o centro do pensamento algébrico é "constituído por processos complexos de simbolização que servem a generalização intencional e o raciocínio com generalizações" (Kaput, 2008, p. 9). Outro autor, Arcavi (1994) opta pela expressão "sentido de símbolo" que toma como uma parte do pensamento algébrico e caracteriza-o descrevendo vários dos seus aspetos, relacionados com a forma como o aluno olha para o símbolo, conclui sobre as vantagens da sua utilização e o usa de forma eficaz na resolução de um problema. O sentido de símbolo será então a inteligibilidade da Álgebra e de tudo o que esta integra, dos números às variáveis, das expressões às funções, das operações às generalizações. À medida que avançam nos diversos níveis da sua escolaridade e que crescem como pessoas, os alunos deveriam ir desenvolvendo e aprofundando o seu sentido de símbolo, apreendendo as potencialidades da sua utilização e compreendendo a forma como os símbolos se relacionam e/ou substituem.

Um fraco desenvolvimento do sentido do símbolo tem implicações negativas na compreensão da Matemática a curto e a longo prazo. Por vezes, os professores, na sua ânsia de concluírem os temas, fazem da aprendizagem um caminho rápido para a procura da solução das questões propostas, o que pode constituir um obstáculo ao desenvolvimento do sentido de símbolo (Arcavi, 2006). Trabalhar com cuidado as várias vertentes do sentido de símbolo é, por isso, fundamental. Trata-se, também, de uma forma de reforçar as três grandes capacidades transversais do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), que fará todo o sentido transpor para o ensino secundário: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática. Arcavi (1994) considera mesmo que os símbolos algébricos são "meios poderosos para resolver e compreender problemas, e para comunicar sobre eles" (p. 33) devendo essa potencialidade ser transmitida aos alunos desde muito cedo.

A escola em que trabalho é um colégio internacional que forma alunos dos três aos dezoito anos e onde coexistem duas secções, a de estudos portugueses e a de estudos ingleses e é frequentado por alunos de cerca de quarenta nacionalidades. É uma escola na qual os idiomas e os costumes se cruzam e a Matemática funciona frequentemente como uma língua universal, por vezes a única que alguns alunos entendem quando ingressam numa turma pela primeira vez. Presentemente estamos a trabalhar numa reestruturação do nosso currículo que cresce em torno de uma competência central, o saber pensar. Pela sua natureza, a Matemática está interligada a esta competência e ao desenvolver o sentido de símbolo dos nossos alunos estaremos a contribuir de forma significativa para o seu reforço. Pólya (2002) dizia que:

> O pensar que se pode aprender em Matemática é, por exemplo, lidar com abstrações. A Matemática é sobre números. Os números são abstrações. Quando resolvemos um problema prático, teremos que fazer primeiro um problema abstrato. A Matemática apela diretamente às abstrações. Algu-

> ma Matemática deve permitir à criança conseguir lidar com abstrações, lidar com estruturas abstratas. (p. 7)

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), o desenvolvimento do sentido de número deve ser um dos grandes propósitos da Matemática escolar. Os autores consideram que:

> O sentido de número refere-se à compreensão geral do número e das operações juntamente com a habilidade e a inclinação para usar essa compreensão de maneiras flexíveis para fazer julgamentos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis para lidar com números e com operações. Reflete uma inclinação e uma habilidade para usar números e métodos quantitativos como um meio de comunicação, de processamento e de interpretação da informação. Resulta numa expectativa de que os números são úteis e de que a matemática tem uma certa regularidade. (p. 3)

A necessidade de clarificar e organizar algumas componentes do sentido de número, de forma a tornar possível o seu estudo e a sua análise levaram McIntosh, Reys e Reys (1992) a propor um enquadramento do sentido de número que parte de três componentes principais, os números, as operações e a aplicação dos números e das operações em procedimentos computacionais, estando esta última componente diretamente ligada à resolução de problemas. Os autores associam a cada um destes três aspetos principais, competências e conteúdos ligados à compreensão e utilização do número e reconhecem que o enquadramento proposto não é estático, e que o sentido de número de um indivíduo é provavelmente maior do que o retrato que se obtém quando se considera o resultado de uma análise feita por partes. No entanto, consideram útil esta organização em torno de componentes chaves associadas a conteúdos comuns.

Assumindo a Matemática uma atividade de "dar sentido a", baseada numa certa intuição e consciencialização da utilidade e da utilização da própria Matemática, o sentido de número assim como o sentido de símbolo são alguns dos aspetos dessa atividade. O sentido de símbolo não é portanto uma continuação do sentido de número, embora ao longo da escolaridade estas duas vertentes da Matemática caminhem juntas, entrecruzando-se e contribuindo para o mútuo desenvolvimento. O dar sentido ao número culmina no 12.º ano com o número complexo, tudo o que este encerra e todas as relações que permite fazer, estabelecendo pontes para o trabalho em várias áreas do ensino superior. O símbolo estreitamente ligado à Álgebra surge explicitamente no novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) a partir do 2.º ciclo: "os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades" (p. 40). No entanto o programa considera que o pensamento algébrico já está presente no trabalho com sequências e padrões do 1.º ciclo. O pensamento algébrico no qual se inclui o sentido de símbolo começa assim a ser trabalhado cedo no percurso escolar, dando "atenção não só aos objetos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato" (Ponte, 2006, p. 12). O NCTM (2007) incide na importância dos símbolos algébricos e do trabalho com os mesmos na Matemática escolar e reforça a ideia de que "os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações" (p. 39).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* indica, para a Álgebra do 3.º ciclo, "o estudo de relações de diversos tipos (equações, inequações e funções) e da variação, bem como o trabalho com tarefas que envolvam atividades de simbolização e de modelação. A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida…" (ME, 2007, p. 55). No ensino secundário espera-se que os alunos complementem e aprofundem a sua compreensão das propriedades algébricas na resolução de equações e inequações e trabalhem com formas equivalentes de expressões e funções, ampliando o seu repertório de funções conhecidas. O *Programa do Ensino Secundário de Matemática A* (ME, 2001) explicita como um conhecimento a ser adquirido pelos alunos, o "interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica" (p. 4). As expressões algébricas, as equações e as funções são assim aspetos centrais da Álgebra sendo, os problemas, uma quarta vertente que coloca o poder simbólico da Álgebra ao serviço da sua resolução. Estas quatro componentes da Álgebra são centrais neste estudo, pois o sentido de símbolo envolve dar sentido à Álgebra, seja a resolver equações, a simplificar expressões, a trabalhar com funções ou a modelar um problema.

A vontade de compreender o sentido de símbolo dos alunos de forma a poder contribuir para o seu desenvolvimento deu origem a um estudo piloto realizado por por uma colega minha e por mim no âmbito da disciplina de Didática dos Números e da

Álgebra do Mestrado em Educação. Este estudo centrado no pensamento algébrico e no sentido de símbolo de alunos na faixa etária do 9.º ano, inspirou-se no trabalho de McIntosh, Reys e Reys (1992) e tentou enquadrar aspetos do sentido de símbolo descritos por Arcavi (1994) em torno de três categorias (as expressões, as equações e os problemas). Estudos como o de Sharma (2000) e o de Pope e Sharma (2001), também utilizam o "catálogo" de Arcavi (1994), mas não o sistematizam nem o organizam em torno de categorias de análise. Os trinta e cinco alunos que participaram nesse estudo-piloto, realizaram um teste diagnóstico com questões pertencentes às três categorias e três desses alunos foram entrevistados com o objetivo de se compreender melhor o seu sentido de símbolo, visível nas suas respostas ao teste. O enquadramento feito para o sentido de símbolo facilitou e organizou a análise, permitindo fazer "um retrato" do sentido de símbolo dos alunos. Essa tabela de enquadramento foi posteriormente ampliada por Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009) para incluir a categoria das funções tornando-a mais abrangente e permitindo estender a sua utilização ao ensino secundário. Esse instrumento tem um papel importante nesta investigação, nomeadamente na forma como esta se estruturou e como foi organizada a análise dos dados.

1.2. Problema e organização do estudo

O desenvolvimento do sentido de símbolo corresponde também a conseguir-se cada vez melhor "ler através dos símbolos" (Arcavi, 1994, p. 26), numa crescente capacidade de abstração, sem no entanto perder de vista o seu significado. O desenvolvimento do sentido de símbolo está assim associado ao desenvolvimento do próprio pensamento matemático, sendo, a compreensão das diversas formas que os alunos encontram para recorrer ao símbolo, importante para quem como eu trabalha diariamente com eles e se apercebe das barreiras por vezes quase intransponíveis que a Álgebra parece levantar, particularmente na sua passagem para o ensino secundário.

Para desenvolver com os alunos o seu sentido de símbolo, é necessário percebê-lo e avaliar os seus efeitos, analisando as dificuldades resultantes de um sentido de símbolo imperfeito e percebendo como um sentido de símbolo apurado é utilizado em diferentes situações. O objetivo principal deste trabalho será compreender o sentido de símbolo de alunos na fase final do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra. Para alcançar o objetivo proposto, procurarei dar resposta às seguintes questões:

1. Que sentido de símbolo revelam alunos do ensino secundário no modo como resolvem questões de Álgebra envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções?

2. Qual a relação entre o desenvolvimento do sentido de símbolo dos alunos e a sua capacidade de realização de questões que incidem sobre conteúdos específicos do 12.º ano?

Pólya (2002) continua atual quando diz que além de ensinar a somar e a multiplicar, frações e percentagens, a escola deve ter um objetivo mais elevado de desenvolver todas as capacidades da criança em crescimento. Compreender o sentido de símbolo dos alunos e a forma como estes recorrem ao símbolo para resolver problemas poderá ser um contributo para se alcançar esse grande objetivo.

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos. O segundo capítulo fundamenta teoricamente o tema em estudo, procurando aprofundar conceitos como signo e símbolo na Matemática e particularmente na Álgebra e chegando ao sentido de símbolo no contexto deste trabalho. O terceiro capítulo explicita a metodologia seguida na investigação inserindo o estudo num paradigma e numa abordagem, indicando o *design* seguido e justificando as opções tomadas nas várias fases do trabalho. O capítulo seguinte centra-se na apresentação de resultados e análise do sentido de símbolo de um grupo de vinte e um alunos do ensino secundário, e o quinto capítulo retrata o sentido de símbolo de dois alunos do 12.º ano e estabelece uma relação na forma como estes abordam conteúdos programáticos específicos desse nível de ensino. Finalmente, no sexto e último capítulo é feita uma síntese do estudo, são relatadas as conclusões e é estabelecida uma relação entre os resultados obtidos e a teoria que o sustém. Este capítulo faz ainda uma reflexão sobre o que significou para mim realizar este estudo e indico possíveis trabalhos futuros que poderão ter esta investigação como ponto de partida.

Capítulo 2

A semiótica, o sentido de símbolo e o "dar sentido a"

Centrando-se este trabalho no símbolo e no seu sentido, numa primeira parte deste capítulo, procuro partir de uma breve abordagem a teorias da Semiótica, ligadas à linguagem e à comunicação, e chegar a uma noção de símbolo em Matemática. A segunda parte incide sobre a significação e o "dar sentido a" no âmbito da Matemática, mais concretamente no domínio da Álgebra, tendo em vista a clarificação do que se entende por "sentido de símbolo" no contexto deste trabalho.

2.1 Do signo ao símbolo

Signo, símbolo, significado e interpretante

A Semiótica tem a sua origem na Antiguidade Clássica, mas o seu desenvolvimento como ciência na atualidade deve-se, sobretudo, a Ferdinand de Saussure (1857-1913), que a concebeu como uma parte da Psicologia, centrada na explicação do que consistem os signos e das leis que os regem. A este respeito, Radford (2006a) indica que, para Saussure, os signos têm significado na medida em que são elementos de um sistema. Ou seja, o signo tem significado quando relacionado com outros signos. A analogia que Saussure faz com o jogo de xadrez é esclarecedora – uma peça do jogo, como, por exemplo, o cavalo, só tem significado para o jogador quando inserida no tabuleiro e nas condições e regras do jogo.

Outro autor incontornável associado à Semiótica é Charles Sanders Peirce (1839-1914). Carreira (1998) refere que "enquanto Saussure terá dado especial atenção às funções sociais do signo, Peirce estaria mais interessado nos seus atributos internos"

(p. 149). Radford (2006a) indica, ainda, que, para Peirce, a Semiótica é a forma como um indivíduo utiliza os signos para formar novas ideias e novos conceitos na busca da verdade, num processo de semiose ilimitada. E acrescenta que este autor "definiu signo como algo que, para alguém, toma o lugar de outra coisa (o objeto do signo), não em todos os seus aspetos mas somente de acordo com uma determinada forma ou capacidade" (p. 9). Para Peirce todo o pensamento é um signo, residindo o problema na dificuldade de encontrar o método correto para pensar.

Carreira (1998) assinala as diferenças entre as abordagens de Saussure e Peirce: "a perspetiva que resulta da influência peirciana introduz o conceito de signo como elemento primário do sistema semiótico. A que se baseia nas teses de Saussure e da Escola de Praga toma como fundamento a antinomia entre língua e fala (texto)" (p. 149). Apesar das diferenças, a autora identifica um aspeto comum a ambos: "o facto de tomarem um elemento mais simples, com caráter de átomo, e de partirem desse elemento para desenvolverem tudo o mais, tendo por base as semelhanças com a partícula elementar" (p. 149), sendo o elemento atómico, no caso de Peirce, o signo isolado, e, no de Saussure, o ato comunicacional isolado.

A noção de signo não é consensual. Carreira (1998) apresenta diversas perspetivas como a de Guirraud que considera que "um signo é um estímulo que tem por função evocar uma imagem mental com vista a uma comunicação" (p. 152), ou a de Eco para quem o contexto é o responsável pela mediação entre o signo e o seu significado. A autora conclui no entanto que, "mau grado as divergências, há hoje lugar a um razoável acordo acerca da necessidade de se considerar uma terceira entidade que medeia entre significante e significado, daí decorrendo a conhecida esquematização do processo de significação na forma de triângulo" (Carreira, 1998, p. 153). Salienta, no entanto, que Saussure não subscreve a necessidade de um terceiro elemento, considerando suficiente o par significante-significado para compreender as relações do signo com o sistema de signos na sua totalidade.

Assim, o primeiro elemento do *triângulo semiótico*, que, consoante os autores, pode ser designado por *signo*, *significante* ou mesmo *símbolo*, é "a unidade percetível que transporta ou conduz o significado do signo" (Carreira, 1998, p. 154). O segundo elemento é o *objeto, referente ou significado* que é "aquilo que o significante representa ou aquilo porque é tomado" (Carreira, 1998, p. 155). Finalmente, o terceiro vértice do triângulo é o *interpretante, significado* ou *sentido*, que é "aquilo que faz com que o significante signifique o objeto para um dado sujeito" (Carreira, 1998, p. 155).

Peirce divide os vários tipos de signos possíveis em três classes: (i) os *índices*, nos quais há uma relação física entre o objeto e o significante, como, por exemplo, o fumo ser indicador de fogo, (ii) os *ícones* que implicam uma relação de semelhança entre o significante e o objeto e, finalmente, (iii) os símbolos para os quais,

> A relação entre o significante e o objeto é convencional, isto é, resulta de uma lei ou de um conjunto de convenções linguísticas, ao invés de ter origem na necessidade (indexicalidade) ou na semelhança (iconicidade). Todas as palavras, frases, livros e outros signos convencionais cabem na classe dos símbolos. A relação do signo simbólico como seu interpretante é o resultado de uma lei e da aquisição de um hábito. (Carreira, 1998, p. 161)

A autora sublinha ainda que "o significado do signo não pode ser separado da sua aplicabilidade em situações concretas" (p. 171).

O signo e o símbolo na Matemática

Têm sido vários os educadores e psicólogos que sugerem, desde há vários anos, a importância da Semiótica na Didática da Matemática. Isso acontece em particular no campo da Álgebra, pois, como referem Filloy, Puig e Rojano (2008) "devido à natureza abstrata da linguagem algébrica e ao facto de serem requeridas competências sintáticas elevadas, muitos estudos recorrem a abordagens que incluem conceitos semióticos e análises linguísticas" (p. 2).

A importância dos signos matemáticos foi posta em evidência por Freudhental no final dos anos de 1960 (Radford, 2006). Puig (1994) salienta duas ideias fundamentais no trabalho Freudhental. A primeira prende-se com a natureza dos objetos matemáticos e da prática matemática, que, separa as filosofias da Matemática que concebem os objetos matemáticos com uma existência anterior à da atividade matemática, das que consideram que os objetos são gerados nessa atividade. Efetivamente, para Freudhental, "os objetos matemáticos constroem-se na prática matemática como meios de organização… De fenómenos tanto do mundo real como da Matemática" (Puig, 1994, p. 9). A segunda ideia de Freudhental que Puig (1994) salienta relaciona-se com a prática educativa e considera a constituição de objetos mentais como um processo anterior à aquisição de conceitos e mais importante que este. Este autor leva as ideias de Freudhental para o campo da Semiótica, introduz o conceito de *campo semântico pessoal* e, dando como exemplo o conceito "número", considera importante que "o *campo semântico pessoal* dos alunos seja suficientemente rico – abarque suficientemente a enciclopédia – de modo a permitir interpretar de forma afortunada todas as situações em que tenha que utilizar 'número' ou 'os números'" (p. 11).

Em relação aos signos, Puig (1994) considera que "a Semiótica da Matemática não tem que se centrar no estudo dos signos, mas sim nos sistemas de significação e nos processos de produção de sentido" (p. 8). Assim, na sua perspetiva, uma divisão artificial de signos não é crucial e adianta que:

> Não há que falar de sistemas de signos matemáticos, mas sim de sistemas matemáticos de signos, e só no interior de tais sistemas haverá que estudar o modo particular de combinação em que se apresentam os signos cuja forma de expressão é heterogénea. (p. 8)

Na mesma perspetiva, Filloy, Puig e Rojano (2008) acrescentam que não se deve dar uma importância excessiva aos signos individuais, pois o que é efetivamente matemático são os sistemas, sendo estes os responsáveis pelo sentido dos textos matemáticos.

Pimm (1995) também aborda a questão do significado em Matemática e distingue símbolo de signo, considerando que o primeiro pode ter a função do segundo quando aponta ou nomeia algo, mas pode também funcionar como duplicado ao tomar o lugar de um determinado objeto. Para este autor, os dois papéis do símbolo, o de significação e o de substituição, são complementares e funcionam em conjunto na Matemática. Um outro aspeto importante patente no trabalho de Pimm (1995) também realçado por Carreira (1998) refere-se ao facto de "ao trabalharmos com o símbolo ganhamos experiência acerca da coisa que ele substitui. Neste processo podemos até perder de vista o facto de estarmos a trabalhar com um símbolo e não com o objeto originalmente pretendido" (p. 195). Segundo este autor, há uma tensão entre a atribuição de sentido e o consequente enriquecimento, e a fluência que resulta do facto de não se ter em conta esse sentido. Este afastamento do símbolo daquilo que representa é também referido por Arcavi (1994) que considera ser uma das forças do símbolo pois "permitem-nos distanciarmo-nos, e até 'esquecermos' os seus referentes de forma a produzir resultados de forma eficiente" (p. 26). No entanto, este autor também salienta a importância de manter uma visão global do que se está a trabalhar para não se cair em manipulações sem sentido. Esta ideia é reforçada por Freudhental quando critica a utilização abstrata de símbolos que conduz a Matemática a uma repetição de manipulações destituídas de significado (Ponte, Branco & Matos, 2008).

Radford e Puig (2007) relatam a relutância dos alunos passarem de uma expressão que traduz um determinado problema para situações nas quais já não conseguem identificar o significado dos diferentes termos. Pelo seu lado, Davis e Hersh (1998) referem que "o processo de representação de ideias matemáticas na forma simbólica implica sempre uma alteração de ideias; um ganho em precisão e uma perda em fidelidade ou aplicabilidade aos problemas que estão na sua origem" (p. 125). Para estes autores, a principal função do símbolo na Matemática é de designar de forma clara, precisa e abreviada. Chegam mesmo a considerar que "sem esse processo de abreviação o discurso matemático dificilmente seria possível" (p. 124). Referindo que cada símbolo ou conjunto de símbolos deve ser preciso e destituído de ambiguidade, os autores separam o trabalho de cálculo com os símbolos do da sua interpretação. Enquanto no primeiro o Homem pode ser substituído pela máquina, isso não acontece no segundo uma vez que "interpretar um símbolo está associado a algum conceito ou imagem mental, para o assimilar na consciência humana" (p. 125). De acordo com os autores, nesta segunda forma de trabalhar com o símbolo não se pode esperar uma precisão superior à que se encontra na comunicação de ideias entre seres humanos.

O símbolo na linguagem algébrica

Apesar da "história da Álgebra não ser a história dos símbolos" (Sfard & Linchevsky, 1994, p. 197), a linguagem algébrica e o simbolismo são dois conceitos indissociáveis nos dias de hoje. Como referem Saraiva e Reis (2010), "de facto, a criação e o uso sistemático de uma simbologia aparecem associados à *emancipação* da Álgebra relativamente à Geometria" (p. 21) que teve início cerca de 900 d.C. e se foi desenvolvendo ao longo do tempo. Rojano (1994) considera que

> Com o aparecimento da Álgebra simbólica no século XVI, nasce uma linguagem própria para a Matemática, tendo como uma das suas características o facto de ser uma linguagem que se autoexplica, isto é, nela não só é possível expressar os teoremas mas também demonstrá-los. (p. 45)

A autora considera que a linguagem algébrica se tornou gradualmente independente da linguagem natural e da Geometria até se constituir uma linguagem autossuficiente e formal, considerando mesmo a "Álgebra simbólica a linguagem básica da

Matemática" (p. 45). A necessidade de se fazer uma análise da linguagem algébrica suportada na comparação com outras linguagens, nomeadamente na linguagem natural e na linguagem aritmética é realçada por Freudhental que, no entanto, também considera que essa análise tem que ter em atenção as características específicas da Álgebra, nomeadamente a sua formalização progressiva, o que exige critérios muito claros e regras estritas que não se coadunam com uma simples redução a outras linguagens (Rojano, 1994).

Sfard e Linchevsky (1994) também consideram que a resolução de um problema algébrico com recurso único à linguagem natural não permite a manipulação que o símbolo torna possível, o que as leva a afirmar que os meios verbais tendem a perpetuar o pensamento operativo e impedir a transição para um modo estrutural. As autoras realçam, no entanto, o facto de a introdução da notação simbólica parecer *necessária* para a uma compreensão abrangente e com significado da Álgebra, mas, por outro lado, não ser *suficiente* para a transição para um modo estrutural, entendendo como modo estrutural o que está associado aos objetos e modo operacional o que tem a ver com os processos. Na sua perspetiva, objetos e processos são mutuamente dependentes e complementares à semelhança do caráter dual onda/partícula da radiação. Para Pimm (1995) a linguagem natural pode ser mais transparente em relação ao que uma expressão supostamente traduz. No entanto, os símbolos oferecem visibilidade e têm um caráter compacto e eficaz, que os torna substitutos necessários quando se trata de manipular, transformar e generalizar.

A Aritmética e a Álgebra

Procurando caracterizar os objetos matemáticos de cada domínio, Ponte (2006), indica que, enquanto no centro da Aritmética estão os números, "no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos" (p. 11). Quando se muda de um contexto para outro, nomeadamente da Aritmética para a Álgebra, é necessária uma reconceptualização dos objetos matemáticos que os símbolos representam, pois, como indicam Filloy, Puig e Rojano (2008), essa passagem não consiste apenas numa generalização da Aritmética nem numa explicitação do que estava implícito. Estes autores consideram que, para que ocorra uma construção de certos elementos de sintaxe específicos da Álgebra, é necessária a existência e a preservação de uma base aritmética bem consolidada, sendo também fundamental a capacidade de romper com algumas noções específicas do domínio da Aritmética que podem ser entraves à modificação de algumas noções e à consequente atribuição de sentido aos textos e processos matemáticos do domínio da Álgebra.

Sfard e Linchevsky (1994) acrescentam que a transição do operacional para o estrutural implica um avanço em termos de abstração e generalização. Numa análise feita a partir de uma perspetiva histórica em que se baseiam para tirar conclusões para a aprendizagem, as autoras consideram que:

> Provavelmente a dificuldade não reside tanto na ideia da utilização de letras em vez de números ou de operações… Mas sim na necessidade de imbuir as fórmulas simbólicas com o duplo significado: o de procedimentos computacionais e o de objetos produzidos. (p. 199)

Já anteriormente referi este caráter dual da Álgebra simbólica, em que a própria expressão encerra em si o processo, visível nos operadores que contém, e é simultaneamente o produto desse mesmo processo. Tal caráter fomenta, pelo menos numa fase inicial, uma certa resistência por parte da nossa intuição (Sfard & Linchevsky, 1994). Lee e Wheeler (1989) consideram mesmo, com base num estudo sobre a conexão entre a Aritmética e a Álgebra realizado com 350 alunos de 15 e 16 anos, que "a Aritmética e a Álgebra são dois mundos dissociados para esses alunos" (p. 44), concluindo que tal facto não nos deve surpreender pois, apesar da utilização de alguns sinais em comum, o que é efetivamente feito em cada uma das áreas é muito diferente.

Kaput e o pensamento algébrico

No centro do pensamento algébrico, Kaput (2008) coloca processos complexos de simbolização cujo objetivo é generalizar e pensar sobre as generalizações, funcionando a sintaxe da linguagem simbólica como orientadora e promotora do pensamento algébrico. O autor associa a Álgebra a um artefacto cultural e o pensamento algébrico a uma atividade humana. Na sua perspetiva, uma visão da Álgebra como emergente do pensamento humano surge associada à importância dada à forma como os alunos fazem, pensam e falam sobre a Matemática. Relativamente ao pensamento algébrico, Kaput (1999, 2008) apresenta com cinco componentes sobrepostas e interligadas entre si, atribuindo um papel central às duas primeiras. A primeira componente que o autor considera intrínseca à atividade matemática e ao pensamento, é a Álgebra como simbolização sistemática da generalização de regularidades e de condições, pressupondo a generalização um alargamento do pensamento e da comunicação para além das situações concretas e sendo a simbolização a expressão dessa generalização numa linguagem crescentemente formal, consoante a faixa etária dos alunos. O autor prevê duas fontes para a generalização e a formalização, uma é o raciocínio e a comunicação sobre Matemática propriamente dita e a outra o raciocínio e a comunicação em situações não matemáticas mas com possibilidades de serem matematizadas. A segunda componente do pensamento algébrico é a Álgebra como manipulação de formalismos com recurso a sistemas de símbolos convencionais. Kaput critica negativamente o exercício rotineiro e sem significado da manipulação algébrica na sala de aula pois, na sua perspetiva, há pouca aprendizagem com compreensão e não é dado aos alunos tempo suficiente para refletirem sobre o que aprenderam. Acrescenta que é importante trabalhar com símbolos opacos que não se baseiem nem se refiram explicitamente aos números, permitindo que os alunos experienciem a Matemática numa forma que encoraje a compreensão em vez da alienação.

A terceira forma de pensamento algébrico é a Álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstratos, no qual inclui estratégias de compensação, a Álgebra como Aritmética generalizada e o pensamento quantitativo, devendo estas vertentes ser desenvolvidas com base num ensino para a compreensão, feito partir da experiência matemática dos alunos. Segundo o autor, a aprendizagem do pensamento algébrico está intimamente relacionada com outros temas matemáticos. A quarta componente é a Álgebra como o estudo de funções, relações e de variação conjunta, sendo possível, na perspetiva de Kaput, abordar o conceito de função no início da escolaridade sem valores numéricos e sem fórmulas, em contextos significativos para os alunos e, finalmente, a Álgebra como um nicho para a utilização de diversas linguagens na modelação e de controlo de fenómenos dentro e fora da Matemática. A modelação de situações é vista por muitos como uma das principais razões para estudar Álgebra e o recurso aos computadores permite repensar a forma como se exploram e modelam fenómenos, alterando os ambientes tecnológicos a forma como passamos do particular para o geral, e o modo como fazemos e justificamos conjeturas matemáticas. O autor conclui que assim se altera a maneira como ensinamos e aprendemos matemática e mesmo a forma como nos relacionamos com ela.

Kaput (1999) considera importante começar desde muito cedo o desenvolvimento do pensamento algébrico e encontrar formas de tornar o poder da Álgebra acessível a todos os alunos. Atribui ao professor e à cultura de sala de aula um papel fundamental na progressão do pensamento algébrico e insiste na presença da Álgebra em outros domínios da Matemática. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) vai de encontro ao que é defendido por este autor ao introduzir ideias algébricas no 1.º ciclo e ao apresentar a Álgebra como um tema individualizado a partir do 2.º ciclo.

2.2 O "dar sentido a"

Para Davis e Hersh (1998),"o que parece inicialmente pouco intuitivo, dúbio e de alguma forma misterioso acaba por se tornar, após um certo tipo de processo mental, numa verdade gloriosa" (p. 149). Apesar dos autores se referirem à demonstração matemática, tais palavras também podem ser aplicadas à forma como se dá sentido à Matemática. O processo mental envolvido é obviamente a chave da questão e pressupõe um caminho longo e difícil que Sfard (1991) divide em três partes, *a interiorização*, *a condensação* e *a reificação*, como esquematizado na figura 2.1. A primeira corresponde a uma familiarização com os processos que eventualmente dão origem a um novo conceito, por exemplo a subtração que conduz aos números negativos, a segunda implica uma maior capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, é o ponto em que nasce um novo conceito como por exemplo o de número negativo quando só eram conhecidos números sem sinal. A terceira parte é uma mudança que corresponde a uma súbita habilidade para ver algo que é familiar segundo uma luz totalmente diferente, nomeadamente "a habilidade (…) para visionar o resultado dos processos como entidades de direito próprio" (Sfard & Linchevsky, 1994, p. 194). No caso dos números negativos, é a habilidade para os tratar como um subconjunto do anel dos números inteiros (mesmo que não seja conhecida a definição formal de anel). Apesar de reconhecerem a dificuldade em se alcançar a reificação, as autoras constatam que, uma vez esta alcançada, "os seus benefícios se tornam imediatamente óbvios. O decréscimo na dificuldade e o acréscimo de possibilidades de manipulação são imensos" (p. 198). Esses benefícios permitidos pela reificação, podem de alguma forma, ser comparados ao poder que Arcavi (1994) atribui aos símbolos, e ao seu sentido, ao considerar que além de permitirem uma manipulação rápida e eficaz, são essenciais para aceitar ou rejeitar conjeturas de forma conclusiva.

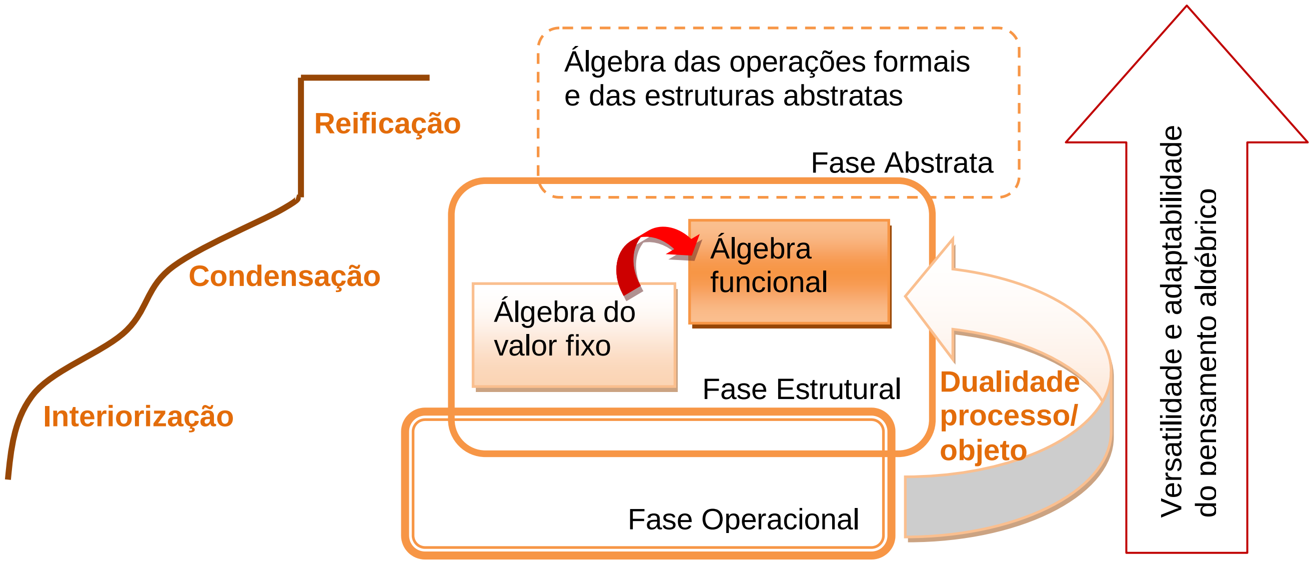


Fig. 2.1 – Esquema das ideias centrais que enquadram o trabalho de Sfard e Linchevski.

Para Sfard e Linchevsky (1994) a atribuição de sentido vem com a habilidade de ver as ideias abstratas que se escondem atrás dos símbolos. Sendo certo que:

> "Os símbolos algébricos não falam por si, o que realmente vemos neles depende dos requerimentos do problema específico ao qual os pretendemos aplicar. Mas, não menos importante, depende do que estamos *preparados* para reparar e no que somos *capazes* de apreender" (Sfard & Linchevsky, 1994, p. 192).

Esta habilidade para "ver atrás dos símbolos" resulta, por um lado, da instrução matemática, e, por outro, da lógica interior do aluno e requer da parte deste capacidade para adaptar e flexibilizar o seu pensamento algébrico. Depois da passagem do operacional para o estrutural inserida na transição da Aritmética para a Álgebra, já referida anteriormente, que implica a visão dual processo/objeto, as autoras inserem no modo estrutural a Álgebra do valor fixo associada à incógnita e a Álgebra funcional associada à variável que conduz às estruturas abstratas que unificam e dão sentido ao conhecimento. Se ocorrerem falhas ao longo da instrução no desenvolvimento do sentido correto, o aluno tem tendência a criar o seu próprio sentido, por vezes muito incorreto. As autoras denominam esta situação de *pseudoestrutural* pois a passagem para os objetos abstratos não é concretizada, nessa situação "o novo conhecimento permanece destacado das suas bases operacionais e dos sistemas de conceitos desenvolvidos previamente" (p. 221).

Nestas circunstâncias os alunos podem continuar a ser capazes de efetuar processos, mas a sua compreensão vai permanecer instrumental. A figura 2.1 ilustra as ideias fundamentais destas autoras.

Schoenfeld (1992) considera que "as ferramentas da Matemática são a abstração, a representação simbólica e a manipulação simbólica" (p. 3). No entanto, este autor também reforça a ideia que, aprender a pensar matematicamente não consiste no treino da utilização dessas ferramentas, mas sim num certo gosto em aplicar processos de matematização e abstração bem como na utilização dessas ferramentas para a compreensão, ou seja, para dar sentido à Matemática. Apresenta esta ciência como um ato de "dar sentido a" através de uma atividade socialmente construída e transmitida o que vai de encontro a um dos aspetos da teoria da objetivação de Radford (2006b), que considera a interação social parte consubstancial da aprendizagem e, como tal, uma fonte importante para "dotar de sentido os objetos conceptuais que o aluno encontra na sua cultura" (p. 113).

Duval os registos semióticos e as conversões

Duval é um investigador para quem a Matemática se distingue de todas as outras áreas científicas pela forma como é possível aceder aos seus objetos. Na sua perspetiva, à semelhança dos sentimentos humanos, que se encontram representados das mais diversas maneiras em variadas formas de arte, os objetos matemáticos também não se veem nem se tocam, sendo apenas acessíveis através das suas representações semióticas. Partindo da definição já aludida de Peirce para representação – "algo que representa outra coisa em relação a certo aspeto ou capacidade[1]" (Duval, 2006a, p. 50) – apresenta duas outras definições:

> Representações podem ser crenças individuais, conceções, certas ou erradas, às quais temos acesso através de produções individuais, verbais ou esquemáticas… Mas representações também podem ser símbolos e as suas associações complexas que são produzidas de acordo com regras e que permitem a descrição de um sistema, de um processo ou de um conjunto de fenómenos. (Duval, 2006b, p. 104)

A primeira definição está na base da investigação sobre a explicação da aquisição de conhecimento matemático enquanto a segunda considera as representações

[1] *Something which stands for something in some respect or capacity*.

semióticas com a possibilidade acrescida de produzirem conhecimento. O autor considera as duas definições de alguma forma opostas e afirma existir uma organização de estruturas cognitivas específicas que são a base da realização dos diversos processos matemáticos. Não sendo então possível aceder ao objeto matemático real, são as representações semióticas que estão na base da atividade matemática. No entanto, para Duval (2006a), "não são as representações que são importantes mas as suas transformações" (p. 57) o que levou ao desenvolvimento de um simbolismo específico como a representação dos números, dos objetos da Álgebra e da Análise, etc. Em Matemática, o símbolo assume assim um papel diferente do de outras áreas, não se limitando a ser um facilitador da comunicação ou evocador de objetos, cabendo-lhe também o papel de permitir uma transformação das suas representações noutras representações, contribuindo para a produção de novo conhecimento.

Duval debruça-se sobretudo sobre o conceito de sistema de representação semiótico. Um tal sistema "comporta regras mais ou menos explícitas, que permitem combinar os símbolos entre si de tal maneira que a associação formada tenha também um sentido" (2004, p. 43). Aos sistemas de representação semióticos que permitem a transformação de representações, o autor dá o nome de "registos semióticos". As transformações dentro do mesmo registo são denominadas de "tratamento" e aquelas que ocorrem entre registos diferentes, sem mudança dos objetos, são as "conversões":

> Estes dois tipos correspondem a processos cognitivos muito distintos. São duas fontes independentes da incompreensão na aprendizagem da Matemática. Enquanto o tratamento é mais importante de um ponto de vista matemático, as conversões são basicamente o fator decisivo na aprendizagem. (Duval, 2006b, p. 1)

A mudança de registo associada às conversões é um processo complexo pois pressupõe o reconhecimento do mesmo objeto em dois registos diferentes, que, por vezes, pouco ou nada têm em comum. A Matemática, permite que se vagueie, sempre a partir da mesma informação inicial, entre registos de representações semióticas distintos, caracterizados pelas suas possibilidades ou capacidades específicas, podendo ser exclusivos do processamento matemático, como, por exemplo, a Álgebra, ou com um largo espetro de aplicações, como é o caso da comunicação (Duval, 2006b). Para o autor "a originalidade e o poder do pensamento matemático provêm do jogo sobre a variedade de registos semióticos e sobre as possibilidades específicas de transformação que são próprias de cada sistema" (Duval, 2006a, p. 57). Ao alterar-se o registo de transformação, verifica-se não só uma mudança da forma de tratamento mas também das propriedades que podem ser explicitadas o que leva a que o conteúdo de uma representação dependa mais do registo dessa representação do que do objeto representado (Duval, 2006b). Assim, a conversão pode tornar muito difícil a identificação do mesmo objeto representado em registos diferentes que, por vezes, pouco têm em comum, sendo portanto fundamental que ao longo de todo o processo de raciocínio, não haja confusão entre objetos matemáticos e as suas representações semióticas.

Radford e a objetivação

Outro autor com vários trabalhos na área da Semiótica e da sua relação com a Álgebra e, mais concretamente, com a Álgebra na sala de aula, é Luís Radford. Radford e Duval têm como base de alguns dos seus trabalhos as dificuldades com que os alunos se deparam no decorrer da atividade matemática. Duval reconhece que "a investigação sobre a aprendizagem da Matemática e as suas dificuldades deve basear-se no que os alunos fazem por si próprios, nas suas produções, nas suas vozes" (Duval, 2006b, p. 104), mas centra o seu trabalho nas representações pois considera-as a face visível das funções cognitivas que sustentam os vários processos matemáticos. Pelo seu lado, Radford (2006), aponta como problema fundamental da Matemática, o compreender como se realiza a aquisição de saber depositada na cultura. Para este autor:

> As práticas sociais, os sistemas semióticos e os artefactos que os medeiam são a base da atividade cognitiva histórico-cultural. Ao tornarem-se reflexivamente envolvidos neles, ou seja, ao tornarem-se profundamente envolvidos em processo criativos e imaginativos de objetivação e de "dar sentido a", as práticas mediadas pelos símbolos e artefactos oferecem aos alunos um conjunto maleável de vetores de crescimento cognitivo. (Radford & Puig, 2007, p. 159)

Para compreender como dão os alunos sentido ao simbolismo algébrico, Radford e Puig (2007) propõem um modelo que engloba uma dimensão histórica e uma dimensão contemporânea. Os autores argumentam que os símbolos algébricos e os seus significados, com os quais os alunos se deparam na escola, transportam em si anos de História, mais concretamente, "suportam a atividade cognitiva das gerações anteriores" (p. 148). Essa herança fornece aos alunos linhas de desenvolvimento conceptual que estes utilizam e transformam de acordo com as atividades em que se envolvem. A dificuldade da Álgebra está, segundo os autores, no facto dessa atividade cognitiva histórica depositada nos símbolos e no seu sentido, não ser transparente para os alunos. Para ultrapassar essa dificuldade é necessário que o aluno se envolva num processo ativo de "dar sentido a", o que, os autores concretizam como um processo de objetivação, ou por outras palavras, um processo de tornar algo aparente. Esse processo de objetivação assenta na teoria cultural da objetivação, uma teoria de ensino e aprendizagem da Matemática, elaborada por Radford. De acordo com esta teoria,

> O que caracteriza o pensamento não é só a sua natureza semioticamente mediatizada, mas é sobretudo o seu modo de ser como *praxis reflexiva*. A aprendizagem da Matemática é vista como a aquisição em comunidade de uma forma de reflexão do mundo guiada por modos epistémico-culturais historicamente formados. (Radford, 2006b, p. 104)

A teoria da objetivação distingue-se assim do racionalismo ao considerar que "o pensamento é uma reflexão mediada do mundo, dependente da forma de atividade dos indivíduos" (Radford, 2006b, p. 107) ao invés de ser uma atividade exclusivamente interna ao indivíduo. Essa mediação é levada a cabo pelos símbolos e outros artefactos que o autor considera fazerem parte integrante do pensamento. Sendo então certo que o pensamento é indissociável de uma componente reflexiva, também não é possível pensar sem que o indivíduo seja envolvido pela sua realidade cultural e pela história do pensamento humano. O autor considera então que "a maneira como pensamos e conhecemos os objetos do saber está marcada por significados culturais que vão para lá do próprio conteúdo da atividade dentro da qual ocorre o ato de pensar" (p. 106). Os objetos matemáticos são gerados no decurso da atividade matemática dos indivíduos, sendo a própria atividade reflexiva essencial para a compreensão desses mesmos objetos. Sendo o pensamento uma reflexão mediada do mundo, essa mediação é feita pelos símbolos e outros artefactos que considera parte integrante do pensamento.

Metodologicamente, a teoria da objetivação foca a sua atenção nos meios semióticos de objetivação que os alunos utilizam, sendo necessário da parte destes um esforço duplo: por um lado, a elaboração de significados e, por outro, a tomada de consciência dos objetos conceptuais. Nesses meios semióticos de objetivação, Radford inclui os gestos, a linguagem e os símbolos (entre outros) que se convertem em parte constituinte do ato cognitivo, posicionando o objeto conceptual no plano social em vez de encerrado na cabeça de cada um, tornando possível uma participação conjunta. Mas a aprendizagem não é apenas uma imitação ou participação numa prática previamente estabelecida, mas tem associada uma certa subjetividade ao tentar compreender o pensamento matemático, visto com um "modo de refletir" apenas visível através da ação (Radford, 2006b)

Deste modo, a objetivação é "um processo social de tomada de consciência progressiva (…) de algo que está à nossa frente (…) cuja generalidade notamos gradualmente ao mesmo tempo que a dotamos de sentido" (Radford, 2006, p. 116). A ideia de que a objetivação não é um processo individual, e que o saber e o pensamento matemático têm uma natureza intrinsecamente social, leva o autor a considerar a sala de aula uma comunidade de aprendizagem, orientada para a objetivação do saber. Este é um conceito forte no trabalho de Radford, que serve de base a vários dos seus trabalhos empíricos. A figura 2.2 sintetiza algumas ideias centrais que enquadram algum do trabalho do autor.

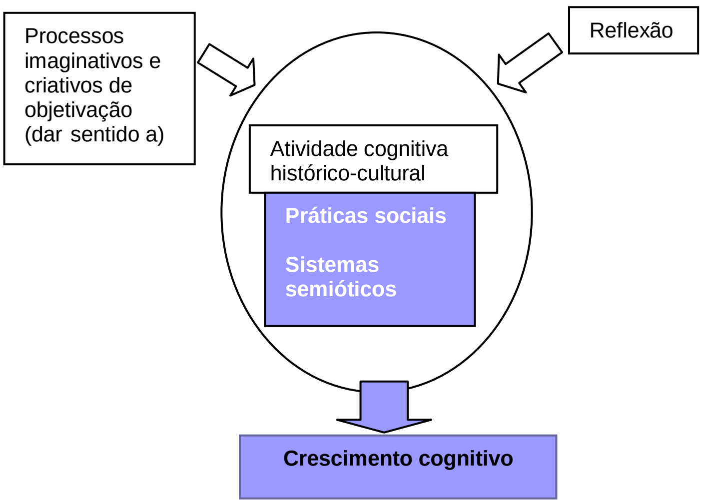


Fig. 2.2 – Esquema das ideias centrais que enquadram o trabalho de Radford.

Radford (2006) considera que "não há, efetivamente, uma formulação linguística possível do pensamento matemático de cuja leitura – por atenta que seja – possa resultar a sua compreensão" (p. 115). Na sua perspetiva, o pensamento matemático é algo que está para além do discurso e só se aprende fazendo e refletindo, sendo necessário recorrer à prática. O ensino consiste, então, em pôr e manter em movimento atividades contextualizadas, situadas no tempo e no espaço, que se encaminham para um esquema de atividade reflexiva incrustado na cultura. O principal objetivo do ensino da Matemática é que o aluno aprenda a refletir de acordo com certas formas culturais de pensamento historicamente constituídas, sendo essa forma de refletir específica da Matemática pois dá ênfase a ideias em torno da forma, do número, da medida, do tempo, do espaço, etc., o que não acontece noutras formas de reflexão.

Radford não advoga que a aprendizagem seja uma construção ou reconstrução do saber cultural por parte do aluno, mas sim um "dar sentido" aos objetos conceptuais que o aluno encontra na sua cultura: "A aquisição de saber é um processo de elaboração ativa de significados" (Radford & Puig, 2007, p. 113), sendo que, na sua perspetiva, há duas fontes importantes de elaboração de significados, o mundo dos artefactos e a interação social. O artefacto encerra em si o saber mas por si só não pode tornar clara a inteligência histórica que encarna. É necessária a sua utilização em atividades e o contacto com os que sabem ler essa inteligência, pois sem eles a linguagem simbólico-algébrica ficaria destituída de significado tal como um conjunto de hieróglifos. A atividade social realizada na escola é assim fundamental para tornar visível essa linguagem, tendo o professor um papel mais substancial que o de simples mediador de conhecimentos. Radford atribui também ao professor a responsabilidade de utilizar um conjunto de ações de inclusão, com um sentido diferente do habitual. Estas são concebidas para que o aluno que resolve corretamente problemas matemáticos mas não atende à dimensão interpessoal da comunidade, ganhe a pouco e pouco espaço na mesma. Para o autor, o aluno que tem sucesso na resolução de problemas mas não se interessa por explicar a sua resolução aos outros nem em compreender e ajudar os seus pares está apenas a meio caminho do que entende por êxito em Matemática. Para o investigador, o aluno autónomo não é o que trabalha de forma autossuficiente mas sim o que "é com os outros".

Em relação à Álgebra, Radford e Puig (2007), consideram que as dificuldades dos alunos estão frequentemente relacionadas com dois aspetos, sendo o primeiro a compreensão das formas distintas nas quais os símbolos tomam o lugar dos objetos que representam, o que está em sintonia com as diferentes formas de representação de Duval, e o segundo a compreensão do sentido das operações que se realizam com esses símbolos. Não havendo uma correspondência total entre símbolo e objeto, há sempre espaço para ver um símbolo e o que ele representa de uma outra forma. A relação entre símbolo e objeto é um constructo cultural que o efeito contínuo da interpretação e da imaginação torna sempre aberto à mudança e à transformação.

Num exemplo da resolução de um problema, Radford e Puig (2007) apresentam o caso de um aluno que num trabalho de "dar sentido a", transforma um problema de palavras produzindo um texto algébrico. No entanto, o aluno revela uma compreensão incompleta da sintaxe e do sentido do simbolismo algébrico quando a incógnita deixa de ter um significado bem definido (número de rebuçados) e toma uma forma mais abstrata que implica o que os autores denominam de "sentido percetual", ou seja, um sentido que tem em conta a forma das expressões simbólicas.

Arcavi e o sentido de símbolo

Um outro autor que tem dedicado parte do seu trabalho à Álgebra e ao seu sentido, é Arcavi (1994) que utiliza a expressão "sentido de símbolo" considerando, à semelhança de Kaput, que o simbolismo algébrico deve ser introduzido desde muito cedo em situações nas quais os alunos possam apreciar o poder dos símbolos na expressão, generalização e justificação de fenómenos aritméticos. Para o autor, todos, ou quase todos, podem desenvolver o sentido de símbolo, mesmo que parcialmente (Arcavi, 2006) e considera que seria um objetivo desejável para a educação matemática tornar o sentido de símbolo uma parte inseparável da Matemática, assim como os sentidos são uma parte integrante do nosso ser (Arcavi, 1994). Não utiliza o termo "pensamento algébrico", porque o considera demasiado abrangente.

Para Arcavi, os símbolos são o instrumento principal da Álgebra e ter sentido de símbolo é dar significado a esses símbolos (Guimarães et al., 2006). Assim recorre à expressão "sentido de símbolo" em relação à Álgebra como um paralelo do "sentido de número" da Aritmética e, embora não o defina, discute-o através de exemplos que, na sua perspetiva, ilustram o conceito. O investigador ancora os comportamentos que considera serem manifestações do sentido de símbolo na sensibilidade que o aluno deve ter perante o símbolo, para tomar decisões sobre a sua utilidade, provar relações e aceitar ou rejeitar conjeturas. Não coloca o sentido de símbolo numa sequência de desenvolvimento, à semelhança de Sfard, nem o centra numa mudança de representações, como Duval, mas posiciona no mesmo plano vários aspetos que evidenciam o seu desenvolvimento. O autor não aprofunda a noção de pensamento algébrico nem de sentido de símbolo, mas de alguma forma congrega na sua caracterização, conceitos de outros autores. Ao definir sentido de símbolo como "uma sensibilidade complexa e multifacetada aos símbolos" (p. 31) e ao caracterizar esse sentido a partir de uma catalogação de comportamentos visíveis e identificáveis, Arcavi (1994) consegue operacionalizar o conceito, o que pode ser considerado uma vantagem da sua abordagem. A desvantagem é reconhecida pelo próprio autor quando refere que "há muito mais no sentido de símbolo do que um catálogo, independentemente de quão completo este possa estar" (p. 31).

O primeiro comportamento que Arcavi (1994) apresenta como ilustrativo do sentido de símbolo é "fazer amizade com os símbolos" (p. 24), o que sugere a necessidade de quebrar as barreiras mentais que os alunos parecem ter perante os símbolos, reconhecendo nestes, à semelhança de um bom amigo, a capacidade de os ajudarem a ultrapassar inúmeras situações problemáticas, que de outra forma seria muito difícil, ou mesmo impossível, de resolver. Estas "barreiras mentais" que importa ultrapassar, são também referidas por Filloy, Puig e Rojano (2008) quando consideraram que o sentido que o aluno atribui a processos algébricos pode ser comprometido por noções muito ligadas à Aritmética, o que torna necessária uma reconceptualização e, por vezes, uma quebra com essas noções. Sfard e Linchevsky (1994) também reconhecem uma relutância inicial da nossa própria intuição perante a dualidade operacional/estrutural dos símbolos algébricos e consideram essa passagem um passo importante para a abstração e a generalização.

Para Arcavi, é fundamental que o aluno não perca uma visão global do que está a trabalhar, seja flexível, evitando cair em situações de circularidade ou em manipulações destituídas de significado e seja capaz de, a partir da inspeção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação, sentir o problema**.** Este aspeto também é focado por Kaput (1999) que critica a "prática de manipulação simbólica com regras intermináveis e a perda de conexão às relações quantitativas representadas pelos símbolos" (p.139). É igualmente referido por Sfard e Linchevki (1994) quando identificam a situação *pseudoestrutural* que conduz a uma manipulação sem compreensão, do significado dos sistemas de símbolos no contexto em que se inserem.

A um nível cognitivo mais elevado, o sentido de símbolo deve incluir a habilidade de criar e manipular uma expressão simbólica para um determinado objetivo, tendo em atenção o ganho de significados mais ricos que podem emergir de expressões equivalentes derivadas de manipulação simbólica. Arcavi inclui também no sentido de símbolo a habilidade de escolher a representação simbólica adequada a um determinado problema sem perder a noção dos diferentes papéis que o símbolo pode desempenhar em diferentes contextos, bem como a coragem de reconhecer quando não é a melhor escolha. Para o autor, o movimento entre diferentes representações contribui para o desenvolvimento do sentido de símbolo, ideia também central em Duval na importância que atribui à transformação de representações na produção de novo conhecimento.

Arcavi (2006) considera essencial para o desenvolvimento do sentido de símbolo a paciência e a capacidade de conviver com a compreensão parcial por largos períodos de tempo e chama a atenção aos professores, que na ânsia de concluírem os temas, por vezes fazem da aprendizagem um caminho rápido para a solução o que, na sua perspetiva, pode constituir um obstáculo ao desenvolvimento do sentido de símbolo.

Arcavi, Radford e Duval apresentam terminologia e abordagens diferentes para a forma como o símbolo e o desenvolvimento do seu sentido surgem na Matemática e no seu ensino, mas têm uma preocupação comum: compreender as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra, para os poderem ajudar a tirar proveito de toda a sua potencialidade, pondo-a ao serviço da resolução de problemas. A tabela 2.1 seguinte tenta estabelecer um paralelo entre as ideias destes três autores.

A importância da semiótica é comum na abordagem que estes três autores fazem da Matemática e mais concretamente da Álgebra. Todos concordam que independentemente da natureza ou da forma como surgem ou são gerados os objetos matemáticos, os variados sistemas de natureza semiótica que os representam são indispensáveis à atividade matemática. Duval coloca as representações semióticas e, mais especificamente, as transformações entre elas, na base da atividade matemática e da construção do conhecimento matemático. A chave de todo o processo não se encontra na escolha da representação correta mas em encontrar e coordenar uma variedade de representações que sejam relevantes para o problema proposto. Essa coordenação é interna e parece ter um caráter individual ao contrário do que é preconizado por Radford que na sua teoria da objetivação atribui ao aspeto social um papel fundamental na construção não só do conhecimento mas da própria pessoa. Para este autor, os mecanismos cognitivos estão fortemente relacionados com a dimensão histórica, as práticas sociais e os símbolos e artefactos que os medeiam. Arcavi faz a ligação entre o símbolo e o seu sentido através do reconhecimento do seu papel e do recurso às suas potencialidades. Essa atribuição de sentido parece ser um processo interno e individual, embora o autor aponte o questionamento e a discussão conjunta como um estímulo ao desenvolvimento desse sentido.

Tabela 2.1 - *Comparação das ideias de Duval, Radford e Arcavi*

	Duval	**Radford**	**Arcavi**
Álgebra	A Álgebra é um sistema semiótico exclusivo do processamento matemático, Podes ser necessário recorrer a tratamentos e/ ou conversões. Por exemplo a resolução de equações recorre a transformações dentro do próprio registo, mas a passagem de um problema escrito em linguagem corrente para uma equação já implica uma mudança de registo semiótico.	Produto de um longo processo histórico que os alunos encontram numa instituição social extremamente complexa chamada escola. A Álgebra numa perspetiva de resolução de problemas baseia-se num pensamento matemático complexo que adquire sentido ao longo da atividade desenvolvida.	Ferramenta para a compreensão, expressão e comunicação da generalização, para revelar estruturas e para estabelecer conecções e formalizar os argumentos matemáticos. Inclui o exercício de uma transição bidirecional com oportunidade e flexibilidade entre a utilização de ações desprovidas de significado e a aplicação do senso comum e da busca de significados.
Os símbolos	Em Matemática a função primordial dos símbolos, não é a comunicação nem a evocação de objetos ausentes, mas a transformação intrínseca das suas representações noutras representações para produzir novas informações ou novos conhecimentos.	Os símbolos algébricos e os seus significados com os quais os alunos se deparam na escola transportam em si anos e anos de História, mais concretamente, contêm a atividade cognitiva das gerações anteriores. Essa herança fornece aos alunos linhas de desenvolvimento conceptual que os alunos utilizam e transformam de acordo com as atividades em que se envolvem.	Os símbolos são o instrumento principal da Álgebra e ter sentido de símbolo é dar significado a esses símbolos.
O fundamental	É fundamental que, ao longo de todo o processo, não haja confusão entre objetos matemáticos e as suas representações semióticas.	É fundamental que o aluno se envolva num processo ativo de "dar sentido", ou seja num processo de objetivação (tornar algo aparente).	É fundamental não perder uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.
A escolha e a mudança de representação	A raiz do problema na aprendizagem da Matemática não é a escolha da representação mas a habilidade para compreendermos e fazermos por nós próprios qualquer mudança de representação, dentro do mesmo registo e entre diferentes registos.	Uma vez que não há uma correspondência completa entre símbolo e objeto, há sempre espaço para ver um símbolo e o que ele representa de uma outra forma. A relação entre símbolo e objeto é um constructo cultural que o efeito contínuo da interpretação e da imaginação torna sempre aberto à mudança e à transformação.	Um aspeto do sentido de símbolo é a habilidade de escolher a representação simbólica adequada, bem como a coragem de reconhecer quando não é a melhor escolha e a capacidade de recorrer a vários meios para encontrar a melhor representação.
A compreensão matemática	A compreensão Matemática começa quando se inicia a coordenação dos registos de representações, coordenação essa que implica a dissociação entre objeto e representação, o reconhecimento do	A objetivação é precisamente o processo social de tomada de consciência progressiva de algo que está à nossa frente e cuja generalidade notamos gradualmente ao mesmo tempo que a	Uma componente do sentido de símbolo consiste, perante uma determinada situação, o reconhecimento dos papéis diferentes (e no entanto similares) que os símbolos podem desempenhar. Tal

	mesmo objeto matemático em registos diferentes e a capacidade de realizar conversão entre registos.	dotamos de sentido.	reconhecimento implica organizar a multiplicidade de significados dos símbolos e a habilidade para lidar com os diferentes processos e objetos matemáticos envolvidos.
Matemática para todos	O facto da atividade matemática requerer estruturas cognitivas específicas que devem ser tidas em conta no seu ensino, é particularmente importante se considerarmos que o objetivo do ensino da Matemática ao nível básico e secundário não for formar matemáticos nem dotar os alunos de ferramentas que são eventualmente úteis daqui a muitos anos, mas sim contribuir para o desenvolvimento geral das suas capacidades de raciocínio, análise e visualização.	A objetivação não é um processo individual, sendo que o saber e o pensamento matemático têm uma natureza intrinsecamente social sendo a sala de aula uma comunidade de aprendizagem orientada para a objetivação do saber. O professor dispõe de um conjunto de ações de inclusão, concebidas para que o aluno, que resolve corretamente problemas matemáticos sem atender à dimensão interpessoal da comunidade, ganhe a pouco e pouco espaço na mesma. A ideia de autonomia como ser autossuficiente é substituída por uma ideia de *ser com os outros.*	O simbolismo algébrico deve ser introduzido desde muito cedo em situações nas quais os alunos possam apreciar o poder dos símbolos na expressão, generalização e justificação de fenómenos aritméticos. Para o autor, todos, ou quase todos, podem desenvolver o sentido de símbolo, mesmo que parcialmente e seria um objetivo desejável para a educação matemática tornar o sentido de símbolo uma parte inseparável da Matemática.
O ensino da Matemática	É importante utilizar nas tarefas matemáticas diferentes representações e relacioná-las dentro do mesmo registo e entre registos diferentes. As tarefas devem-se focar nas diferentes representações do mesmo objeto e na análise de representações de objetos diferentes dentro do mesmo registo e como se relacionam em outros registos. No entanto tratamentos e conversões devem ser analisados separadamente do ponto de vista cognitivo para se compreender as dificuldades dos alunos.	O principal objetivo do ensino da Matemática é que o aluno aprenda a refletir de acordo com certas formas culturais de pensamento historicamente constituídas e que a distingue de outras formas de reflexão.	É essencial para o desenvolvimento do sentido de símbolo a paciência e a capacidade de conviver com a compreensão parcial por largos períodos de tempo. Os professores na sua ânsia de concluírem os temas, por vezes fazem da aprendizagem um caminho rápido para a solução, o que pode constituir um obstáculo ao desenvolvimento do sentido de símbolo.

Os três autores consideram que a construção do conhecimento algébrico pode ser complexa do ponto de vista cognitivo e que é importante compreender as dificuldades dos alunos na aprendizagem. Para Duval é importante compreender o que é característico do conhecimento matemático, nomeadamente a especificidade da forma matemática de pensar que inclui a habilidade para mudar de registos de representação. É fundamental entender que os complexos processos cognitivos associados às conversões são cruciais para a compreensão do aluno. Radford também considera que as ideias enfatizadas pela reflexão matemática a distinguem das outras áreas e concorda com Duval quando este aponta as conversões e os tratamentos como algo que os alunos têm dificuldade em compreender, em particular, as conversões associadas às mudanças de registo (Radford, 2002). O autor advoga que a atividade matemática, um processo de atribuição de sentido, permite que os alunos dominem progressivamente o simbolismo algébrico devendo as mudanças de registos ser feitas gradualmente até entrarem na Álgebra simbólica. Arcavi também coloca a atribuição de sentido, ao símbolo, como o centro da Álgebra e reconhece que mesmo alunos que utilizam com sucesso as técnicas algébricas, não conseguem ver a Álgebra como uma ferramenta poderosa de abstração, generalização e planificação de soluções e estratégias. Todos reconhecem a importância das representações menos associadas à Matemática no caminho para a compreensão algébrica. Radford (2002) apresenta evidência desse aspeto em estudos empíricos e Arcavi (1994) destaca a utilização do que denomina por representações visuais na condução e suporte do trabalho algébrico, desde que feito com sentido de símbolo. Duval (2004) considera que essas representações ligadas a experiências mais concretas do dia a dia dos alunos são importantes, mas que a complexidade dos processos envolvidos é a mesma do que a existente com as outras representações e alerta para o perigo de se cair num “labirinto de representações”.

É interessante verificar que para os três autores a Matemática deve estar acessível a todos os alunos e contribuir para o desenvolvimento das suas capacidades. Esta ideia é forte em Radford que responsabiliza professor e alunos pela criação de uma comunidade de aprendizagem na sala de aula. Considera importante a escolha das tarefas que permitam a todos, através da reflexão e da discussão chegar à objetivação do saber, e que o professor recorra à sua bagagem histórica e cultural mas que também se coloque na perspetiva do aluno para melhor compreender as suas dificuldades. Para Duval apesar de não especificar o papel do professor, parece dar importância à escolha de tarefas que promovam várias representações do mesmo objeto e a representação de objetos diferentes no mesmo registo. Caberá também ao professor fazer a análise da variação das representações em diferentes registos e introduzir comentários que explicitem as diferentes relações. Arcavi também foca a riqueza das tarefas e do seu contexto como uma fonte de oportunidades de aprendizagem, recorda a importância que a tecnologia pode ter e converge com Radford ao acentuar que é na atividade dos alunos que está o suporte da construção do sentido de símbolo. Ao professor caberá levar os alunos a uma exploração das tarefas que fomente práticas de pensamento e discussão apropriadas que vão revelando os aspetos implícitos do problema, assim como analisar as soluções obtidas contribuindo para o estabelecimento de conexões entre diferentes abordagens.

Em síntese a atribuição de sentido que resulta da compreensão, é caracterizada e atribuída a diferentes fatores pelos três investigadores. Para Duval requer uma tomada de consciência específica em relação à coordenação de registos não perdendo de vista o objeto matemático que lhes deu origem. Para Radford só é possível através do processo social que engloba sistemas semióticos de significação cultural, artefactos e atividades, e ajudam a tornar aparente o que outra forma não seria visível e, para Arcavi, esse tornar aparente, implica uma certa intuição e consciencialização do poder multifacetado dos símbolos.

No contexto deste trabalho “símbolo” engloba números, letras, gráficos operações, etc., ou seja, inclui todas as representações simbólicas sobre as quais a Matemática e mais concretamente a Álgebra trabalha, e “sentido de símbolo” é a compreensão desses símbolos e da forma como eles se relacionam e/ou substituem, numa perspetiva de evolução cognitiva por parte do aluno.

Capítulo 3

Metodologia

Este estudo debruça-se sobre o sentido de símbolo dos alunos do ensino secundário, procurando entender a forma como esse sentido está presente no seu trabalho ao longo do ano letivo no contexto da avaliação sumativa. O sentido de símbolo do aluno resulta de um processo interno pelo que não é diretamente observável nem facilmente explicável. As opções metodológicas seguidas nesta investigação são naturalmente influenciadas por esse facto, e encontram-se descritas e justificadas neste capítulo.

3.1. Opções metodológicas

Abordagem e design. Este trabalho insere-se no paradigma interpretativo e usa uma abordagem qualitativa tendo uma pequena componente quantitativa. Assume assim uma lógica de descoberta que caracteriza os estudos interpretativos. Bogdan e Biklen (1994) indicam como uma das características de uma investigação qualitativa o facto de "os investigadores qualitativos interessarem-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados do produto" (p. 49). Apesar de todas as outras características referidas pelos autores também estarem presentes neste trabalho, esta é fundamental nesta investigação, que tem efetivamente como centro os processos utilizados pelos alunos, que caracterizam o seu sentido de símbolo.

Além disso, a investigação realizada tem um *design* de estudo de caso múltiplo. O meu objetivo foi compreender o sentido de símbolo dos alunos, não pretendendo modificá-lo e baseando o estudo essencialmente no trabalho de campo e em análise documental – algumas das características que Ponte (1994) considera definirem um estudo de caso.

Mais concretamente efetuo um estudo de três casos considerando que:

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida… Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês", evidenciando a sua unidade e a sua identidade própria. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico. (Ponte, 1994, p. 3)

Bogdan e Biklen (1994) aconselham a realização de estudos de caso a investigadores com pouca experiencia. A opção pelo estudo de caso nesta investigação deve-se também a um aspeto prático de compatibilidade com os meus recursos de tempo e de experiência. A escolha de vários casos tem por objetivo proporcionar uma base empírica mais alargada sobre o fenómeno em estudo:

> O recurso a vários casos tem por objetivo gerar evidência diversificada, e em maior quantidade, e possibilitar, com o seu confronto, uma iluminação mútua desses caso, bem como a identificação de elementos de homogeneidade (aspetos comuns, convergências, semelhanças) e de heterogeneidade (singularidades, divergências, contrastes). (Guimarães, 2005, p. 21)

Esse enriquecimento do estudo proveniente dos vários casos justifica o trabalho com mais do que um caso. O facto de serem três estudos de caso aumenta a complexidade do estudo mas a possibilidade de partilha de alguns recursos entre os casos, permitiu a sua exequibilidade em tempo útil.

O contexto do estudo e o papel da investigadora. O estudo realizou-se na escola onde leciono, sendo determinante nesta escolha a facilidade de acesso ao campo e aos participantes. Trata-se de uma escola internacional onde coexistem duas áreas de estudos, a portuguesa e a inglesa e programas distintos enquadrados respetivamente no currículo nacional e no currículo britânico, que são trabalhados desde o jardim de infância até ao final do ensino secundário.

O ano letivo de 2009/10 assumiu para mim características únicas na medida em que me encontrei a substituir uma colega, numa turma de 12.º ano, entre o início do ano letivo e a interrupção do Carnaval. Essa situação permitiu-me conhecer melhor os alunos que acabaram por se tornar os principais participantes do estudo. Apesar de parte da investigação nomeadamente o teste diagnóstico e as entrevistas subsequentes terem decorrido enquanto ainda era professora deste grupo de alunos toda a recolha de dados foi realizada fora do contexto de sala de aula, sendo mantida uma separação clara entre a investigação e as atividades letivas. A partir da interrupção letiva do Carnaval continuei, com o apoio da docente que tinha entretanto regressado, a recolher a documentação escrita dos alunos e fiquei numa situação privilegiada para lhes fazer a entrevista mais aprofundada, já sem ser sua professora.

Quando numa primeira abordagem expliquei à turma do 12.º ano a investigação que pretendia realizar e o papel que eventualmente poderiam desempenhar, os seis alunos que a constituíam mostraram entusiasmo e interesse em fazer parte do estudo pelo que foi recolhida informação sobre todos eles. Seguindo as recomendações referidas em Guimarães (2003), tive em atenção a importância da forma como o investigador se relaciona com os participantes e tentei encontrar o equilíbrio que o autor propõe, mantendo por um lado uma certa distância para deixar claro que tanto as perguntas feitas como a recolha de documentos tinham como único propósito o desenvolver da investigação e por outro lado uma aproximação resultante de um interesse genuíno pelos participantes, pelo seu desempenho ao longo do ano, pelas suas aspirações e pelo seu futuro.

Guimarães (2003) salienta também o "convocar do conhecimento teórico e experiencial do investigador" (p. 30) que estruturaram e estão presentes em todas as fases da investigação. Efetivamente os meus conhecimentos e a minha experiência como professora de Matemática do ensino secundário estiveram presentes ao longo do estudo e fizeram ressaltar o que mais me interessa tanto no desenho do teste diagnóstico e na seleção das tarefas para as entrevistas como na forma como os dados resultantes dessas fontes foram vistos, sistematizados e analisados.

3.2. Esquema de investigação e participantes

De uma forma geral, a investigação estrutura-se em redor do estudo de três casos, um grupo de vinte e um alunos do ensino secundário e dois alunos do 12º ano. O trabalho de campo iniciou-se no começo do ano letivo de 2009/10 com a realização de um teste diagnóstico de Álgebra pelo grupo de vinte e um alunos. Sobre o trabalho dos alunos no teste diagnóstico foi efetuada uma análise qualitativa e uma pequena análise quantitativa das quais resultou a construção do primeiro estudo de caso, cujo objeto é assim o desempenho do grupo.

Da análise feita, e tendo em consideração outros fatores, foi escolhido um grupo de seis alunos que constituíam a turma de 12.º ano. Esses alunos foram todos entrevistados na sequência do teste diagnóstico e a cada um deles foi também realizada uma entrevista mais longa baseada em tarefas. Foram depois escolhidos dois desses seis alunos cujas entrevistas e documentos escritos foram analisados, o que deu origem aos outros dois estudos de caso. O esquema da investigação encontra-se sintetizado na figura 3.1.

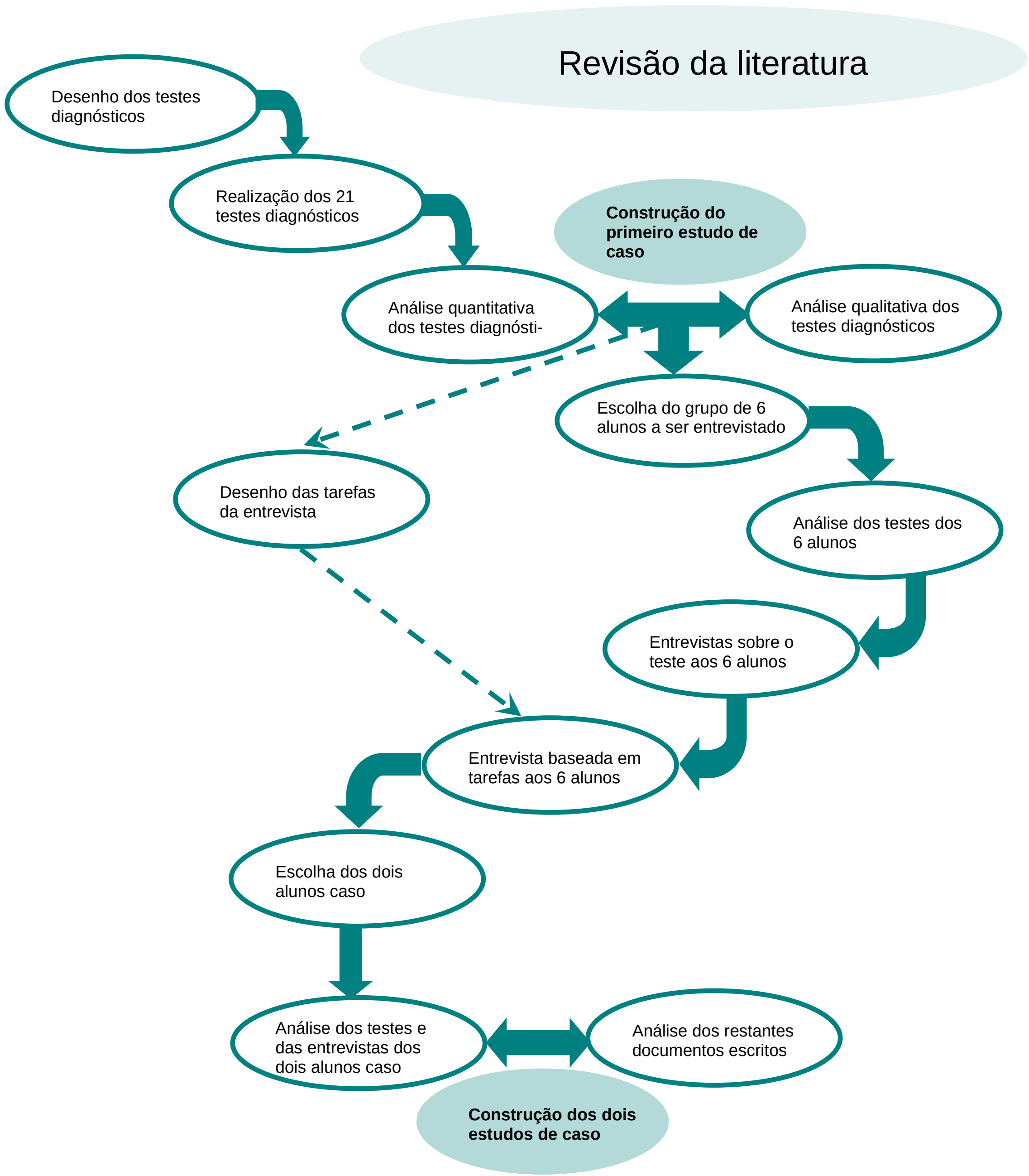


Figura 3.1 – Esquema da investigação.

Os participantes que constituem o primeiro caso do estudo são vinte e um alunos dos quais, no ano letivo de 2009/10, nove frequentavam o 11.º ano do ensino secundário, seis o 12.º ano do ensino secundário e seis o 12.º ano dos estudos ingleses (Tabela 3.1). Em termos de faixa etária, o 12.º ano dos estudos ingleses corresponde ao 11.º ano dos estudos portugueses.

Tabela 3.1 – *Turmas em estudo*

Total	**21 alunos**
11.º ano do ensino secundário português	9 alunos
12.º ano dos estudos ingleses	6 alunos
12.º ano do ensino secundário português	6 alunos

Na sequência do teste e de uma primeira análise, foram entrevistados todos os alunos do 12.º ano dos estudos portugueses, de entre os quais selecionei dois que desempenharam o papel de participantes principais deste estudo. Como os seis alunos que constituíam a turma do 12.º ano acederam prontamente em participar, optei por trabalhar inicialmente com todos eles, não fazendo assim qualquer distinção entre os elementos da turma. A todos dei a garantia de anonimato, expus com clareza o que pretendia, dei a garantia que a sua participação não teria qualquer interferência na sua avaliação da disciplina e mostrei a minha gratidão por tornarem o meu estudo possível.

A recolha de dados referentes a um número de alunos superior ao necessário para este estudo, teve a grande vantagem de me permitir fazer uma opção, mais informada, pelos alunos que constituíram os dois estudos de caso. A escolha desses dois alunos teve como critério principal o evidenciarem sentidos de símbolo muito distintos, um deles um sentido de símbolo pouco desenvolvido e o outro um sentido de símbolo apurado. A opção pelo primeiro aluno pretendeu compreender a relação entre o seu sentido de símbolo e as dificuldades com que se depara no seu trabalho em torno de diversas tarefas algébricas. A escolha do segundo aluno teve como objetivo o tentar compreender os processos e os aspetos do sentido de símbolo a que este recorre perante tarefas algébricas de diferente natureza e a relação entre o seu sentido de símbolo e a forma como aborda essas tarefas.

Todos os participantes frequentavam a mesma escola embora sigam dois programas diferentes (português e inglês). Apesar de haver muitos pontos comuns aos dois programas, esta opção introduziu alguma diversidade a nível da experiência matemática dos alunos e contribuiu para o enriquecimento do estudo.

3.3. Instrumentos de recolha de dados

Todos os dados foram recolhidos dentro da escola e, com exceção da aplicação do teste diagnóstico à turma do 11.º ano e de alguns documentos escritos pelos alunos, foram recolhidos diretamente por mim.

Testes

O primeiro instrumento utilizado foi um teste diagnóstico aplicado a todos os participantes. A escolha do teste diagnóstico escrito como instrumento de recolha de dados permitiu que a análise incidisse num grupo alargado de alunos, o que conduziu a um primeiro retrato do sentido de símbolo de alunos do ensino secundário. Teve também a função de servir de base à primeira entrevista realizada aos alunos da turma do 12º ano.

O teste foi construído com base num teste já desenvolvido para a disciplina de Didática dos Números e da Álgebra do Mestrado em Educação. Foram mantidas várias das questões, algumas sujeitas a pequenas ajustes, e foram acrescentadas quatro questões sobre funções. Os critérios de escolha dos itens, retirados preferencialmente de literatura sobre o tema da aprendizagem da Álgebra, foram o pertencerem a uma das quatro categorias: *expressões algébricas, equações, problemas e funções* e permitirem que se tornassem visíveis aspetos do sentido de símbolo na resolução escrita e posteriormente oral dos alunos.

O teste foi aplicado ao conjunto dos vinte e um alunos, como teste diagnóstico no início do ano letivo, sendo disponibilizado para a sua realização um bloco de 90 minutos. A turma do 11.º ano não era lecionada por mim pelo que foi o professor da turma que aplicou o teste. Aos restantes alunos o teste foi aplicado por mim. A utilização da calculadora no decorrer do teste foi permitida sem restrições. O teste e a matriz com a categoria em que cada questão se insere e os seus objetivos no contexto deste trabalho, podem ser consultados nos anexos 3 e 2 respetivamente.

Entrevistas

O segundo instrumento de recolha de dados foram as entrevistas, realizadas aos seis participantes que constituíam a turma de 12.º ano do ensino secundário. As entrevistas foram individuais e de dois tipos, as primeiras para esclarecimento das respostas no teste e as segundas baseadas em tarefas com o objetivo de obter um conhecimento mais aprofundado do sentido de símbolo dos alunos. Durante as entrevistas recorri também a notas de campo.

Entrevista clínica. Segundo Ginsburg (1997), a entrevista clínica insere-se numa classe de métodos de entrevista flexíveis cuja natureza é difícil de capturar numa só frase. O autor atribuía a sua origem teórica a Vygotsky, Freud e Piaget, considerando que:

> A entrevista clínica tem uma linhagem teórica notável nas ideias de Freud, Piaget e Vygotsky. Freud ensinou-nos que os fenómenos cognitivos são complexos e por vezes enganadores pelo que precisam de ser decifrados através de métodos desviantes. Piaget mostrou que para pôr a descoberto o pensamento das crianças – a sua construção da realidade – precisamos de utilizar as técnicas flexíveis do "método da entrevista clínica". E Vygotsky argumentou que devemos alargar o nosso conceito do pensamento das crianças para incluir o potencial cognitivo da criança e que o devemos medir no contexto social (p. 40).

Os métodos da entrevista clínica que o autor refere incidem em "observações cuidadosas do trabalho da criança com objetos intelectuais "concretos" e questionamentos flexíveis talhados para as características individuais de cada criança" (Ginsburg, 1997, p. ix). O autor considera que esses métodos nos podem ajudar a ganhar uma compreensão aprofundada (*insight*) dos vários aspetos do pensamento do entrevistado e atribui ao entrevistador um papel exigente, pois tem a complexa tarefa de "dar abrigo ao pensamento que produz a resposta" (p. 118), efetuando uma interpretação constante da mesma para poder dar seguimento coerente à entrevista. Aponta como fundamental que a pressão esteja no entrevistador e não no entrevistado e admite como cruciais as assunções e as expectativas iniciais do entrevistador considerando importante que este tenha "uma visão da criança como um construtor autónomo de conhecimento" (p. 118).

Ginsburg (1997), acrescenta que, ao contrário dos testes estandardizados, a entrevista clínica não é nem passiva, nem segura, envolve riscos e requer sensibilidade e criatividade. O objetivo é compreender como pensa a criança e como esta constrói o seu mundo pessoal, sendo de evitar o perigo de forçar as respostas a um molde do adulto previamente determinado, não esquecendo que cada entrevistado, como ser único que é, deve ser tratado de forma única.

A aplicação da entrevista clínica desenvolvida originalmente para estudar o pensamento das crianças em ambiente clínico, como método de identificação dos significados dos alunos e das dificuldades que estes enfrentam na resolução de problemas matemáticos, é preconizada por Long e Ben-Hur (1991) e é nessa vertente que é usada nesta investigação.

De acordo com a definição de Gillham (2005), as entrevistas realizadas aos alunos, no decorrer da investigação que suporta o presente estudo, podem ser inseridas na categoria de semiestruturadas, uma vez que têm uma estrutura geral pré-definida, neste caso pela ordem e natureza das tarefas e não têm estruturação dentro de cada tarefa, ficando ao critério do entrevistador uma utilização de questões suplementares sempre que necessário para clarificar ou aprofundar um determinado ponto. Este tipo de entrevistas adequaram-se ao que era pretendido neste estudo pois desta forma foi possível por um lado garantir que os participantes seguiam uma estrutura comum que incidia nos aspetos do sentido de símbolo em análise e, por outro lado, dar a cada aluno a abertura suficiente para seguir os seus próprios processos na abordagem às tarefas propostas o que contribuiu para a descrição individual do seu sentido de símbolo.

Entrevistas baseadas no teste diagnóstico. A entrevista com base no teste diagnóstico não se enquadra num tipo de entrevistas pré-definido. Foi orientada pelo trabalho feito previamente por cada aluno, as respostas escritas no teste, sendo o seu objetivo principal compreender essas mesmas respostas e, levar o aluno a refletir sobre elas “em voz alta” tentando aceder desta forma aos seus processos internos que estariam subjacentes a cada resposta.

As entrevistas baseadas no teste diagnóstico permitiram uma aliança entre a comunicação escrita e a comunicação oral de cada um dos alunos envolvidos, contribuindo para uma descrição mais completa dos vários aspetos do seu sentido de símbolo. Tiveram lugar no início do ano letivo, nos dias que se seguiram à realização do teste, para garantir que os alunos se lembravam do porquê das opções que tinham tomado na realização do teste e estivessem em condições de prestar esclarecimentos adicionais. Antes da entrevista foi feita uma análise das respostas escritas de cada aluno e um pequeno guião personalizado, com espaço para notas de campo, no qual constava para cada questão do teste algumas perguntas que com ela se relacionavam diretamente, tendo em conta a resposta escrita do aluno. O teste escrito de cada um dos alunos foi portanto o documento em torno do qual a entrevista decorreu e todo o trabalho do aluno foi alvo de questionamento. As entrevistas tiveram a duração de cerca de meia hora cada uma, foram previamente agendadas com os alunos em função da sua disponibilidade e tiveram lugar fora do tempo das atividades letivas, em salas de aula da escola.

À semelhança das baseadas em tarefas que a seguir se descrevem, as entrevistas sobre o teste diagnóstico, foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas. O equipamento de gravação digital utilizado foi verificado previamente e funcionou sem problemas, tendo sido feita logo após as entrevistas uma verificação e uma cópia de segurança.

Entrevistas baseadas em tarefas. O objetivo das entrevistas baseadas em tarefas foi compreender o sentido de símbolo de cada um dos alunos que constituem dois dos casos do estudo, e contribuir, através da sua análise, para dar resposta às questões de investigação. Visaram assim compreender as perspetivas e significados que cada aluno tem sobre o símbolo e a sua utilização em diversos aspetos da Álgebra. Para tal dei prioridade ao processo em relação às repostas do aluno.

As segundas entrevistas realizadas aos alunos podem-se considerar com uma vertente de entrevista clínica sendo baseadas em tarefas específicas sobre as quais os alunos trabalham. As tarefas que serviram de base às entrevistas constam do anexo 6 e foram retiradas de literatura sobre o tema e de sítios da internet especializados em tarefas matemáticas. A sua escolha foi também orientada por uma análise previamente efetuada aos testes diagnósticos que confirmou o interesse em introduzir tarefas pertencentes às quatro categorias (expressões algébricas, equações, problemas e funções), e apontou para uma escolha de tarefas que permitissem aprofundar ainda mais o conhecimento dos diferentes aspetos de símbolo dos alunos dentro de cada uma. Houve um cuidado acrescido na escolha das tarefas que se enquadravam na categoria de problemas, devido à identificação na análise quantitativa, desta categoria como aquela que os alunos apresentavam mais dificuldades. Procurei ainda que as tarefas fossem variadas e claras, possíveis de serem resolvidas pelos jovens entrevistados, mas suficientemente complexas para permitirem o desenvolvimento do pensamento do entrevistado (Ginsburg, 1997).

No início da entrevista relembrei, a cada um dos alunos, qual o seu objetivo e reforçada a garantia de anonimato, assim como o facto de que não contribuiria para qualquer tipo de avaliação no âmbito da disciplina. Também não pretendi que fosse uma situação de ensino-aprendizagem, embora uma entrevista seja uma experiência enriquecedora para entrevistador e entrevistado que pode levar ambos a refletir sobre diferentes perspetivas.

Considero que a calculadora e em particular a calculadora gráfica que os alunos alvo deste estudo utilizam, pode ser uma ferramenta importante no desenvolvimento do seu sentido de símbolo, no entanto ela não altera por si só o sentido de símbolo do aluno que é o que esta investigação pretende apurar. Nesse sentido a utilização da calculadora foi permitida em quase todas as questões, cumprindo também o seu papel de transmitir uma certa segurança a alguns alunos, apesar de efetivamente a sua utilização ser desnecessária em muitas das tarefas propostas. As questões que não permitiam a utilização da calculadora gráfica estão indicadas nas tarefas (anexo 6). Prendiam-se na sua maioria com as representações e pretenderam caracterizar o sentido de símbolo do aluno nesse domínio, sem que este tivesse acesso à visualização imediata fornecida pela calculadora.

A entrevista foi orientada pelas tarefas e por um guião (anexo 7) no qual, para cada categoria em análise, consta um conjunto de questões que considerei poderem ser úteis colocar ao aluno, no decorrer da entrevista, para aprofundar o conhecimento do seu sentido de símbolo. O objetivo de cada tarefa está definido na matriz de objetivos e conteúdos do anexo 5. Ao aluno foi dado um documento, idêntico ao do anexo, com uma tarefa por página escrita no topo e normalmente ilustrada com um pequeno desenho ou esquema e muito espaço em branco para a sua resposta. Foi dado tempo para o aluno ler as questões que, em algumas situações, foram relidas em conjunto. O aluno ia resolvendo as tarefas propostas, por escrito, ao mesmo tempo que explicava como estava a pensar. Assumi que não sabia à partida como o aluno pensava e tentei conseguir que se expressasse o mais possível sobre a sua própria forma de pensar, os seus métodos e as suas conceções (Ginsburg, 1997). A entrevista seguiu uma sequência, imposta pela ordem das tarefas, mas com flexibilidade para avançar ou retroceder se necessário. As primeiras questões foram mais simples com o objetivo de criar um ambiente mais distendido e dar confiança ao aluno.

Como entrevistadora tive a possibilidade de recorrer a questões adicionais quando considerei que havia mais para ser desvendado pelo entrevistado num ponto particular da entrevista (Gillham, 2005). Tive especial atenção para não cair no papel de professora e aproveitar cada situação para ensinar ou de alguma forma validar as respostas dos alunos. Não esquecendo que por vezes, a melhor pergunta é o silêncio que permite ao aluno desenvolver o seu raciocínio sem ser constantemente questionado (Ginsburg, 1997), tentei intervir apenas nos casos em que me pareceu que o aluno não conseguia progredir sem uma pequena ajuda, essa ficou no entanto registada e foi tida em conta na posterior análise dos dados.

Ginsburg (1997) indica também que o que pode parecer uma resposta errada, pode ser uma parte de um raciocínio interessante ou a resposta a uma questão que não foi colocada, sendo fundamental olhar para lá da resposta e compreender o pensamento que a produziu. Assim no decorrer da entrevista e sempre que considerarei adequado, encorajei os alunos a reformular as suas respostas bem como a sustentá-las com explicações e argumentos e, por vezes, a elaborarem para além do que era solicitado em cada questão.

O ambiente das entrevistas foi tranquilo e agradável. De acordo com o indicado por Ginsburg (1997), tentei estabelecer um ambiente de confiança mútua, mostrando respeito e valorizando a atividade mental do aluno. Segui ainda os conselhos do mesmo autor e tentei, no decorrer da entrevista, não catalogar as tarefas como fáceis ou difíceis exceto uma ou outra constatação de que uma tarefa era difícil, como forma de tranquilizar o aluno quando este mostrou dificuldades ou ansiedade no decorrer da atividade.

Foram tiradas algumas notas de campo e no dia seguinte a cada uma das entrevistas fiz uma primeira audição da mesma, escrevi um conjunto de comentários para complementar alguns aspetos que não tinham ficado claros, e efetuei uma análise do meu desempenho que serviu para tentar melhorar o meu papel na entrevista seguinte.

As entrevistas foram realizadas no final do mês de maio de 2010, nas instalações da escola em horário previamente combinado com o aluno e numa sala mais afastada, reservada previamente para o efeito, de forma a garantir alguma tranquilidade mesmo durante o tempo dos intervalos letivos. Estava prevista a duração de cerca de uma hora, no entanto, reservei uma hora e meia para evitar falta de tempo nas questões finais. Este cuidado mostrou-se necessário pois todas as entrevistas ultrapassam uma hora de duração.

Recolha documental

A recolha documental incidiu em todos os elementos escritos pelos alunos no teste diagnóstico, no decorrer das entrevistas e em atividades letivas, em contexto de avaliação sumativa, desde que começaram a estudar o tema das funções (final do primeiro período). As respostas às questões de escolha múltipla sem pedido da justificação da opção apresentada (muito frequentes nas provas avaliação sumativa do ensino secundário) foram, à partida, excluídas por não permitirem a visualização do trabalho do aluno que sustenta a resposta apresentada, não sendo, portanto, suscetíveis de contribuir para a caracterização do sentido de símbolo que se pretende no âmbito deste estudo. Uma lista com todos os documentos recolhidos consta do anexo 8.

Os elementos de avaliação sumativa internos e externos (testes intermédios e exame nacional realizado no final do ano letivo), foram recolhidos por mim até à interrupção do carnaval e a partir desse momento foram-me fornecidos pela que passou a ser a professora dos alunos que regressou nessa altura. O principal objetivo desta recolha de documentos foi proceder, a partir deles, a uma análise da influência de um sentido de símbolo mais ou menos desenvolvido no trabalho dos alunos em conteúdos específico do programa de Matemática A do 12º ano (ME, 2001), contribuindo assim para dar resposta à segunda questão de investigação.

A opção por recolher material escrito pelo aluno, em contexto letivo, apenas correspondentes à sua avaliação sumativa, deveu-se ao facto, de neste nível de ensino, uma grande parte do trabalho do aluno ser realizado neste âmbito pelo que consegui recolher um número de documentos suficiente, dez por aluno, para poder proceder a uma análise, tendo como pano de fundo o sentido de símbolo do aluno. Outra razão para esta escolha foi garantir que o trabalho era apenas o do aluno e não o resultado de um trabalho de interação com um colega ou com a própria professora, uma vez que era o sentido de símbolo de um aluno específico que pretendia retratar. Contribuiu para confirmar esta decisão o conhecimento que fui tendo deste conjunto de alunos, cuja vontade em terminarem o 12.º ano e prosseguirem os seus estudos, deu garantias que tentariam mostrar o seu melhor nas várias componentes da sua avaliação sumativa, dado o peso indiscutível que este tipo de avaliação tem nesta fase do percurso escolar. Assim tendo o cuidado de não misturar o trabalho da avaliação sumativa com aprendizagem, neste caso da Álgebra, considerei que no caso deste grupo de alunos o seu trabalho nos documentos de avaliação sumativa, poderiam ser considerados uma das facetas visíveis dessa aprendizagem.

3.4. Análise de dados

Os dados tiveram origem no teste diagnóstico, nas entrevistas, nas notas de campo e nos documentos escritos pelos alunos no desenrolar das tarefas e em contexto de avaliação sumativa interna e externa. A análise incidiu sobre os testes, as transcrições das entrevistas, os documentos dos alunos e notas de campo tiradas no decorrer das entrevistas cuja função foi contribuir para a compreensão do seu sentido de símbolo e a reconstrução dos processos utilizados pelo aluno e das dificuldade por ele sentidas, na resolução das tarefas que lhe foram propostas. Essas tarefas inserem-se em quatro categorias: *expressões algébricas, equações, problemas* e *funções*, e dentro de cada uma estão enquadrados aspetos do sentido de símbolo considerados mais visíveis em cada uma dessas categorias. Os dados provenientes de todas as fontes, a começar pelo teste diagnóstico escrito e a subsequente entrevista, foram analisados e tiveram um papel de aferição em relação às tarefas e entrevistas seguintes, num processo interativo que caracteriza as investigações interpretativas.

Categorias de análise. As quatro principais categorias de análise são alguns dos objetos mais importantes da Álgebra: *expressões algébricas, equações, problemas e funções.* Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), desenvolveram um quadro que reorganiza em torno de cada uma dessas categorias alguns aspetos do sentido de símbolo descritos por Arcavi (1994), que consideram serem mais visíveis em cada uma delas e que constituem subcategorias de análise. Muitos dos aspetos que constituem as subcategorias estão também presentes nos programas oficiais da disciplina de Matemática (ME, 2001, 2007) e nas normas do NCTM (2007). É esse quadro que serve de referência inicial a este trabalho sendo ele próprio, na lógica exploratória coerente com o paradigma em que este estudo se insere, alvo de transformação ao longo do estudo. Essa transformação ocorreu numa primeira fase na sequência do processo de análise dos testes diagnósticos, e num segundo momento que coincidiu com a análise das entrevistas com base em tarefas. Dessa análise emergiram aspetos que não estavam previamente definidos, e contribuiriam para o formato final da tabela de enquadramento da análise, que consta do anexo 1 e está esquematizada na figura 3.2. Algumas das alterações constaram apenas da reorganização de alguns aspetos que se juntaram ou eliminaram por se encontrarem de alguma forma duplicados. Nomeadamente na categoria dos problemas foi retirada a subcategoria relacionada com a manipulação simbólica, que já constava nas equações, e foram associadas numa só as duas subcategorias “decidir se é útil recorrer ao símbolo” e “interpretar o símbolo no contexto do problema”. Também se juntaram as subcategorias “utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas” e “generalizar” que se encontravam separadas na versão anterior de Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009). Perante as tarefas de funções surgiu a necessidade de introduzir a caracterização “compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático” e de associar as subcategorias "utilizar o símbolo para modelar situações" e "compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes". Finalmente na sequência da análise do trabalho dos alunos com as tarefas, emergiram do estudo aspetos transversais que caracterizam de uma forma mais geral o sentido de símbolo e não se enquadravam especificamente em nenhuma das quatro categorias principais. Foi por essa razão acrescentada uma terceira coluna à tabela na qual consta "tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas".

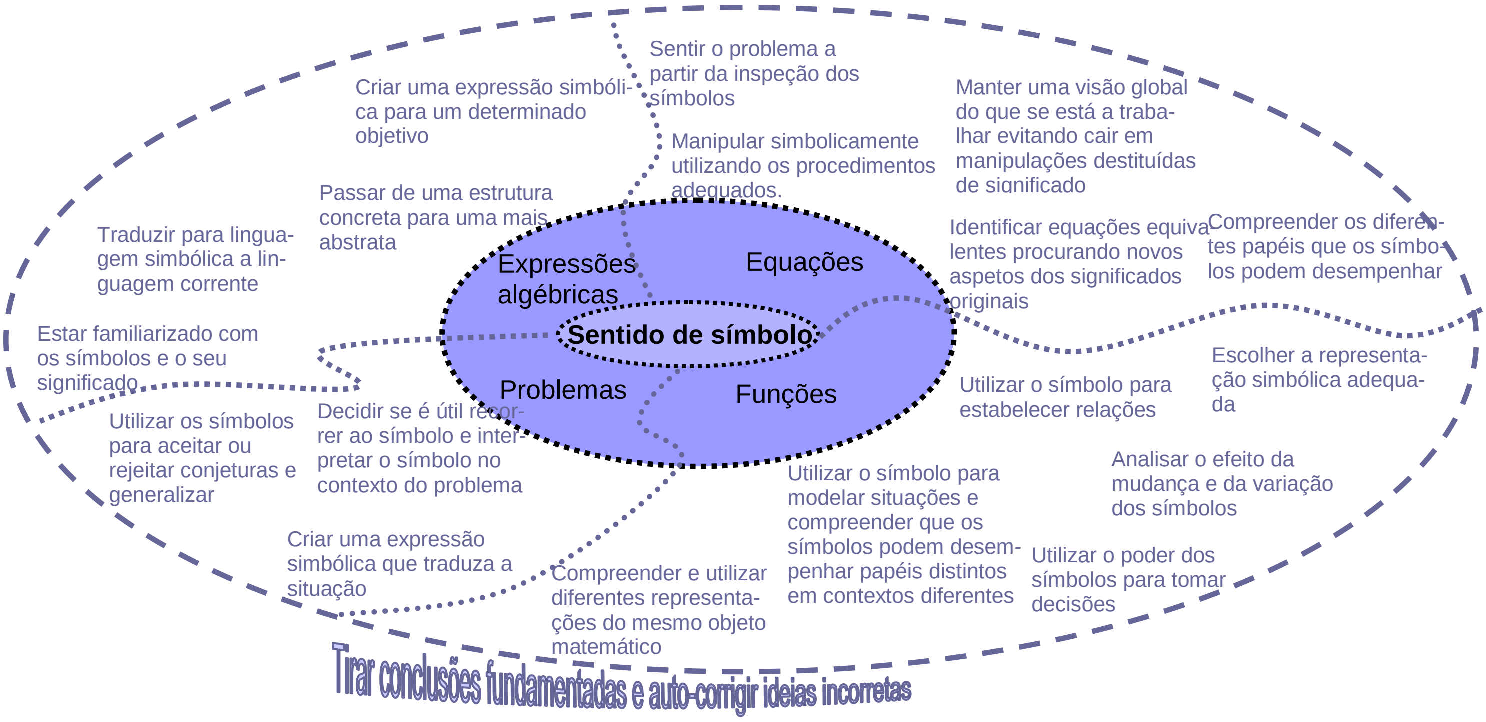


Fig. 3.2 - Categorias de análise.

As categorias em análise neste trabalho e os aspetos do sentido de símbolo a elas associados não são obviamente estanques. O trabalho com funções pode redundar numa simplificação de expressões, a tradução de um problema é frequentemente uma equação e as regras e propriedades algébricas são comuns a todas as categorias. As subcategorias associadas a cada categoria poderiam ser visualizadas em qualquer uma das outras categorias principais: a manipulação simbólica não é exclusiva das equações, nem a tradução de linguagens é monopólio das expressões algébricas. Este facto não é, no entanto, um impedimento à compreensão do sentido de símbolo como um todo; pelo contrário a organização proposta por Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), posteriormente adaptada nesta investigação, em conjunto com uma escolha criteriosa das tarefas propostas aos alunos, estabeleceu fronteiras que possibilitaram a análise por partes, seguida de uma aglutinação de categorias e subcategorias com o objetivo final de caracterizar o sentido de símbolo de alunos do ensino secundário, revelado no seu trabalho com tarefas algébricas.

As subcategorias em análise, e a clarificação da forma como são interpretadas no decorrer desta investigação, são as seguintes:

Expressões algébricas:

- *Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado* – O sentido de símbolo pressupõe um conhecimento dos símbolos algébricos e da forma como estes são utilizados. Todos os símbolos, os próprios números, o sinal de igual, o parêntesis, etc. têm um papel específico que um sentido de símbolo apurado permite identificar, combinar e utilizar dentro do contexto adequado, no trabalho com as expressões algébricas. O exemplo de um símbolo com uma grande diversidade de sentidos é o sinal “ = ”. Vários autores analisam e tiram consequências das múltiplas facetas desse símbolo que tanto pode ter o papel de indicação para fazer um cálculo ou resolver algo, como pode representar identidade, indicar propriedades ou estabelecer relações (Usiskin, 1988).
- *Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente* – O entender a linguagem simbólica inclui o ser capaz de explicitar através dos símbolos informação expressa noutra linguagem, nomeadamente na linguagem comum. A partir desta tradução o aluno poderá trabalhar com os símbolos de uma forma que a linguagem corrente não permite.
- *Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido de número para sentido de símbolo)* - Algumas características e propriedades são mais visíveis e intuitivas quando se trabalha com números do que quando se passa a recorrer à letra e às suas diferentes interpretações. O sentido de símbolo prevê que essa passagem do concreto para o abstrato seja feita com compreensão das propriedades que podem transitar e das que são específicas da linguagem algébrica. Nesta subcategoria está subjacente o sentido de variável, um conceito que segundo Schoenfeld e Arcavi (1988), é “variável e elusivo, difícil de descrever e ainda mais difícil de aprender” (p. 425).
- *Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo* – Escrever uma expressão simbólica para resolver uma questão ou exprimir com clareza uma condição, pressupõe uma escolha adequada dos símbolos envolvidos. Por exemplo se é pedido para representar três números consecutivos tanto se poderá escrever n, $n+1$, $n+2$ como $n-2$, $n-1$, n, mas a escolha de um dos formatos pode revelar-se pouco produtiva e eventualmente bloquear a chegada a uma solução. Arcavi (1994) defende que o

sentido de símbolo inclui a sensibilidade para fazer uma escolha inicial dos símbolos, que permita atingir o objetivo proposto.

Equações:

- *Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos* - A resolução de uma equação não se resume à aplicação de um conjunto de procedimentos. Um olhar inicial para os símbolos envolvidos e uma capacidade de prever resultados, são sinais de um sentido de símbolo forte que permite uma maior eficiência no trabalho algébrico.
- *Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados* – A aplicação de sequências de procedimentos com vista à resolução de uma equação é também uma vertente essencial do sentido de símbolo. Ter sentido de símbolo é também compreender que os procedimentos algébricos são uma ferramenta poderosa da Álgebra, que permite uma transformação e simplificação de objetos algébricos que não é possível obter de outra forma.
- *Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado* – Na sequência da subcategoria anterior, o sentido de símbolo associa ao poder da manipulação simbólica uma compreensão do que se está a trabalhar, e a habilidade de ver para lá dos detalhes da manipulação, verificando constantemente se o trabalho realizado está a conduzir ao objetivo pretendido. Essa leitura global para além dos símbolos que Arcavi (1994) refere, permite a escolha da manipulação formal adequada, quando esta se revela necessária, assim como evita situações de circularidade que conduzem à ineficiência na resolução das equações. Por exemplo se for proposto a um aluno a resolução das seguintes equações: $x^2-2x+1=0$ e $(x-1)^2-2(x-1)+1=0$, se este tiver sentido de símbolo, utilizará a solução da primeira equação para rapidamente chegar à da segunda, de forma simples e eficaz, evitando manipulações desnecessárias.
- *Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais* – Um sentido de símbolo forte pressupõe uma validação das equivalências que vão surgindo ao longo da manipulação e uma capacidade para ver significados mais ricos que delas podem emergir. Um aluno com sentido de símbolo, ao validar as seguintes equivalências, $\frac{2x-2}{x-1}=3 \Leftrightarrow 2x-2=3x-3 \Leftrightarrow x=1$ terá o cuidado de indicar a condição $x \neq 1$, o que, neste caso, altera significativamente o resultado final.
- *Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar* - O mesmo símbolo tem diferentes interpretações consoante o contexto em que se insere. O modo como o símbolo é interpretado determina a maior facilidade, ou dificuldade, na forma como se desenrola o trabalho algébrico. Nesta subcategoria insere-se assim a compreensão do símbolo literal tanto em contextos mais ligados a situações "reais" como em ambientes mais matemáticos. Na equação da reta $y=mx+c$ Arcavi (1994) dá o exemplo de como a substituição das variáveis *(x,y)* ou dos parâmetros

(m,c) por valores, podem corresponder a objetos matemáticos diferentes de acordo com o contexto. Por exemplo $y = c$ pode ser interpretado como o resultado da substituição $x = 0$ (interseção da ordenada na origem) mas também pode ser considerado o resultado de $m = 0$ correspondente à família de retas horizontais.

Problemas:

- *Decidir se é útil recorrer ao símbolo e interpretar o símbolo no contexto do problema* - A resolução de um problema pode implicar, ou não, o recurso ao símbolo. Ter sentido de símbolo é ser capaz de decidir se a utilização do símbolo contribui ou até viabiliza a resolução, ou se é um obstáculo ou um impedimento da mesma. Arcavi (1994) dá o exemplo de uma inequação com módulos: $|x-2|>|x-6|$, cuja resolução a partir da interpretação do módulo como uma distância e com recurso à reta numérica é muito mais simples tem menor probabilidade de erro do que a "pesada" resolução algébrica que esta situação implicaria.
- *Criar uma expressão simbólica que traduza a situação* – Um problema não pressupõe apenas a tradução de uma linguagem para outra. Efetivamente ter sentido de símbolo é também ter a criatividade para combinar símbolos e criar frases simbólicas que contêm em si o problema. Com o poder que a manipulação lhes confere estas frases podem ser trabalhadas, tornando possível a resolução do problema que não seria conseguida de outra forma.
- *Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar* – Recorrer ao símbolo para confirmar, ou não, o que a intuição inicial prevê, é um sinal de sentido de símbolo. A consciência de que, em muitas situações, a generalização só possível com o recurso ao símbolo literal, e ao poder que este tem de representar qualquer valor de um dado domínio, é uma indicação de um forte sentido de símbolo.

Funções

- *Utilizar o símbolo para estabelecer relações* - A função é uma forma de descrever relações numa notação própria. Ter sentido de símbolo é perceber como essas relações funcionam, compreendendo com clareza conceitos como por exemplo o de valor de uma função num ponto, o da primeira e da segunda derivada, o de monotonia e o de extremos de uma função.

- *Escolher a representação simbólica adequada* – "O termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma em si mesma" (NCTM, 2007, p. 75). O trabalho com representações (gráfica, tabelar, algébrica, etc.) é incentivado desde cedo e valorizado em várias secções do *Programa de*

Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) que considera que "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina" (p.9). Ter sentido de símbolo é ser capaz de selecionar a melhor representação simbólica de uma função para analisar uma determinada situação, prevendo qual das representações permitirá alcançar o objetivo pretendido de forma mais simples e eficaz.

- *<u>Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos</u>* – "A compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias" (NCTM,2007, p. 42). Compreender como varia uma determinada expressão simbólica, quando muda um dos seus parâmetros ou uma das suas varáveis, tendo presente a forma como o símbolo está inserido na expressão e como a sua variação afeta a própria função, é uma indicação do sentido de símbolo. Por exemplo olhar para as expressões do perímetro e da área de um quadrado de lado x: $4x$ e x^2 respetivamente, e ter a noção que a variação da medida do lado afeta de forma diferente essas grandezas. A análise da variação culmina no ensino secundário com a noção de taxa de variação instantânea que se traduz no conceito de derivada de uma função num ponto. Ter sentido de símbolo é também identificar esse conceito em frases como "um crescimento rápido" ou "uma variação exponencial" que são escutadas com frequência na comunicação social.

- *<u>Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes</u>* – Sentido de símbolo é também ter a noção de que se pode utilizar uma função que de alguma forma representa a realidade, e que a partir dela é possível analisar o presente, prever resultados futuros ou inferir sobre acontecimentos passados. Estabelecer a relação entre os símbolos e o seu papel em determinado contexto, é fundamental para fazer uma boa interpretação da situação seja esta real ou não. É importante na modelação de uma variação exponencial do tipo Ae^{kt} compreender que A é a quantidade existente quando se começa a contar o tempo, que o valor de k afetará o andamento da função e que t é o tempo cuja unidade (anos, horas, segundos, etc.) terá que fazer sentido no contexto em que a modelação se insere.

- *<u>Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões</u>* – "Só com a utilização dos símbolos se pode aceitar ou rejeitar de forma conclusiva uma conjetura ou um argumento" (Arcavi, 1994, p. 25). Sentido de símbolo é ser capaz de interpretar os símbolos, reconhecendo o seu poder para tornar claro e irrefutável o não é possível fazer de outra forma, seja em contextos matemáticos ou em situações mais próximas da realidade.

- *<u>Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático</u>* – O *Programa de Matemática do Ensino Básico* considera que "os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada." (ME, 2007, p. 9). Um sentido de símbolo aprofundado implica uma flexibilidade na movimentação bidirecional entre diferentes representações, que se traduz no reforço da compreensão de cada uma delas.

Tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas – "O sentido de símbolo pode-se manifestar na riqueza de recursos e de senso comum que podem ajudar os alunos a reconhecer erros e a começar a clarificar confusões" (Arcavi, 1994, p. 31). Um sentido de símbolo desenvolvido pressupõe uma reflexão constante, que se traduz numa intuição apurada que antecipa, monitoriza e vai corrigindo o desenrolar do trabalho algébrico, permitindo chegar a respostas bem sustentadas.

Análise quantitativa. A análise quantitativa baseou-se na correção de todas as questões dos vinte e um testes diagnósticos. De acordo com um conjunto inicial de critérios de correção as questões foram corrigidas como certas ou erradas, correspondendo ao primeiro caso o valor "1" e ao segundo o valor "0". O valor "1" foi atribuído apenas às respostas totalmente corretas. A utilização destes valores teve a vantagem de permitir que a soma total dos valores obtidos numa determinada questão, ou no teste de um determinado aluno, coincidisse com o total de repostas corretas nessa questão, ou nesse teste. Após uma primeira correção de todos os testes, os critérios foram revistos e aferidos e os testes novamente corrigidos à luz dos novos critérios de correção, que constam da tabela do anexo 4. Em particular as questões que envolviam funções, devido ao seu caráter mais aberto, tiveram que ser alvo de critérios de correção detalhados para evitar ambiguidades na atribuição da cotação às repostas dadas pelos alunos. A conversão das respostas em valores, tornou possível o cálculo de totais, médias e desvios padrão por questão, por categoria, por turma e para todo o grupo de alunos, fornecendo indicadores úteis à restante investigação.

Análise qualitativa. A análise qualitativa desempenhou o papel principal nesta investigação. Incidiu numa primeira fase nas respostas dos testes escritos dos vinte e um alunos e, numa segunda fase, nas entrevistas de cada um dos dois alunos que constituíram os outros dois casos. Não sendo o objetivo principal deste estudo a comparação entre o sentido de símbolo de cada um dos alunos estudados, mas sim a caracterização do sentido de símbolo de cada um, optei por trabalhar o caso do segundo aluno depois do primeiro estar concluído. O trabalho sobre o primeiro aluno serviu assim, em termos da sua estruturação, de guião ao segundo caso e esteve sempre presente a possibilidade de regressar ao primeiro, se a análise do segundo sugerisse indicações nesse sentido, para garantir uma melhor coerência entre a estrutura dos casos.

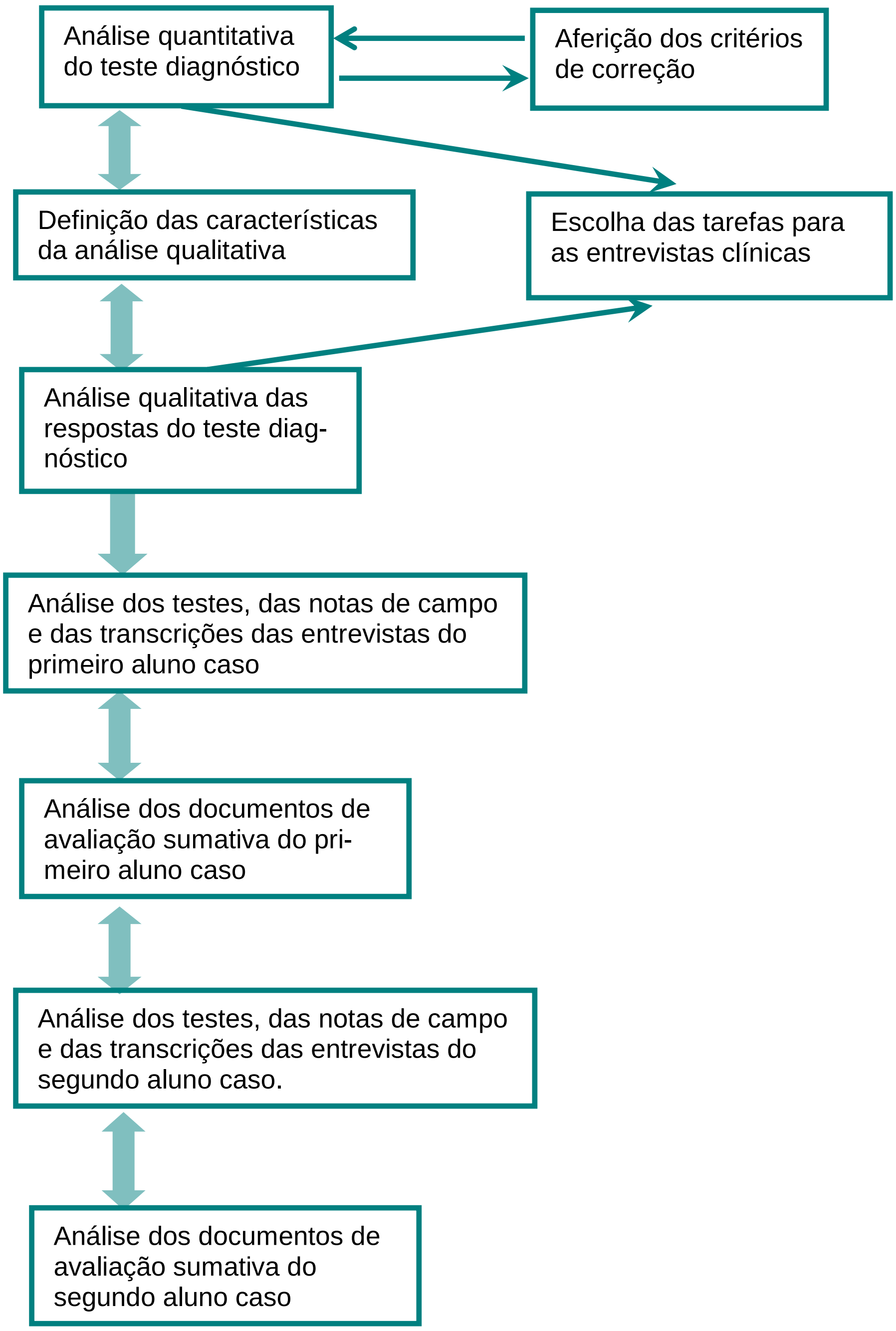


Fig. 3.3 - Esquema da análise.

Para cada aluno comecei por analisar as questões que se inseriam em cada uma das categorias. Associei às respostas escritas pelo aluno, no teste diagnóstico e no documento das tarefas, o excerto da transcrição das entrevistas e as notas de campo correspondentes a cada questão. Sempre que tive alguma dúvida na transcrição ouvi novamente a parte da gravação correspondente. Depois de organizada a informação em cada categoria, selecionei a que melhor evidenciava o sentido de símbolo do aluno nos aspetos pré-definidos na tabela, mas estando atenta ao surgimento de algum aspeto que não estivesse previsto e emergisse da análise. Tive sempre o cuidado de apresentar exemplos provenientes tanto do teste diagnóstico como das tarefas, pois o facto de um determinado aspeto surgir nas duas situações, que são diferentes na forma e afastadas no tempo (início e final do ano letivo), pareceu-me dar consistência à caracterização do sentido de símbolo do aluno.

A análise dos documentos de avaliação sumativa do aluno teve lugar depois da caracterização do seu sentido de símbolo. Foi essa caracterização prévia que serviu de base à análise dos documentos. Nesta fase as quatro categorias iniciais (expressões algébricas, equações, problemas e funções) já não surgem de forma marcada estando a análise centrada nos aspetos do sentido de símbolo evidenciados pelo aluno independentemente do tipo de questão que tornou esse aspeto mais evidente. Com esta abordagem procurei encontrar aspetos do sentido de símbolo do aluno, numa parte do seu trabalho letivo, o que se enquadra numa das questões de que orientaram esta investigação. A figura 3.3 esquematiza a forma como foi feita a análise.

Capítulo 4

Sentido de símbolo nos alunos das três turmas

Neste capítulo apresento uma análise quantitativa e qualitativa das respostas dos alunos das três turmas no teste, de modo a identificar o seu sentido de símbolo no seu trabalho com expressões algébricas, equações, problemas e funções.

O teste diagnóstico e a matriz com as questões, a categoria a que pertencem e os correspondentes objetivos, podem ser consultados nos anexos 3 e 2 respetivamente. Os critérios seguidos para a correção e atribuição da cotação "0" ou "1" a cada questão encontram-se no anexo 4.

Os resultados obtidos são apresentados para todo o grupo de vinte e um alunos que realizaram o teste e para cada turma, de forma a permitir uma comparação. As questões foram também agrupadas por categorias, sendo feita uma análise quantitativa e qualitativa em cada caso.

Para a análise qualitativa agrupei e analisei por categorias, todas as respostas dos vinte e um participantes do estudo. Neste capítulo apresento algumas dessas respostas às questões do teste que evidenciam diferentes aspetos do sentido de símbolo. Os resultados da análise quantitativa, que teve lugar primeiro, foram um bom indicador das questões cuja análise qualitativa deveria ser mais aprofundada, nomeadamente as que apresentavam um número de respostas erradas significativo ou uma maior discrepância entre os grupos em estudo. As questões com um maior leque de respostas diferentes, também foram alvo de uma análise mais aprofundada. A análise qualitativa tem como enquadramento a tabela de descritores do sentido de símbolo que consta do anexo 1.

4.1. Resultados quantitativos globais do teste

A percentagem de respostas corretas para cada uma das questões colocadas encontra-se no gráfico 4.1. Numa análise global, é possível encontrar algumas discrepâncias entre as várias turmas testadas, havendo questões em que uma ou outra turma sobressai com um número de respostas corretas acima ou abaixo da percentagem obtida pela totalidade do grupo de alunos.

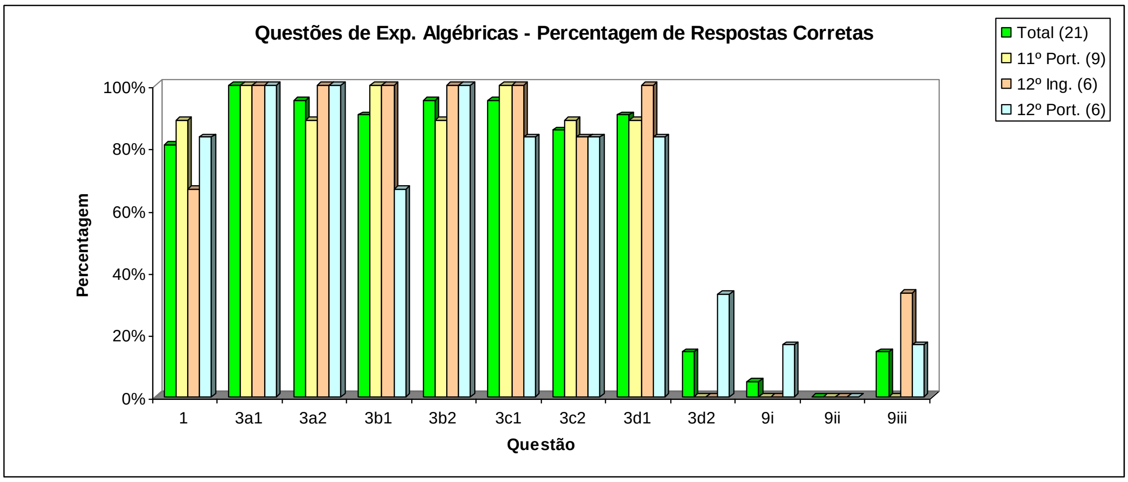


Gráfico 4.1 - Percentagem de respostas corretas em todas as questões.

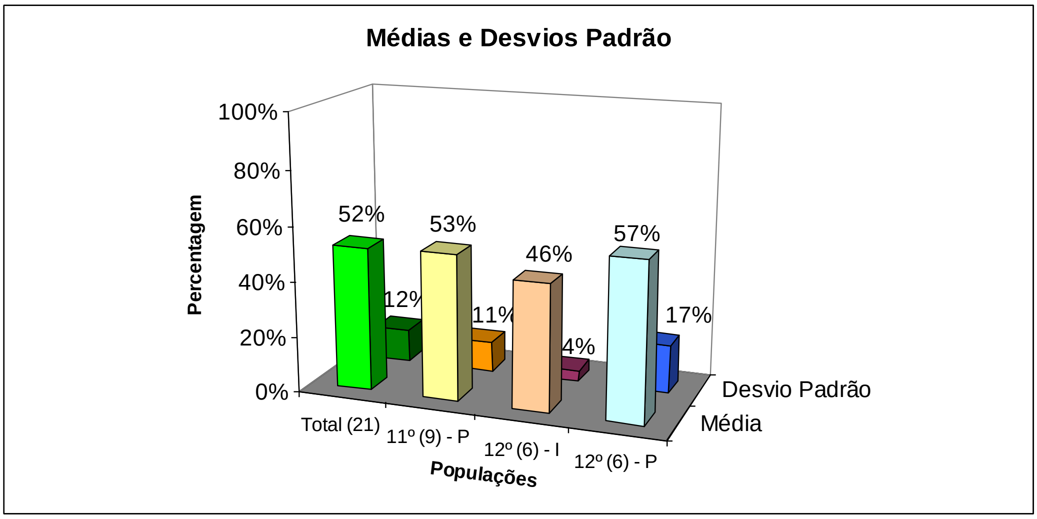


Gráfico 4.2 – Médias e desvios padrão dos grupos em estudo.

Uma análise ao gráfico 4.2 das médias e dos desvios padrão globais, e para cada turma, permite constatar que os alunos do 12.º ano do ensino secundário atingem os melhores resultados e que os alunos dos estudos ingleses obtiveram as cotações mais baixas. A turma que apresenta um maior desvio padrão é também a do 12.º ano do ensino secundário, na qual se registam os testes com o resultado mais elevado e com o mais baixo do grupo de vinte e um alunos.

4.2. Resultados por aspetos do sentido de símbolo

Estreitando a análise, procedi a um agrupamento das questões pertencentes a cada aspeto do sentido de símbolo em estudo neste trabalho – expressões algébricas, equações, problemas e funções – cujos resultados se encontram representados na tabela 4.1 e no gráfico 4.3. Uma análise destes resultados permite verificar que as questões da categoria dos problemas são as que têm piores resultados, enquanto as questões que envolvem expressões algébricas são as que apresentam claramente melhores resultados. As questões sobre funções e problemas são as que correspondem a resultados mais baixos na turma dos estudos ingleses.

Tabela 4.1 – *Percentagem de respostas corretas nas quatro categorias em estudo*

	Expressões Algébricas	Equações	Problemas	Funções
Total (21)	**64%**	**50%**	**17%**	**47%**
11º Port. (9)	**62%**	**51%**	**17%**	**50%**
12º Ing. (6)	**65%**	**47%**	**8%**	**33%**
12º Port. (6)	**64%**	**53%**	**25%**	**56%**

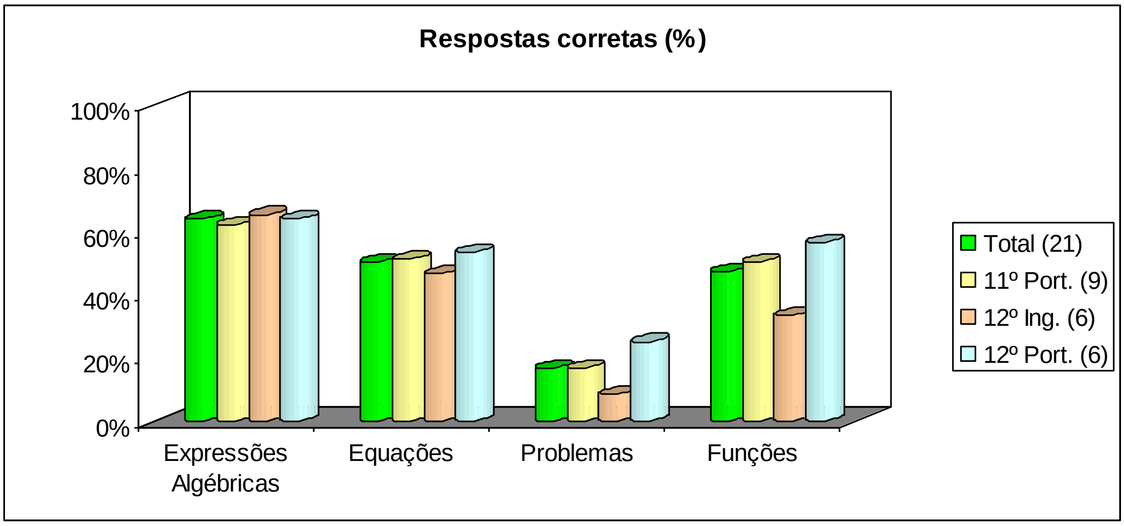


Gráfico 4.3 – Percentagem de repostas corretas nas quatro categorias em estudo.

Expressões algébricas

O gráfico 4.4 apresenta os resultados obtidos pelos alunos nas diversas questões que incidem na forma como trabalham expressões algébricas. A questão com melhores resultados é a 3a1 que consiste numa soma de dois valores. A questão nove que implica uma análise do efeito da variação dos valores tomados por *y* em várias expressões, tem percentagens de respostas corretas muito baixas.

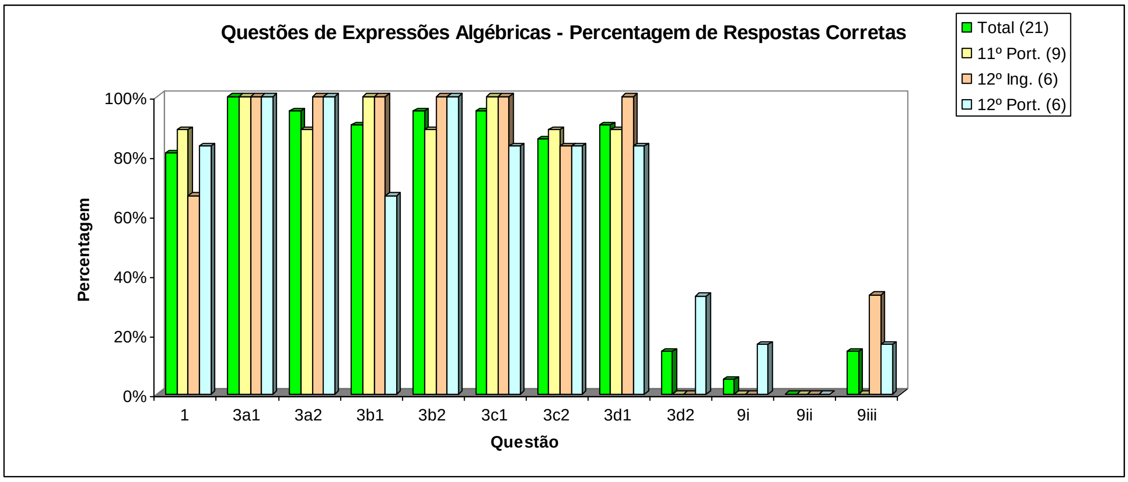


Gráfico 4.4 – Percentagem de respostas corretas nas questões sobre expressões algébricas.

A primeira questão pressupõe o que Duval (2006b) denomina de uma simples "tradução" dos termos de um problema de palavras, para uma expressão simbólica que, no entanto, pode levantar problemas aos alunos.

Questão 1 (expressões algébricas)	Objetivo
Considera n . Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática: Adiciona 5 a n e depois multiplica o resultado por 3.	Criar uma expressão simbólica. Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.
Responderam de forma totalmente correta 16 alunos e de forma incorreta 5 alunos.	

Dezasseis dos vinte e um alunos cumprem o objetivo escrevendo corretamente a expressão simbólica. Os restantes cinco alunos recorrem ao símbolo "=", não atingindo o objetivo pretendido. Exemplos: $3(n+5)=0$; $n+5=3x$; $n+5\times 3=3(n+5)$ e $n+5\times 3=15$.

Um caso correspondente ao terceiro exemplo é o seguinte:

$$\cancel{3}\quad n+5 \quad \times 3 \quad = \quad 3(n+5)$$

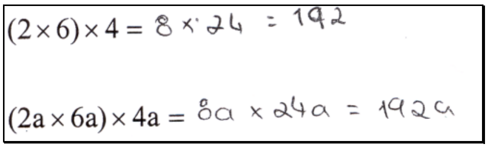
O espaço entre o número cinco e o sinal de multiplicação parece indicar que o aluno está a escrever a expressão à medida que a lê e pretende fazer a multiplicação depois da soma, o que acaba por ficar claro quando iguala os dois termos. No entanto o sinal de igual é colocado entre duas expressões que não o são, revelando ou um sentido incorreto do símbolo "igual" ou o não sentir a necessidade do uso de parêntesis numa situação em que eram necessários. Kieran e Filloy (1989) identificam também esta utilização do sinal de igual pelos alunos, mesmo os mais velhos, como uma indicação para "fazer algo".

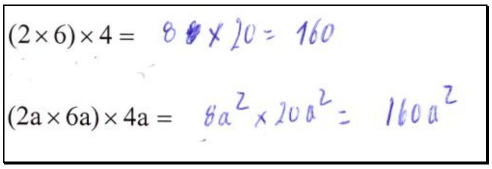
Os alunos que recorrem ao sinal de igual não detêm um entendimento seguro deste símbolo, não tendo a sensibilidade para decidir sobre a sua utilização. Os que não conseguem criar a expressão simbólica correta também revelam lacunas num aspeto importante do sentido de símbolo (Arcavi, 1994).

Na terceira questão pede-se aos alunos que efetuem somas e produtos, primeiro envolvendo apenas números e depois também monómios. Os números envolvidos nas operações da primeira parte de cada alínea, coincidem com os coeficientes dos monómios envolvidos na segunda parte. Os alunos respondem sem dificuldade na multiplicação dos números e, na sua maioria, evidenciam o conhecimento das regras das potências. A alínea *d* da questão três envolve uma multiplicação de números e uma multiplicação de monómios, tendo os alunos revelado algumas dificuldades.

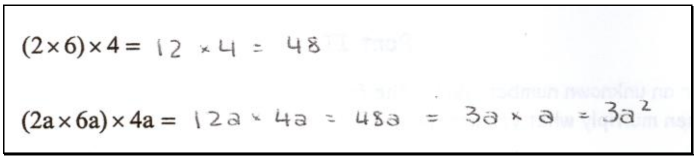
Questão 3d (expressões numéricas e algébricas)	Objetivo
Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado. $(2\times 6)\times 4 =$ $(2a \times 6a)\times 4a =$	Passar de uma experiência concreta para uma estrutura mais abstrata. (passagem com compreensão do sentido do número para o sentido de símbolo).
Responderam de forma totalmente correta 2 alunos e de forma incorreta 19 alunos.	

Apesar da maioria evidenciar saber multiplicar monómios nas alíneas anteriores, apenas dois alunos apresentam a resposta correta ($48a^3$) à segunda parte da questão, pertencendo ambos à turma do 12.º ano do ensino secundário. Uma análise das respostas apresentadas na alínea *d* da questão três, permite constatar que, na primeira parte da questão envolvendo uma simples multiplicação, a presença dos parênteses parece ter causado alguma confusão a dois alunos que aplicam indevidamente a propriedade distributiva:





No caso destes dois alunos, o erro da primeira parte da questão estende-se à segunda, verificando-se também problemas na multiplicação das partes literais. Um terceiro aluno, apesar de responder corretamente à primeira parte da questão, apresenta na segunda um desenvolvimento difícil de compreender:



Estes três alunos revelam fraco sentido do símbolo e não conseguem alcançar o objetivo da questão. Os restantes dezasseis que não respondem corretamente, multiplicam apenas os coeficientes, não multiplicam as partes literais e apresentam como resposta $(2a \times 6a) \times 4a = 48a$. Este "esquecimento" de multiplicar as partes literais, não parece dever-se a um desconhecimento da forma correta de o fazer, pois não registei problemas aparentes na maioria dos alunos ao resolveram as outras alíneas da questão 3, mas pode ter repercussões graves no estudo de temas como a resolução de equações e inequações fracionárias ou no levantamento de indeterminações no cálculo de limites, que são essenciais no ensino secundário.

A questão nove inclui-se também nas expressões algébricas e pressupõe que o aluno tenha, por um lado, uma visão global do símbolo, compreendendo que *y* pode tomar qualquer valor real e, por outro lado, uma visão mais particular que lhe permita identificar valores para *y*, que conduzem a resultados diferentes dos que uma primeira abordagem indicava como corretos.

Questão 9 (expressões algébricas)	Objetivo
a) y^2 b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ d) $y+1$ e) $\frac{y}{0,5}$ f) $y - 0,5$ i) Quais destas expressões são **sempre** maiores que *y*? ii) Quais destas expressões são **por vezes** maiores que *y*? iii) Quais destas expressões **nunca** são maiores que *y*?	Utilizar o símbolo para autocorrigir conceções erradas. Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.
Nenhum aluno respondeu de forma totalmente correta a esta questão.	

Nenhum aluno responde de forma correta a todas as alíneas da questão e apenas um número reduzido responde de forma totalmente correta a uma das alíneas da questão. A maioria dos alunos identifica expressões corretas para cada uma das alíneas mas acrescenta outras incorretas invalidando, em termos quantitativos, a resposta. A tabela 4.2 sintetiza as respostas dadas pelo conjunto dos alunos à questão nove. As células sombreadas correspondem às respostas corretas.

Tabela 4.2 – *Síntese das respostas dos alunos à questão 9*

	a) y^2	b) $\sqrt{y}$	c) $\frac{1}{y}$	d) $y+1$	e) $\frac{y}{0,5}$	f) $y - 0,5$
sempre maiores que *y*	16	0	0	18	13	0
por vezes maiores que *y*	5	7	11	3	4	8
nunca maiores que *y*	0	12	8	0	5	13

As somas verticais dos números não são sempre 21 (número de elementos que constituem o grupo em estudo), pois dois alunos não colocaram a expressão *b*) em nenhuma das opções, outros dois alunos também não colocaram a expressão *c*) em nenhuma das opções e um dos alunos colocou a expressão *e)* em duas opções em simultâneo.

Apesar de nenhum dos vinte e um alunos ter respondido de forma totalmente correta a esta questão, dezoito alunos tiram conclusões certas em relação à expressão *y+1* e treze alunos em relação a *y-0,5*. Constato que, no entanto, não é claro para todos os inquiridos que a soma de uma unidade a qualquer número resulta sempre num número superior ou que a subtração de *0,5* a qualquer número resulta sempre num número inferior ao inicial.

Ao fazer a inspeção do símbolo, os alunos parecem não ter tido em consideração o facto de y poder ser "qualquer número", ou seja pode tomar qualquer valor real. Privilegiam a sua substituição por números positivos superiores a 1 o que os leva a aceitar como corretas, conjeturas erradas. As repostas dadas indicam que a maioria dos alunos, apesar de frequentarem o ensino secundário, considera que um número elevado ao quadrado é sempre maior que ele próprio, que $\sqrt{y}$ nunca é maior do que y e que $\frac{y}{0{,}5}$ é sempre maior que y.

Nas questões de expressões algébricas verifico que os alunos revelam ser capazes de criar uma expressão simbólica, tendo no entanto dificuldade em passar de uma experiência mais concreta para uma estrutura mais abstrata. Efetivamente a grande maioria dos alunos não consegue aplicar às letras as propriedades que aplica aos números, o que indicia um fraco sentido desta vertente do sentido de símbolo. Os alunos também não conseguem sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos, utilizando diversas vezes o símbolo de forma incorreta o que conduz à aceitação de conceções erradas.

Equações

Os resultados referentes às questões sobre equações encontram-se no gráfico 4.5.

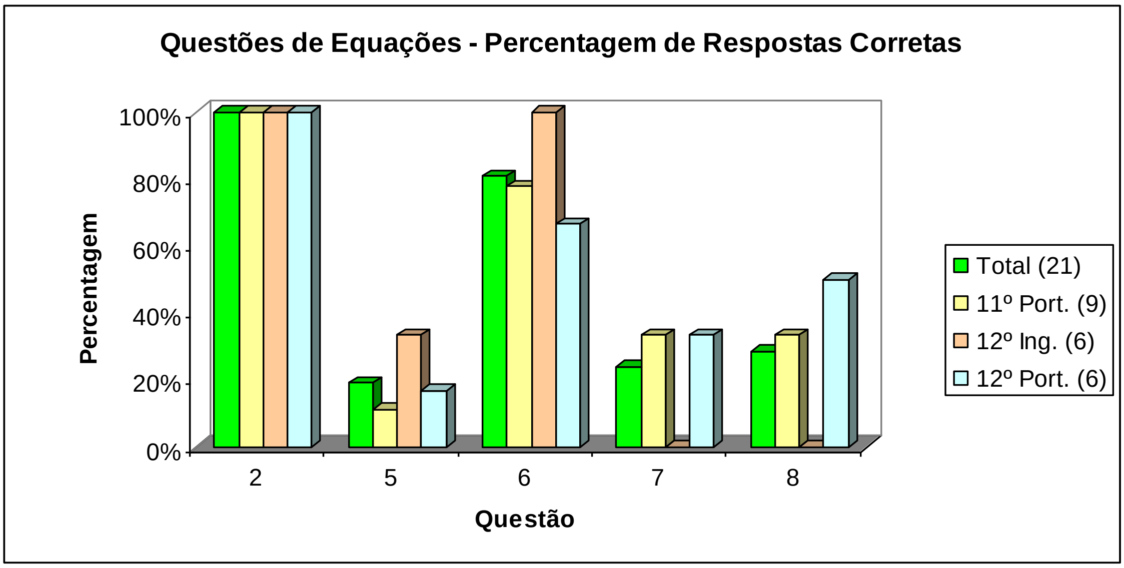


Gráfico 4.5 – Percentagem de respostas corretas nas questões sobre equações.

O gráfico 4.5 evidencia que a segunda questão não apresenta qualquer dificuldade para os alunos, tendo todos respondido de forma correta. Esse equilíbrio não se verifica no entanto, nas restantes questões sobre equações, salientando-se o bom resultado relativo dos alunos dos estudos ingleses nas questões cinco e seis e os resultados errados de todos os alunos dessa turma nas questões sete e oito.

A questão dois consiste na resolução de uma equação simples, podendo ser também resolvida por uma análise dos valores possíveis que eram apresentados o que corresponderia a um sentido de símbolo mais desenvolvido. Não sendo possível perceber qual a opção dos alunos sem recorrer à entrevista, fica claro que nenhum aluno tem dificuldade em encontrar a resposta correta.

Questão 2 (equações)	Objetivo
2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$ $(A)\,2$ (B) 5 (C) 10 (D) 95	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.
Responderam de forma totalmente correta todos os alunos.	

A quinta questão apresenta a resolução de uma equação, sendo os alunos questionados sobre a sua veracidade:

Questão 5 (equações)	Objetivo
Considera a seguinte equação: $\frac{2x+4}{x+2}=10$ $2x+4=10(x+2)$ $2x+4=10x+20$ $4=8x+20$ $-16=8x$ $-2=x$ A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em situações destituídas de significado.
Responderam de forma totalmente correta 3 alunos e de forma incorreta 19 alunos.	

Treze dos dezanove alunos que respondem incorretamente concluem que a solução obtida é verdadeira e justificam escrevendo que os cálculos estão corretos, “os passos bem feitos” ou “a respostas de acordo com os respetivos cálculos”. Os alunos que respondem corretamente, concluindo que a reposta não era verdadeira, efetuam a substituição de *x* pelo valor -2 e obtêm $\frac{0}{0}$ pelo que consideram que -2 não é solução. Apenas estes três alunos atingem o objetivo da questão e revelam serem capazes de sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação. Os alunos que consideram os passos bem feitos, são capazes de identificar expressões equivalentes mas falta-lhes uma visão mais global e uma inspeção *a priori* dos símbolos com o objetivo de sentirem o problema e o seu sentido, o que Arcavi (1994) considera uma importante componente do sentido de símbolo.

A grande maioria dos alunos responde de forma correta à sexta questão:

Questão 6 (equações)	Objetivo
A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população. $$p = 13000 + 250y$$ Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes?	Utilizar o símbolo em contexto e verificar o seu significado. Manter uma visão global do que se está a trabalhar.
Responderam de forma correta 17 alunos.	

As respostas erradas obtidas nesta questão resultam de erros na manipulação simbólica, tendo faltado a esses alunos sentido de símbolo para manterem uma visão global do problema e verificarem o resultado obtido no contexto da questão. Um exemplo dessa situação é o seguinte:

R: A populção da cidade de 14500 habitantes será de 52 anos.

$14500 = 13000 + 250y$
$-250y = -14500 + 13000$
$(\times -1)\ 250y = +13200$
$250y = 13200 \Leftrightarrow y = \frac{13200}{250} \Leftrightarrow y = 52.$

A questão sete apresenta uma resolução incorreta de uma equação de 2.º grau. Ao dividir ambos os membros por *y* a solução *y=0* deixa de ser tida em conta pelo que, das duas possíveis, é apresentada apenas uma solução. Todos os alunos já tinham estudado em anos anteriores equações de 2.º grau.

Questão 7 (equações)	Objetivo
Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução:	Manter uma visão global do que se está a trabalhar.

$2y^2 = y$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ Parece-te que a resolução dele é correta? Parcialmente correta? Ou incorreta? Justifica.	Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Responderam de forma totalmente correta 5 alunos., e consideraram ½ a única solução da equação 3 alunos.	

As respostas corretas são obtidas pela resolução da equação de 2.º grau, tendo quatro dos cinco alunos que respondem acertadamente recorrido à lei do anulamento do produto, a que corresponde um sentido de símbolo mais desenvolvido associado a um sentir da questão antes de iniciarem a sua resolução.

Dos alunos que respondem de forma incorreta, nos quais se inserem todos os alunos dos estudos ingleses, identifico dois grupos. O primeiro é constituído por três alunos que revelam algum sentido de símbolo pois substituem a solução na expressão inicial, ou constatam que "os passos estão corretos" e concluem que ½ é a única solução da equação pelo que consideram que a resolução apresentada é totalmente correta:

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/2 \Leftrightarrow 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Complete correct solution

a resolução esta correcta, pois todos os passos foram efectuados correctamente.

O segundo grupo não identifica a equação como sendo de 2.º grau, nem o erro cometido na resolução apresentada e os alunos apresentam respostas destituídas de qualquer significado, revelando ausência de sentido de símbolo:

A resolução dele parece-me incorrecta pois perante esta equação, resolvia-a da seguinte forma:

$2y^2 = y \Leftrightarrow y^2 = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{y}{2}}$

An incorrect solution:

$$2y^2 = y$$

$$2 = \frac{y}{y^2}$$

$$2 = y$$

Os resultados obtidos confirmam os relatados em Sharma (2000) num estudo com alunos de faixas etárias idênticas à dos alunos aos quais foi aplicado o teste. Nomeadamente o facto de cerca de um quarto do grupo ter respondido de forma correta e a aparente incompreensão ou esquecimento, por parte de alguns alunos, que ao dividir por y ambos os membros é necessário salvaguardar a situação $y=0$. A autora também relata situações como a substituição de y por ½ que leva os alunos a considerarem a equação corretamente resolvida, bem como o recurso à raiz quadrada. Um aluno com sentido de símbolo, deveria ser capaz de olhar para a equação, prever a possibilidade da existência de duas solução e encontrar a segunda solução por inspeção dos símbolos ou manipulação algébrica.

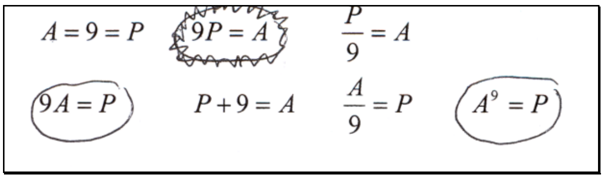
A oitava questão do teste envolve equações literais e espera do aluno a identificação de expressões que traduzam, em linguagem matemática, uma determinada situação apresentada em linguagem corrente:

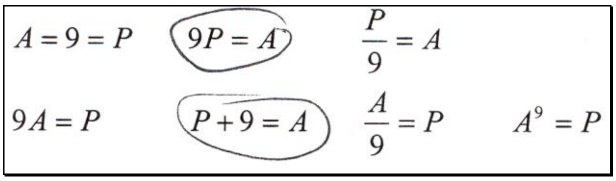
Questão 8 (equações literais)	Objetivo
Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. **A** representa o número de alunos e **P** representa o número de professores nessa escola. Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras. $A = 9 = P$ $9P = A$ $\frac{P}{9} = A$ $9A = P$ $P + 9 = A$ $\frac{A}{9} = P$ $A^9 = P$	Escolher a representação simbólica adequada. Identificar equações equivalentes derivadas de manipulação simbólica.
Responderam de forma totalmente correta 6 alunos e de forma incorreta 15 alunos.	

Seis alunos dos vinte e um envolvidos no estudo escolhem uma representação simbólica adequada, e identificam equações equivalentes, de acordo com o objetivo estabelecido. Dez alunos escolhem as opções que corresponderiam a um número de professores nove vezes superior ao dos alunos $\left(\frac{P}{9} = A \quad e/ou \quad 9A = P \right)$ dos quais sete apresentam ambas as expressões cumprindo parcialmente o objetivo pois identificam expressões equivalentes resultantes de manipulação simbólica. Os restantes três apenas referem uma das opções.

Os alunos que escolhem a opção incorreta $9A = P$, terão transposto diretamente a escrita em palavras para a linguagem simbólica. Segundo Arcavi (1994), os alunos revelariam sentido de símbolo se tivessem sido capazes de reler a questão e a sua resposta e verificado a sua correção, recorrendo eventualmente à substituição de valores. Os alunos que o conseguem fazer terão conseguido autocorrigir a sua conjetura inicialmente errada.

Respostas como as exemplificadas a seguir, são apresentadas por cinco alunos e indicam que estes não só não conseguem escolher a representação simbólica adequada, como não identificam expressões equivalentes, revelando ausência de sentido de símbolo.





Nas respostas dadas às questões que envolvem equações, os alunos não mostram dificuldades significativas na manipulação dos símbolos e utilizam os procedimentos adequados. No entanto aspetos do sentido de símbolo como sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos, manter uma visão global do que estão a trabalhar e a identificação de expressões equivalentes, não estão presentes na grande maioria dos alunos.

Problemas

Os problemas são as questões que obtêm a mais baixa percentagem de respostas corretas em todos as turmas estudadas. Os resultados obtidos são visíveis no gráfico 4.6. Para que uma resolução seja considerada totalmente correta, os problemas propostos requerem o recurso ao símbolo literal para chegar a uma expressão geral.

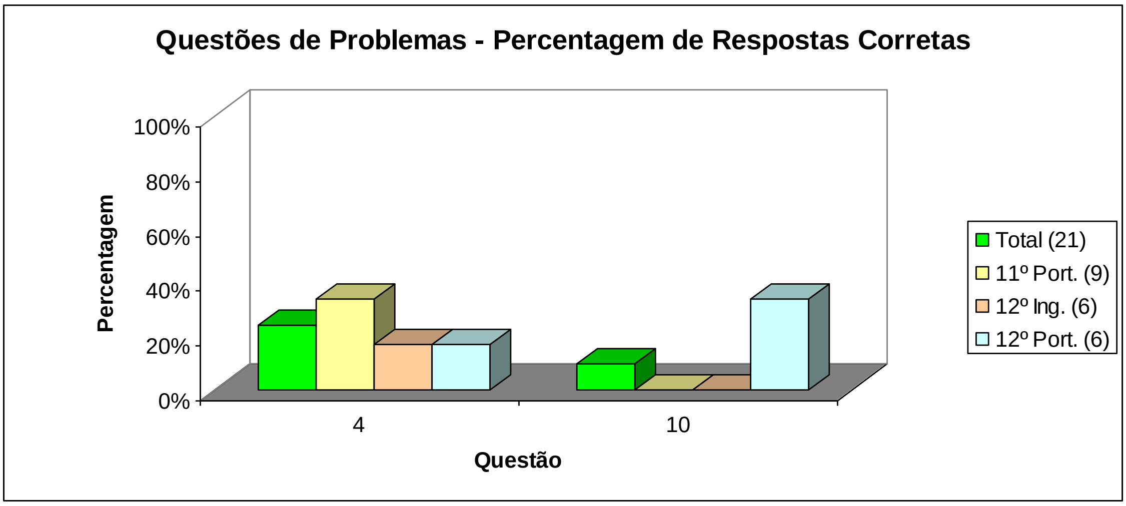


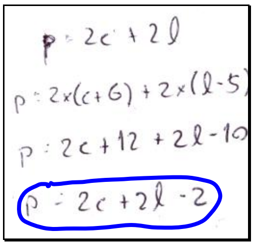
Gráfico 4.6 – Percentagem de repostas corretas nas questões da categoria de problemas.

As questões quatro e dez são dois problemas que recorrem ao retângulo. Em ambas pretende-se que os alunos utilizem símbolos para fazer conjeturas e para as demonstrar. Radford (2000) considera que o que faz com que o pensamento dos alunos seja algébrico é a prática matemática em que eles se envolvem, nomeadamente a investigação de uma expressão para o termo geral. Os problemas propostos não são problemas de sequências como os exemplos de Radford, mas é necessária uma generalização que implica, de acordo com a perspetiva desse autor, algum pensamento algébrico.

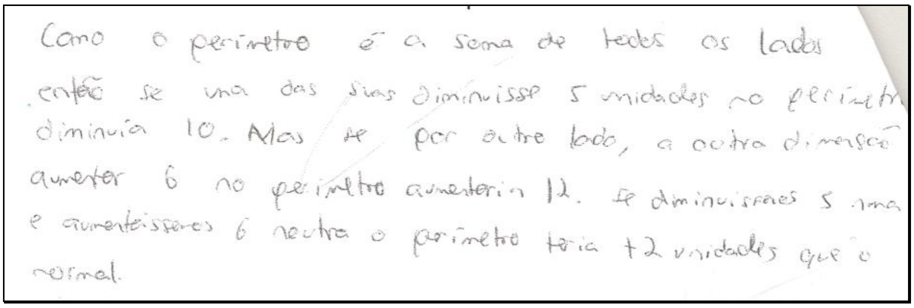
A questão quatro pretende que os alunos tirem conclusões sobre as alterações do perímetro de um retângulo quando se alteram as suas dimensões. Verifica-se que menos de 40% dos alunos de cada turma respondem de forma correta, tendo os alunos do 11.º ano dos estudos portugueses alcançado os melhores resultados.

Questão 4 (problema)	Objetivo
Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.	Utilizar o símbolo para provar relações que a aritmética não consegue. Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. Utilizar o símbolo para fazer conjeturas e generalizar.
Responderam de forma totalmente correta três alunos.	

Na questão em análise três alunos alcançam o objetivo. Dois deles recorrem à substituição das dimensões por letras e, no exemplo apresentado em seguida, apesar do aluno devido um pequeno erro de cálculos, concluir erradamente, verifica-se que recorre ao poder do símbolo para representar o problema e resolver a questão, chegando a uma expressão geral, que representa o que aconteceria ao perímetro do retângulo:

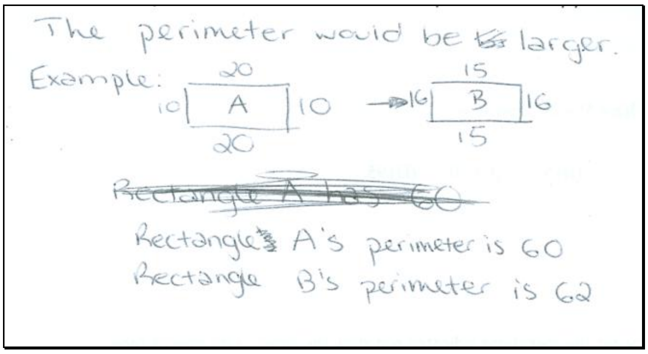


O terceiro aluno não utiliza símbolos mas explicita um raciocínio claro que o conduz à resposta correta:

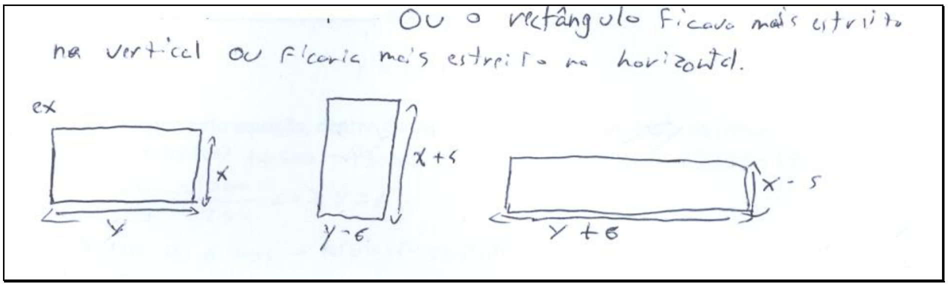


Radford (2000) considera que a produção de mensagem escrita já traduz pensamento algébrico e, efetivamente, o aluno revela uma capacidade de abstração que o conduziu à solução correta. No entanto, o recurso ao símbolo seria mais claro e eficaz, tendo o poder para funcionar em outras situações mais complexas do que a apresentada.

Nove alunos resolvem a questão para um caso particular e utilizam o resultado para tirarem conclusões:



Os restantes nove alunos não respondem, ou não conseguem interpretar corretamente o enunciado:



A resolução correta do problema dez implica o recurso ao símbolo literal para que "o resultado se torne óbvio e conclusivo" (Arcavi, 1994, p. 26).

Questão 10 (problema)	Objetivo
Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria à sua **área** se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10% ? Justifica a tua resposta.	Decidir se é útil recorrer ao símbolo. Criar e manipular uma expressão simbólica para um determinado objetivo. Conjeturar e generalizar.
Responderam de forma totalmente correta dois alunos.	

Neste problema, o recurso ao símbolo literal é a única maneira de mostrar, de forma conclusiva, que há sempre uma diminuição da área (Arcavi, 1994). Apenas dois alunos, ambos do 12.º ano, respondem de forma correta.

A tabela 4.3 sintetiza os diversos tipos de repostas ao problema da questão dez, referidas por Arcavi (1994) e o número de alunos cujas respostas se inserem em cada uma das categorias.

Tabela 4.3 – *Síntese das respostas dos alunos à questão 10*

Resolução correta	Área do segundo retângulo = 0,99 da área do primeiro retângulo, pelo que há uma diminuição de 1%, independentemente de qual a dimensão aumentada e qual a diminuída. 2 alunos	A sua área diminuiria 1% $A = c \times l$ $A = (c+0{,}1c) \times (l-0{,}1l)$ $A = 1{,}1c \times 0{,}9l$ $A = 0{,}99\,c\,l$
Resoluções incompletas ou incorretas	Não há alteração. (Há uma certa compensação) 4 alunos	Se uma das suas dimensões aumentasse 10% e outra dimensão diminuísse 10% a área manteria-se igual à área inicial pois a área que diminuísse num sítio, aumentaria noutro sítio.
	Cálculos numéricos simples aplicados a situações concretas que mostram um aparente decréscimo da área. 6 alunos	A área vai diminuir 1% do inicial exemplo: 6, 2 $A = 12$ 10% de 6 = 0,6 10% de 2 = 0,2 6,6, 1,8 → $A = 11{,}88$ → $12 - 11{,}88 = 0{,}12$ → $\frac{0{,}12 \times 100}{12} = 1\%$
	Outras situações. 9 alunos	Ficaria ~~de igual forma, mais mais pequeno de~~ um quadrado pois de um lado crescia e do outro aumentava. R: Se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10%, não existiria área. Continuaria a ser um retângulo perfeitamente normal, pois há sempre 1 dimensão maior que outra nesta figura.

Os dois alunos que respondem corretamente a esta questão, são os únicos que conseguem criar e manipular uma expressão simbólica que lhes permite, de forma elegante e aparentemente simples, concluir que, nas condições da questão proposta, o segundo retângulo teria sempre a sua área 1% menor que a do retângulo inicial. Só estes dois alunos conseguem “ver a solução simbólica e ficarem convencidos por ela, mesmo que contradiga a sua intuição inicial” (Arcavi, 1994, p. 26). A resposta do aluno cujo exemplo é apresentado na primeira linha da tabela 4.3, contém em si a sua própria explicação de uma forma sucinta e eficaz. As restantes respostas exemplificadas na tabela, mostram uma apreciação superficial da questão e correspondem a um sentido de símbolo pouco aprofundado por parte dos alunos que as apresentam. O recurso a um caso específico para tirar conclusões gerais evidencia a tendência dos alunos para recorrerem à Aritmética para provar relações que só podem ser provadas no domínio da Álgebra.

Arcavi (1994) considera que apenas com a utilização dos símbolos literais se pode aceitar ou rejeitar uma conjetura. Nas duas questões da categoria de problemas verifica-se que poucos alunos recorrem aos símbolos literais para provar relações, pelo que, a maioria dos alunos não revela ter desenvolvido esse aspeto do seu sentido de símbolo.

As respostas dos alunos nas questões de problemas evidenciam algumas dificuldades de interpretação, uma tendência para particularizar a situação, incapacidade de criarem de uma expressão simbólica que traduza o problema e uma interpretação desadequada do símbolo no contexto do problema. Uma vez escrita a expressão, a sua manipulação é feita sem dificuldades, mas poucos alunos conseguem manter uma visão global do problema. Aqueles que mantêm essa visão global, conseguem utilizar os símbolos para analisar conjeturas e para generalizar.

Funções

O trabalho com funções engloba, de alguma forma, aspetos relativos às outras categorias, sendo difícil isolar uma questão que apenas diga respeito a funções. O gráfico 4.7 apresenta os resultados do trabalho dos alunos em questões incluídas neste grupo. As percentagens mais baixas de respostas corretas correspondem às questões *12.2d*, *13.1a* e *13.1b*, que estão relacionadas com a compreensão de modelos e a tomada de decisões a partir deles.

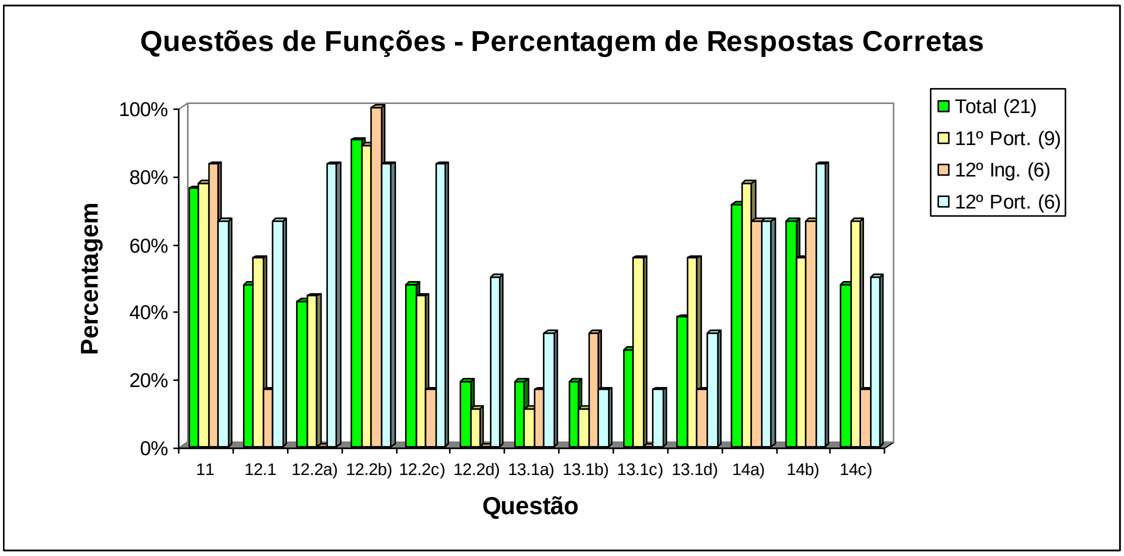


Gráfico 4.7 – Percentagem de repostas corretas nas questões da categoria de funções.

A questão onze inquere os alunos sobre a forma como verificariam se a solução de uma inequação, que lhes é apresentada está correta. Esta questão está inserida no grupo das funções pois tem subjacente o conceito de função linear e as suas diversas representações.

Questão 11 (funções)	Objetivo
Se alguém dissesse que a solução para $2 + 0{,}54x \leq 45$ era $x \leq 70$, de que forma poderias verificar esta sugestão: **A.** Numa tabela? **B.** Num gráfico? **C.** Sem utilizar tabelas nem gráficos? Explica a tua opção:	Escolher a representação simbólica adequada.

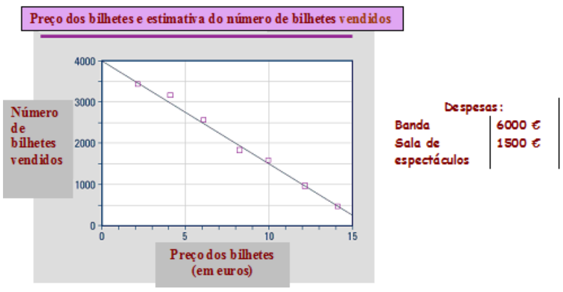
As respostas dos alunos à questão onze estão sintetizadas na tabela 4.4. Uma clara maioria opta pela resolução algébrica da inequação. A opção pela resolução recorrendo a uma tabela não é escolhida e apenas quatro alunos consideram que o gráfico é uma boa proposta para resolver a questão:

Tabela 4.4 – *Síntese das respostas dos alunos à questão 11*

Tabela	Gráfico	Sem tabela nem gráfico
0 alunos	4 alunos	17 alunos

A opção pela resolução algébrica por parte de um número de alunos tão elevado parece confirmar o que diz Duval (2006b) quando considera que os alunos têm dificuldades associadas às "conversões" e que é necessário propor-lhes tarefas variadas que impliquem representações diversas entre o registo fonte e o registo destino. A não opção por um gráfico ou uma tabela, que seriam formas rápidas e eficazes de resolver a questão, mostra uma tendência dos alunos para se centrarem num tipo de representação simbólica que eventualmente é o mais trabalhado no decorrer das atividades letivas.

As questões doze e treze têm objetivos e envolvem conceitos idênticos. Opto assim por apresentar apenas a análise da questão treze pois tem resultados quantitativos inferiores aos da questão doze e é uma proposta mais rica, na medida em que requer dos alunos a capacidade de relacionarem a representação gráfica com a sua expressão analítica o que não acontece na questão doze. A utilização dessas representações é necessária para os alunos interpretarem, e tirarem conclusões, sobre uma situação que poderia ocorrer na realidade e com significado para a maioria dos alunos da faixa etária em estudo, a organização de um concerto. Em algumas das alíneas da questão os critérios de correção não foram rígidos pois a determinação de certo ou errado, está fortemente relacionada com a justificação dada pelo aluno, e com a evidência que este dá sobre a sua compreensão da questão que lhe é colocada.

Questão 13 (funções)	Objetivo
O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espetáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).  O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação: *Número de bilhetes vendidos = 4000 – 250 x (Preço do bilhete)* **a)** Como terá, o organizador, chegado a esta equação? **b)** Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes vendidos? Explica a tua resposta. **c)** Como poderia o organizador utilizar a equação ou o gráfico para decidir qual o melhor preço de venda dos bilhetes? Explica o teu raciocínio e indica qual é, na tua opinião o melhor preço de venda dos bilhetes. **d)** Parece-te que a organização deste espetáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espetáculo?	Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender o seu papel em contextos diferentes. Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático. Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.

Apenas quatro dos vinte e um alunos respondem corretamente à questão *13a)*, e identificam a expressão dada com a equação da reta traçada no gráfico.

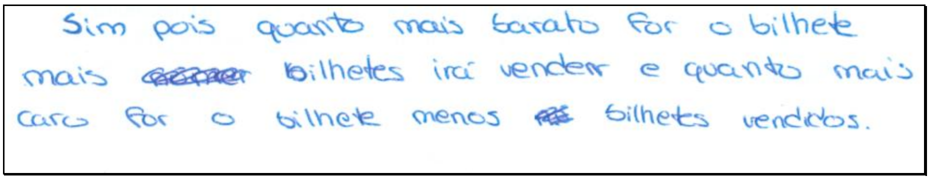
$y = mx + c$
$y = -250x + 4000$

Os restantes alunos não dão sentido à expressão algébrica, havendo em alguns casos uma tentativa de justificar os valores da expressão no contexto da situação apresentada:

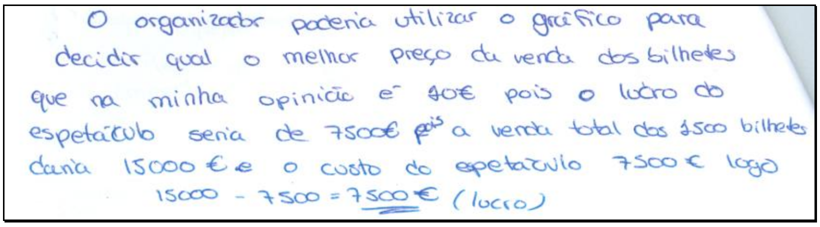
O organizador chegou a esta equação, pois 4000 foi o número de bilhetes mais vendidos, subtraiu o valor 250 pois foi o preço do bilhete.

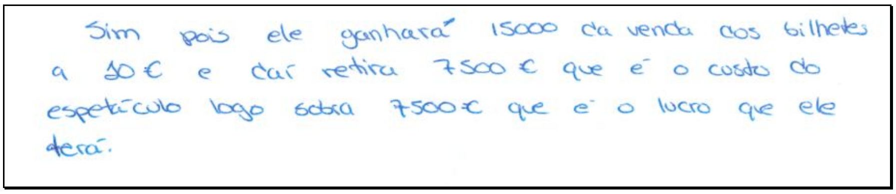
Duval (2006b) identifica mais um problema na aprendizagem da Matemática a que dá o nome de “direção da conversão”, e descreve uma tarefa que denomina de “reconhecimento simples” que consiste nos alunos identificarem uma representação gráfica a partir da sua expressão. Estando os alunos mais habituados a construir um gráfico linear a partir da expressão dada, o propor que façam o contrário, como é o caso da questão *13a*, exige uma transformação da representação, havendo uma mudança de registo sem se alterar o objeto. Mas essa transformação na direção proposta, exige um “processo de interpretação global guiado pela compreensão das variáveis visuais qualitativas” (p. 113), o que não é necessário na técnica *standard* de desenhar um gráfico linear a partir da sua expressão, que requer apenas a marcação de pontos envolvendo uma compreensão localizada da questão. O autor foca um ponto importante relacionado com a forma como uma questão é colocada. Seria de esperar que, se na questão *13a*, fosse dada a expressão e pedido o seu gráfico, o número de respostas corretas fosse superior. Considerando que a “compreensão na Álgebra linear pressupõe que os alunos sejam capazes de mudar rapidamente de registo de forma implícita ou explícita” (Duval, 2006b, p. 122), aqueles que não respondem corretamente evidenciam essa dificuldade de conversão, o que o autor considera um dos maiores obstáculos na aprendizagem da Matemática.

Na questão *13b* também somente quatro alunos apresentam uma resposta com uma justificação consistente com o modelo em causa. Estes alunos compreendem a modelação e interpretam-na num contexto real:

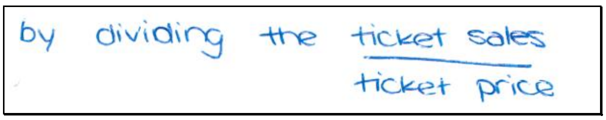

Sim pois quanto mais barato for o bilhete mais bilhetes irá vender e quanto mais caro for o bilhete menos bilhetes vendidos.

Em relação às questões *13c* e *13d* seis alunos apresentam respostas coerentes, chegando a valores que correspondem a um possível lucro e utilizando esse valor como critério de decisão, sobre a vantagem ou desvantagem do ponto de vista económico, da organização do evento. Estes alunos parecem ter compreendido o papel dos vários símbolos e utilizam-nos para tomar decisões, cumprindo o objetivo da questão.


O organizador poderia utilizar o gráfico para decidir qual o melhor preço da venda dos bilhetes que na minha opinião é 40€ pois o lucro do espetáculo seria de 7500€ pois a venda total dos 4500 bilhetes daria 15000 € e o custo do espetáculo 7500 € logo
15000 − 7500 = 7500 € (lucro)


Sim pois ele ganhará 15000 da venda dos bilhetes a 40 € e daí retira 7500 € que é o custo do espetáculo logo sobra 7500 € que é o lucro que ele terá.

Os restantes alunos não conseguem compreender na totalidade as diferentes representações simbólicas nem a modelação da situação, não lhes sendo assim possível recorrer ao poder dos símbolos para tomar decisões:


by dividing $\frac{\text{ticket sales}}{\text{ticket price}}$

Not really because their are still expenses and theatre to be payed. He will ~~loose~~ ~~3~~ lose € 3.500

A questão catorze envolve o estabelecimento de uma ligação entre a função quadrática e a altura atingida por uma bola em função do tempo:

Questão 14 (funções)	Objetivo
Para um lançamento típico de basket a altura da bola (em metros) será uma função do tempo de voo (em segundos), modelada pela seguinte equação: $$h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$$ **a.** Qual o tipo de gráfico da relação (tempo de voo, altura)? **b.** Como poderias utilizar a relação entre a altura e o tempo de voo para determinar quando é que o lançamento alcançaria a altura do cesto (3 metros). **c.** Como poderias calcular o instante em que a bola bateria no chão se falhasse o cesto?	Compreender o papel dos símbolos e que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes. Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.
a. Responderam corretamente 15 alunos. **b** Responderam corretamente 14 alunos. **c.** Responderam corretamente 10 alunos.	

Na alínea *a)*, apenas é pedida a identificação do tipo de gráfico que descreve a relação entre o tempo de voo e a altura da bola, sendo fornecida a expressão. A identificação da representação gráfica como uma parábola de concavidade virada para baixo poderia assim ser obtida por análise da expressão, com recurso à calculadora gráfica ou por identificação da própria situação real do movimento de uma bola de *basket* lançada ao cesto. No entanto seis alunos não conseguem identificar corretamente a representação gráfica com a representação algébrica do mesmo objeto matemático, e apresentam respostas como as indicadas a seguir que revelam um fraco sentido de símbolo:

Gráfico do funções.

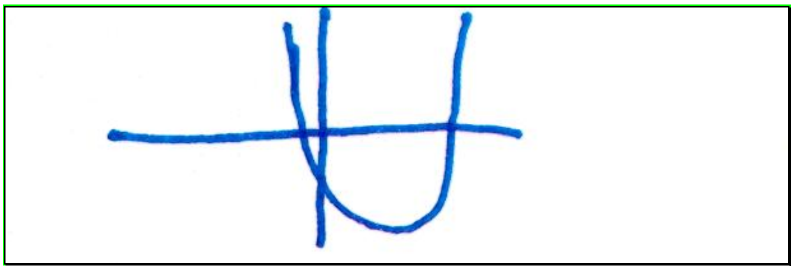


gráfico distância – tempo.

A segunda parte da questão não requer a resolução da equação quadrática, apenas a indicação da substituição de *h* pelo valor *3*, podendo os alunos ir mais longe, resolvendo a equação e identificando o instante de tempo correto no contexto do problema. Apresentam-se dois exemplos que revelam um fraco sentido de símbolo:

Através da velocidade como foi feito o lançamento.

you would divide $\dfrac{\text{time}}{\text{height}}$

De seguida, apresento um exemplo de um sentido de símbolo bem ancorado. Apesar de uma troca de sinal incorreta, o aluno obtém dois resultados possíveis para o tempo pedido e opta pelo que tinha significado no contexto do problema, assinalando-o com uma seta e colocando entre parêntesis o valor que considera destituído de sentido:

$$3 = -4.9t^2 + 12.2t - 1.8$$
$$0 = -4.9t^2 + 12.2t - 4.8$$
$$\rightarrow t = 2 \quad (\text{or } t = 0.49)$$

Na terceira parte da questão, os alunos têm que fazer corresponder ao chão uma altura igual a zero. O facto de a bola ser lançada de uma altura não nula, leva a que na resolução da equação de 2.º grau se obtenha uma resposta positiva e outra negativa para o tempo. Um aluno com um sentido de símbolo apurado, identifica o tempo positivo como a resposta correta, como é o caso do exemplo apresentado.

$$0 = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$$
$$t = 2{,}63 \lor t = -0{,}14$$

R: No instante 2,63 s

Alguns alunos apresentam respostas que evidenciam um sentido de símbolo pouco desenvolvido não sendo capazes de compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes:

> Poderia calcular o instante em que a bola bateria no chão se falhase o cesto através do tempo de ascensão.

As questões sobre funções revelam uma tendência para a não utilização da representação gráfica ou em tabela, sendo privilegiada a representação algébrica, com uma consequente limitação da compreensão e utilização das diferentes representações do mesmo objeto matemático

Questões que implicam a utilização do símbolo para modelar situações e tomar decisões também revelam um sentido de símbolo pouco desenvolvido por parte do grupo de alunos que realizaram o teste. Kaput (1999) realça a importância da modelação e considera-a uma importante razão para se estudar Álgebra. Estes alunos não parecem ter o grau de intimidade que Kaput (1999) considera desejável, entre a atividade que desenvolvem e a notação matemática que utilizam para a interpretarem.

4.3. Um "retrato" do sentido de símbolo dos alunos

As análises quantitativa e qualitativa efetuadas contribuem para a resposta à primeira questão de investigação deste trabalho. Através destas análises é possível fazer um "retrato" do sentido de símbolo de um grupo de alunos do ensino secundário com base nas suas respostas a questões de Álgebra envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções. A tabela de enquadramento desenvolvida (anexo 1) revelou-se útil e foi alterada em relação à sua versão inicial de forma a incluir aspetos do sentido de símbolo que não continha e que se evidenciaram nas respostas dos alunos. O próprio Arcavi (1994) reconhece que é sempre possível acrescentar mais ao sentido de símbolo, sendo qualquer "catálogo" sempre incompleto.

O retrato obtido evidencia a existência de uma grande diversidade de níveis de desenvolvimento do sentido de símbolo, apesar do grupo de vinte e um alunos considerado pertencer à mesma faixa etária e frequentar a mesma escola. No entanto, há alguns aspetos do sentido de símbolo que se podem considerar desenvolvidos na maioria dos alunos em estudo e que se encontram indicados na tabela 4.5:

Tabela 4.5 – *Aspetos do sentido de símbolo mais desenvolvidos no grupo em estudo*

• Criar uma expressão simbólica.
• Interpretar e representar uma situação utilizando linguagem simbólica.
• Compreender a concretização da variável.
• Utilizar o símbolo em contexto e verificar o seu significado.
• Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.
• Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.

Os aspetos do sentido de símbolo menos desenvolvidos no grupo em estudo encontram-se na tabela 4.6.

Tabela 4.6 – *Aspetos do sentido de símbolo menos desenvolvidos no grupo em estudo*

• Utilizar o símbolo para fazer, aceitar ou rejeitar conjeturas.
• Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.
• Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado,
• Utilizar o símbolo para provar relações que a aritmética não consegue.
• Compreender o papel dos símbolos. Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.
• Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.
• Passar de uma estrutura concreta para uma abstrata.

Este capítulo tem por base apenas as respostas escritas dos testes dos vinte e um alunos. A análise quantitativa justificou-se e funcionou como um indicador eficaz para a análise qualitativa. No entanto, apesar de ser possível tirar algumas conclusões a partir das respostas dos alunos, constato que é difícil compreender e analisar o sentido de símbolo com base apenas em documentação escrita. O recurso à entrevista e a construção de estudos de caso para alguns destes alunos justifica-se plenamente quando se pretende, como é objetivo deste trabalho, uma compreensão melhor e mais aprofundada do seu sentido de símbolo. Note-se, ainda, que na turma de 12.º ano dos estudos portugueses verificou-se o maior desvio padrão, registando-se nesta turma o resultado mais baixo e o resultado mais alto dos grupos em estudo (gráfico 4.2) e que foi nesta turma que se registaram as repostas corretas às questões da categoria dos problemas, o que reforçou a opção por estudos de caso de alunos dessa turma.

Capítulo 5

O sentido de símbolo: Dois estudos de caso

Este capítulo apresenta uma análise do sentido de símbolo de dois alunos relativamente aos aspetos focados neste trabalho, nas categorias de expressões algébricas, equações, problemas e funções. A análise tem por base o trabalho de cada aluno no teste diagnóstico (anexo 3), a subsequente entrevista e a entrevista clínica com as tarefas que constam do anexo 6, e é enquadrada pela tabela de sentido de símbolo do anexo 1. O capítulo analisa também o reflexo do sentido de símbolo de cada aluno no seu trabalho escrito realizado ao longo do ano, em contexto de avaliação sumativa, e procura estabelecer uma ligação entre o sentido de símbolo e a aprendizagem da Álgebra.

5.1. Diogo

No corrente ano letivo, Diogo frequenta apenas a disciplina de Matemática. Este é o último ano que o sistema de ensino nacional lhe permite inscrever-se no 12.º ano regular para concluir o ensino secundário. Num breve questionário realizado no início do ano, refere a que a Matemática é “ uma disciplina que requer bastante estudo”.

5.1.1. O sentido de símbolo de Diogo

Expressões algébricas

Familiarização com os símbolos e o seu significado. O aluno revela estar familiarizado com alguns símbolos e o seu significado. Assim, na primeira questão do teste diagnóstico, indica de forma clara o papel do parêntesis, e traduz corretamente relações expressas em linguagem corrente para linguagem simbólica:

> 1. Considera n. Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática: Adiciona 5 a n e depois multiplica o resultado por 3.
>
> $(5+n)\times 3 = 15+3n$

Entrevistadora: Quanto à primeira pergunta, porque é que puseste o parêntesis?

Diogo: Hum portanto… Porque ao adicionar o 5 mais o *n* e como depois o 3 tinha que se multiplicar por a soma destes dois, achei que era a forma mais normal de fazer isso…

Entrevistadora: O que acontecia se não pusesses o parêntesis?

Diogo: Multiplicava só o 3 sobre o *n* e ficava o 5.

A compreensão do parêntesis que revela na primeira questão do teste diagnóstico não parece, no entanto, muito profunda, uma vez que na alínea *c)* da terceira questão do mesmo teste, o aluno escreve:

> c)
> $(2+6)+4 =$ $6+10=16$
>
> $(2a+6a)+4a =$ $6a+10a=16a$

Diogo, que tinha considerado "normal" a utilização do parêntesis na primeira questão, para que a soma fosse realizada em primeiro lugar, passa a atribuir ao parêntesis uma indicação para aplicar a propriedade distributiva independentemente das operações em causa. Tal é evidente quando lhe é pedido que explique o que escreveu na terceira alínea e o aluno comprova que tinha aplicado uma espécie de "propriedade distributiva da adição em relação à adição":

Entrevistadora: Explica-me lá como é que fizeste as contas aqui nesta, Diogo.

Diogo: Pus… Somei o 4 com o 2…

Entrevistadora: Portanto era 2 mais 6 mais 4. Sim somaste o quatro com o dois…

Diogo: E depois o 4 com o 6.

Entrevistadora: O 4 com o 6… e depois o 6 com o 10.
Diogo: Sim.

Na mesma questão e perante a multiplicação da alínea *d)*:

d)
$$(2\times 6)\times 4 = 8 \times 20 = 160$$
$$(2a\times 6a)\times 4a = 8a^2 \times 20a^2 = 160a^2$$

Diogo volta a aplicar uma propriedade distributiva de forma incorreta, desta vez "da multiplicação em relação à multiplicação". Durante a entrevista, o aluno considera que deveria ter efetuado em primeiro lugar o que estava entre parêntesis e não identifica a sua inutilidade naquele caso.

O símbolo "igual" parece ser, para Diogo, uma indicação para "fazer algo sempre que possível". Na mesma terceira questão do teste diagnóstico, o sinal de igual é utilizado repetidamente com esse sentido, neste caso simplificar a expressão. O aluno só para de "fazer algo" quando, aparentemente, não tem mais ideias. Tal é patente logo na primeira alínea quando dá a seguinte resposta:

3. Efectua as operações indicadas e simplifica o resultado.

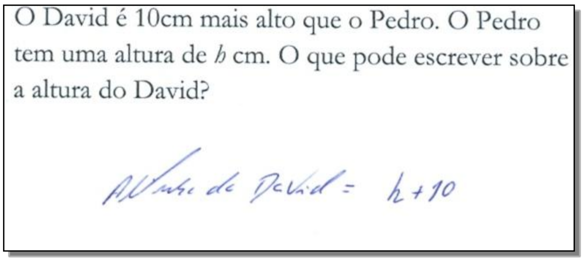
a)
$$3+6 = 9 = (3)^2$$

Esta escrita do número 9 na forma de potência não parece dever-se ao facto de considerar que a segunda forma é mais simples que a primeira, pois na alínea seguinte o aluno faz exatamente o contrário e calcula o valor da potência:

b)
$$2^2\times 2^3\times 2^1 = (8)^6 = 262144$$

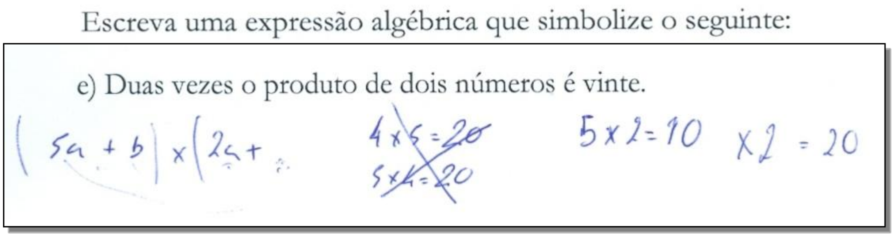
Diogo só para quando fica sem mais possibilidades de trabalhar a expressão e não quando considera que o resultado está o mais simplificado possível.

Criação de uma expressão simbólica, tradução de linguagens. Na segunda tarefa da entrevista é dada a informação que a letra *h* representa a altura de uma pessoa. O aluno passa com facilidade da linguagem corrente para a simbólica e interpreta corretamente o resultado:


O David é 10cm mais alto que o Pedro. O Pedro tem uma altura de *h* cm. O que pode escrever sobre a altura do David?

Altura do David = h+10

No entanto, ao ser confrontado com a expressão "um certo número", em vez de lhe ser dada uma letra que o represente, Diogo revela muita dificuldade em representar esse número por uma letra, mostrando sempre necessidade de recorrer a valores concretos. Tal é evidenciado em todas as suas respostas à primeira questão da entrevista na qual se pede que escreva uma expressão algébrica que simbolize uma dada condição. Eis a resposta escrita do aluno e um excerto de uma parte da entrevista referente ao que é pedido na quinta alínea:


Escreva uma expressão algébrica que simbolize o seguinte:

e) Duas vezes o produto de dois números é vinte.

(5a + b) x (2a +

~~4x5=20~~
~~5x4=20~~

5x2=10 x2 = 20

Diogo: E é o produto desses números, vezes estas duas vezes que tem de dar 20?

Entrevistadora: Sim

Diogo: Posso utilizar professora?

Entrevistadora: Podes, podes usar a calculadora.

Diogo: Ah, já sei… Ah, então… Posso riscar?

Entrevistadora: Podes, o *5 x* 2 é igual a *10*.

Diogo: Diga-me uma coisa:

Entrevistadora: hum!

Diogo:

Entrevistadora: Vezes 2 igual a 20. Então?

Diogo: Ainda não cheguei lá? Ao consenso?

Entrevistadora: Sim, chegaste a dois números. Sim, se fizeres 5 vezes 2 dá 10, não é?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: E depois vezes 2 dá 20. Chegaste a dois números cujo produto vezes 2 dá 20, é verdade. E se quisesses escrever a expressão de uma maneira geral? Recorrendo a letras! Não é preciso calcular os números, só escrever… O que nós estamos a fazer aqui é escrever….de uma forma algébrica… Numa expressão o que é dado (…).

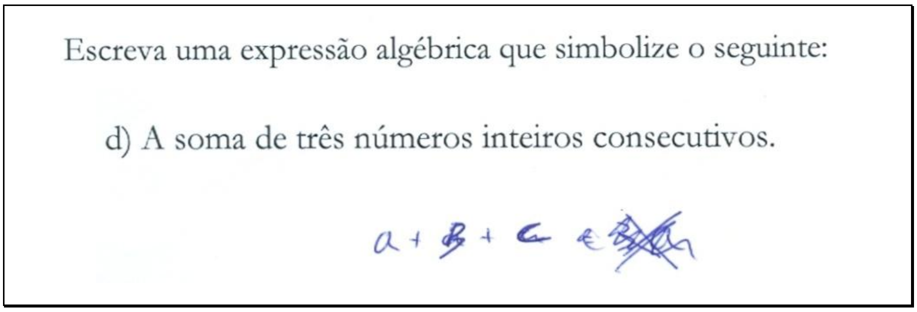
Diogo: Punha um número com letra, vezes…

Entrevistadora: Sim.

Diogo: *10a x 2b.*

Diogo inclui letras mas mantém o número 10 e não estabelece uma igualdade. Chega, assim, a uma expressão que não tem correspondência com o que lhe é pedido.

A criação de expressões simbólicas reveste-se de assinalável dificuldade para Diogo, também devido ao facto de não conseguir dar sentido a termos comuns em Matemática e não lhes conseguir atribuir uma representação algébrica. O exemplo que se apresenta implica o conceito de números consecutivos:


Escreva uma expressão algébrica que simbolize o seguinte:

d) A soma de três números inteiros consecutivos.

a + b + c e

O trecho da entrevista reproduzido em seguida mostra os passos seguidos pelo aluno até chegar à sua resposta:

Diogo: A soma de três números inteiros consecutivos…. A soma de três números…

Entrevistadora: $a+ a+a =3a$…. Isso é uma grande verdade. E porque é que esses três números são consecutivos? Sabes o que é que são números consecutivos?

Diogo: Como é que eu hei de explicar? A soma de três números inteiros consecutivos! Então é de seguida.

Entrevistadora: São de seguida exatamente, são uns a seguir aos outros. Por exemplo, o 2, … Qual é o número a seguir ao 2?

Diogo: O 3.

Entrevistadora: O 3 …

Diogo: E o quatro.

Entrevistadora: E o 4. São…

Diogo: São três números.

Entrevistadora: São três números inteiros consecutivos.

Diogo: Então não sei se está correto.

Entrevistadora: Ao pores *a, a, a* … porque é que achas que assim são consecutivos. Este segundo *a* representa um número diferente do que aquele?

Diogo: Não. Então posso pôr $a + b + c$.

Entrevistadora: Podes pôr $a+b+c$. E como é que sabes que o *b* é a seguir ao *a* e que o *c* é a seguir ao *b*?

Diogo: Porque é normal… é assim. Não sei….

Apesar de a entrevistadora ter continuado a insistir na relação entre os números, Diogo não consegue apresentar uma representação que garanta a sua consecutividade.

Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata. A dificuldade em utilizar letras quando pensa em números é confirmada por Diogo, ainda na primeira tarefa da entrevista, em resposta à sexta alínea na qual o aluno insiste em trabalhar com valores concretos:

Entrevistadora: Por exemplo, encontraste dois números que verificam essa condição, mas se fosse uma expressão geral, com letras.

Diogo: Com letras…

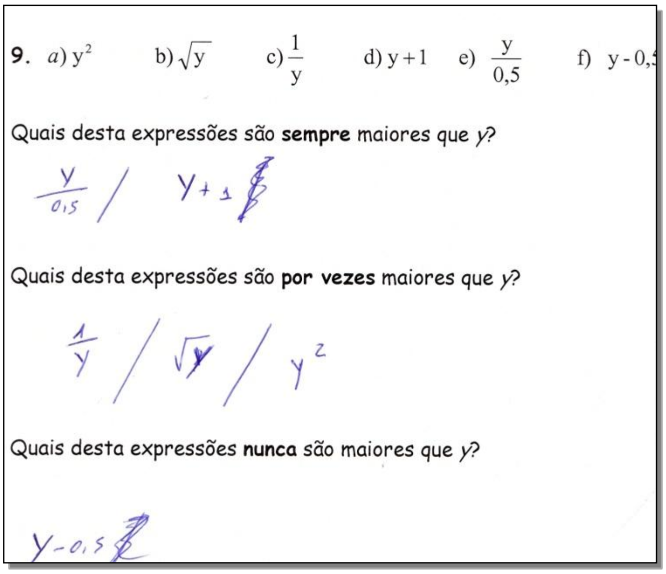
Entrevistadora: Exatamente.

Diogo: Isto das letras…

Entrevistadora: É que para ti é mais fácil pensar em dois números?

Diogo: Eu ainda não consegui perceber isso.

Tendo em atenção a forma como utiliza o símbolo, Diogo não parece ter assimilado o sentido da letra como um símbolo que pode ser utilizado para escrever expressões algébricas sem ter que tomar um valor específico. O aluno sente sempre necessidade de atribuir um número à letra e considera que ela apenas toma esse valor, transportando dessa forma a Álgebra de volta à Aritmética. Isso é patente na questão nove do teste diagnóstico, na qual são dadas diversas expressões algébricas e é pedido que avalie possíveis valores que estas podem tomar. O aluno apresenta a seguinte resposta:



9. a) y^2 b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ d) $y+1$ e) $\frac{y}{0,5}$ f) y - 0,

Quais desta expressões são **sempre** maiores que *y*?

$\frac{y}{0,5}$ / $y+1$

Quais desta expressões são **por vezes** maiores que *y*?

$\frac{1}{y}$ / $\sqrt{y}$ / y^2

Quais desta expressões **nunca** são maiores que *y*?

$y-0,5$

Perante a sua resposta escrita e o pedido para explicar como tinha chegado a estes resultados, o aluno responde que tinha considerado *y=1* e tirado todas as conclusões a partir daí. Eis a parte da entrevista que se segue a essa resposta:

Entrevistadora: Porque é que escolheste o valor 1?

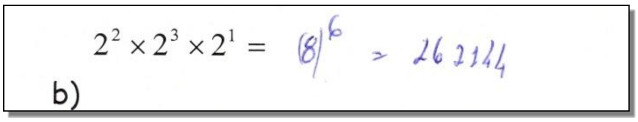
Diogo: Porque quando está alguma incógnita sem o valor significativo atrás damos sempre o valor 1, e foi o que eu fiz.

Entrevistadora: E não podias dar outro valor a *y*?

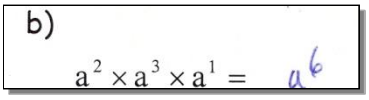
Diogo: Se calhar até podia mas foi o que me surgiu.

O aluno revela não compreender o sentido do *y* não tendo a perceção que este pode tomar qualquer valor real. Apresenta uma justificação inadequada, relacionada com o coeficiente 1 de um monómio que normalemente não se explicita, para a atribuição a *y* do valor 1 e utiliza o termo “valor significativo” de forma incorreta. Opta por um valor que constitui uma primeira escolha natural, mas não lhe ocorre a possibilidade de *y* poder tomar múltiplos valores, que conduziriam a conclusões diferentes daquelas a que chegou.

Em relação às regras das potências, o aluno atribui-lhes um sentido que não se baseia na sua compreensão. Retomando a alínea *b)* da terceira questão do teste, escreve:



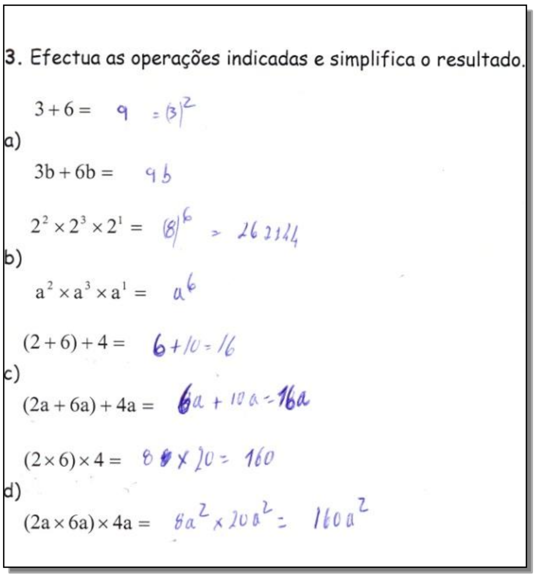
Confirma na entrevista que aplica a seguinte regra: “multiplicar as bases e somar os expoentes”. No entanto, ao responder à segunda parte dessa alínea da seguinte forma:



O aluno aplica a mesma regra mas indica agora que “as partes literais estão a somar” e daí o resultado apresentado. Ou seja, parece que, para ele, o que está em jogo é a multiplicação $a \times a \times a$ que considera ser uma soma à qual atribui o valor *a*. Neste caso particular a sobreposição de regras e conceções erradas resulta numa resposta correta mas o caminho que percorre para lá chegar evidencia um fraco sentido de símbolo.

Na alínea *d)*, apesar da aplicação da propriedade distributiva errada, Diogo faz corretamente a multiplicação $2a \times 4a = 8a^2$. No entanto, ao fazer $8a^2 \times 20a^2 = 160a^2$ volta a considerar que $a^2 \times a^2 = a^2$, justificando mais uma vez que as partes literais “estão a somar”.

A questão três do teste diagnóstico e as respostas de Diogo são as seguintes:



As respostas de Diogo revelam um conjunto de incoerências e uma aplicação de regras matemáticas erradas mas revestidas de algum sentido para o aluno, que traduzem um fraco sentido de símbolo a nível das expressões algébricas.

A tabela 5.1 sintetiza o seu sentido de símbolo em relação às expressões algébricas.

Tabela 5.1 - *Resumo do sentido de símbolo de Diogo em relação às expressões algébricas*

Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado.	Compreende o significado de alguns símbolos embora, na maioria dos casos, este significado não pareça fortemente ancorado. Perante situações diferentes, nem sempre atribui ao símbolo o significado correto. Utiliza sistematicamente o símbolo "igual" como uma indicação para, fazer algo enquanto possível.
Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.	A forma como consegue traduzir a linguagem simbólica para corrente, depende do modo como a questão é colocada. Se a letra consta do enunciado, consegue traduzir a linguagem corrente para simbólica de forma competente.
Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido do número para sentido de símbolo).	Assume um conjunto de regras, algumas erradas mas que considera corretas, às quais atribui um sentido próprio e que utiliza frequentemente. A sua necessidade de atribuir valores concretos às letras que figuram numa expressão algébrica, também dificulta a forma como se move entre Aritmética e a Álgebra. Sente-se mais à vontade a trabalhar com a primeira (que lhe permite "fazer contas") embora nem sempre o faça de forma correta. Não vê com clareza, os vários papéis que a letra pode desempenhar numa expressão algébrica, tendo tendência a considerá-las como representantes de um único valor.
Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo.	Não atribui sentido à identificação de "um certo número" com uma letra numa expressão algébrica, o que não lhe permite, em diversas situações, criar uma expressão geral que simbolize uma dada situação. Não dá sentido a termos comuns em Matemática e não conseguir atribuir-lhes uma representação algébrica.

Equações

Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. Na segunda questão do teste diagnóstico Diogo apresenta a resposta correta escrevendo os procedimentos que utilizou na resolução da equação:

2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$

(A) 2 (B) 5 (C) 10 (D) 95

$3x+15=30$

$3x=15$

$x=\frac{15}{3}$

A entrevista permite confirmar que o aluno não realizou uma inspeção dos símbolos que também lhe permitiria chegar à resposta certa, mas opta pela resolução algébrica da equação:

> **Entrevistadora:** Aqui na segunda pergunta, como é que fizeste? Resolveste… Tens aqui escrito a lápis ao lado.
>
> **Diogo:** Sim multipliquei aqui o 3 com o *x*. Dá *3x*. Depois multipliquei o 3 com o 5, dá 15 e igualei a 30.

Apesar de uma grande insistência da parte da entrevistadora, o aluno não consegue identificar que o resultado $x=5$ que obtém a certa altura pode ser substituído na equação inicial e conduzir a uma igualdade universal comprovando que a sua resposta estaria correta:

> **Entrevistadora:** E verificaste depois se a tua resposta estava certa?
>
> **Diogo:** Sim.
>
> **Entrevistadora:** Como é que verificaste?
>
> **Diogo:** Pus na máquina 15 a dividir por 3 que dá o valor 5.
>
> **Entrevistadora:** Ah sim, fizeste a conta com a máquina. E havia alguma maneira, sem fazer isto, de conseguires verificar se o 5 era solução desta equação?
>
> **Entrevistadora:** Sem fazer contas.
>
> **Entrevistadora:** Imagina que experimentavas as várias possibilidades.
>
> **Diogo:** Não estou a ver.
>
> **Entrevistadora:** Quando resolvemos uma equação calculamos o valor do *x*, não é?
>
> **Diogo:** Sim.
>
> **Entrevistadora:** Temos maneira de ir ao princípio ver se o *x* está bem calculado?

O aluno não consegue indicar métodos alternativos de resolução como a substituição das várias soluções propostas ou uma análise da questão que poderia conduzir rapidamente à resposta certa. Quando questionado sobre a forma como poderia verificar se a resposta estava correta limita-se a indicar a calculadora para fazer a conta 15 a dividir por 3, o que considera suficiente para comprovar que o resultado é 5. Apesar de realizar uma manipulação simbólica correta e adequada, o aluno não sente o problema a partir da inspeção dos símbolos e não dada sentido à solução de uma equação.

Na questão oito do teste diagnóstico, era pedido para identificar as equações literais que traduzem uma determinada relação entre o número de alunos e o de professores numa certa escola. O aluno responde da seguinte forma à questão:

8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. A representa o número de alunos e P representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.*

$A = 9 = P$ $\quad 9P = A$ $\quad \frac{P}{9} = A$

$9A = P$ $\quad P + 9 = A$ $\quad \frac{A}{9} = P$ $\quad A^9 = P$

No decorrer da entrevista sugiro-lhe que substitua o número de alunos por 10 na expressão *9A=P*. No entanto, para Diogo, a atribuição desse valor ao número de alunos não faz muito sentido, devido ao facto de não serem referidos valores na pergunta:

Entrevistadora: E concluíste que estas duas expressões seriam boas para traduzir esta relação. Escolheste-as porquê Diogo? Foste lendo…

Diogo: Acho que foi… As respostas mais adequadas à pergunta.

Entrevistadora: E não as testaste?

Diogo: Não.

Entrevistadora: Ou seja não viste por exemplo… Então vamos nós tentar testar, por exemplo se eu tiver 10 alunos, não é? Eu posso substituir o A por 10 ou não?

Diogo: Sim… Sim…

Entrevistadora: Então se eu tiver 10 alunos nesta expressão fico com 9×10, 90 professores. Achas que isso está de acordo com…

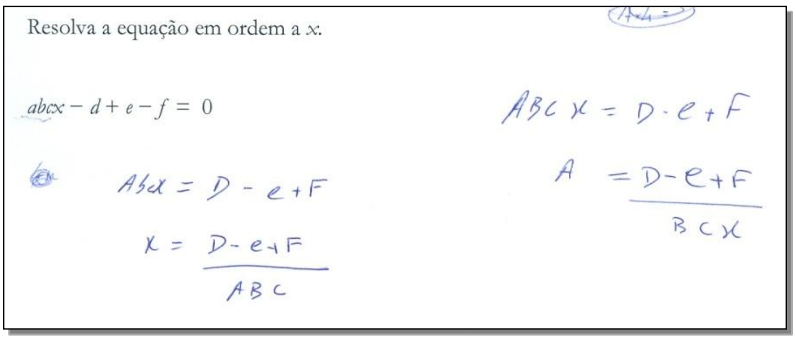
Diogo: 90 professores. Numa escola há nove vezes mais alunos que professores. Mas eu também não sei o número de alunos.

Entrevistadora: Não, isso é verdade, é geral não é. Mas queremos uma relação que verifique. E uma relação que verifique não terá que bater certo com os números? Não podemos substituir por números?

Diogo: Sim. Penso que sim…

Diogo não parece muito seguro que se possa proceder a essa substituição por números e não identifica o seu erro nem opta por corrigir a sua resposta. Esta hesitação que também está patente na resposta da questão nove do teste diagnóstico, analisada anteriormente em relação às expressões algébricas, de alguma forma confirma a sua tendência para separar letras e números. O aluno não considera a possibilidade de “inspecionar os símbolos”, atribuindo valores a letras, testando resultados e reanalisando, dessa forma, as respostas obtidas bem como o seu sentido no contexto da questão.

Manipulação simbólica utilizando os procedimentos adequados. Diogo resolve corretamente algumas questões que envolvem uma manipulação com algum grau de complexidade. Tal é o caso da questão quatro da entrevista clínica apesar de, ao longo da resolução escrita, o aluno ir sempre pedindo confirmação, por parte da entrevistadora, em relação aos vários procedimentos que vai adotando.



No decorrer da entrevista, o aluno também analisa com sentido de símbolo a posição relativa das letras numa expressão, concluindo corretamente quando lhe é pedido que resolva a equação em ordem a uma outra letra:

Entrevistadora: (…) Se em vez de te pedir para fazeres em ordem a *x*, te pedir para fazeres em ordem a *a*, o que é que mudava na tua resolução?

Diogo: O *def* passava para o outro membro

Entrevistadora: Da mesma maneira?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: E depois?

Diogo: … Acho que fazia a mesma coisa.

Entrevistadora: Portanto ficaria *a* igual a?

Diogo: *a* igual a… Posso fazer aqui?

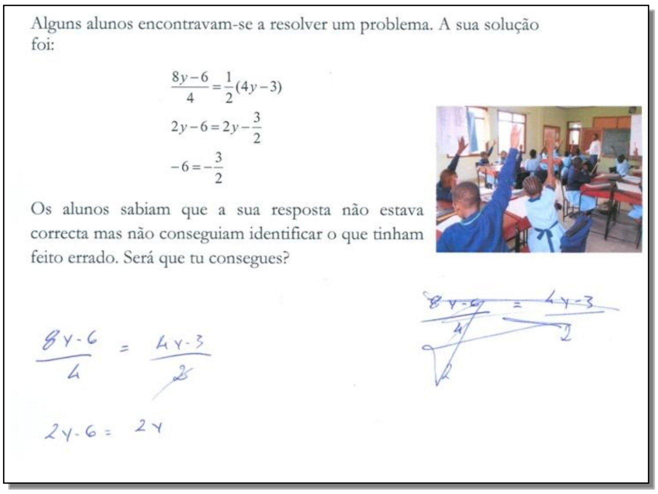
Entrevistadora: Podes, podes.

Diogo: Sim, fazia a mesma coisa.

Entrevistadora: E se fosse o *b* ou o *c*, achas que haveria uma grande diferença?

Diogo: Acho que não, porque está tudo a multiplicar, estes membros. Se estão a multiplicar, depois têm que ir a dividir.

Perante a sexta tarefa proposta na entrevista:



Alguns alunos encontravam-se a resolver um problema. A sua solução foi:

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{1}{2}(4y-3)$$

$$2y-6=2y-\frac{3}{2}$$

$$-6=-\frac{3}{2}$$

Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correcta mas não conseguiam identificar o que tinham feito errado. Será que tu consegues?

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{4y-3}{\cancel{2}}$$

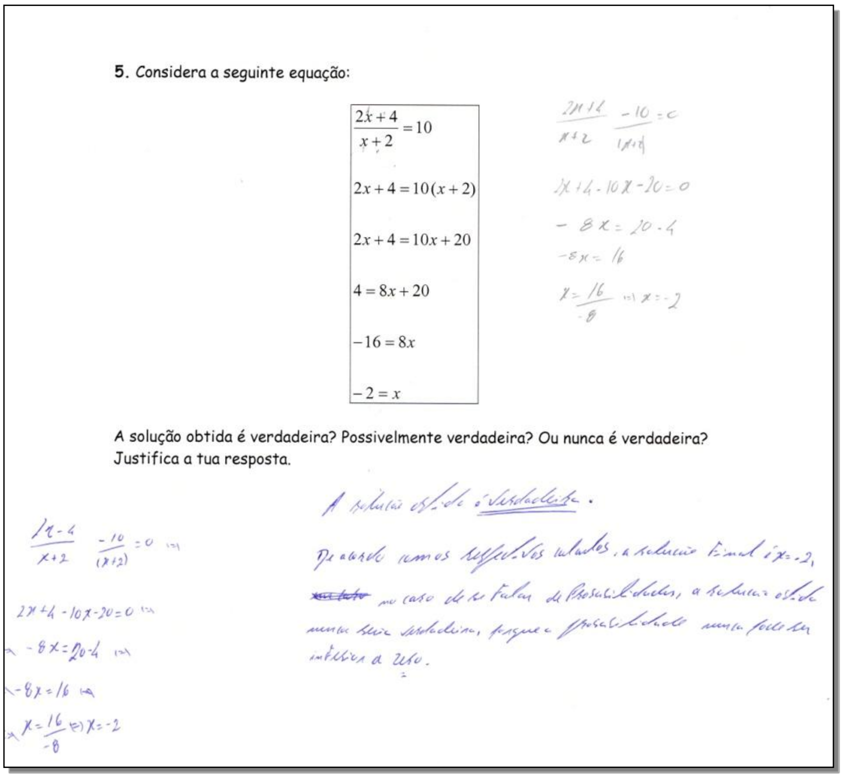
$$2y-6=2y$$

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{4y-3}{2}$$

O aluno tem dúvidas na simplificação do numerador com o denominador. Na expressão $\frac{4y-3}{2}$, não sabe se deve dividir só o quatro por dois ou dividir também o três. O erro da resolução apresentada na questão baseia-se exatamente nessa operação incorreta. Assim o aluno identifica o erro no segundo membro (que está correto) em vez de o identificar no primeiro, obtendo uma condição impossível que não identifica como tal.

Assim, manipulação simbólica recorrendo aos procedimentos adequados parece ser um dos aspetos do sentido de símbolo com algum relevo em Diogo, apesar do aluno nem sempre estar seguro sobre procedimentos essenciais.

Manutenção de uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado. Na questão cinco do teste diagnóstico, o aluno evidencia mais uma vez que não consegue dar sentido à substituição do valor de *x* na expressão inicial o que, neste caso, tem como consequência uma resposta incorreta. Como resolve a equação de uma forma ligeiramente diferente, mas equivalente, à apresentada na questão e chega à mesma solução (incorreta), fica convencido que este valor é a solução da equação.


5. *Considera a seguinte equação:*

$$\frac{2x+4}{x+2}=10$$

$$2x+4=10(x+2)$$

$$2x+4=10x+20$$

$$4=8x+20$$

$$-16=8x$$

$$-2=x$$

$\frac{2x+4}{x+2}-\frac{10}{(x+2)}=0$

$2x+4-10x-20=0$

$-8x=20-4$

$-8x=16$

$x=\frac{16}{-8} \Rightarrow x=-2$

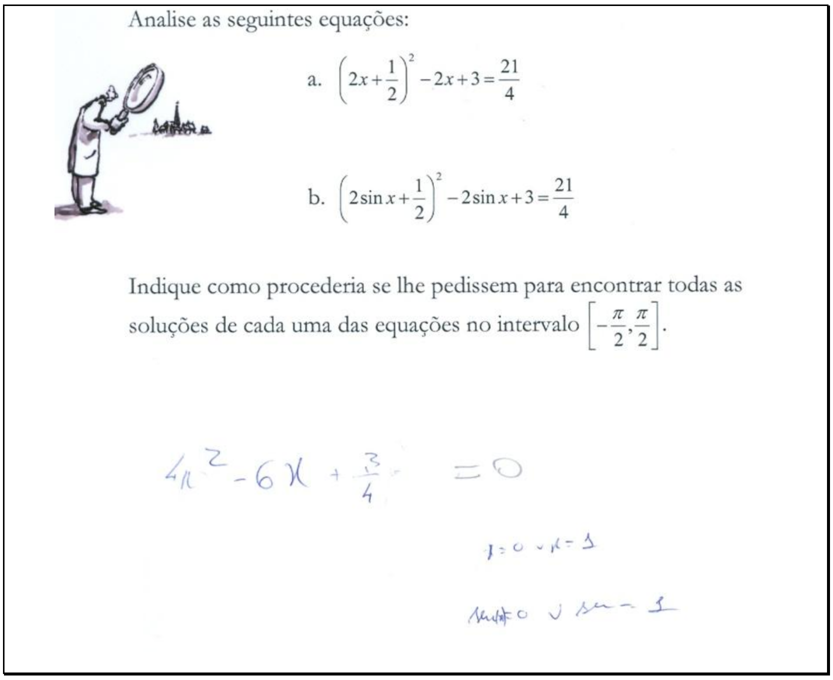
A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.

A solução obtida é verdadeira.

De acordo com os respetivos cálculos, a solução final é x=-2, ~~[illegible]~~ no caso de se falar de possibilidades, a solução obtida nunca seria verdadeira, porque a possibilidade nunca podia ser inferior a zero.

Na entrevista, o aluno indica que resolveu “à sua maneira”, e como chega ao mesmo resultado confirma que é igual ao apresentado na questão, evidenciando que a solução de uma equação é o resultado da sequência de procedimentos. Assim, mais uma vez, não dá sentido à resposta na medida em que não a identifica com o valor que, substituído na expressão inicial, a transforma numa condição universal nem, neste caso, como o zero do denominador. Diogo não parece ter dúvidas que o resultado da manipulação dos símbolos está sempre correto, não questionando o que obtém dessa forma, que considera invariavelmente como a resposta certa.

A questão oito da entrevista pede a indicação do procedimento a adotar na resolução de duas equações de 2.º grau, não sendo necessário resolvê-las efetivamente. Diogo, à semelhança de outras situações, insiste em recorrer à escrita para responder à questão, parecendo ser-lhe difícil explicar de forma oral os seus processos de resolução. Depois de analisada a primeira equação, na qual o aluno identifica o caso notável e obtém uma equação quadrática, a entrevista foca-se na segunda equação:


Analise as seguintes equações:

a. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2 - 2x + 3 = \frac{21}{4}$

b. $\left(2\sin x+\frac{1}{2}\right)^2 - 2\sin x + 3 = \frac{21}{4}$

Indique como procederia se lhe pedissem para encontrar todas as soluções de cada uma das equações no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$4x^2 - 6x + \frac{3}{4} = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

$\text{sen}\,x = 0 \vee \text{sen} = 1$

Entrevistadora: Então, imagina que resolveste a primeira e chegaste a dois valores. Como é que resolvias a segunda?

Diogo: Pela mesma maneira.

Entrevistadora: Como é que farias pela mesma maneira com esse seno de *x* aí?

Diogo: Passava… Não passa?

Entrevistadora: Não sei. Porque é que tu dizes pela mesma maneira. Olhando para as duas expressões?

Diogo: O que me faz pensar que não possa ser da mesma maneira é só o seno.

Entrevistadora: Porque de resto?

Diogo: Porque de resto é a mesma coisa.

Entrevistadora: É a mesma coisa. Então, imagina que resolveste a primeira. Achas que podias aproveitar para a segunda? Ou tinhas que fazer tudo de novo?

Diogo: Era da mesma maneira.

Entrevistadora: Da mesma maneira?! Então quando chegasses aqui em vez do *x*…

Diogo: Punha o seno.

Entrevistadora: O seno de *x*?

Diogo: Exato o seno de *x*. Só que na primeira achamos dois valores.

Entrevistadora: Imagina que achámos.

Diogo: Dava *x* igual a qualquer coisa.

Entrevistadora: Zero e um, pronto. $x = 0$ e $x = 1$ eram as soluções da primeira.

Diogo: x igual a zero e x igual a um?

Entrevistadora: Sim, por exemplo.

Diogo: Aqui na *b)* em vez de pormos o seno, pomos o seno igual a zero e o seno igual a um. E depois vamos ver na tabela do círculo trigonométrico onde é que o seno é zero e onde é que o seno é um e verificávamos se esses valores eram ou estavam compreendidos entre…

Como mostra o excerto da entrevista anterior, o aluno mostra sentido de símbolo ao assinalar a semelhança entre as duas equações e ao propor uma resolução para a segunda equação, que não implica a repetição de uma manipulação simbólica que não era efetivamente necessária.

Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais. Um dos objetivos da questão oito do teste diagnóstico, já analisada anteriormente noutra perspetiva, era a identificação de equações equivalentes. Nesta questão eram dadas nas respostas possíveis alguns pares de expressões equivalentes, sendo indicada no enunciado a hipótese de haver mais do que uma resposta correta. Diogo coloca um círculo em duas respostas.

8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. A representa o número de alunos e P representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.*

$A = 9 = P$ $\quad$ $9P = A$ $\quad$ $\frac{P}{9} = A$

$9A = P$ $\quad$ $P + 9 = A$ $\quad$ $\frac{A}{9} = P$ $\quad$ $A^9 = P$

Após a análise da resposta $9A=P$, a entrevista centrou-se na equivalência das duas expressões escolhidas pelo aluno:

Entrevistadora: E aqui o $A^9=P$ Diogo?

Diogo: Então o A é o número de alunos e como é nove vezes …

Entrevistadora: E elevado a nove é nove vezes?

Diogo:

Entrevistadora: Identificaste esta como sendo idêntica a esta, por isso é que escolheste as duas?

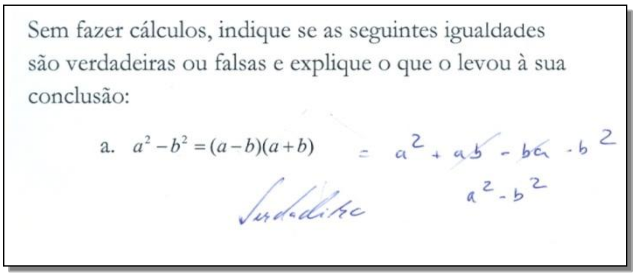
Diogo: Sim.

Entrevistadora: E não houve aqui mais nenhuma que consideraste equivalente a estas?

Diogo: Acho que não.

Uma simples manipulação da expressão $9A = P$ conduziria a uma identificação rápida da expressão que lhe é equivalente. O aluno, no entanto, assume as suas duas respostas como equivalentes, aparentando não considerar os vários resultados de uma manipulação simbólica como equivalentes entre si. Ao escolher a opção $A^9 = P$ por considerar que significa "nove vezes", mostra, mais uma vez, não ter interiorizado o conceito de potência.

A tarefa três proposta durante a entrevista clínica pede para identificar expressões equivalentes associadas a uma inspeção dos símbolos. Diogo mostra sempre necessidade de resolver uma questão "fazendo qualquer coisa", estabelecendo assim uma forte associação entre a Matemática e o "fazer contas". Isso limita a sua capacidade de analisar previamente a questão proposta e tirar conclusões apenas a partir dessa inspeção. Tal é evidenciado na resposta do aluno à alínea *a)* dessa tarefa:


Sem fazer cálculos, indique se as seguintes igualdades são verdadeiras ou falsas e explique o que o levou à sua conclusão:

a. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $= a^2 + ab - ba - b^2$

$a^2 - b^2$

Verdadeira

Entrevistadora: Esta aqui não é preciso fazer contas. É só dizeres se achas que é verdadeira ou falsa.

Diogo: Mas posso fazer, ou não é aconselhável?

Entrevistadora: Podes fazer! Se vires que só olhando não… Podes, podes.

Diogo: Esta estamos a dar… Esta é verdadeira. Espere aí. Parece-me que está correto.

Entrevistadora: A primeira está correta! Então põe um *V* à frente. Porque é que dizes que é verdadeira, Diogo?

Diogo: Porque este vezes este.

Entrevistadora: O *a* vezes o *a*,

Diogo: É *a* ao…

Entrevistadora: É *a* ao…

Diogo: Quadrado. E menos *b* vezes *b*, dá *b* ao quadrado e como está menos por mais é menos.

Entrevistadora: Menos. E os outros, esses aí, se fizesses essa multiplicação apareciam mais termos.

Diogo: Sim. Fazia *a* vezes. Posso fazer?

Entrevistadora: Podes, podes

Diogo: *a* vezes *a* dava *a* ao quadrado, mais *ab*, menos *ba* e menos *b* ao quadrado. Este simplifica com este.

Na alínea *c)* da mesma questão o aluno volta evidenciar a necessidade de "fazer cálculos" não conseguindo decidir com segurança se as expressões são equivalentes:

c. $(a+2b)^4 = 17a^4 + 8a^3b + b^3a + \sqrt{ab}$

Diogo: … E a *c*)?… Acho que só consigo concluir com cálculos.

Entrevistadora: Só consegues fazer com cálculos?

Diogo: Porque de cabeça…

Entrevistadora: E… E fazendo os cálculos, como é que farias?

Diogo: Faria *a* elevado a 4… Sim fazia *a* elevado a 4 mais $2a \times 2b$.

Entrevistadora: Estás a aplicar o quê, Diogo?

Diogo: O caso notável da…. Normalmente usa-se o caso notável quando o expoente é elevado a 2.

Entrevistadora: Quando o expoente é elevado a 2. Achas que podes usar quando o expoente é 4?

Diogo: Se calhar até não.

(…)

Diogo: Só que não sei se em todos os casos se usa o dois como expoente ou pode variar?

Entrevistadora: O caso notável que aprendeste foi com…

Diogo: O dois como expoente.

Entrevistadora: Lembras-te de onde é que vinha esse caso notável. Imagina que isso era *a* + *2b* ao quadrado.

Diogo: hum hum

Entrevistadora: Como é que ficava?

Diogo: Fazia *a* ao quadrado, mais *2* vezes *a* vezes o valor de *b*, ou *b*+ *b* ao quadrado.

Entrevistadora: E lembras-te como é que chegavas a esse caso notável, Diogo?

Diogo:

Entrevistadora: Porque é que era isso? Ou só sabes que era isso?

Diogo: Não. Via uma soma dentro do parêntesis e sabia que era elevado ao quadrado e…

Entrevistadora: E sabias que a resposta era? Porque por exemplo aqui tens…

Diogo: Uma soma ou subtração.

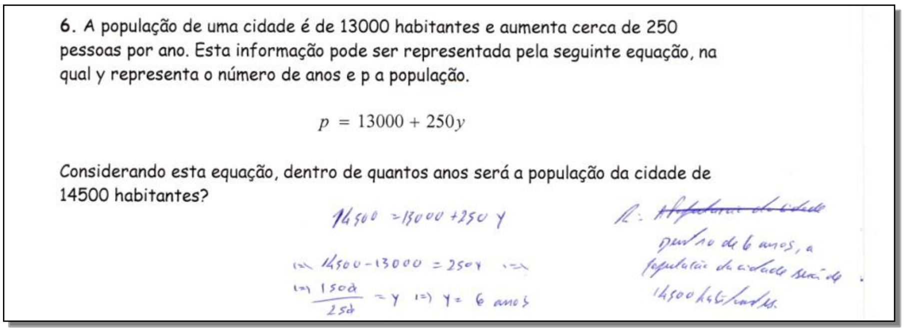
Entrevistadora: Pois, dava para os dois. Aqui por exemplo também tens um caso notável… Na alínea a) que vem daqui. A pessoa ou faz as contas ou sabe que é um caso notável. O outro… Costumas utilizar diretamente o caso notável?

Diogo: Sim.

Depois de mais algumas contas na calculadora, Diogo acaba por concluir que o desenvolvimento apresentado talvez não esteja correto por causa da raiz quadrada. Na sequência da questão tres fica ainda claro que o aluno decorou o caso notável do quadrado do binómio mas não compreende a sua origem, o que dificulta a sua aplicação em situações novas como é o caso.

A identificação de expressões equivalentes é um aspeto do sentido de símbolo pouco desenvolvido em Diogo sendo dificultada por alguma insegurança da sua parte em relação a conceitos e procedimentos básicos.

Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar. O aluno revela compreender o papel do símbolo no caso da questão seis do teste diagnóstico:



6. A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população.

$$p = 13000 + 250y$$

Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes?

$14500 = 13000 + 250y$

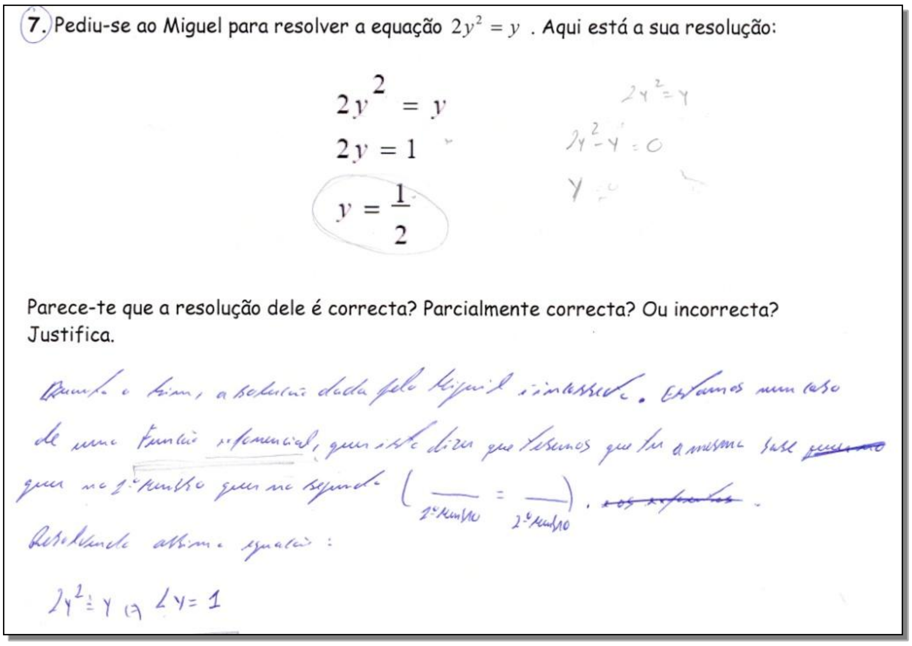
$\Leftrightarrow 14500 - 13000 = 250y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1500}{250} = y \Leftrightarrow y = 6$ anos

R: ~~A população da cidade~~ dentro de 6 anos, a população da cidade será de 14500 habitantes.

Diogo obtém um resultado e dá uma resposta que atribui a *y* o papel certo e um valor adequado ao contexto do problema.

A questão sete do teste diagnóstico pressupõe a compreensão do papel de *y*, nomeadamente como a incógnita de uma equação de 2.º grau que é resolvida de uma forma aparentemente correta, mas que não tem em conta uma das soluções. No teste, Diogo responde da seguinte forma:



7. Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução:

$$2y^2 = y$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

$2y^2 = y$

$2y^2 - y = 0$

$y = 0$

Parece-te que a resolução dele é correcta? Parcialmente correcta? Ou incorrecta? Justifica.

Quanto a mim, a solução dada pelo Miguel é incorrecta. Estamos num caso de uma função exponencial, quer isto dizer que teremos que ter a mesma base ~~quer~~ quer no 1.º membro quer no segundo ($\frac{\quad}{1.º\ membro} = \frac{\quad}{2.º\ membro}$). ~~os expoentes~~.

Resolvendo assim a equação:

$2y^2 = y \Leftrightarrow 2y = 1$

Na entrevista que se realizou poucos dias depois com o objetivo de melhor compreender as respostas do aluno, Diogo que tinha iniciado uma resolução correta (do lado direito da questão) insiste em considerar que a equação é exponencial, tema que estava a tratar na disciplina na altura em que realiza o teste e decorre a entrevista:

Entrevistadora: Tu dizes que o Miguel da questão sete resolveu isto mal. Não é? Estamos no caso de uma função exponencial. Porque é que esta função é exponencial Diogo?

Diogo: Porque as bases do primeiro membro têm que ser igual à do segundo membro. Portanto esta deste lado tem que ser igual a este e depois os expoentes é que variam.

Entrevistadora: Ah. Portanto querias pôr aqui… Não estou a perceber… Temos que ter a mesma…

Diogo: A mesma base.

Entrevistadora: Ah. Teríamos que pôr *y* de um lado e do outro. E foi isso que fizeste aqui ao escrever $2y^2=y$?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: E depois como é que concluis aqui que o *y* é um?

Diogo: … Eh. Espere aí…Eu não sei o que é que é isto.

Apesar de a entrevistadora ter, após o excerto da entrevista transcrito acima, insistido na presença de y^2 e na possibilidade de haver mais do que uma solução, e tentando retomar o início da resolução correta que Diogo tinha escrito, este não abandona o papel que atribuiu a y, como base de uma exponencial, apesar de não conseguir explicar com clareza o seu procedimento.

No caso de Diogo, a compreensão do papel do símbolo parece depender muito da questão e da forma como ela é feita. Quando não dá sentido aos símbolos que utiliza, torna-se difícil para o aluno compreender e interpretar os diferentes papéis que o símbolo pode desempenhar.

A tabela 5.2 sistematiza o sentido de símbolo de Diogo nos diversos aspetos mais relacionados com as equações.

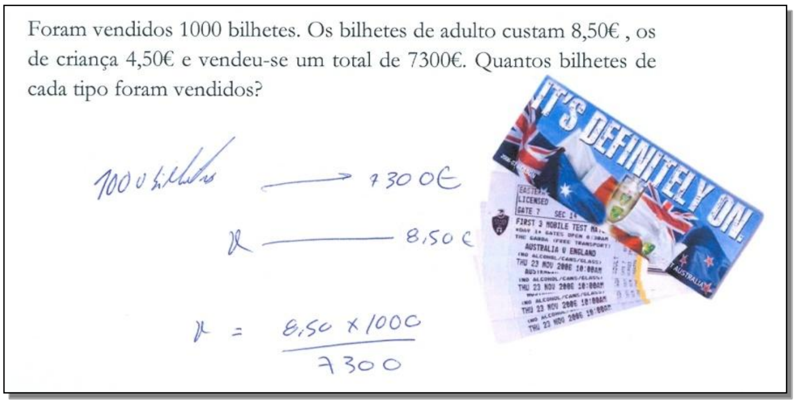
Tabela 5.2 - *Resumo do sentido de símbolo de Diogo em relação às equações*

Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	Este aspeto do sentido de símbolo está muito condicionado pela sua tendência para associar a Matemática a "fazer cálculos". A rapidez com que recorre à calculadora perante qualquer questão, funciona como um obstáculo a uma inspeção dos símbolos que lhe permita sentir o problema e, evitando cálculos desnecessários, chegar a conclusões consistentes. A solução de uma equação não tem sentido como o valor que torna verdadeira a condição inicial. Não tem para ele sentido atribuir valores às letras, numa equação literal, o que compromete uma inspeção dos símbolos em toda a sua amplitude, limitando as conclusões que consegue tirar.
Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.	Revela destreza, apesar de por vezes se deparar com dúvidas em procedimentos essenciais relativamente simples que podem comprometer o resultado final.
Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.	Em algumas situações, mantém uma visão global do que está a trabalhar. No entanto a manipulação simbólica está muito presente no seu trabalho e, por vezes, assume um papel preponderante.
Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais.	Este aspeto do sentido de símbolo acaba por estar, mais uma vez, condicionado por alguma falta de segurança em conceitos e procedimentos básicos. Não parece identificar os vários resultados de uma manipulação como equivalentes entre si.
Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.	Quando o símbolo surge definido na questão, o aluno interpreta-o corretamente e compreende o seu papel. Em situações que necessitam que o aluno defina o papel do símbolo, não o consegue fazer com clareza.

Problemas

As questões inseridas na categoria de problemas são as que Diogo tem mais dificuldades em desenvolver.

A utilidade de recorrer ao símbolo e de o interpretar no contexto do problema. Na questão sete, proposta no decorrer da entrevista clínica o aluno reponde da seguinte forma:



Diogo: Isto deve ser uma regra de três simples.

Entrevistadora: Achas?

Diogo: Acho que sim.

Entrevistadora: E que condições é que…? Como é que.?

Diogo: Pode ser… quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos? 1000 bilhetes.

Entrevistadora: Sim?

Diogo: ...

Entrevistadora: 1000 bilhetes corresponde a 7300?

Diogo: Eu estou a arranjar hipóteses…

Entrevistadora: Sim. E o que é que é o teu *x*?

Diogo: É o 8,50 vezes 1000 a dividir por 7300.

Entrevistadora: Que corresponderia a quê? Esse número?

Diogo: Ao valor de… Supostamente… Não sei, depende do resultado que me der… Dos, da quantidade de bilhetes que custam.

Entrevistadora: 8,5? Os de adulto?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: Quanto é que te deu o *x*?

Diogo: 1,17.

Entrevistadora: 1,17.

Diogo: Não deve estar correto. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?

Entrevistadora: Porque é que pensaste na regra de três simples?

Diogo: Não sei professora.

Entrevistadora: E se aí tivesse dado assim um número razoável… De 500 ou…

Diogo: Depois ia achar para o…

Entrevistadora: Fazias o mesmo para?

Diogo: O de 4,5.

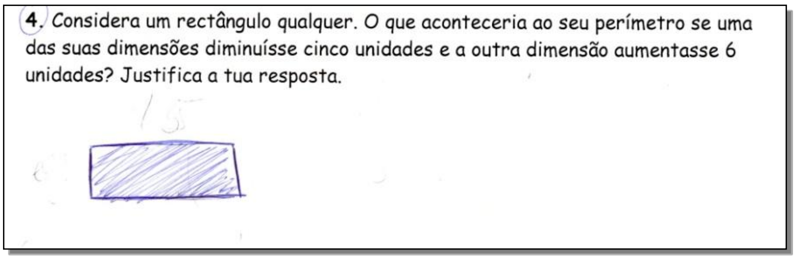
Entrevistadora: Para o 4,5. E tinhas maneira de verificar a tua solução?

Diogo: Se tinha maneira?

Entrevistadora: Sim. Imagina que arranjavas um número para o x. Aí na máquina em vez do 1,17 dava-te um número que te parecia que podia ser. Fazias o mesmo para os outros bilhetes, era? E como é que no fim… Imagina que tinhas dois valores, esses dois valores, tinhas alguma maneira de verificar se estariam bem? Comprovar que não te tinhas enganado. Que esses valores estariam certos?... Não? Ok.

Diogo recorre ao símbolo mas não explica com clareza o que representa a sua incógnita x limitando-se a tentar dar-lhe um valor. Parece resolver a questão um pouco ao contrário, procurando chegar a valores com a calculadora e, depois, tentando atribuir-lhes significado no caso de eles se enquadrarem no contexto do problema. Apesar de parecer considerar útil recorrer ao símbolo x, não o interpreta pois obtém um valor sem sentido no contexto do problema. Das respostas do aluno na entrevista, depreendo que se o valor de x, apesar de obtido de forma incorreta, fosse um inteiro positivo, iria considerá-lo correto, atribuía-lhe significado e seguiria o mesmo processo para obter o outro valor pedido. Assim. apesar de obter um valor descontextualizado, o aluno não utiliza essa informação para rever a sua estratégia de resolução e não encontra o erro através dessa análise, revelando nesta situação pouco sentido de símbolo.

Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. A questão quatro do teste diagnóstico implica um recurso ao símbolo para estabelecer a correspondência entre o perímetro de um retângulo original e o perímetro de outro retângulo cujas dimensões são diferentes mas relacionadas com as do primeiro. O aluno apenas desenha um retângulo e não responde por escrito à questão:


4. Considera um rectângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.

No decorrer da entrevista, o aluno é incentivado a pensar um pouco na questão. Primeiro mostra não saber o que é a dimensão de um retângulo e, depois de esclarecido, apesar de a entrevistadora insistir que experimentasse para um caso concreto, o aluno não consegue resolver a questão.

Diogo: Então se diminuísse esta parte aqui 5 e se aumentasse esta aqui 6 a forma geométrica provavelmente…

Entrevistadora: Ah ok! Mas dimensão é a largura e o comprimento. Portanto mudavas tudo. Ao diminuíres de cinco diminuías de cinco os dois lados, continuava a ser um retângulo. A dimensão não é só um lado…

Diogo: Ah.

(…)

Entrevistadora: Não está a ver como é que?

Diogo: Não.

Entrevistadora: Nem experimentando para um retângulo qualquer? Imagina que dávamos aqui (o valor) 15 e aqui 9. O que é que fazias a seguir?

Diogo: Não sei…

Esta incapacidade do aluno responder parece prender-se também com o facto de, para Diogo, não ter sentido atribuir letras ou mesmo valores que não constem do enunciado da questão, às dimensões do retângulo. Essa atribuição permitir-lhe-ia avançar na resposta ao problema e, eventualmente, criar uma expressão simbólica que condizisse a uma resposta com sentido no contexto do problema.

Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar. A tarefa 9 proposta no decorrer da entrevista clínica tinha um grau de dificuldade elevado, sendo o objetivo principal a utilização dos símbolos para testar conjeturas e chegar a uma expressão geral. Diogo tem dificuldade em extrair a informação a partir do enunciado, tendo que ser ajudado:

São acendidas duas velas diferentes. Elas consomem-se com taxas diferentes e uma é 3 cm mais comprida que a outra.

A vela mais comprida foi acesa às 17:30 e a mais curta às 19:00.
Às 21:30 elas tinham ambas a mesma altura.
A maior consumiu-se completamente às 23:30 e a mais curta às 23:00.
Qual o comprimento original de cada vela?

Será possível escrever uma expressão geral para o comprimento original das velas com base na diferença de altura e na taxa de consumo de cada vela?

Entrevistadora: (…) O que é que podemos dizer em relação às duas velas no inicio?

Diogo: No início é que uma era maior que a outra.

Entrevistadora: E quanto maior era? Há uma diferença entre elas.

Diogo: Sim, 3 cm.

Entrevistadora: E depois?

Diogo: A mais comprida foi… Foi acesa.

Entrevistadora: Foi acesa.

Diogo: Uma hora e meia antes da mais curta.

Entrevistadora: Uma hora e meia antes da mais curta, OK. E depois o que é que acontece? Acende-se uma e uma hora e meia depois acende-se a outra.

Diogo: E passado duas horas e meia da… Após a mais curta ter sido acesa, ambas igualam-se.

Entrevistadora: Ambas igualam-se. Então elas consomem-se com a mesma velocidade?

Diogo: Com a mesma velocidade?

Entrevistadora: Com a mesma taxa?… Cada uma perde 1cm por hora ou por minuto… Estou a perguntar, sim ou não. Tu consegues…

Diogo: Não sei bem como hei de responder a isso. Eu sei que elas se igualam depois.

Entrevistadora: Se encontram…

Diogo: Às nove e meia.

Entrevistadora: E depois deixam de se igualar ou não?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: Elas não acabam na mesma altura pois não?

Diogo: Não. Então não vão com a mesma velocidade.

Entrevistadora: A mesma velocidade a partir do momento em que são iguais

Diogo: Sim. É que….

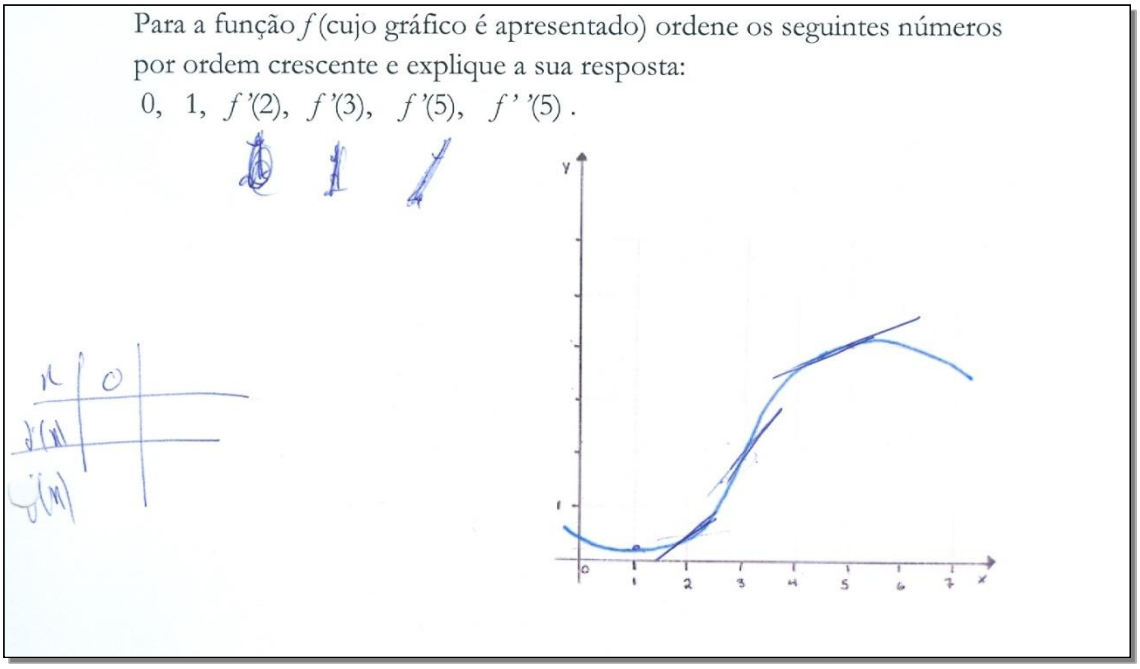
Diogo não aponta mais nenhuma possibilidade para a resolução do problema. Considera-o difícil logo de início e, apesar da insistência da entrevistadora, parece desistir. A única conjetura a que chega relaciona-se com a taxa de consumo de ambas as velas, nunca chegando a esboçar uma expressão simbólica e muito menos uma generalização da situação. A tabela 5.3 resume o seu sentido de símbolo em relação aos problemas.

Tabela 5.3 - *Resumo do sentido de símbolo de Diogo em relação aos problemas*

Decidir se é útil recorrer ao símbolo e interpretá-lo no contexto do problema.	Recorre ao símbolo mas quando este não tem sentido no contexto do problema, não utiliza essa informação para reavaliar os seus procedimentos.
Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.	Quando os símbolos não são explicitados no enunciado da questão, revela dificuldade em recorrer a eles e em escrever uma expressão simbólica adequada à situação.
Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar.	Não utiliza o poder dos símbolos para conjeturar nem para generalizar.

Funções

Utilizar o símbolo para estabelecer relações. A tarefa onze proposta no decorrer da entrevista implica o estabelecimento de relações de grandezas entre símbolos, nomeadamente os números zero e um, e a derivada em diversos pontos, de uma função, cujo gráfico é dado.



O aluno começa por fazer uma leitura incorreta dos símbolos, confundindo o valor da derivada com o valor da função num ponto e atribuindo-lhes valores aproximados que lê do gráfico:

Entrevistadora: Achas que a derivada de 2 vale 0,5 não é?

Diogo: Sim, é isto.

Entrevistadora: E f ´ (3) vale 2.

Diogo: Aproximadamente. E f ´(5) …1 …2 …3 …4, vale 4. (Diogo lê os valores da função no eixo das ordenadas).

Entrevistadora: f ´(5) vale 4!

Diogo: Sim.

Entrevistadora: e f ´´ (5)? f ´´ de 5 é a segunda deriva… E se em vez de f´(5) te pedisse f de 5 Diogo? O que é que…?

Diogo: f de 5?

Entrevistadora: Sim, quanto é que seria o f de 5?

Diogo: Não sei se isto está correto ou incorreto!

Depois de algumas questões, que tinham como objetivo fazer o aluno compreender a sua confusão e clarificar o sentido de derivada como o declive da reta tangente num ponto, Diogo começa a tentar tirar conclusões. Tem no entanto dificuldade em traçar as retas tangentes e o facto de não conseguir atribuir valores é um obstáculo à ordenação dos valores dados:

Diogo: Esta é a maior acho eu. *(Refere-se a f'(3))*

Entrevistadora: A do 3 é maior?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: E a seguir?

Diogo: Esta.

Entrevistadora: A do 5? E a seguir? A do 2. E o 0 e o 1? Como é que os punhas aí? São todas…. O zero é mais pequeno, é maior que elas?

(…)

Entrevistadora: Sim, tinhas de pôr estes números por ordem não é?

Diogo: Sim.

Entrevistadora: Achas que o zero é mais pequeno que elas todas, ou é maior que elas, ou está no meio delas? Em termos de…

Diogo: Só que eu não sei o valor destes declives.

Entrevistadora: Pois não, mas podes comparar com o zero? Não sabemos os valores, isso é verdade. Isso torna difícil comparar com o zero e com o 1?

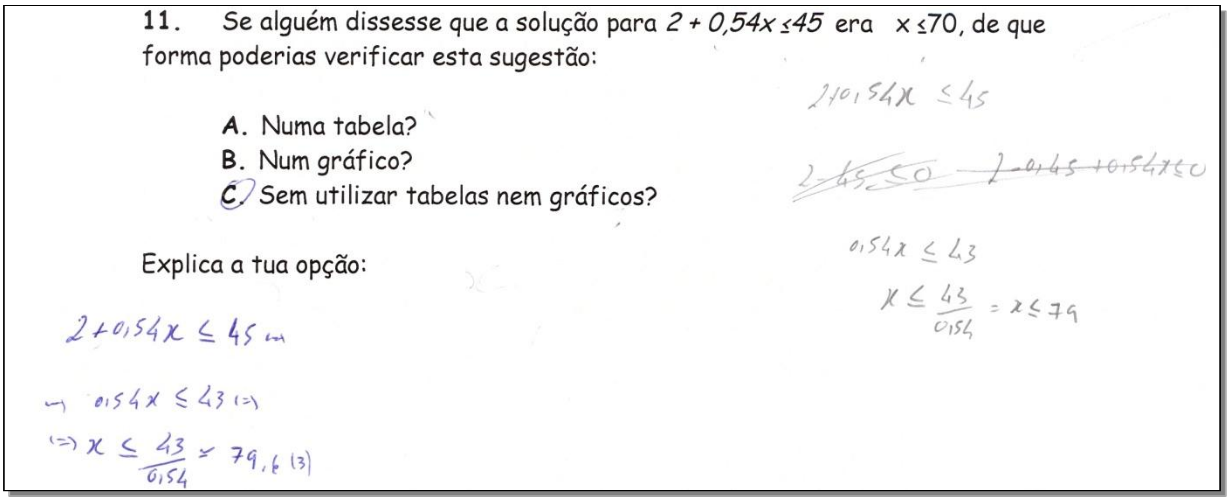
Diogo: Sim, mas...o 3 *(refere-se a f'(3))* pelo menos, deve ser maior que o 0 e que o 1

Entrevistadora: O f'(3) para ti é a maior de todas?

Diogo: Se calhar até nem é, mas acho que sim.

Diogo acaba por concluir corretamente em relação à derivada no ponto $x=3$, mas com pouca segurança e não consegue ordenar todos os símbolos como era proposto na tarefa. Apesar de ser um conceito trabalhado intensamente no decorrer do ano letivo que Diogo frequenta, este não parece dar sentido ao conceito gráfico de derivada num ponto, o que claramente impede o estabelecimento das relações que lhe eram pedidas.

Escolher a representação simbólica adequada. A escolha da representação simbólica adequada pressupõe que o aluno as conhece, e sabe trabalhar com cada uma delas com um certo grau de eficiência. Na questão 11 do teste diagnóstico Diogo opta pela resolução analítica da questão em detrimento da utilização do gráfico ou da tabela:



11. Se alguém dissesse que a solução para $2 + 0{,}54x \leq 45$ era $x \leq 70$, de que forma poderias verificar esta sugestão:

A. Numa tabela?
B. Num gráfico?
C. Sem utilizar tabelas nem gráficos?

Explica a tua opção:

$2+0{,}54x \leq 45$ m

$\Leftrightarrow 0{,}54x \leq 43 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{43}{0{,}54} \simeq 79{,}6$ (3)

$2+0{,}54x \leq 45$

$\cancel{2-45 \leq 0}$ $\cancel{2-0{,}45+0{,}54x \leq 0}$

$0{,}54x \leq 43$

$x \leq \frac{43}{0{,}54} = x \leq 79$

No decorrer da entrevista, Diogo mostra que não compreende como utilizar a tabela ou o gráfico, nesta situação, justificando que não tem valores de *x*:

Entrevistadora: Porque é que tu utilizaste a resolução analítica? (…) Porque é que optaste pelas contas e não pela tabela ou pelo gráfico?

Diogo: Por… Porque se fizer as contas acho que… Acho que comprovou-se que era o valor indicado, mas se fosse …

Entrevistadora: Como farias como uma tabela ou com um gráfico?

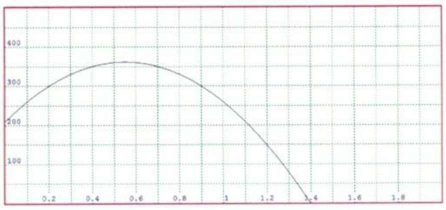
Diogo: Tinha que saber os valores do x.

Mais uma vez, parece que, para Diogo, tem pouco sentido atribuir a *x* diversos valores, que não são explicitados na questão. Fica assim limitado à manipulação simbólica, o que estreita o seu leque de opções e, consequentemente, a amplitude do seu sentido de símbolo.

A tarefa dez da entrevista tem como objetivo a escolha da expressão que melhor permite dar resposta a uma questão de altura máxima na trajetória de uma bola.

A altura atingida por uma bola de ténis depende do tempo que passou desde que foi lançada. Note que o gráfico é parabólico, mas pode não ser o mesmo que o da trajectória da bola. A sua altura (medida em metros) como função do tempo (medido em segundos) desde o instante em que foi lançada é:

$$210+550t-500t^2$$



As expressões (a)-(d) apresentadas em baixo são equivalentes. Qual delas é mais útil para encontrar a altura máxima da bola e porquê?

(a) $210+550t-500t^2$ (b) $-500\left(t-\frac{14}{10}\right)\left(t+\frac{3}{10}\right)$

(c) $\frac{1}{10}(700-500t)(10t+3)$ (d) $-500\left(t-\frac{11}{20}\right)^2+\frac{1445}{4}$

A referência a encontrar um máximo, leva Diogo a relacionar imediatamente a questão com a determinação da derivada da função e, consequentemente, a optar pela primeira expressão à qual pode aplicar mais facilmente as regras de derivação que trabalhou recentemente em contexto de sala de aula:

Entrevistadora: A pergunta é só em qual das formas é que te daria mais jeito para encontrares o máximo. Admitindo que não usavas a calculadora não é? Qual é a que te parece que dava mais jeito?

Diogo: Qual delas é a mais útil para encontrar…

Entrevistadora: Para encontrar a altura máxima. Como é que tu determinarias a altura máxima?

Diogo: A derivada.

Entrevistadora: Derivavas e então qual delas é que seria mais fácil para derivares?

Diogo: Ah, esta?

Entrevistadora: Sim. (a), (b), (c) ou (d)?

Diogo: (a)

Entrevistadora: A (a) seria mais fácil. Então derivavas e depois o que é que fazias?

Diogo: Quer que diga o resultado que resultava da derivada?

Entrevistadora: Não. Derivavas e depois o que é que fazias à derivada? Como é que encontravas a altura máxima?

Diogo: Igualava o resultado da derivada a zero e achávamos os zeros e fazíamos a tabela do sinal.

Entrevistadora: Para ver se eram…

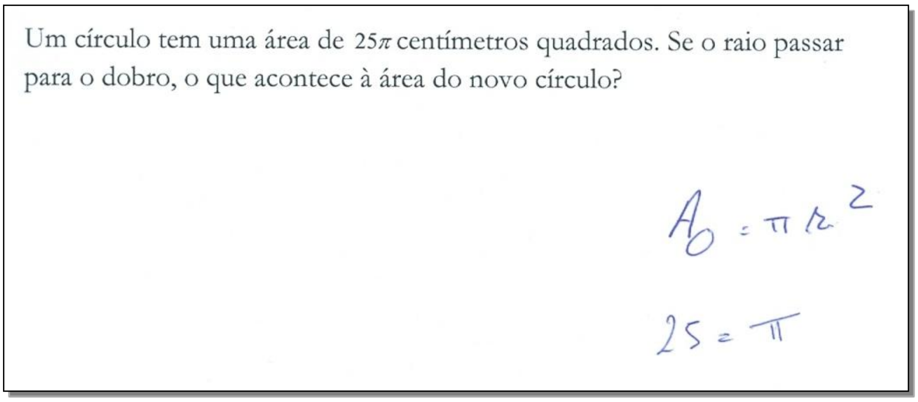
Diogo: E depois verificava se… neste caso se pede o máximo, tem de haver um máximo. Em caso disso, se houvesse mínimos, ficava nos mínimos, mas como não pede… víamos onde é que o *x* era o máximo.

Entrevistadora: Onde é que o *x* era máximo. E depois como é que calculavas a altura máxima? Já era isso?

Diogo: Altura máxima? Ah. Substituíamos o valor de *x* na função inicial.

Efetivamente a expressão (d) seria a que diretamente conduziria à determinação da altura máxima atingida pela bola, mas Diogo revela ter presente o conjunto de procedimentos adequados para a determinação de extremos relativos, recorrendo à derivada, que também levariam ao mesmo resultado. As respostas de Diogo mostram também que para ele é claro que há um máximo, não porque se trata do lançamento de uma bola, nem porque o gráfico assim o mostra, mas sim porque a questão pede a determinação de um máximo. Está assim certo que ao fazer o quadro de sinais, que parece considerar indispensável, este terá um máximo, mas também poderá ter mínimos. Há assim alguma falta de atribuição de sentido aos procedimentos no contexto da questão.

Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos. A questão catorze da entrevista pretende que o aluno analise o efeito da variação do raio na área de um círculo. O facto de ser dada a área do círculo inicial não tem influência nas conclusões que podem ser tiradas, mas requer que o aluno inspecione os símbolos e, de alguma forma, veja através deles:


Um círculo tem uma área de 25π centímetros quadrados. Se o raio passar para o dobro, o que acontece à área do novo círculo?

$A_0 = \pi r^2$

$25 = \pi$

Diogo: Se o raio passar para o dobro… Então duplica também.

Entrevistadora: Se o raio passa para o dobro a área duplica?

Diogo: Sim… O círculo tem uma área de 25π.

Entrevistadora: Sim, tem uma área de 25π.

Diogo: Se o raio passar para o dobro….

Entrevistadora: A área fica quanto?

Diogo: Quer que lhe diga o valor?

Entrevistadora: Podes dizer o valor ou dizer o que é que acontece.

Diogo: A área πr ao quadrado… A área do círculo… Tem 25… πr … Se o raio passar para o dobro…

Entrevistadora: Para o dobro… Duas vezes, não é? Fica quanto essa área?

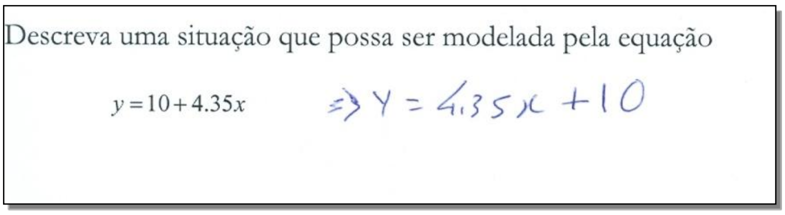
Diogo: Isto, se tiver… Se passo para o dobro, fica *2r* ao quadrado ou fica r elevado à quarta?

Entrevistadora: Fica *2r* ao quadrado… Porque o que passa para o dobro não é o expoente, é o *r*.

Diogo: Sim, diria que a área duplicava também.

Apesar de escrever corretamente a fórmula da área, Diogo não conclui que esta quadruplica com a duplicação do raio. O aluno tem dúvidas que não consegue ultrapassar, mais uma vez com as potências, não determina o valor inicial de *r*, nem lhe atribui um valor o que o poderia levar à conclusão correta, mesmo que apenas para um caso particular, e não consegue analisar o efeito da variação do símbolo.

Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes. Quando é pedido a Diogo que imagine uma situação que possa ser descrita por um dado modelo, como é o caso da tarefa treze da entrevista, apesar de dar uma indicação sobre a linearidade do modelo, o aluno não desenvolve essa ideia e acaba por não descrever uma situação possível:


Descreva uma situação que possa ser modelada pela equação

$y = 10 + 4.35x$ $\Rightarrow Y = 4{,}35x + 10$

Entrevistadora: Esta aqui é para usares a imaginação. Imagina que te dão uma expressão, tens de inventar uma situação que pudesse ser descrita por essa expressão. Modelada. Uma situação qualquer.

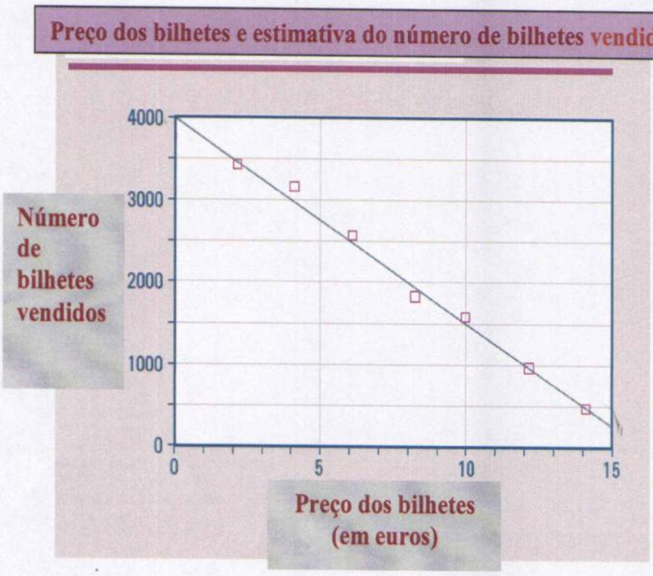
Diogo:

Entrevistadora: Uma qualquer cuja resposta fosse essa… Uma situação da vida real ou imaginária?

Diogo: Até… Nem estava pensar nisso. Estava a pensar que isto era o declive.

Ao ser questionado, na pergunta treze do teste diagnóstico, sobre um modelo que lhe é apresentado sobre a forma gráfica e analítica, Diogo não dá uma resposta escrita, mas na entrevista tenta responder:

13. O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espectáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).



Despesas:	
Banda	6000 €
Sala de espectáculos	1500 €

13.1 O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação:

Número de bilhetes vendidos = 4000 - 250 x (Preço do bilhete)

a) Como terá, o organizador, chegado a esta equação?

4000 → Número de bilhetes vendidos

b) Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes vendidos? Explica a tua resposta.

Sim

Entrevistadora: Como é que lês isto *(o gráfico)*? Quanto maior o preço dos bilhetes o que é acontece ao número de bilhetes vendidos?

Diogo: Preço dos bilhetes… Ehhh. Quanto mais barato for o número de bilhetes, mais será o número de bilhetes vendidos, maior será o número…

Entrevistadora: E isso tem sentido? Assim na vida real? Ou não?

Diogo: Sim, sim.

Entrevistadora: Nesse aspeto poderemos dizer que este é um bom modelo, pelo menos poderá estar de acordo com a realidade. E com este gráfico que ele tinha (…) como é que achas que ele chegou a esta expressão Diogo.

Diogo: Pois os 4000 sabia que era o número total de bilhetes vendidos.

Entrevistadora: Total?

Diogo: Era o número de bilhetes até à altura vendidos. Agora os 250 é que… Nem pouco mais ou menos chegava lá.

(…)

Entrevistadora: E aqui na b) será um bom modelo da relação? Disseste que sim. Mas podias ter dito que não ou…? (…)

Diogo: Se eu soubesse o que eram os 250 se calhar já poderia responder.

Diogo consegue dar algum sentido à relação preço/número de bilhetes vendidos, mas não identifica a expressão dada com a equação de uma reta e não compreende os diferentes papéis que os símbolos representam nem no gráfico nem na expressão. O próprio aluno reconhece, no decorrer da entrevista, que tal facto condiciona a sua análise sobre as potencialidades do modelo.

Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões. Na sequência da questão 13 do teste é pedida uma opinião que implica uma análise dos símbolos, nomeadamente:

d) Parece-te que a organização deste espectáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espectáculo?

Entrevistadora: Imagina que ele decide vender a 5€ o bilhete. Pronto 5€ o bilhete, tu consegues tirar do gráfico… Ou do gráfico ou daqui quantos bilhetes ele vende?

Diogo lê do gráfico o valor de 2750 e a entrevistadora recentra a conversa na determinação do lucro para uma determinada situação para que o aluno possa decidir se a organização do espetáculo é ou não rentável do ponto de vista do organizador:

Entrevistadora: Se tivesses essa informação já poderias ter respondido aqui à alínea d) pelo menos, se ele tinha lucro ou não.

(…)

Diogo: Qual seria o lucro? Eu posso dizer uma asneira de todo o tamanho mas não sei… Multiplicava.

Entrevistadora: Multiplicavas o número de bilhetes?

Diogo: Pelos 2700…

Entrevistadora: Portanto faríamos 2750 vezes…

Diogo: Vezes 5.

Entrevistadora: Vezes 5. Ok. Mas depois havia aqui uma informaçãozinha para vermos se ele tinha lucro. O que é que tínhamos que ter em conta nisto tudo?

Diogo: Tínhamos que ver as despesas.

(…)

Entrevistadora: Temos as despesas. O que é que fazíamos com as despesas?

Diogo: Somava-se a despesa da banda mais a sala de espetáculos que dava 7500.

Entrevistadora: 7500…

Diogo: E depois subtraia…

Entrevistadora: Então fazemos isto menos…

Diogo: Menos 7500

Entrevistadora: Portanto 13750 menos 7500 e então… Dava-nos isto (6250). E isto permitia-nos concluir que era rentável ou não era rentável o espetáculo. (…)

Diogo: Acho que não.

Entrevistadora: Não?

Diogo: Isto era o valor de… Do lucro

Entrevistadora: Ao preço do bilhete vezes o número de bilhetes vendidos tirámos 7500 não é? E ficámos com 6250. Isto…Valia a pena organizar isto ou não valia a pena? Se vendesses a 5€ o bilhete e se conseguisses vender…

Diogo: Acho que sim.

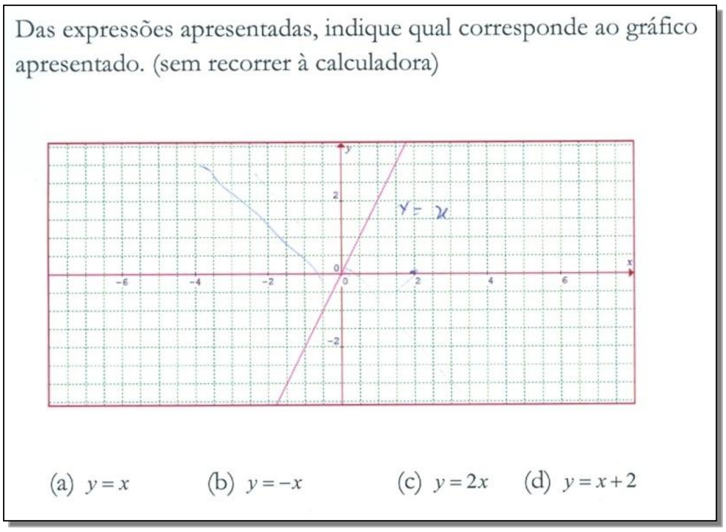
Entrevistadora: Quanto é que ficavas…quanto é que "metias ao bolso" como organizador? Quanto é que era no fim de contas o preço do teu trabalho?

Diogo: Então acho que era este valor menos os 4000.

Entrevistadora: 6250 menos os 4000?

Diogo segue um caminho sempre muito orientado e chega a um resultado que lhe permitia tirar algumas conclusões. No entanto em posse do valor do lucro, resolve subtrair-lhe um valor que tinha identificado no início da questão como o número de bilhetes vendidos, mostrando que os símbolos que está a utilizar têm para si pouco sentido, o que condiciona a sua tomada de decisões.

Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático. A tarefa doze da entrevista apresenta o gráfico de uma reta e pede que o aluno identifique a sua expressão entre quatro hipóteses:



Entrevistadora: Achas que a reta dada é a reta $y= x$ porquê?

Diogo: Porque como passa aqui…(*Diogo identifica o ponto (0,0)*) se passasse o 2 (*Diogo aponta para o ponto (2,0)*) dizia que era $y = 2x$.

(…)

Entrevistadora: E se fosse $x +2$? Qual é que seria a diferença?

Diogo: Não sei, por isso é que agora quando tentei explicar esta voltei outra vez à…

Entrevistadora: Aquela.

Diogo: Porque não sei se é esta ou …

Entrevistadora: Se era a) ou se era d)?

Diogo: Se era a c) ou a d), quando a reta passava aqui no ponto…

Entrevistadora: Ah!

Diogo: No ponto 2.

Entrevistadora: Não te lembras?

Diogo: É esta.

Entrevistadora: Achas que é a c)? Como é que estás a pensar?

Diogo: Se aqui, se eu digo que $y = x$.

Entrevistadora: Hum hum.

Diogo: E está no ponto zero, então é porque o valor de x está aqui no valor zero. Se passa para 2, o valor de x é 2, por isso diria que era $y = 2x$. $2x$ tem valor…

Entrevistadora: Onde é que o x tem valor 2?

Diogo: Se passasse aqui na reta.

Entrevistadora: Então qual é a nossa reta?

Diogo: Quando?

Entrevistadora: Esta reta que está traçada, a que…?

Diogo: …$y = x$.

Entrevistadora: Ah. Se passasse aqui é que dirias que era $y = 2x$. Ok

No decorrer da entrevista, Diogo faz confusão entre 2 como ordenada na origem (que situa no eixo horizontal) da reta $y=x+2$ e o declive 2 da reta $y=2x$ e não recorre a nenhuma estratégia que lhe permita encontrar a representação correta. Termina como começou confirmando que se a reta passasse no ponto (2,0) então a equação seria $y=2x$. O sentido de símbolo de Diogo no seu trabalho com funções, está sistematizado na tabela 5.4.

Tabela 5.4 - *Resumo do sentido de símbolo de Diogo em relação às funções*

Utilizar o símbolo para estabelecer relações.	Não lê corretamente alguns símbolos e não dá sentido a outros, o que dificulta o estabelecimento de relações entre símbolos.
Escolher a representação simbólica adequada.	Tem alguma dificuldade em trabalhar com algumas representações o que limita a sua escolha. Condiciona a escolha da representação a procedimentos trabalhados recentemente que domina, apesar de lhes dar pouco sentido no contexto da questão.

Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.	Não analisa corretamente o efeito da variação dos símbolos. Tem dúvidas em procedimentos básicos, o que dificulta a sua análise.
Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.	Não atribui sentido a uma modelação dada, nem cria situações que se possam inserir num dado modelo. A sua perspetiva sobre os diferentes papéis que o símbolo pode desempenhar são assim pouco claros.
Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.	O pouco sentido que atribui, por vezes, aos símbolos, condiciona uma decisão sustentada e limita o poder dos símbolos.
Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.	Não identifica corretamente a representação gráfica de uma reta com a sua equação.

Tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas. Não se inserindo em nenhuma das quatro categorias nas quais incide este tarefa, tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas, é um aspeto é transversal a todos eles e constitui uma componente fundamental do sentido de símbolo. Quando um aluno consegue fundamentar bem as suas conclusões de forma clara e organizada e identifica com o seu trabalho, e o seu pensamento, ideias inicialmente incorretas que ele próprio consegue corrigir, terá um sentido de símbolo desenvolvido e bem alicerçado em conceitos e conteúdos. Diogo, ao longo do seu trabalho oral e escrito, revela não ter ainda atingido um sentido de símbolo suficientemente desenvolvido para tirar conclusões de consistentes ou para autocorrigir os resultados da sua atividade.

5.1.2. O sentido de símbolo de Diogo e a sua aprendizagem da Álgebra

O sentido de símbolo de Diogo reflete-se na forma como aborda questões que incidem especificamente sobre os conteúdos trabalhados no âmbito do programa de Matemática A do 12.º ano.

Num pequeno exercício de avaliação sumativa semanal, que incide sobre a função exponencial e no qual os valores são dados no enunciado, Diogo não tem dificuldade em introduzir estes valores corretamente na expressão e obter as respostas corretas.

1. A fórmula $T = 2^{21-0,2R}$, com T expresso em horas e R em decibéis, é usada em alguns países para calcular o número máximo de horas de trabalho diário de um trabalhador, em função do nível de ruído produzido no local de trabalho.

1.1. Qual deve ser o número máximo de horas de trabalho diário numa fábrica em que o nível de ruído produzido é 115 decibéis?

$T \to$ horas
$R \to$ decibéis

$T = 2^{21-0,2R}$

$T(115) \Leftrightarrow T = \left(2^{21-0,2\times(115)}\right) = 0,25 = \frac{1}{4}$

Resposta: [illegible]

1.2. O horário diário de trabalho de um trabalhador é de oito horas. Qual é o nível máximo de ruído que o trabalhador tem que tolerar?

$T = 8 \Leftrightarrow 2^{21-0,2R} = 8 \Leftrightarrow 2^{21-0,2R} = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21-0,2R = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,2R = 3-21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0,2R = -18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = \frac{18}{0,2} = 90$

R: o nível máximo de ruído que o trabalhador tem de tolerar é 90 Decibéis

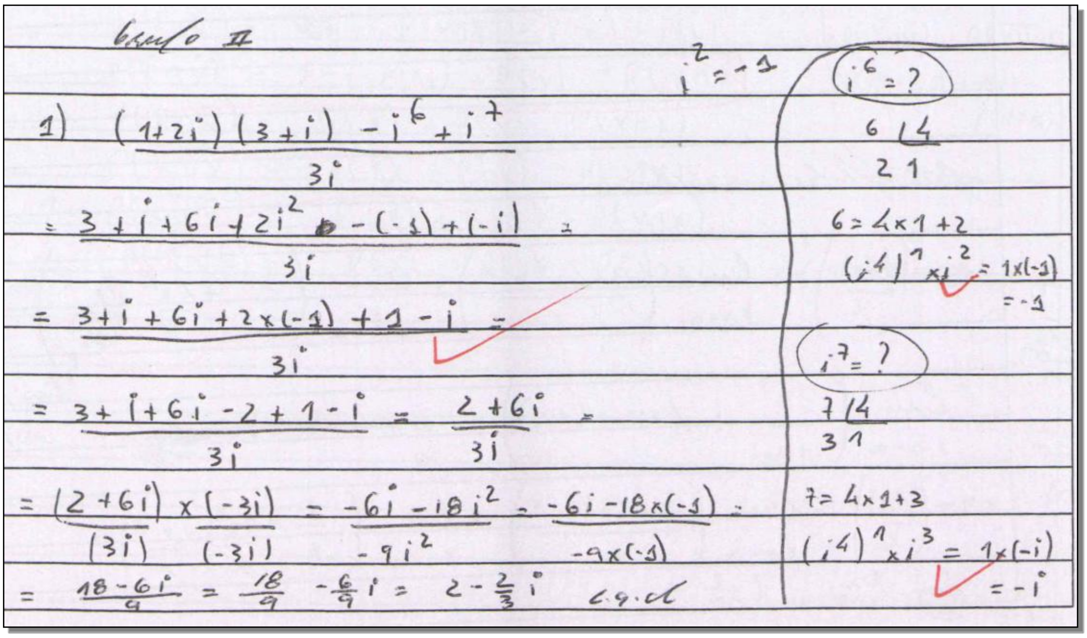
O exemplo apresentado mostra que, efetivamente, o aluno revela sentido de símbolo ao compreender o seu papel quando o valor numérico é especificado na questão que lhe é colocada.

Um outro aspeto do sentido de símbolo que Diogo tem desenvolvido é a manipulação simbólica. O exemplo seguinte, retirado do último teste intermédio realizado no decorrer do ano letivo, mostra o trabalho do aluno num exercício de números complexos no qual ele efetua uma manipulação simbólica, utilizando sempre os procedimentos adequados:

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine $\dfrac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i}$, **sem recorrer à calculadora**.

Apresente o resultado na forma $x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$



Grupo II

1) $\dfrac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i}$

$= \dfrac{3+i+6i+2i^2 - (-1) + (-i)}{3i} =$

$= \dfrac{3+i+6i+2\times(-1)+1-i}{3i} =$

$= \dfrac{3+i+6i-2+1-i}{3i} = \dfrac{2+6i}{3i} =$

$= \dfrac{(2+6i)}{(3i)} \times \dfrac{(-3i)}{(-3i)} = \dfrac{-6i-18i^2}{-9i^2} = \dfrac{-6i-18\times(-1)}{-9\times(-1)} =$

$= \dfrac{18-6i}{9} = \dfrac{18}{9} - \dfrac{6}{9}i = 2 - \dfrac{2}{3}i$ c.q.d.

$i^2 = -1$

$i^6 = ?$

$6 \;|\underline{4}$
$2 \;\; 1$

$6 = 4\times 1 + 2$

$(i^4)^1 \times i^2 = 1\times(-1)$
$= -1$

$i^7 = ?$

$7 \;|\underline{4}$
$3 \;\; 1$

$7 = 4\times 1 + 3$

$(i^4)^1 \times i^3 = 1\times(-i)$
$= -i$

No entanto, a manipulação simbólica de Diogo é por vezes afetada por alguma insegurança em operações básicas essenciais. Num outro teste intermédio, esse aspeto é visível na resolução de uma equação de 1.º grau e condiciona o sentido de símbolo do aluno num aspeto que este mostra ter desenvolvido com procedimentos mais complexos. A sua aprendizagem da Álgebra é assim afetada pelo facto de não conseguir dar sentido a procedimentos básicos em algumas das suas manipulações simbólicas.

4. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir.

Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região, t **semanas** após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{5 - 4\,e^{-0{,}17\,t}} \qquad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4.1. Suponha que $k = 9$

Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a $7\,000$?

4.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.

Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram quatro mil coelhos e não nasceu nenhum.

Determine o valor de k, arredondado às décimas.

---

4) numero em Milhares

$t \to$ Semanas

$f(t) = \dfrac{K}{5-4e^{-0{,}17t}}$ (numero real positivo $-K$)

4.1) $k = 9$

$f(t) = \dfrac{9}{5-4e^{-0{,}17t}} = 7000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 7000 \times (5-4e^{-0{,}17t}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{7000} = 5-4e^{-0{,}17t} \Leftrightarrow$

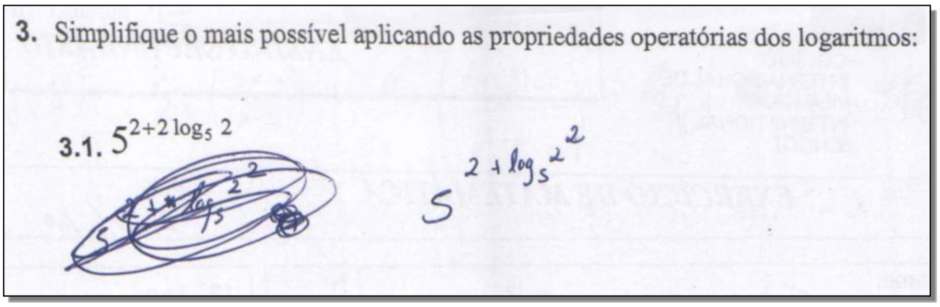
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\frac{9}{7000}}{\frac{5}{1}}\right) = -4e^{-0{,}17t} \Leftrightarrow 35000 = -4e^{-0{,}17t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{35000}{-4} = e^{-0{,}17t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\frac{35000}{-4}}{-0{,}17}\right) = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t =$

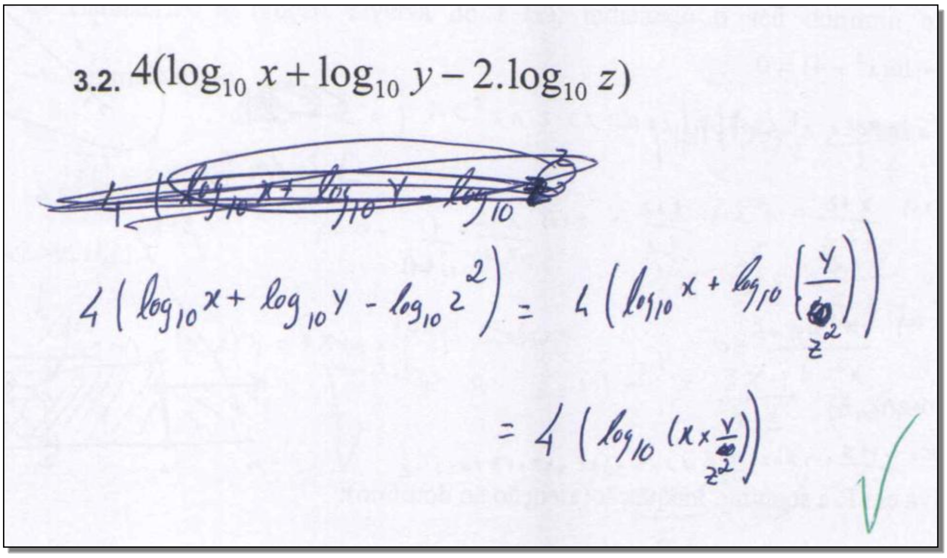
No teste diagnóstico realizado no âmbito deste trabalho, Diogo revela ter o seu sentido de símbolo condicionado por um conjunto de regras incorretas que ele considera adequadas, nomeadamente no trabalho com potências. Nos dois exemplos seguintes verifica-se que isso tem consequências no trabalho do aluno sobre conteúdos do 12.º ano. O primeiro é um exercício que envolve logaritmos e as suas propriedades, o aluno não responde à primeira questão pois não aplica a regra das potências que lhe permitiria fazer $5^{2+\log_5 5^2} = 5^2 \times 5^{loh_5 5^2}$ e, a partir daí, proceder à simplificação pedida. A sua dificuldade não se prende com as propriedades dos logaritmos, que utiliza bem tanto em 3.1 como em 3.2, mas sim com as regras das potências.



3. Simplifique o mais possível aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos:

3.1. $5^{2+2\log_5 2}$

$5^{2+\log_5 2^2}$



3.2. $4(\log_{10} x + \log_{10} y - 2.\log_{10} z)$

$4(\log_{10} x + \log_{10} y - \log_{10} z^2) = 4\left(\log_{10} x + \log_{10}\left(\frac{y}{z^2}\right)\right)$

$= 4\left(\log_{10}\left(x \times \frac{y}{z^2}\right)\right)$

O segundo exemplo refere-se a uma questão de um teste intermédio realizado durante o eno escolar. Nesta questão está em causa o estudo da continuidade de uma função. A resposta de Diogo é, mais uma vez, condicionada pelo uso de regras incorretas para o cálculo das potências, que conduzem a um resultado errado na determinação do limite à esquerda que pode comprometer o restante exercício e as suas conclusões.

Ainda na mesma questão, é de realçar o conjunto de procedimentos com algum grau de complexidade que o aluno desenvolve de corretamente, mostrando sentido de símbolo, na forma como efetua a manipulação simbólica na determinação do limite à direita.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-\sqrt{3x}} & se \quad 0 < x < 3 \\ x\,e^{-x} + x - 2 & se \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os itens **3.1.** e **3.2.**

3.1. Averigúe se a função f é contínua em $x = 3$

3.2. O gráfico da função f tem uma assimptota oblíqua.
Determine a equação reduzida dessa assimptota.

3.1) Para que a função f seja contínua no ponto $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} (xe^{-x} + x - 2) = 3e^{-3} + 3 - 2 = 3\times\frac{3}{e} + 1 = \frac{9}{e} + 1$$

$$f(3) = \frac{9}{e} + 1$$

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{x-3}{x-\sqrt{3x}}\right) = \left(\frac{3-3}{3-\sqrt{3\times3}}\right) = \left(\frac{0}{0}\right)$$ símbolo indeterminação

Levantar símbolo indeterminação

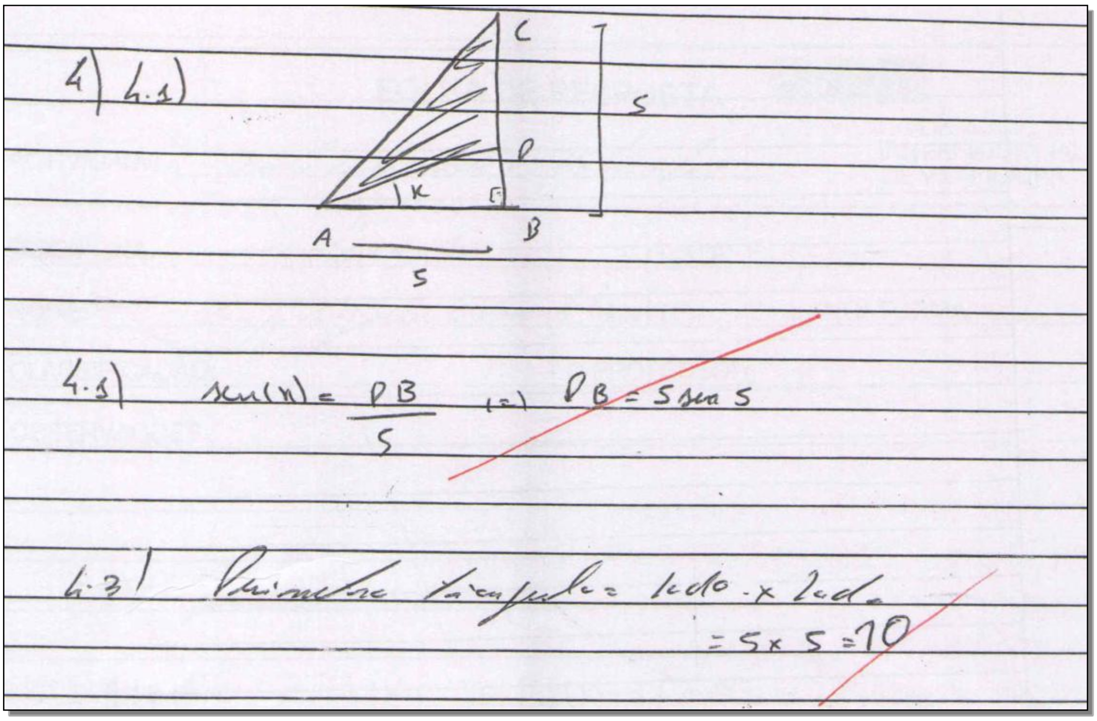
$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{x-3}{x-\sqrt{3x}}\right) = \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{(x-3)}{(x-\sqrt{3x})} \times \frac{(x+\sqrt{3x})}{((x+\sqrt{3x}))}\right) = \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{(x-3)\times(x+\sqrt{3x})}{x^2-(\sqrt{3x})^2}\right) (=)$$

$$(=) \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{(x-3)\times(x+\sqrt{3x})}{x^2-3x}\right) (=) \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{\cancel{(x-3)}\times(x+\sqrt{3x})}{x\cancel{(x-3)}}\right) (=) \lim_{x\to 3^-} \left(\frac{x+\sqrt{3x}}{x}\right)$$

$$= \frac{3+\sqrt{3\times3}}{3} = \frac{3+\sqrt{9}}{3} (=) \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

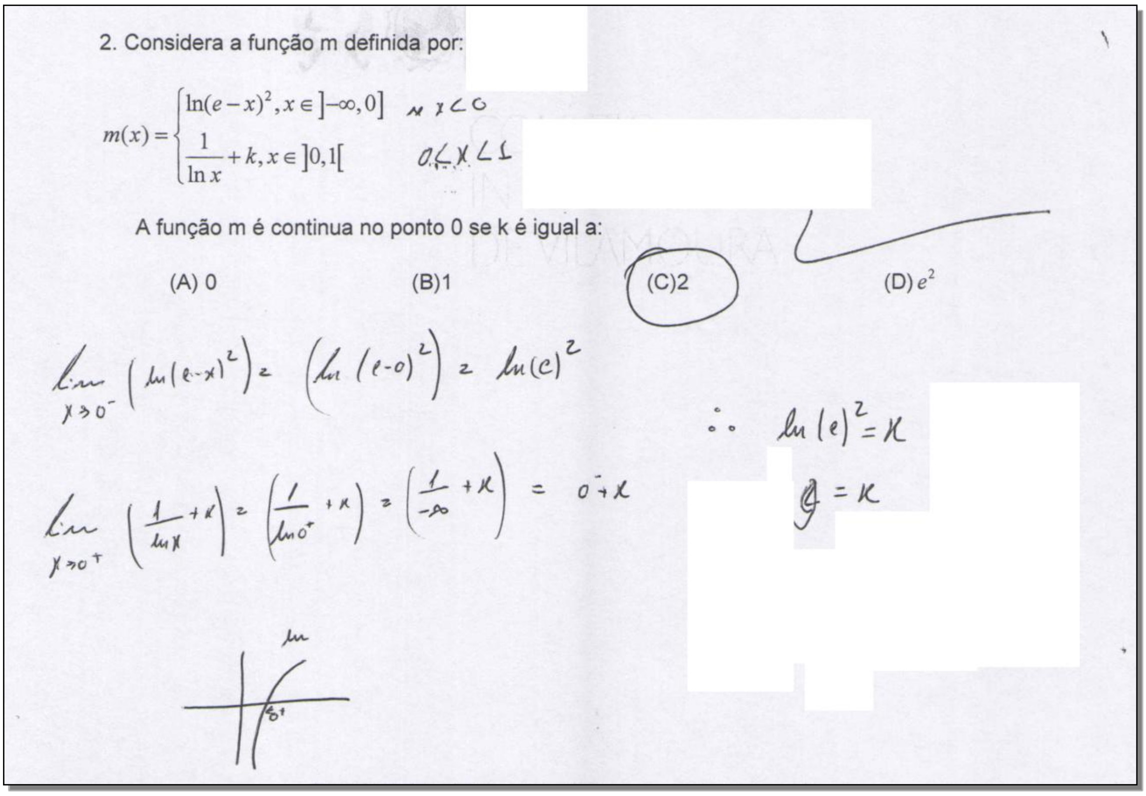
Verificamos então que a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x=3$

Nos problemas do teste diagnóstico relacionados com formas geométricas, Diogo mostra um sentido de símbolo reduzido, nomeadamente em relação à dimensão de um retângulo. Isso tem repercussão em tarefas mais complexas, como é o caso do exemplo apresentado no qual o aluno identifica o perímetro de um triângulo como o produto de dois lados, o que pode ser um erro de distração mas parece ser uma atribuição de pouco sentido à área e ao perímetro das figuras geométricas, neste caso particular do triângulo, que compromete todo o seu restante trabalho.



Os exemplos apresentados reforçam a importância da atribuição de sentido a conceitos básicos sobre os quais assentam outros conceitos mais complexos.

Em relação a conteúdos e conceitos, Diogo mostra em alguns casos um sentido de símbolo bastante desenvolvido. Nesta questão de escolha múltipla de um teste, na qual mostra o seu trabalho, verifica-se que o aluno compreende o que é a continuidade de uma função num ponto, e revela sentido de símbolo na forma como determina o valor de *k*:



2. Considera a função m definida por:

$$m(x)=\begin{cases}\ln(e-x)^2, x\in\,]-\infty,0] & x<0\\ \dfrac{1}{\ln x}+k, x\in\,]0,1[& 0<x<1\end{cases}$$

A função m é continua no ponto 0 se k é igual a:

(A) 0 (B)1 (C)2 (D) e^2

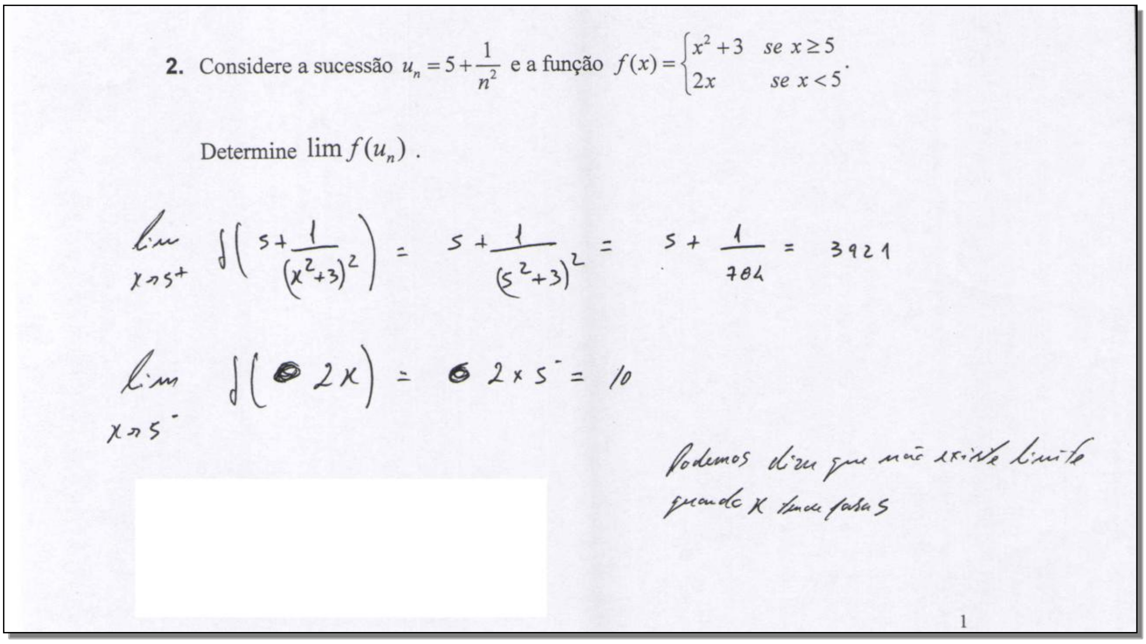
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\ln(e-x)^2\right)=\left(\ln(e-0)^2\right)=\ln(e)^2$$

$$\therefore \ln(e)^2=k$$

$$2=k$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}+k\right)=\left(\frac{1}{\ln 0^+}+k\right)=\left(\frac{1}{-\infty}+k\right)=0+k$$

Noutras situações, como na determinação de um limite recorrendo ao conceito de sucessão, Diogo revela dificuldade em apreender o sentido dos símbolos em jogo É o que se evidencia o seguinte exercício:



2. Considere a sucessão $u_n = 5+\frac{1}{n^2}$ e a função $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & se\ x\geq 5\\ 2x & se\ x<5\end{cases}$.

Determine $\lim f(u_n)$.

$$\lim_{x\to 5^+} f\left(5+\frac{1}{(x^2+3)^2}\right)=5+\frac{1}{(5^2+3)^2}=5+\frac{1}{784}=3921$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(2x)=2\times 5^-=10$$

Podemos dizer que não existe limite quando x tende para 5

1

Primeiro, Diogo incorre num erro de cálculo ao fazer $\left(5+\frac{1}{784}=3921\right)$. Situação que um sentido de símbolo mais apurado permitiria identificar como um resultado estranho, o que levaria a uma consequente revisão do cálculo efetuado. Na aplicação da definição de limite segundo Heine, o aluno determina os dois limites laterais, quando o devia fazer apenas à direita tendo em atenção a expressão de u_n e também aborda de forma totalmente diferente a determinação desses limites no ponto $x=5$. No primeiro caso substitui na expressão da sucessão n pela expressão definida no ramo superior da função, no segundo caso determina o limite de forma correta mas desenquadrado do problema. Não há portanto neste exercício uma atribuição clara e coerente, por parte do aluno, de sentido aos símbolos envolvidos

O sentido de símbolo também se manifesta na forma como se compreende o símbolo de tal forma, que o facto da questão ser colocada de forma contrária à habitual não impede a sua correta resolução. Em relação às assíntotas não verticais, Diogo apesar de efetuar, uma vez mais, um erro num procedimento básico ao separar os denominadores de uma multiplicação de frações como se de uma soma se tratasse, parece, no entanto, compreender que m é o declive da reta assíntota e determina-o recorrendo ao cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4\,x^2\,e^{-x}$

Resolva os itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

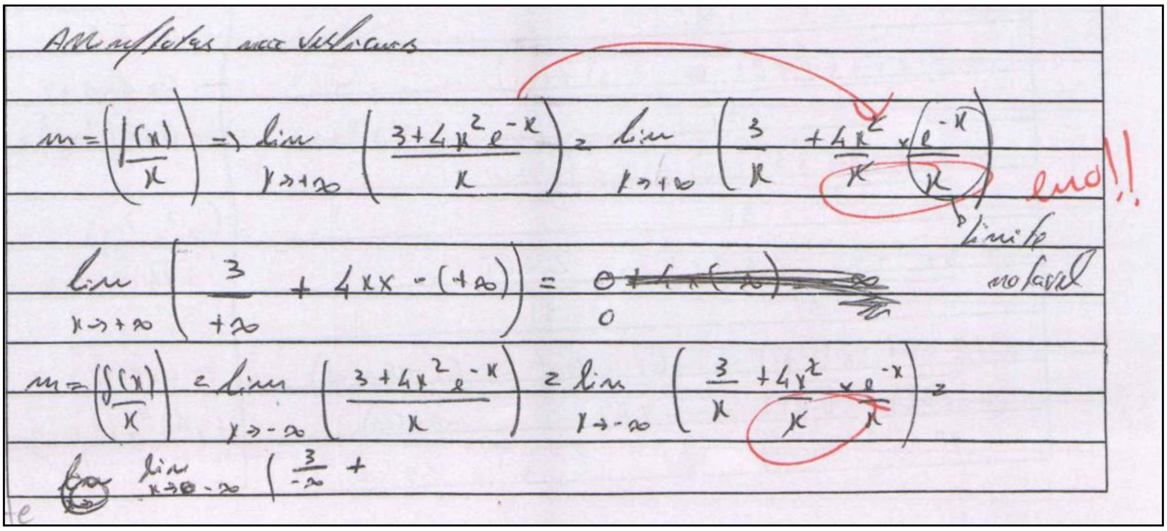
3.1. Mostre que o gráfico da função f tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.

3.2. Mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

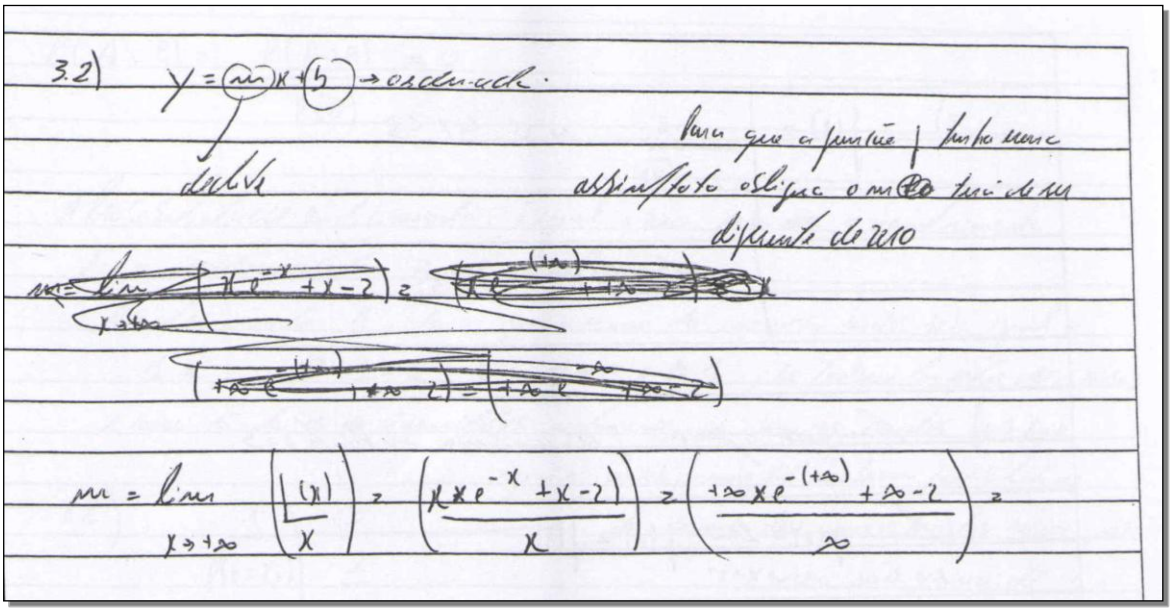
3.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por

$g(x) = x + \ln\left[f(x) - 3\right]$ (ln designa logaritmo de base e)

Determine os zeros da função g

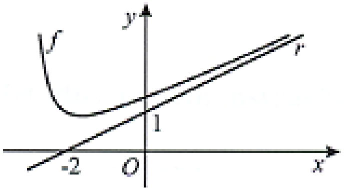


O mesmo acontece no seguinte exercício em que Diogo escreve mesmo a equação geral de uma reta, identificando o *m* como o seu declive e utiliza o procedimento correto para o determinar:



Quando a questão é colocada de outra forma, Diogo não identifica $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ como o declive da assíntota do gráfico nem determina esse declive com base nos dois pontos da reta que são fornecidos, não conseguindo dar sequência à sua resolução:

5. Na figura está parte do gráfico de uma função f de domínio $]-3, +\infty[$



A recta r, que intersecta os eixos coordenados nos pontos (-2,0) e (0,1) é assimptota do gráfico de f.

Seja g a função, de domínio IR^+, definida por $g(x)=\frac{3x+f(x)+\ln x}{x}$.

Prova que a recta de equação $y=\frac{7}{2}$ é assimptota do gráfico de g.

5) $g(x) = \frac{3x + f(x) + \ln(x)}{x}$ $\overline{AB} = B - A = ($

$(-2;0);(0;1)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x} + \frac{f(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}\right)$ limite notável $\to 0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(3 + \frac{f(x)}{x} + 0\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(3\right.$

No decorrer da tarefa doze da entrevista Diogo já tinha revelado pouco sentido de símbolo numa tarefa relacionada com retas e o seu declive, evidenciando dificuldades na identificação e na mudança de representações Esse aspeto parece condicionar o seu trabalho tanto no exemplo anterior como no que a seguir se apresenta, no qual não identifica os declives das retas bissetrizes dos quadrantes como *m=1* e *m=-1*. O aluno não parece dar sentido ao declive *m* na equação de uma reta pelo que, apesar de determinar através do cálculo de limites o declive da assíntota, não lhe atribui o papel que ele deve desempenhar.

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$, cujo o gráfico admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes pares. Seja ainda h uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e tal que

$h(x) = f(x) + 2x\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$. Prova que o gráfico de h admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes impares.

TRANSPORTE →

4) Se o gráfico h admite uma assimptota paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares, então

$$m \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{-2x\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{x}$$

$$= 2e^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right) \times \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

limite notável

$$-2 \times e = -2e$$

como o $m \neq 0$, não tem assimptota horizontal mas tem oblíqua.

$$b \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[h(x) - mx\right] = \left(-2x\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) - 2e\,x\right) = e$$

$$y = -2e\,x + e$$

Nas situações de modelação trabalhadas tanto no teste diagnóstico como na entrevista, Diogo não utiliza com clareza o símbolo nem compreende os diferentes papeis que este pode desempenhar. Tal influencia a forma como trabalha o seguinte exercício:

2 Numa certa pastelaria, a temperatura ambiente é constante. Admite que a temperatura, em graus centígrados, de um café servido nessa pastelaria, **t minutos** após ter sido colocado na chávena, é dada por: $f(t) = 20 + 50e^{-0,04t} \quad (t \geq 0)$.

2.1 Determina a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.

2.2 Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indica, **justificando**, a temperatura ambiente.

2.3 Justifica a seguinte afirmação: **a taxa de variação média da função f, em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa.**

2.4 Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65 graus centígrados? Apresenta o resultado um minutos e segundos.

(Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserva no mínimo três casa decimais.)

No entanto, em 2.1 substitui o tempo corretamente, dando sentido à temperatura inicial do café e ao início da contagem do tempo:

2) Temperatura → em graus centígrados

t → minutos

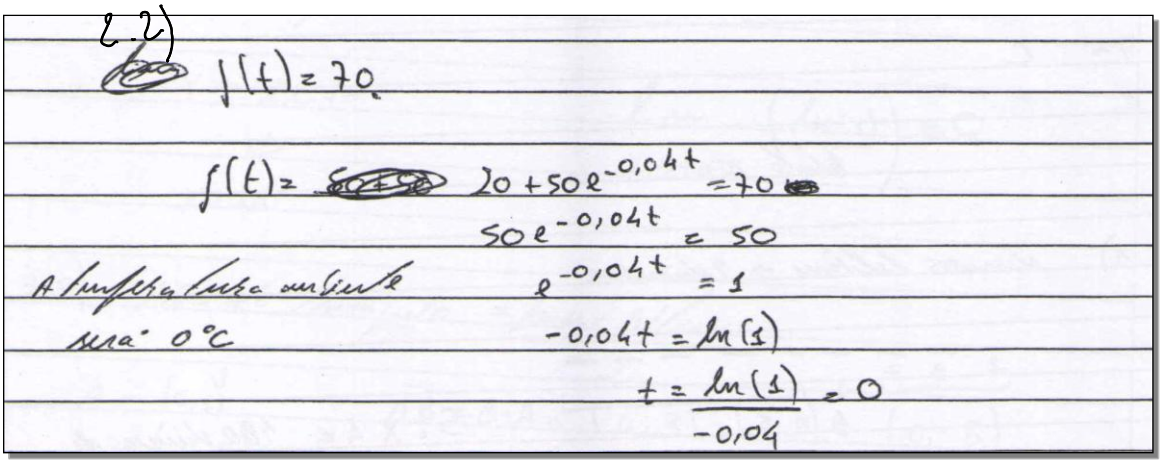
$f(t) = 20 + 50e^{-0,04t} \quad (t \geq 0)$

2.1) $f(0) = ?$ ...

$F(0) = (20 + 50e^{-0,04 \times 0}) = 20 + 50e^{0} = 20 + 50 = 70\,°C$

A temperatura do café no instante em que é colocado na chávena é de 70 °C (centígrados)

Na questão 2.2, iguala a função dada a 70, não dando sentido ao que lhe é pedido e chegando através de manipulação simbólica correta, mas destituída de significado, ao valor de *t=0*, o que seria de esperar visto ter efetuado o procedimento contrário ao que lhe era pedido em 2.1. O aluno não parece questionar o valor a que chega, que não tem qualquer sentido no contexto do problema, nem utiliza o símbolo para retificar procedimentos:


2.2) $f(t) = 70$

$f(t) = 20 + 50e^{-0,04t} = 70$

$50e^{-0,04t} = 50$

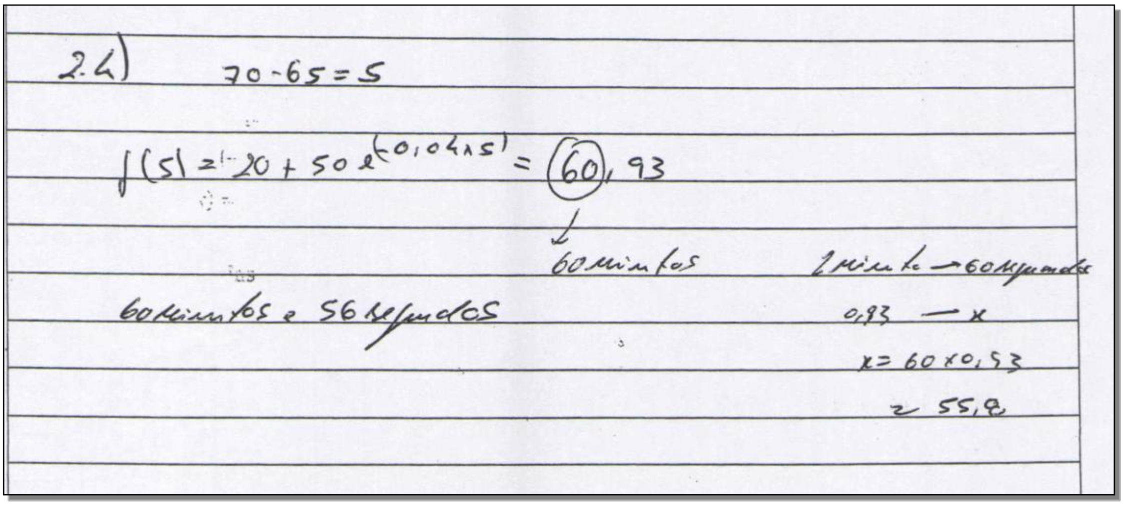
$e^{-0,04t} = 1$

$-0,04t = \ln(1)$

$t = \frac{\ln(1)}{-0,04} = 0$

A temperatura ambiente será 0 °C

Na questão 2.4 Diogo confunde temperatura com tempo e obtém, mais uma vez, um resultado sem sentido no contexto real em que a questão se insere, não questionando o valor a que chega, que parece considerar correto por resultar de manipulação simbólica.


2.4) $70 - 65 = 5$

$f(5) = 20 + 50e^{(0,04 \times 5)} = 60,93$

60 minutos

1 minuto → 60 segundos

0,93 — x

$x = 60 \times 0,93$

$= 55,8$

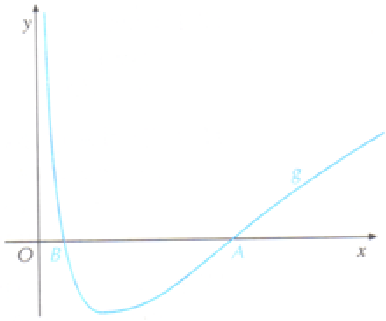
60 minutos e 56 segundos

A escolha da representação simbólica adequada reveste-se para Diogo de alguma dificuldade pois não trabalha com as diferentes representações da mesma forma. No exemplo que se apresenta, recorre às resoluções analítica e gráfica da mesma questão, mas não estabelece qualquer correspondência entre elas, revelando dar pouco sentido às diferentes representações do mesmo objeto matemático.

5. Na figura está parte da representação gráfica da função g, que é definida por: $g(x) = -1 + \ln^2 x$.

5.1 Determina as abcissas dos pontos A e B.

5.2 Determina as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de g(x) e da função f, definida por $f(x) = 3\ln\sqrt{x}$.

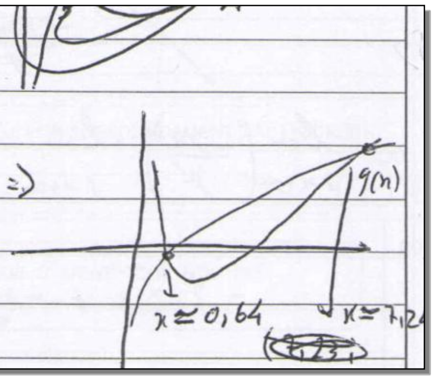


5.2) $f(x) = 3 \ln \sqrt{x} = 0$

$\ln \sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = e^0 = \sqrt{x} = 1$

$x = 1$



O sentido de símbolo de Diogo, retratado na primeira parte deste capítulo, confirma-se na análise dos seus trabalhos de avaliação sumativa. Os aspetos que constituem o seu sentido de símbolo evidenciam-se nesses trabalhos, por vezes contibuindo de forma positiva, mas, noutros casos, limitando o seu desempenho.

5.1.3. Conclusão

Diogo é um aluno com pouco sentido de símbolo em vários aspetos. Mesmo as vertentes que se encontram mais desenvolvidas estão, por vezes, condicionadas pelas restantes que não lhe permitem dar continuidade ao seu trabalho. O aluno parece, em algumas situações, ter decorado um conjunto de regras que para ele têm pouco sentido, mas que aplica nas tarefas que lhe são propostas sem se questionar sobre a sua correção. Tal é evidenciado no seu trabalho no teste diagnóstico e no decorrer das s entrevistas e tem consequências na forma como desenvolve o seu trabalho letivo, e na sua aprendizagem da Álgebra. As suas resoluções de testes de avaliação sumativa (internos e externos) mostram que consegue resolver tarefas exigíveis no 12.º ano envolvendo cálculo de limites, propriedades dos logaritmos, regras de derivação, etc. No entanto mesmo esse trabalho parece, frequentemente, destituído de sentido, o que se traduz em alguma falta de coerência, inclusive ao longo do mesmo exercício, e em dificuldades na transferência de conhecimentos e procedimentos para outras situações. O sentido de símbolo que apresenta quando lida com conteúdos e procedimentos complexos, trabalhados recentementeeem contexto letivo, acaba por ser comprometido ao não atribuir sentido a conceitos e procedimentos básicos, o que o leva a utilizá-los de forma incorreta comprometendo toda a sua atividade bem como os resultados que daí decorrem. Um exemplo claro desta situação são as regras das potências que, interiorizadas de forma incorreta, penalizam todo o trabalho que delas depende.

A falta de sentido de símbolo de Diogo, tem consequências graves na sua flexibilidade algébrica, nomeadamente na resolução de questões em que não consegue aplicar diretamente as regras que conhece, ou não encontra semelhanças com outros exercícios. Perante estas tarefas, o aluno reconhece que não “lhes consegue pegar”, o que compromete todo o seu desempenho na disciplina bem como o gosto por esta. A falta de sentido de símbolo manifesta-se também na sua grande dificuldade em recorrer ao poder do símbolo para generalizar, para corrigir o seu próprio trabalho e para tirar conclusões com fundamento.

No decorrer da entrevista verificam-se diversas situações em que Diogo começa por recorrer à função exponencial, aos números complexos ou mesmo ao cálculo de probabilidades, em questões que não têm qualquer ligação com esses conceitos, numa evidência clara de que o aluno faz uma grande associação entre o que é pedido e o tema que está a tratar na altura na disciplina, apesar de não haver qualquer relação, aparente ou implícita, entre ambos.

Diogo mostra sentido de símbolo em questões nas quais toda a informação dada é necessária, são fechadas, têm sempre resposta, e esta é única, e nas quais a aplicação de um conjunto de procedimentos, numa ordem bem definida, resulta eficazmente. Por outras palavras, perguntas “tipo exame”, que, pela sua especificidade e pelo fim avaliador e regulador a que se destinam, estão parcialmente condicionadas por estas características.

Diogo parece assim conceber a Matemática como um conjunto de regras que é preciso estudar e saber manipular. Tende a considerar que o resultado da manipulação tem que estar correto, mas não lhe reconhece um sentido mais profundo. Tem sempre que escrever, fazer algo, de preferência contas e com a calculadora, não fazendo uma inspeção dos símbolos nem antes de iniciar o seu trabalho, nem quando o termina.

Alicerçado numa base pouco sólida, o sentido de símbolo de Diogo ameaça desmoronar-se perante a primeira questão que não se encaixa no conjunto de regras que assimilou e mecanizou. Mesmo conseguindo concluir a disciplina, questões sobre a utilidade da Matemática na sua vida futura, a aplicabilidade de um emaranhado de regras relacionadas com o último tema tratado nas aulas ou a possibilidade de Diogo recorrer à Álgebra para resolver algum problema na sua vida futura são de difícil resposta.

5.2. Pedro

Pedro frequenta no corrente ano letivo, pela primeira vez, o 12.º ano do curso de Ciências e Tecnologias. É um aluno autoconfiante em relação à disciplina de Matemática e considera que "Matemática é razão". Num breve questionário realizado no início do ano, indica que pretende ingressar num curso superior.

5.2.1. O sentido de símbolo de Pedro

Expressões algébricas

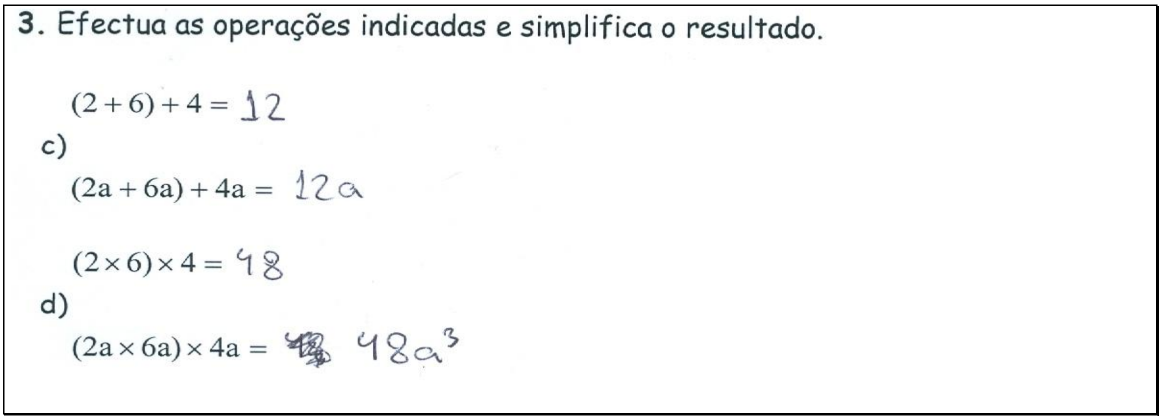
Familiarização com os símbolos e o seu significado. Pedro revela, ao longo do seu trabalho, estar familiarizado com os símbolos e com o seu significado. Na primeira questão do teste diagnóstico justifica a utilização do parêntesis da forma a seguir indicada:

> 1. Considera n. Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática: Adiciona 5 a n e depois multiplica o resultado por 3.
>
> $(n+5)\times 3$

Entrevistadora: Olha Pedro aqui em relação ao teu teste, na primeira pergunta, queria só perguntar-te porque é que puseste parêntesis, porque é que é necessário… Porque é que achaste necessário pôr o parêntesis?

Pedro: Porque… *(lê a pergunta)* O 3 está a multiplicar pelo resultado do 5 e do n, por isso o 3 não está a multiplicar só por *n* ou por 5, está a multiplicar pelos dois.

Essa sensibilidade à utilização de parêntesis é visível também na forma como o aluno resolve as alíneas c) e d) da questão três do teste:


3. Efectua as operações indicadas e simplifica o resultado.

c)
$(2+6)+4=$ 12
$(2a+6a)+4a=$ 12a

d)
$(2\times 6)\times 4=$ 48
$(2a\times 6a)\times 4a=$ $48a^3$

Quando questionado sobre a utilidade dos parêntesis, responde:

Entrevistadora: Esta aqui, eu pus aqui parêntesis não é? Na *c)* e na *d).* A minha pergunta é: é necessário esse parêntesis ou a presença desse parêntesis altera alguma coisa?

Pedro: Não, na *c)* não é porque é só somas e não, não… Não, se neste último tivesse um vezes aí seria e tínhamos um caso notável, acho eu que sim. Nesta aqui (indica a expressão *d)*) também não é preciso porque a multiplicação é comutativa e… Não interessava a ordem.

Pedro revela uma clara noção da função que o parêntesis desempenha numa expressão e não se "deixa enganar" pela sua presença desnecessária numa dada expressão.

Criação de uma expressão simbólica e tradução de linguagens. Pedro traduz sem dificuldade a linguagem corrente para a simbólica, o que é patente na forma como explica a terceira questão da entrevista.

O David é 10cm mais alto que o Pedro. O Pedro tem uma altura de *h* cm. O que pode escrever sobre a altura do David?

$D = h + 10$

Pedro: "O David é 10cm mais alto que o Pedro. O Pedro tem uma altura de *h* cm. O que podes escrever sobre a altura do David?" A altura do David é igual a h mais 10, que é a altura do Pedro mais 10. Exato.

Entrevistadora: O David é igual à altura do Pedro mais 10. Isso é uma expressão geral!

Pedro: Sim.

Entrevistadora: Conseguimos saber a altura do David alguma vez?

Pedro: Não, não dá porque eles não nos dão *h*. Não sabemos a altura do Pedro, por isso…

Este excerto da entrevista revela que Pedro atribui o sentido correto à letra *h*, reconhecendo que nunca será possível saber a altura de David pois ela é dada em função de *h* cujo valor não é explicitado no problema proposto.

Na alínea d) da primeira tarefa da entrevista, Pedro começa por atribuir a três números consecutivos letras diferentes, mas quando questionado corrige a sua resposta:

Escreva uma expressão algébrica que simbolize o seguinte:

d) A soma de três números inteiros consecutivos.

$\cancel{a, b, c \in \mathbb{Z}}$

$\cancel{a+b+c}$

$a + (a+1) + (a+2) \qquad a, \in \mathbb{Z}$

Pedro: A soma de três números inteiros consecutivos, quaisquer números inteiros. Quaisquer números inteiros ou…?

Entrevistadora: Quaisquer números inteiros.

Pedro: Então damos três letras diferentes, podemos pôr $a+b+c$.

Entrevistadora: E como é que sabes que o a, b e c são consecutivos?

Pedro: a, b e c pertencem aos números inteiros, que acho que é o conjunto Z.

Entrevistadora: Z? Sim, Z, são os inteiros, mas como é que sabes que o a, b e c são consecutivos?

Pedro: Ah, certo!

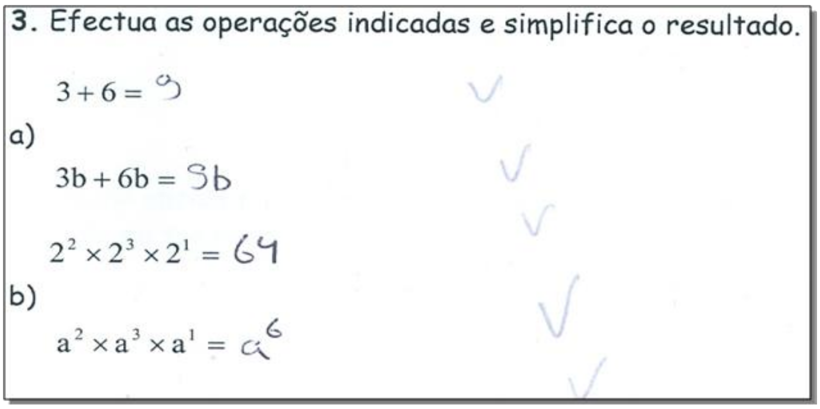
Entrevistadora: a, b e c são quaisquer.

Pedro: Hum hum. Consecutivos, exato! Quer dizer que o b é a +. Ah, OK. Então calma. Em vez de estar a pôr… Pois como são consecutivos, em vez de estar a pôr letras diferentes, basta pôr $a+1$ e $a+2$. É assim. E isto não é necessário (risca as expressões com a, b e c). Quer dizer é necessário o a… Que pertença ao… *(escreve $a \in Z$).*

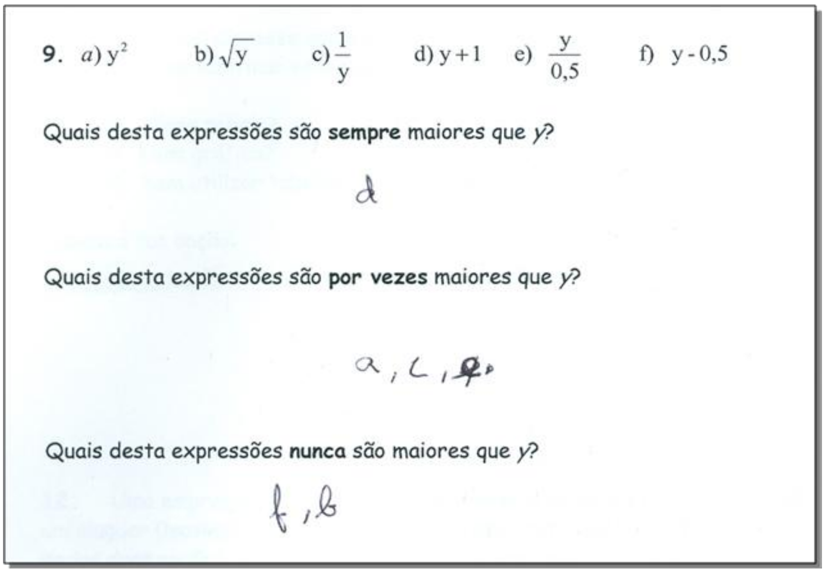
Entrevistadora: Que o a pertença ao Z.

O aluno é muito cuidadoso na forma como chega à expressão final, tendo considerado desde o início do exercício a importância dos números em causa serem inteiros revelando uma visão abrangente e centrada no essencial da questão.

Passar de uma estrutura concreta para outra mais abstrata. Pedro trabalha com números e com letras de forma idêntica mostrando, neste aspeto, um forte sentido de símbolo. Aplica corretamente as operações e as regras das potências sem que a presença da letra acrescente dificuldade à forma como são utilizadas.



Na questão nove do teste diagnóstico, a relação entre a concretização do y e o caráter geral que este efetivamente tem é fundamental para uma resposta reveladora de sentido de símbolo. Pedro diz, na entrevista, que não fez uma substituição por valores mas que contemplou na sua análise a possibilidade de *y* tomar valores negativos, positivos e decimais menores do que um:


9. a) y^2 b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ d) $y+1$ e) $\frac{y}{0,5}$ f) $y-0,5$

Quais desta expressões são **sempre** maiores que *y*?

d

Quais desta expressões são **por vezes** maiores que *y*?

a, c, e.

Quais desta expressões são **nunca** são maiores que *y*?

f, b

Entrevistadora: … Na nove, como é que fizeste? …

…

Pedro: … Maiores que *y* ora aqui no… Fui ver cada caso, caso a caso. Aqui (y^2) pode não ser sempre maior que *y* porque y^2 se for decimal… se for menor que 1 vai dar um número menor portanto 0,1 vezes 0,1 vai dar um número menor que 0,1. Aqui ($\sqrt{y}$) é a mesma coisa que o quadrado mas se for maior do que… Pronto se tivermos por exemplo 9, raiz de 9 vai dar 3. E se tivermos um decimal vai dar maior.

Entrevistadora: Se tiveres raiz de um decimal vai dar maior?

Pedro: Vai dar um número maior.

Entrevistadora: Então porquê que puseste aqui o b) nas “nunca são maiores”?

Pedro (Experimenta valores com a calculadora). Boa pergunta. Não pensei nisso quando fiz, acho eu.

…

Entrevistadora: Portanto tu olhaste para cada expressão e viste que números… Não substituíste por números na realidade?

Pedro: Substituir não, vi para números negativos, e para número decimais e para números maiores que 1. E vi que *1/y* vai ser sempre menor.

Entrevistadora: *1/y* puseste aqui “são por vezes maiores”…

Pedro: Sim (experimenta com a calculadora) porque se for decimal vai dar um número maior do que y.

Entrevistadora: E o *y+1*…

Pedro: O *y+1* não há muita volta a dar, vai ser sempre maior.

Entrevistadora: E *y/0,5*?

Pedro: Depende do valor de *y*, se for maior que *0,5* vai dar um número maior que *y* (experimenta na calculadora). Se o *y* for menor que *0,5* vai dar um número menor.

Entrevistadora: E o *f)* finalmente, *y-0,5*?

Pedro: Faz sempre menos *0,5*, é sempre menor.

A análise que Pedro faz das suas respostas mostra solidez no conceito que tem da letra *y* com podendo tomar qualquer valor real. Baseia-se inicialmente na sua intuição que, em alguns casos, se revela incorreta. Mostra, no entanto, abertura para corrigir algumas ideias inicialmente erradas e evidencia compreender a causa dos erros em que incorreu. Identifica corretamente o y^2 e a $\sqrt{y}$, como situações idênticas e testa-as atribuindo a *y* valores positivos inferiores a um, que denomina, incorretamente, de números decimais. A sua análise de *y/0,5*, apesar de resultar na escolha da resposta correta (por vezes maior que *y*), não é bem fundamentada pois não identifica a expressão como uma multiplicação por dois, e considera que um número entre zero e um, quando dividido por *0,5* resulta num número menor quando tal afirmação só é verdadeira quando se atribui a *y* um valor negativo.

No seu trabalho com expressões algébricas, Pedro mostra um apurado sentido de símbolo nos vários aspetos que se encontram sintetizados na tabela 5.5.

Tabela 5.5 - *Resumo do sentido de símbolo de Pedro em relação às expressões algébricas*

Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado.	Compreende o significado dos símbolos e utiliza-os corretamente. Tem conhecimentos bem ancorados e em situações diferentes mantém a atribuição correta do significado.
Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.	Traduz bem a linguagem corrente para linguagem simbólica. Interpreta corretamente o papel da letra. É cuidadoso na atribuição do domínio dos valores que a letra pode tomar em cada contexto, o que também revela compreensão do papel que esta desempenha.
Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido do número para sentido de símbolo).	Trabalha bem com o símbolo literal e revela nesse aspeto uma sólida passagem da Aritmética para a Álgebra. Nem sempre atribui à letra o valor correto para justificar uma afirmação mas ,de uma maneira geral, tem noção dos valores que esta pode tomar, e da forma como a atribuição desses valores afeta o resultado final da expressão em causa.

Criar uma expressão simbólica geral para um determinado objetivo.	Cria expressões adequadas recorrendo à letra, e tem sentido do papel que esta representa nas expressões que cria assim como do caráter geral que essa expressão por vezes acarreta.

Equações

Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. A segunda expressão do teste diagnóstico tem como objetivo principal a compreensão da concretização da incógnita:

2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$

(A) 2 (B) 5 (C) 10 (D) 95

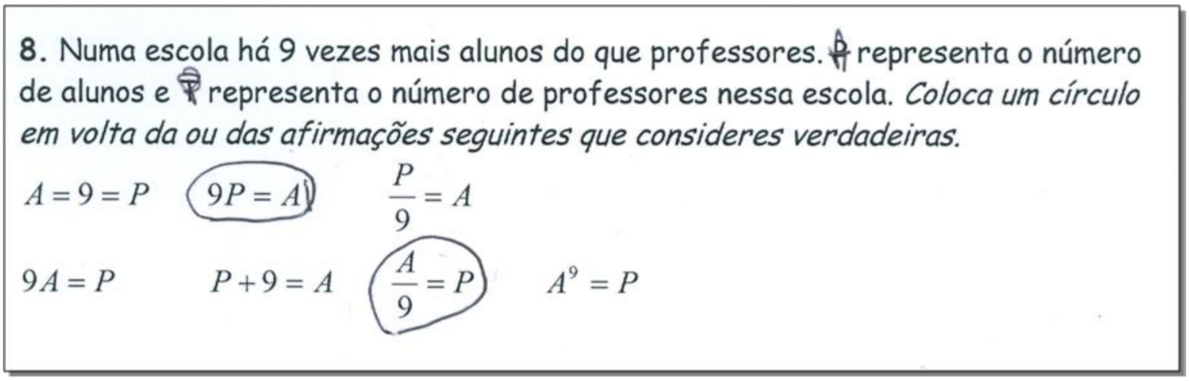
Pedro assinala a resposta correta e revela na entrevista que resolveu analiticamente a questão, tendo chegado ao valor indicado:

> **Entrevistadora**: Ok. Aqui na segunda pergunta, escolheste o 5… Como é que fizeste para chegar ao 5?
>
> **Pedro**: Apliquei a propriedade distributiva e ficou 3 vezes 5 e… Mais 3*x*.
>
> .

Pedro explicita as várias operações que efetuou para chegar ao resultado. Quando questionado confirma que não efetuou qualquer substituição ou verificação mas mostrou saber como o fazer:

> **Entrevistadora**: Ok. E depois não verificaste se o 5 era mesmo?…
>
> **Pedro**: Não.
>
> **Entrevistadora**: E como é que poderias ter verificado?
>
> **Pedro**: Era substituir fazer 3 vezes, entre parêntesis 5 mais 5, 3 vezes 10 igual a 30.

A questão oito do teste diagnóstico implica o estabelecimento de uma ligação entre a linguagem falada e a linguagem algébrica, com subsequente inspeção dos símbolos para verificação da sua correção.



8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. A representa o número de alunos e P representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.*

$A = 9 = P$ $\quad 9P = A \quad$ $\frac{P}{9} = A$

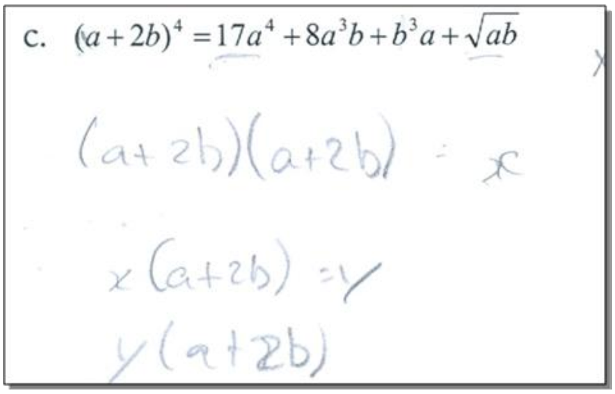
$9A = P \quad P + 9 = A \quad \frac{A}{9} = P \quad A^9 = P$

Arcavi (1994) considera que neste tipo de questões é normal um erro inicial associado à escrita algébrica na mesma ordem da linguagem falada, mas sustenta que o sentido de símbolo se deve manifestar na verificação do que se escreveu. Pedro responde corretamente de uma forma quase natural, a sua inspeção dos símbolos surge "embebida" na sua resposta no decorrer da entrevista:

Entrevistadora: Porquê que escolheste estas duas opções Pedro?

Pedro: Ora… Eu primeiro fui fazer isto por mim sem ter opções nenhumas fui ver que nove vezes mais alunos que professores, ou seja o número de alunos é igual a nove vezes o número de professores.

Na alínea c) da questão três, Pedro volta a mostrar que é capaz de sentir o problema através dos símbolos. No diálogo que vai estabelecendo a partir da questão mostra como vai pensando, e reforçando a sua intuição inicial de que o desenvolvimento do primeiro termo não pode ser o que está indicado no segundo, o que torna a igualdade falsa. O aluno utiliza a palavra "múltiplo" quando se refere ao coeficiente do monómio, mas apesar de utilizar a palavra incorreta, tal não afeta as suas conclusões:



c. $(a+2b)^4 = 17a^4 + 8a^3b + b^3a + \sqrt{ab}$

$(a+2b)(a+2b) = x$

$x(a+2b) = y$

$y(a+2b)$

Os seguintes excertos da entrevista mostram como Pedro vai dando sustentação à sua resposta:

Pedro: Oh, diabo! $17a^4$! Eu não sei de onde é que vem este $17a^4$, por isso, vou dizer que é errada também.

Entrevistadora: Por causa do $17a^4$?

Pedro: Sim, porque o único à quarta que deveríamos ter era o primeiro. O resto está tudo a multiplicar. Ah! Calma. Sim, sim, sim, sim. O único *a* à quarta que deveríamos ter era o primeiro, por isso, e como não tem nenhum múltiplo atrás, nunca pode, nunca devia estar aqui um $17a^4$.

No excerto acima transcrito o aluno apresenta uma razão válida para considerar que o desenvolvimento apresentado não é correto. Como o coeficiente de *a* é 1, considera que *a* não tem nenhum "múltiplo" atrás e portanto não poderá existir o termo $17a^4$ no desenvolvimento do binómio. Continuando o seu raciocínio identifica o termo da raiz quadrada também como não pertencente ao desenvolvimento do primeiro termo:

Entrevistadora: … Há mais algum termo que contribua para que a possas considerar falsa? Olhando assim.

Pedro: Sim, este aqui *(indica o termo da raiz quadrada)*, também não sei como é que apareceu aqui, num caso notável destes não aparece raiz.

Entrevistadora: Por ser raiz. Esse também te dá força para considerares que é falsa?

Pedro: Sim. Os outros não sei, tem aqui o b^3. Bom, o b^3 aqui também deveria estar com um múltiplo atrás.

Entrevistadora: Hum, porque ali tem dois não é?

Pedro: Hum. Para não falar…

Entrevistadora: Para não falar? Diz, diz.

Pedro: Para não falar que faltam também os a^2 e b^2.

Entrevistadora: Esperarias também ter uns termos ao quadrado?

Pedro: Pelo menos um termo, já que estamos a somar e não a subtrair, eles não, nunca se iam anular, por isso…

Entrevistadora: Ok. E… Se tivesses que expandir esse, fazer as contas como é que farias?

Pedro: Este aqui? *(indica o primeiro membro)*

Entrevistadora: Sim.

Pedro: Tinha que me ir lembrar do binómio de Newton, penso eu.

Entrevistadora: E se não te lembrasses do binómio de Newton? Imagina que ainda não tínhamos dado o binómio de Newton!!!

Pedro: Tinha que ir fazer um a um, provavelmente.

Entrevistadora: Um a um?

Pedro: Desenvolver um a um. Ou fazia, sim, tinha de ir desenvolver um a um, ou então fazia….

Entrevistadora: O que é que queres dizer com desenvolver um a um?

Pedro: Fazia a mais $2b$, a mais $2b$, resolvia. Isto dava qualquer coisa.

Entrevistadora: Hum, hum

Pedro: Vamos supor que é x.

Entrevistadora: Sim…

Pedro: Depois fazia x vezes a mais $2b$, isto ia dar y, depois fazia y vezes a mais $2b$.

Entrevistadora: Ok, ainda bem que só à quarta, afinal, não é?

Pedro: Pois exatamente.

O aluno revela capacidade para inspecionar os símbolos e uma grande facilidade em refletir e trabalhar com eles. Considera que o segundo membro não corresponde ao desenvolvimento do primeiro e indica diversas razões que dão consistência à sua resposta. Atribui novas letras a expressões algébricas, de forma a condensar e simplificar o que pretende explicar, utilizando com sentido esse poder da linguagem simbólica.

Manipulação simbólica utilizando os procedimentos adequados. Pedro manipula os símbolos de forma normalmente correta e eficaz. Tal é o exemplo da quarta tarefa da entrevista em relação à qual não tem dúvidas, nem ao trabalhar a questão, nem na forma como responde na entrevista quando questionado sobre o que se alteraria se fosse pedido para resolver em ordem a outra letra:

Resolva a equação em ordem a x.

$$abcx - d + e - f = 0$$

$$abcx = f + d - e$$

$$x = \frac{f + d - e}{abc}$$

Pedro: Ok, então passamos, as que estão sem multiplicações para o outro lado e ficamos com *f+d-e*. Depois passamos o *abc* a dividir, tudo em ordem a *x*.

Entrevistadora: … Tudo sobre *abc*. E se em vez de resolver em ordem a *x*, te pedissem para resolver em ordem a *a*? o que é que alteraria na tua…?

Pedro: Em vez de passar o *abc* a dividir passaria o *bcx*.

Entrevistadora: E em ordem a *b* ou a *c*?

Pedro: O processo era exatamente igual, só que deixávamos o *b* de um lado e as outras é que passavam a dividir.

Na sexta tarefa proposta na entrevista, Pedro também revela que é capaz de manipular, identificando com relativa facilidade o erro na resolução que lhe é proposta:

Alguns alunos encontravam-se a resolver um problema. A sua solução foi:

$$\frac{8y-6}{4} = \frac{1}{2}(4y-3)$$

$$2y - 6 = 2y - \frac{3}{2}$$

$$-6 = -\frac{3}{2}$$

Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correcta mas não conseguiam identificar o que tinham feito errado. Será que tu consegues?

$$\frac{8y-6}{4} = \frac{8y}{4} - \frac{6}{4} = 2y - \frac{3}{2}$$

Pedro: "A solução foi. Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correta, mas não conseguiram identificar o que tinham feito errado, Será que tu consegues?" Consigo sim, senhor. O que eles fizeram aqui foi desenvolver isto, que está bem desenvolvido.

Entrevistadora: O segundo membro?

Pedro: Só que aqui eles dividiram o 8 por 4 mas não dividiram o 6 por 4…

Entrevistadora: E deu-lhes asneira?

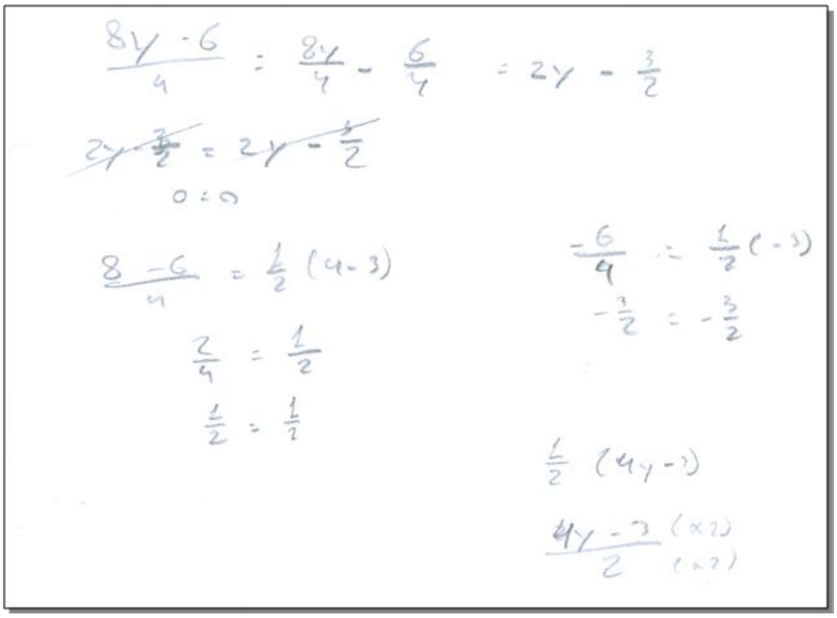
Pedro: Exato.

Entrevistadora: Então como é que farias isso bem?

Pedro: Faria *8y-6* sobre *4*, resolvendo só um membro, isto vai dar, é o mesmo que ter *8y/4* menos *6/4*, que é o mesmo que ter *2y* menos *3/2*.

A manipulação simbólica é um aspeto do sentido de símbolo que Pedro mostra ter bem desenvolvido.

Manutenção de uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado. Retomando a tarefa anterior, Pedro é incentivado no decorrer da entrevista a continuar a resolução após a identificação e correção do erro:



Entrevistadora: Isso era o teu primeiro membro! (referência a $2y - 3/2$).

Pedro: Exato.

Entrevistadora: Que seria igual, se escreveres a expressão toda, chegavas à condição que *2y-3/2* era igual a?

Pedro: 2y-3/2 era igual a 2y-3/2, corta tudo.

Entrevistadora: Então qual seria a solução dessa equação?

Pedro: Não existia solução para esta equação!

Entrevistadora: Não há nenhum valor… O que é que é uma solução de uma equação?

Pedro: O valor para o qual… É um *y*, para o qual a equação está de acordo com as contas.

Entrevistadora: Com as contas.

Pedro: E com os cálculos.

…

Entrevistadora: Então se substituirmos o *y* por exemplo, por 1, na (expressão) inicial ficamos com (8 – 6)/4 não é? Igual…

Pedro: A professora quer eu substitua?

Entrevistadora: Sim, por exemplo.

Pedro: O *y* por 1?

Entrevistadora: Sim, por exemplo, que é dos valores mais fáceis.

Pedro: Então fica, 8 menos 6 sobre 4, igual a ½ de 4 menos 3.

Entrevistadora: Isso dá… ½ daquele lado.

Pedro: 4 - 3, isto dá ½, fica vezes 1 e aqui fica 2 sobre 4, que dá ½, ou seja…

Entrevistadora: ½ igual a ½.

Pedro: Exato. Que satisfaz a condição… Que satisfaz a equação, ou seja… Ou seja, não sei o que é que está aqui mal!

Entrevistadora: E porque é que chegares a zero igual a zero, tem de estar mal? Eles chegaram a -6 igual a 3/2.

Pedro: Não é que esteja mal. Eu só não consigo chegar ao valor de *y*, que devia dar por exemplo 1.

Pedro não atribui significado ao resultado da sua manipulação e não realiza uma inspeção dos símbolos que lhe permita identificar ambos os membros da equação como equivalentes o que conduz a uma condição universal como resposta. Insiste que deve chegar a um valor para *y* como resultado da sua manipulação e só muito direcionado chega a uma conclusão correta:

Entrevistadora: E se puseres zero, se puseres, *y*, zero…

Pedro: Dá -3/2 que é igual a -3/2, que satisfaz também a equação.

Entrevistadora: Então, o que tu chegaste é uma equação… Eles coitados chegaram a uma coisa que é claramente errada, não é? -6 igual a -3/2 não é verdade, mas zero igual a zero, é verdade!

Pedro: Hum, hum, pois é, mas não nos dá um valor de *y*.

Entrevistadora: Não nos dá um valor, se calhar porquê?

Pedro: Pelo que eu vi porque pode ser vários valores.

Entrevistadora: Olha lá um bocadinho com atenção para as duas expressões iniciais, para uma e para outra. Vê lá se podes tirar daí alguma conclusão.

Pedro: São iguais. É só fazer múltiplos. Se pegarmos no 2.º membro, desenvolvermos.

Entrevistadora: Hum.

Pedro: Multiplicamos isto tudo por 2, em cima e em baixo e vamos ter 8y-6 sobre 4,que vai ser igual

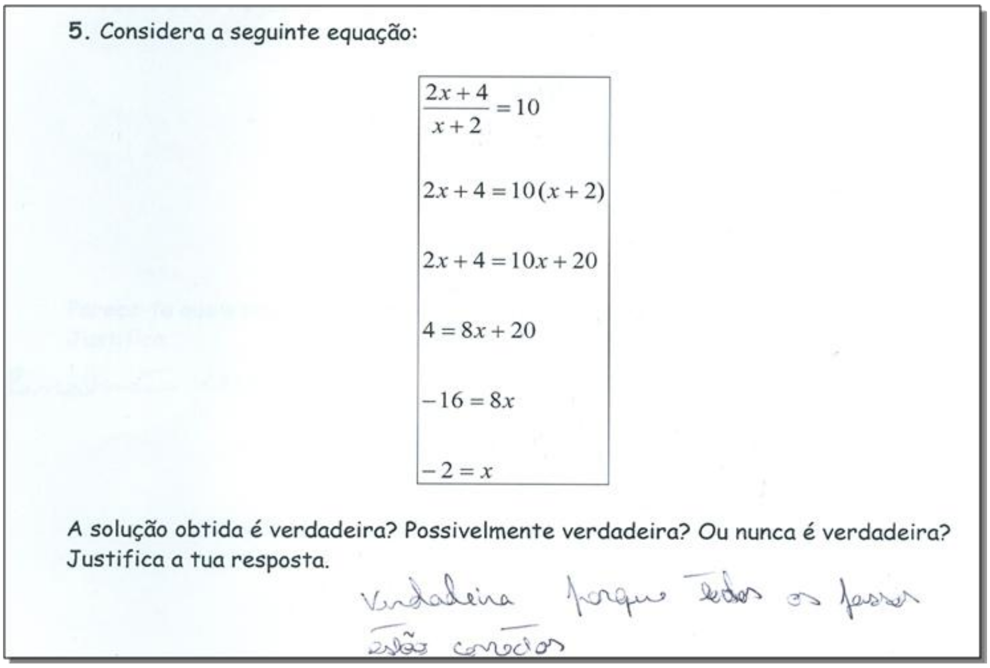
Entrevistadora: Vai ser igual.

Pedro: Ou seja, o que nós temos aí já é uma igualdade.

Entrevistadora: Já é uma igualdade! E então, achas que há algum valor de *y* para o qual isto não seja igual?

Pedro: Acho que não. Vai ser sempre igual.

Na questão 5 do teste, Pedro efetua também alguma manipulação sem significado e não mantém uma visão global, devida essencialmente à sua dificuldade em dar sentido ao domínio de uma equação.



5. Considera a seguinte equação:

$$\frac{2x+4}{x+2}=10$$

$$2x+4=10(x+2)$$

$$2x+4=10x+20$$

$$4=8x+20$$

$$-16=8x$$

$$-2=x$$

A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.

Verdadeira porque todos os passos estão corretos

Entrevistadora: Aqui na 5 como é que chegaste a esta conclusão? Dizes que os passos estão corretos, portanto viste…

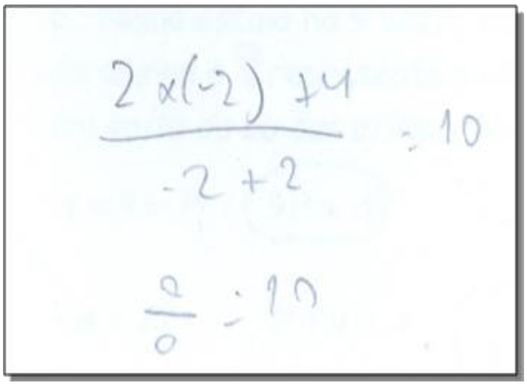
Pedro: Pois ai fui, fui pelo… No fundo o que eu fui fazer foi resolver a equação e verificar se os passos estavam todos corretos e… Os passos realmente estão todos corretos.

Entrevistadora: E substituíste, verificaste se o *x=2* era uma solução?

Pedro: Não.

Entrevistadora: Então experimenta lá verificar Pedro.

Pedro efetua a substituição de *x* por *-2* na expressão inicial e obtém o seguinte:



$$\frac{2\times(-2)+4}{-2+2}=10$$

$$\frac{0}{0}=10$$

Entrevistadora: E então?

Pedro: Curioso.

Entrevistadora: Porque achas que isso acontece? Alguma ideia?

Pedro: Boa pergunta. Não.

Entrevistadora: Nos passos não identificaste nenhum erro, mas efetivamente…

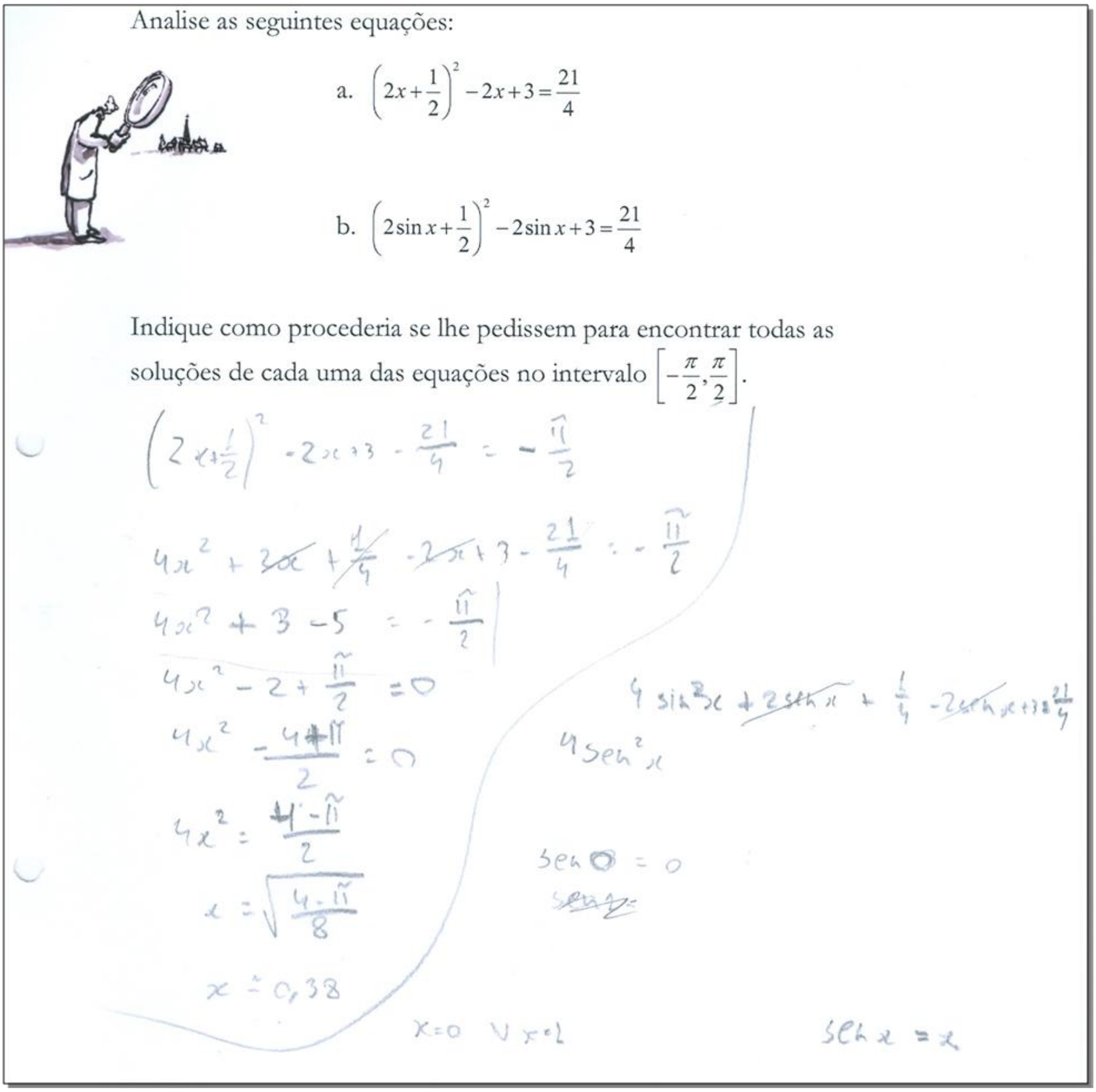
Pedro: Não é solução. Mas…

Entrevistadora: Não?

Pedro: Não sei porquê.

Pedro fica perplexo com a expressão a que chega após a substituição. Apesar da insistência da entrevistadora, não lhe consegue atribuir sentido, centrando-se sistematicamente na verificação da correção da manipulação simbólica, e não quebra esse ciclo através de um alargamento da sua visão da questão.

Na tarefa oito da entrevista, uma visão global do que é proposto pressupõe a identificação da primeira equação com uma equação de 2.º grau. O reconhecimento da semelhança entre as duas equações permite a utilização dos resultados da primeira para resolver a segunda, recorrendo implícita ou explicitamente a uma mudança de variável. Pedro, como mostra o excerto da transcrição da entrevista que se apresenta, parece ser confundido pelos valores dos extremos do intervalo para a solução. Sendo essa informação apenas necessária numa fase final da resolução, introdu-la a logo no início comprometendo todo o seu trabalho:



Analise as seguintes equações:

a. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2x+3=\frac{21}{4}$

b. $\left(2\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-2\sin x+3=\frac{21}{4}$

Indique como procederia se lhe pedissem para encontrar todas as soluções de cada uma das equações no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2x+3-\frac{21}{4}=-\frac{\pi}{2}$

$4x^2+\cancel{2x}+\frac{1}{4}-\cancel{2x}+3-\frac{21}{4}=-\frac{\pi}{2}$

$4x^2+3-5=-\frac{\pi}{2}$

$4x^2-2+\frac{\pi}{2}=0$

$4x^2-\frac{4-\pi}{2}=0$

$4x^2=\frac{4-\pi}{2}$

$x=\sqrt{\frac{4-\pi}{8}}$

$x\doteq 0,38$

$4\sin^2 x+2\sin x+\frac{1}{4}-2\sin x+3=\frac{21}{4}$

$4\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}\theta=0$

$x=0 \vee x=1$

$\operatorname{sen} x=x$

Entrevistadora: Vamos à primeira, o que é que achas que resultava daí?

Pedro: O que eu ia fazer, era substituir por -π/2 e π/2. A professora quer que eu faça?

Entrevistadora: Não, não, não. Diz só, portanto na primeira expressão substituías o *x*, primeiro por -π/2 e chegavas…

Pedro: E chegava, penso eu, a um valor de *x*.

Entrevistadora: Mas se substituías o *x*, como é que chegavas a um valor de *x*?

Pedro: Pois, exato, calma.

Pedro: O que eu fazia era passar este para aqui.

Entrevistadora: O 21/4 para o primeiro membro?

Pedro: O 21/4 para o primeiro membro. E igualava a $-\pi/2$.

Entrevistadora: E como é que resolvias essa equação?

Pedro: Ora bem … acho que era isto. E agora era ir resolvendo.

Pedro resolve a equação e, uma vez que esta não tem termo em *x*, recorre à raiz quadrada, mas considera apenas a solução positiva. De seguida diz que teria que "fazer o mesmo processo" para $-\pi/2$. Apesar da insistência da entrevistadora, não identifica a incorreção de ter igualado a expressão aos extremos do intervalo dado para as soluções:

Entrevistadora: Mas este é que é o intervalo que eu quero, o que é pedido são as soluções dentro desse intervalo.

Entrevistadora: Imagina que em vez de... Era de -3 a 3, o intervalo era de -3 a 3.

Pedro: É que…

…

Entrevistadora: Imagina que eu não te dava o intervalo, pedia-te só para resolveres a equação, como é que resolvias?

Pedro: Resolvia da mesma forma que resolvi aqui, mas sem o $-\pi/2$.

Entrevistadora: Ficava igual a zero, aqui?

Pedro: Exato, ficava igual a zero, aqui, com este passo aqui.

Entrevistadora: Sim…

Pedro: Aqui, seria tudo igual.

Pedro acaba por reconhecer que o facto de estar a estudar o tema da trigonometria nas aulas, influenciou a forma como utilizou os extremos:

Pedro: Eu fui igualar a $-\pi/2$ porque eu pensava que o *x*... Isto já é influência da trigonometria.

Pedro: Quer dizer que… não nos dizem que isto é um número inteiro. Pensava que o *x* podia ter um intervalo de valores para o qual satisfazia esta equação.

Em relação à segunda equação, Pedro reconhece que pode utilizar os resultados da primeira mas acaba por os utilizar de forma incorreta:

Entrevistadora: Ok, então vamos admitir que resolvias e chegavas a dois valores… A quadrática… Agora, olhando para a equação b), o que é que… Como é que resolverias a equação b)?

Pedro: Ok, eu penso que aqui será, realmente o processo que eu estava a fazer.

Entrevistadora: E agora resolvias…

Pedro: Isto vai ser muito parecido.

Entrevistadora: E agora se tivesses as soluções da alínea a), podias aproveitá-las de alguma forma para a alínea b)? imagina que na a) dava 0 e 1.

Pedro: Supostamente dava. Porque é o mesmo que fazer uma mudança de variável. *sen(x)* é igual a *x* e temos que *x*…

Entrevistadora: Então se a) tivesse dado 0 e 1, por exemplo, como é que…?

Pedro: Se a) tivesse dado 0 e 1 eu chegava a…. Chegava a quê?... A nada, dava-me $x = 0$ e $x = 1$ não é?

Entrevistadora: Hum $x=0$ e $x=1$, será que podias aproveitar esses valores para…?

Pedro: Poder, poder, podia. Acho que era fazer, pegava no 0 e no 1 e fazia *sen(0)* …

Entrevistadora: *sen (0)* ?

Pedro: Sim, *sen(0)* e *sen(1).* Ia ter duas respostas.

Entrevistadora: Duas respostas? Seriam as respostas da tua equação b)?

Pedro: Para esta, talvez para este intervalo.

Entrevistadora: E depois logo tinhas de ver se cabia no intervalo ou não?

Pedro: *sen(0)* que ia dar …

Entrevistadora: *sen(1)* tinha de se ver.

Pedro: E *sen(1)*, pois, não *sen(1)* é…

Entrevistadora: *sen(1)* não é $\pi/2$.

Pedro: Pois não.

Pedro empreende uma manipulação simbólica complexa mas que se revela sem significado e não evidencia solidez na sua abordagem. Nestas situações faltou-lhe uma visão global que lhe permitisse, de forma eficiente e correta, resolver as questões. Associa a tarefa proposta ao tema da Trigonometria que trabalha nesse momento nas aulas de Matemática, facto que parece, de alguma forma, comprometer de forma negativa a sua abordagem à tarefa, o que ele próprio reconhece no decorrer da entrevista.

Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais. No decorrer da resolução da tarefa 10 da entrevista Pedro é diretamente questionado sobre o que entende por expressões equivalentes, e dá uma resposta que mostra dar sentido a este conceito:

> **Entrevistadora**: O que é que tu entendes por expressões equivalentes?
>
> **Pedro**: Sim, exato, equivalentes quer dizer que vão-se manipulando e íamos obtendo uma a partir de outra.

Na questão oito do teste, identifica com clareza as expressões equivalentes e explicita na entrevista que obteve a segunda expressão através de manipulação simbólica:

8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. A representa o número de alunos e P representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.*

$A = 9 = P$ $\qquad$ $9P = A$ $\qquad$ $\dfrac{P}{9} = A$

$9A = P$ $\qquad$ $P + 9 = A$ $\qquad$ $\dfrac{A}{9} = P$ $\qquad$ $A^9 = P$

> **Pedro**: ... E então essa aí *(indica a opção A/9=P)* corresponde a esta *(opção 9P=A)* e depois através da manipulação das variáveis esta aqui também é correta.

Nas duas primeiras alíneas da terceira tarefa da entrevista Pedro identifica a primeira igualdade como correta e a segunda como incorreta, lembrando-se do caso notável:

Sem fazer cálculos, indique se as seguintes igualdade são verdadeiras ou falsas e explique o que o levou à conclusão:

a. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

b. $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$ X

Entrevistadora: Sem fazer cálculos…

Pedro: "… Se as seguintes igualdades… O que o levou à sua conclusão"

Pedro: Ora, nós temos aqui o caso notável da… Exato. Esta a) é verdadeira *(indica a primeira expressão).*

Entrevistadora: A primeira. Achas que é verdadeira?

Pedro: É.

Entrevistadora: Porque estás a lembrar-te do caso notável?

Pedro: Do caso notável, exato, que é exatamente este que está aqui.

Pedro: Este é falso *(indica a segunda expressão e coloca uma cruz).*

Na segunda alínea da tarefa cinco, o aluno tem o cuidado de determinar o domínio no qual o seu trabalho com equações equivalentes é válido e conclui nesta primeira situação, aqui apresentada, que o resultado a que chega é compatível com domínio da expressão:

b. $\frac{3x-15}{2x+1} = 0$

$2x+1 \neq 0 \qquad x \neq -\frac{1}{2}$

$3x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{15}{3}$

$\Leftrightarrow x = 5$

Pedro: Aqui, *2x + 1*, nunca é diferente de zero, por isso, posso passar para o outro lado sem problema…. Com o sinal menos, aprendi com a professora Laura que isso tem que se dizer sempre que é diferente de zero, por isso, posso pôr $3x\text{-}15 = 0$, quer dizer que x igual a *15* sobre 3, x igual a 5.

Entrevistadora: Estás aqui a dizer que 2x+1 é diferente de zero ou estás a querer que ele seja diferente de zero?

Pedro: Estou a dizer que ele é sempre diffffffee… Não, não, ele pode ser zero Pois, ele pode ser zero, se o x for – 0,5 por exemplo, então dá zero.

Entrevistadora: E isso altera o quê da tua..?

Pedro: Altera que… Dava uma equação impossível, penso eu, a não ser que em cima também desse zero. Ou seja, isto tinha que ter o x não podia assumir qualquer valor, então íamos ter que x tem que ser diferente de -1/2, o tal - 0,5.

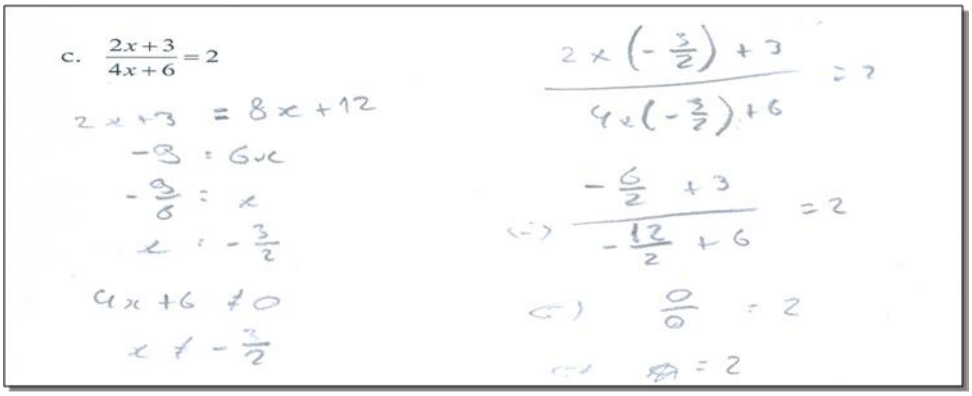
Entrevistadora: Então qual é a solução da tua equação?

Pedro: Continua a ser $x = 5$.

Entrevistadora: Não é afetada por aquela condição?

Pedro: Não.

No caso da alínea c) da mesma tarefa, o aluno, numa primeira fase, esquece-se do domínio da equação inicial e obtêm um resultado que considera certo. No decorrer da entrevista é-lhe solicitado que verifique se a resposta que obteve está efetivamente correta. Ao fazê-lo obtêm zero para o numerador e para o denominador. No entanto tal fato não o leva a ter em conta o domínio da equação mas sim a considerar que tinha realizado algum erro de manipulação. Só quando confrontado com o que tinha efetuado na alínea anterior é que determina o domínio, reconhecendo que o facto de a expressão estar inicialmente igualada a dois (em vez do zero da situação a anterior) não o alertou para a necessidade de determinar o domínio, que era essencial neste caso:



Entrevistadora: Então vamos à c).

Pedro: Passamos o *4x+6* para o outro lado, ficamos com *8x+12*, isto fica -9 igual a *6x*, e aqui fica que *x* igual a -9 sobre 6. *x* igual a 3/2, a -3/2.

Entrevistadora: E como é que podes verificar se a resposta está correta?

Pedro: Substituir por -3/2.

Entrevistadora: Então substitui lá.

Pedro: … Ora, - 6 sobre 2 mais 3, - 12 sobre 2 mais 6, isto dá zero sobre zero, penso eu. Sim, isto vai dar zero sobre zero. Ou seja, zero igual a 2, que não é correto.

Entrevistadora: Zero sobre zero é zero?

Pedro: Zero sobre zero é indeterminação, pois. Zero sobre zero não é zero.

Entrevistadora: Então qual seria a solução dessa equação?

Pedro: Antes ainda ia ver ainda se tinha feito qualquer coisa mal….

Entrevistadora: Então vê lá.

Pedro: Hum, não. Acho que está bem. Ou seja, a solução da equação é o conjunto vazio, não tem solução.

Entrevistadora: Então porquê, como é que tu chegaste a um valor. O que é que aconteceu aí para chegares a um valor que...?

Pedro: O mesmo que fiz aqui para esta tenho que fazer para esta. Porque o 2 não altera que tenha que fazer o domínio na mesma, por isso, tenho que fazer…

Entrevistadora: Mas naquela *(na alínea anterior)* lembraste-te logo de fazer e nesta não, porquê?

Pedro: Nesta aqui não porque o 2, o 2 atrapalhou-me. Isto tem de ser diferente de zero e o *x* vai dar -3/2.

Entrevistadora: Que era a solução.

Pedro: Exato.

Pedro evidencia algum sentido de símbolo no trabalho com equações e expressões equivalentes. No caso concreto do domínio de uma equação, aparenta uma evolução entre o início do ano letivo, altura em que realizou o teste diagnóstico nomeadamente a questão cinco já analisada na qual não identificou o domínio da equação, e o final do ano letivo, quando decorreu a entrevista na qual já identifica em alguns casos o domínio da equação. No entanto trata-se de um conceito que o aluno parece não ter ainda reificado pelo que o utiliza como uma receita dada pela professora e de forma um pouco aleatória sem compreender efetivamente a sua importância e o seu sentido.

Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar. Na questão seis do teste diagnóstico era necessário interpretar e utiliza um modelo simples da evolução de uma determinada população ao longo do tempo. Pedro apresenta um resultado incorreto resultante de uma subtração mal efetuada:

6. A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população.

$$p = 13000 + 250y$$

Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes?

$14500 = 13000 + 250y$

$\Rightarrow y = \frac{4500}{250}$

$\Rightarrow y = 18$

Entrevistadora: … 14500 menos 13000, conseguiste que desse 4500. Não te surpreendeu?

Pedro: Não.

Entrevistadora: 14500 menos 13000, fizeste com a calculadora ou fizeste “de cabeça”.

Pedro: Não, fiz “de cabeça”.

Entrevistadora: 14500 menos 13000, Pedro?

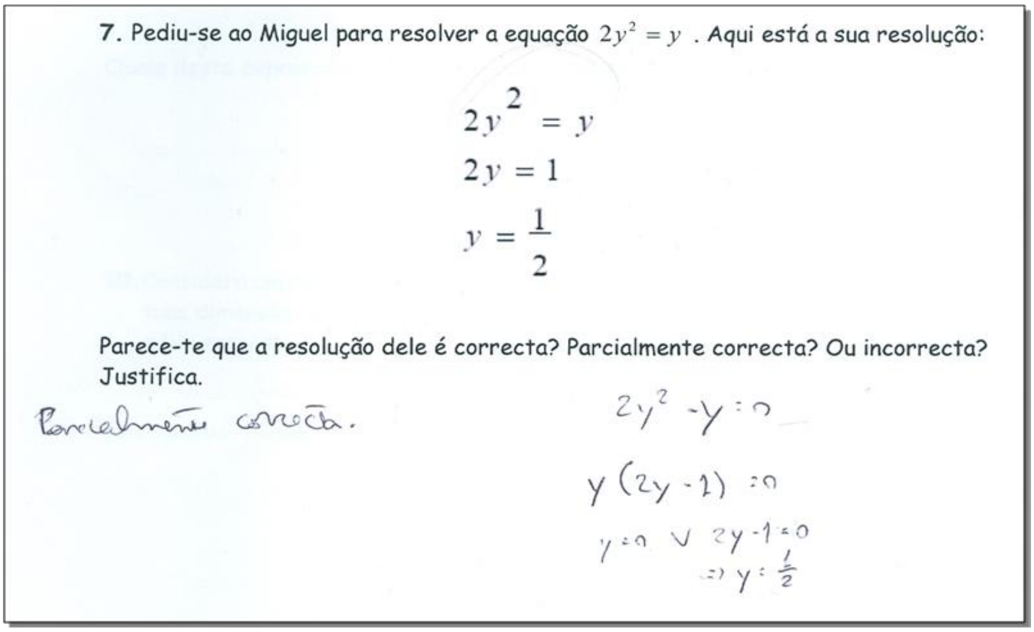
Pedro: Não dá 4500? 14500 menos 13000.

Entrevistadora: Então de 13000 para chegares a 14500 quanto é que temos que andar?

Pedro: É 1500. Ai que eu não vi isso!

Ao longo da entrevista Pedro indica que "fez as contas de cabeça" mas efetivamente revela pouco sentido de símbolo quando escreve e insiste no resultado "*14500-13000=4500*". No entanto o aluno identifica bem o papel desempenhado por cada símbolo ao adotar o procedimento correto, igualando a expressão dada a 14500, o que conduz a um valor para o número de anos.

A questão sete do teste tem como objetivo a verificação do sentido do símbolo no início e durante a aplicação de um procedimento:


7. Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução:

$$2y^2 = y$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Parece-te que a resolução dele é correcta? Parcialmente correcta? Ou incorrecta? Justifica.

Parcialmente correcta.

$$2y^2 - y = 0$$
$$y(2y-1) = 0$$
$$y = 0 \vee 2y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

A questão é resolvida por Pedro corretamente, que, no entanto, reconhece no decorrer da entrevista que, olhando para a expressão inicial, não podia prever logo que o zero era solução:

Entrevistadora: Olhando para a expressão inicial seria possível prever esta solução, o *y=0*? Olhaste para ela e tentaste ver se havia mais soluções ou começaste logo a resolver à tua maneira?

Pedro: Não, comecei logo a resolver. Achei que ia ganhar mais tempo do que estar a pensar de cabeça. Há equações que vemos logo de cabeça. Essa aí eu comecei logo a escrever.

Entrevistadora: E olhando agora para ela achas que poderias ter previsto que o zero era uma solução?

Pedro: Acho que não. Isto *(refere-se ao termo y^2)*, como está ao quadrado e ainda por cima temos o ½… Ia fazer confusão

A identificação do zero como solução da equação inicial seria uma indicação de um sentido de símbolo apurado que, nesta situação, Pedro não evidencia.

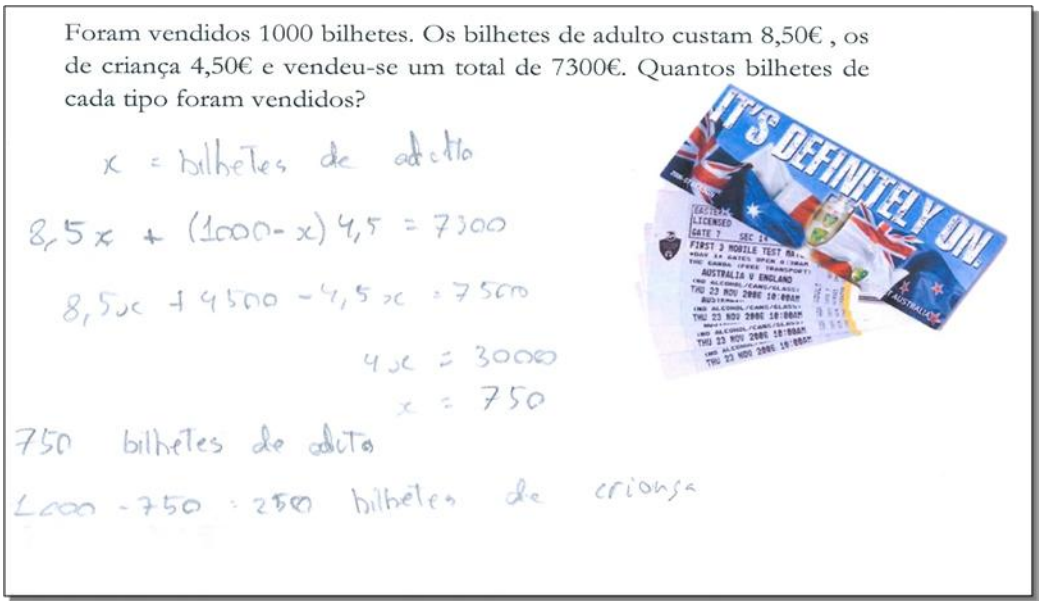
Nas tarefas que envolvem equações, Pedro mostra sentido de símbolo na forma como inspeciona e manipula os símbolos. Nem sempre consegue manter uma visão global do que trabalha e espera sempre um resultado que traduza um valor para a incógnita, não dando sentido às condições universais. Tal tem implicações em outros aspetos do sentido de símbolo como o trabalho com expressões equivalentes que inicialmente não identifica como tal. A tabela 5.6 apresenta um resumo do sentido de símbolo de Pedro nas equações.

Tabela 5.6 - *Resumo do sentido de símbolo de Pedro em relação às equações*

Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	Inspeciona e sente o problema a partir dos símbolos, dando consistência às suas respostas recorrendo ao próprio símbolo.
Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.	Manipula os símbolos de forma correta e eficaz.
Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.	Falta por vezes uma visão global que tem como consequência a realização de manipulações simbólicas, por vezes complexas mas sem sentido no contexto da tarefa em questão.
Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais.	Identifica expressões equivalentes simples, mas revela dificuldade em interpretar algumas situações que implicam o conceito de domínio da equação.
Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.	Compreende os papéis que o símbolo desempenha em cada situação mas falta-lhe sentido de símbolo na análise de algumas situações.

Problemas

A utilidade de recorrer ao símbolo e de o interpretar no contexto do problema. Na tarefa sete da entrevista Pedro evidencia a utilidade de recorrer ao símbolo e faz uma correta interpretação deste no contexto do problema:



Foram vendidos 1000 bilhetes. Os bilhetes de adulto custam 8,50€ , os de criança 4,50€ e vendeu-se um total de 7300€. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?

x = bilhetes de adulto

8,5x + (1000 - x) 4,5 = 7300

8,5x + 4500 - 4,5x = 7500

4x = 3000

x = 750

750 bilhetes de adulto

1000 - 750 = 250 bilhetes de crionça

Pedro: Ok. Então fazemos uma equação para isto: e temos, representamos por *x*, por exemplo, os de adulto. Então temos *x*… *8,5x* mais *1000* menos *x*, que vai corresponder aos bilhetes de criança, vezes 4,5 igual a sete mil e trezentos. E então, o que faço é… E aqui fica 4.

Entrevistadora: Se precisares da máquina, está aqui.

Pedro: 3000 a dividir por 4. Quanto é que isto dá? 600?

Entrevistadora: 3000 a dividir por 4 dá 750.

Pedro: Ou seja, venderam-se 750 bilhetes de adulto e 250 bilhetes de criança

Pedro não recorre a um sistema de equações, pois resolve o problema recorrendo apenas a uma incógnita, escrevendo logo o segundo valor desconhecido em função do primeiro. Quando questionado sobre a possibilidade de resolver a questão sem recorrer a pelo menos uma incógnita responde da seguinte forma:

Entrevistadora: Ok, mas isto era um exercício que era possível resolver sem recorrer a um *x*,… A uma incógnita, aliás?

Pedro: Sem recorrer a….

Entrevistadora: Sem recorrer ao *x*.

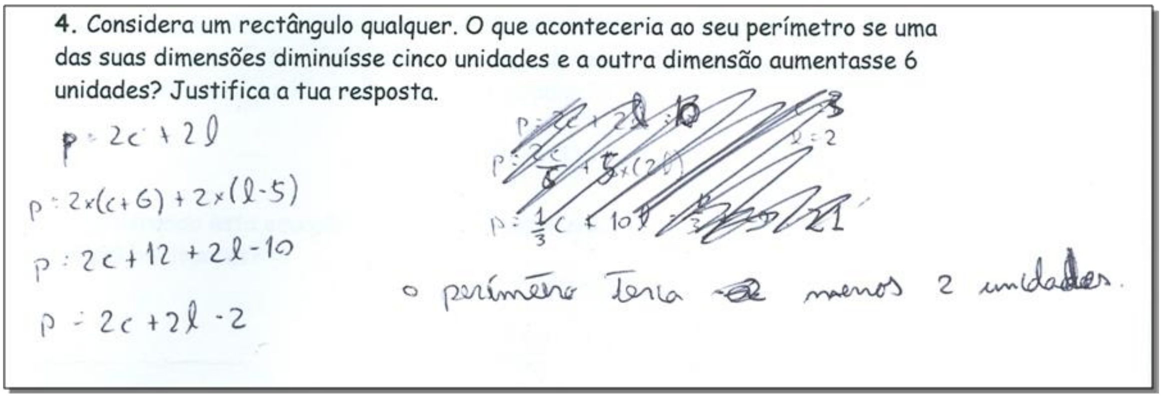
Pedro: Acho que não.

Entrevistadora: O *x* facilita a vida?

Pedro: Facilita bastante, quer dizer, dar dava por tentativas, mas ia ser muito mais difícil.

Pedro mostra encarar o recurso ao símbolo como algo útil e importante e considera que utilizar o método tentativa/erro seria desvantajoso.

Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. As questões quatro e dez do teste diagnóstico apelam ao recurso ao símbolo para traduzir para linguagem algébrica uma situação expressa em linguagem corrente. As questões têm por objetivo levar o aluno a conjeturar e tirar conclusões que não seriam possíveis com recurso à aritmética. Pedro mostra sentido de símbolo ao recorrer imediatamente às letras não abordando as questões para situações particulares. Na quarta questãocomeça por interpretar incorretamente o enunciado, considerando que um aumento de cinco unidades é o quíntuplo do valor inicial, mas corrige autonomamente a sua resolução, risca-a e apresenta uma expressão que traduz corretamente o que é pedido:


4. Considera um rectângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.

$p = 2c + 2l$

$p = 2 \times (c+6) + 2 \times (l-5)$

$p = 2c + 12 + 2l - 10$

$p = 2c + 2l - 2$

o perímetro terá menos 2 unidades.

No final o aluno efetua um pequeno erro de cálculo (+12-10=-2) e tira uma conclusão incorreta, mas consistente com o resultado a que chega. Um sentido de símbolo mais desenvolvido poderia implicar uma revisão da conclusão e dos cálculos efetuados, pois o aumento de uma das dimensões é superior à diminuição da outra o que faria prever um aumento do perímetro do retângulo.

Na entrevista Pedro confirma a importância das letras e introduz o termo "expressão geral" mostrando ter noção da necessidade da utilização destas expressões para exprimir a generalização:

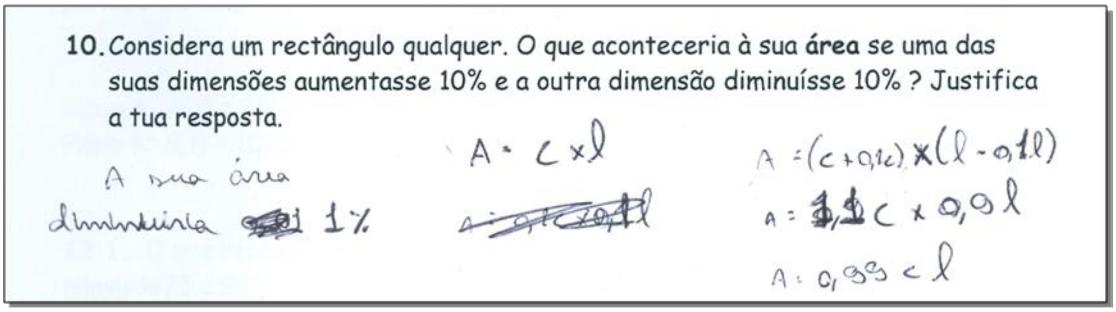
Entrevistadora: Quando pensaste no exercício pensaste logo em utilizar letras?

Pedro: Sim, sim, sim.

Entrevistadora: Porquê?

Pedro: Porque eles aí pedem o que… Não … Eles não dão medidas certas por isso eu pensei, se a professora quer que nós, quer o que acontece aquilo, nós tínhamos que arranjar uma expressão geral, e geral tem que utilizar letras e ver o que acontece à fórmula no final.

A questão dez é diferente da questão anterior não só em grau de dificuldade, que é superior, pois incide na área e altera as medidas recorrendo a percentagens em vez de valores absolutos, mas também na quase impossibilidade de prever o resultado final, sendo incontornável, para o alcançar, o recurso à linguagem algébrica:


10. Considera um rectângulo qualquer. O que aconteceria à sua **área** se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10%? Justifica a tua resposta.

A sua área diminuiria 1%

$A = c \times l$

$A = (c + 0{,}1c) \times (l - 0{,}1l)$

$A = 1{,}1c \times 0{,}9l$

$A = 0{,}99\,c\,l$

Entrevistadora: … E chegaste à conclusão que diminuía 1%.

Pedro: Hum, hum.

Entrevistadora: E esperavas isto, antes, ou não esperavas nada?

Pedro: Não, não esperava isto pensava que diminuía mais.

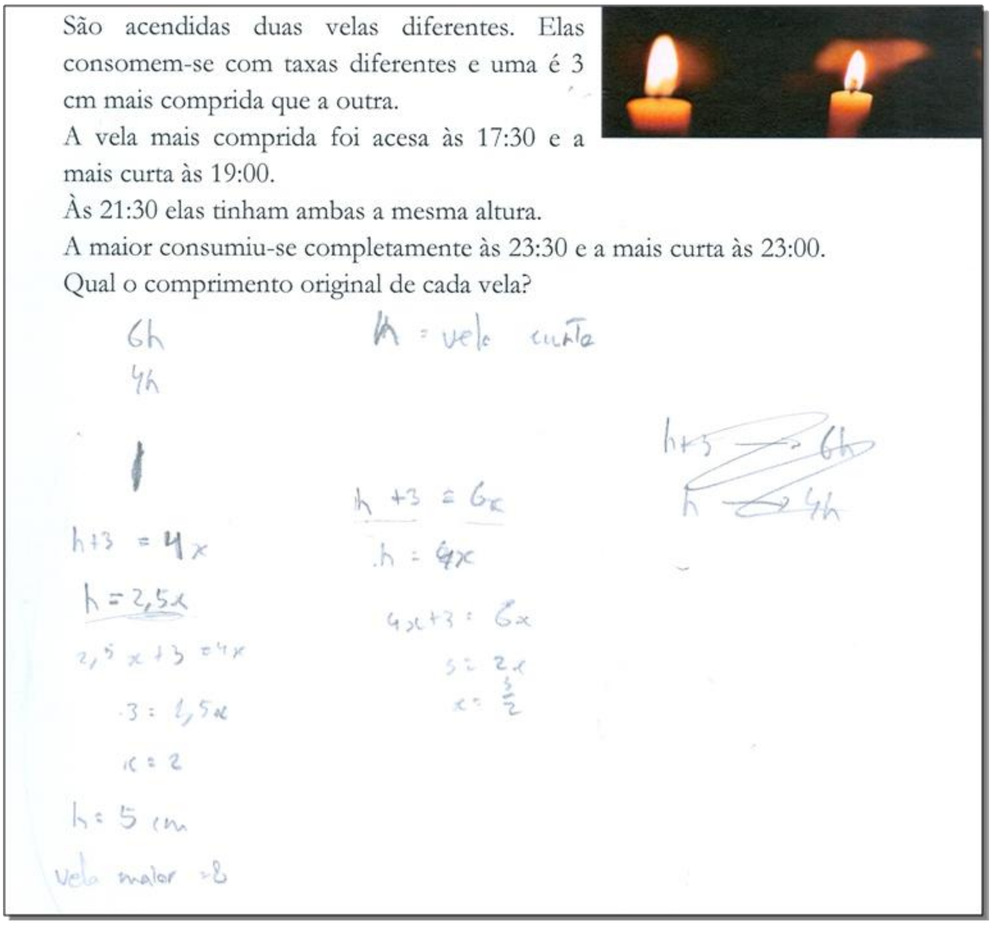
…

Entrevistadora: Achas que seria possível resolver de outra forma que não com letras?

Pedro: Não estou a ver. Só pensei nessa maneira, não estou ver outra maneira.

Na sua reposta às questões analisadas, o aluno revela um forte sentido de símbolo, utilizando o seu poder e chegando a um resultado que Arcavi (1994) classifica como óbvio e conclusivo, que encerra em si não só a resposta mas também a sua explicação.

Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar. A tarefa nove da entrevista pressupõe a criação de expressões simbólicas para traduzirem a situação proposta, alguma manipulação e principalmente uma permanente visão global do problema que evite procedimentos sem sentido e permita tirar conclusões, gerais e fundamentadas, a partir de uma boa interpretação do símbolo no contexto do problema. Pedro começa por determinar o tempo que cada vela demora a consumir-se (*6h e 4h*) e considera que *h* é a altura da vela mais curta. De seguida atribui a letra *x* à taxa de consumo de ambas as velas, começando a desenvolver e a escrever o seu raciocínio:



São acendidas duas velas diferentes. Elas consomem-se com taxas diferentes e uma é 3 cm mais comprida que a outra.
A vela mais comprida foi acesa às 17:30 e a mais curta às 19:00.
Às 21:30 elas tinham ambas a mesma altura.
A maior consumiu-se completamente às 23:30 e a mais curta às 23:00.
Qual o comprimento original de cada vela?

6h
4h

h = vela curta

h+3 → 6h
h → 4h

h+3 = 4x
h = 2,5x
2,5x + 3 = 4x
3 = 1,5x
x = 2
h = 5 cm
vela maior = 8

h +3 = 6x
h = 4x
4x+3 = 6x
3 = 2x
x = $\frac{3}{2}$

Ao longo do seu trabalho o aluno mostra frequentemente dúvidas sobre os procedimentos que vai adotando:

Entrevistadora: … Porquê o *x*?

Pedro: O *x* será a taxa de…

Entrevistadora: De consumo.

Pedro: De consumo da vela. Que eu não sei se posso fazer isto.

Entrevistadora: Portanto, a altura da vela grande é igual a *4x.*

Pedro: Eu não posso fazer isto.

Entrevistadora: O 4, o 4 escolheste-o porque é o…

Pedro: É o número de horas quando elas estão iguais.

Entrevistadora: 4 horas uma, e 2,5 horas a outra. Hum. E depois, *2,5x* …

Pedro: Eu não posso fazer isto porque elas têm taxas diferentes, e eu estou a usar a mesma taxa, penso eu.

Pedro também parece considerar que a diferença entre a altura das velas será sempre de 3cm o que, neste caso, não é verdade pois as taxas de consumo são diferentes, razão pela qual há um instante de tempo em que as alturas das duas velas se igualam. O aluno chega no entanto a um valor para a altura de cada uma das velas:

Pedro: Acabando isto fico com *h* igual a 2… igual a 5

Entrevistadora: *h* igual a… A vela inicial tem 5 é a altura da vela pequena?

Pedro: A altura da vela pequena terá… A altura da vela pequena será 5cm e a da maior, ah… Exato, e a da maior será 8.

Entrevistadora: 8 cm.

Pedro: … Se isto está bem ou mal…

Pedro não consegue resolver na totalidade o problema mas recorre ao símbolo e mostra capacidade de refletir sobre o que vai fazendo e de questionar os seus resultados.

Entrevistadora: Estás a substituir, a ver qual era o *x*, a que ela se consome ao fim de 6 horas, não é? *h+3=6x.*

Pedro: Sim. Fui tentar ver se *h+3* demoraria 6 horas.

Entrevistadora: A consumir-se.

Pedro: E o *h* demorava 4 horas a consumir-se.

Entrevistadora: Hum.

Pedro: Aqui as alturas não são iguais, por isso, eu não posso fazer isto, penso eu. Não posso igualar. Isto é isto. Este *h* é este.

Entrevistadora: Ah, o *h* é o mesmo não é?

Pedro: Sim o *h* é o mesmo.

Entrevistadora: O *h* é o mesmo… Mas achas que está bem? A vela maior é 5 e a … Mas não estás a conseguir verificar se está bem não é?

Pedro: Não. E eu acho que não está bem. Mas deixe-me só…

…

Pedro: Estou a pensar que acho que não consigo resolver isto… Mais 3, 4 horas… E eu aqui tenho duas velocidades a que elas, a que elas…

Entrevistadora: … Se consomem.

Pedro: Se consomem. Quer dizer que eu não posso fazer este sistema.

Pedro encara com segurança as tarefas que se enquadram na categoria de problemas e mostra sentido de símbolo na forma como os aborda. Reconhece a importância e o poder da utilização dos símbolos, desenvolve expressões simbólicas que lhe permitem resolver as tarefas propostas, e mesmo nas de maior complexidade mostra persistência no recurso ao símbolo para verificar e corrigir as suas conjeturas. A tabela 5.7 apresenta aspetos do sentido de símbolo de Pedro em questões que envolvem problemas.

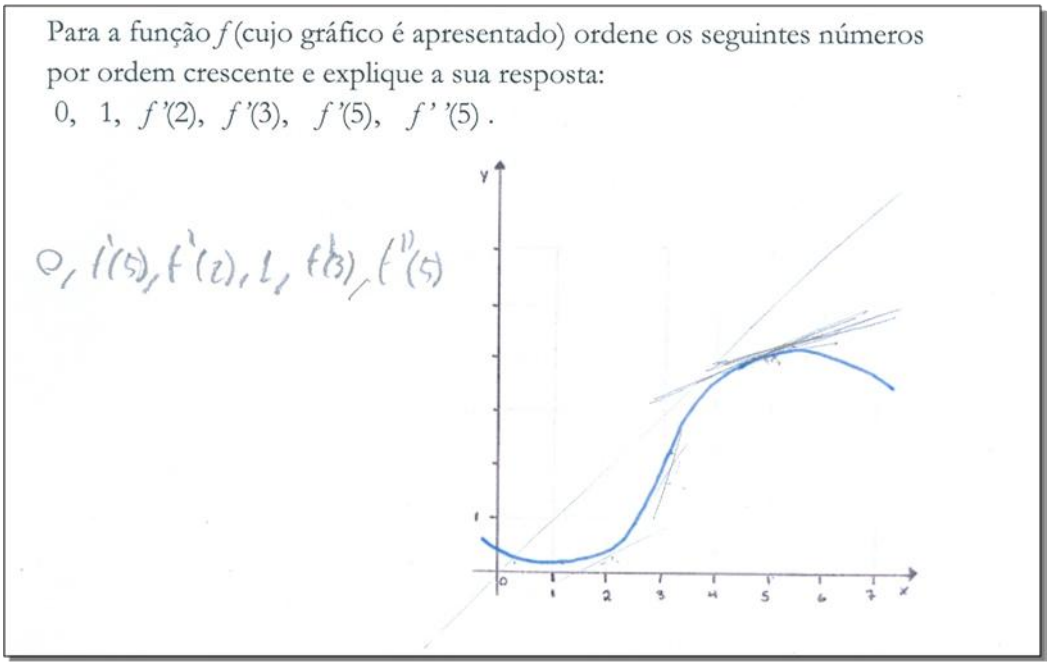
Tabela 5.7 - *Resumo do sentido de símbolo de Diogo em relação aos problemas*

Decidir se é útil recorrer ao símbolo e interpretá-lo no contexto do problema.	Recorre ao símbolo e interpreta-o corretamente no contexto do problema.
Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.	Cria sem dificuldades expressões simbólicas que traduzem uma determinada situação e compreende a vantagem e a necessidade do recurso ao símbolo.
Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar.	Utiliza os símbolos para conjeturar e para generalizar mostrando capacidade de analisar o próprio trabalho aceitando e rejeitando conjeturas.

Funções

Utilizar o símbolo para estabelecer relações. A décima primeira tarefa proposta na entrevista requeria que o aluno estabelecesse uma relação de ordem de grandeza entre: dois valores (o zero e o um), as primeiras e as segundas derivadas de uma função, dada apenas a sua representação gráfica.

Pedro analisa o que é pedido e começa por traçar retas tangentes nos vários pontos. Identifica a derivada num ponto como o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, ordenando os valores corretamente:



Pedro: Ok. Pondo então, tínhamos o zero, depois tínhamos, a derivada no ponto 5, sim, a derivada no ponto 5, depois tínhamos a derivada no ponto 2. Alto, sim, no ponto 2, depois tínhamos 1 e depois *f ´3.*

Quando questionado sobre a posição do número 1, o aluno justifica a sua resposta da seguinte forma:

Entrevistadora: Como é que verificaste, porque é que achas que *f ´(2)…* porque é que puseste aí o 1, na realidade?

Pedro: Traçando o *y=x*..

Entrevistadora: A reta *y=x* ?

Pedro: Porque todos os declives que sejam mais inclinados do que este são maiores que 1.

Entrevistadora: Portanto pareceu-te que…

Pedro: E o único é o *f ’(3).* Os outros são mais próximos do *x*.

Apesar de não utilizar os termos da forma mais correta fica claro que dá sentido ao conceito gráfico de derivada e introduz a reta *y=x* para comparação mostrando também ter sentido do declive de uma reta a partir da sua equação. Em relação à segunda derivada no ponto *x=5*, identifica-a com a derivada da derivada considera o ponto de inflexão como um ponto no qual a segunda derivada é nula, no entanto, não estabelece uma relação entre a concavidade da curva e o sinal da segunda derivada. O aluno tenta derivar a reta tangente ao gráfico da função no ponto $x=5$, que é horizontal, e obtém o valor zero que o "baralha":

Entrevistadora: O que é que estás a pensar Pedro?

Pedro: Estou a pensar que estou baralhado. Faço uma derivada no 5 e dá-me a reta, fazendo a derivada de novo neste ponto da reta, a segunda derivada vai-me dar zero. Mas a segunda derivada de cinco não pode dar zero, tinha de dar zero no ponto de inflexão, se desse, penso eu.

…

Entrevistadora: f''… Então. Porque é que a derivada da reta dá zero?

Pedro: A segunda derivada?

Entrevistadora: A segunda derivada da reta ou…

Pedro: Da reta, ah, não, a derivada da reta é a segunda derivada desta.

Entrevistadora: Da função não é? Nesse ponto.

Pedro: Que acho que dá zero, por isso…

Entrevistadora: Porque é que achas que dá zero?

Pedro: Porque fazendo, faço a primeira derivada, de 5 dá-me a tal reta.

Entrevistadora: Dá-te a reta.

Pedro: Fazendo a derivada dessa reta no ponto 5 vai-me dar…

Entrevistadora: Imagina que a reta é…

Pedro: Vai-me dar uma constante, que é 5... 5, não sei se o 5 será maior ou menor que esta. (compara com $f'(3)$)

Entrevistadora: Portanto, achas que a segunda derivada é a derivada da reta dessa reta que está aí, tangente ao ponto 5.

Pedro: Sim, acho que sim. Acho que seria assim.

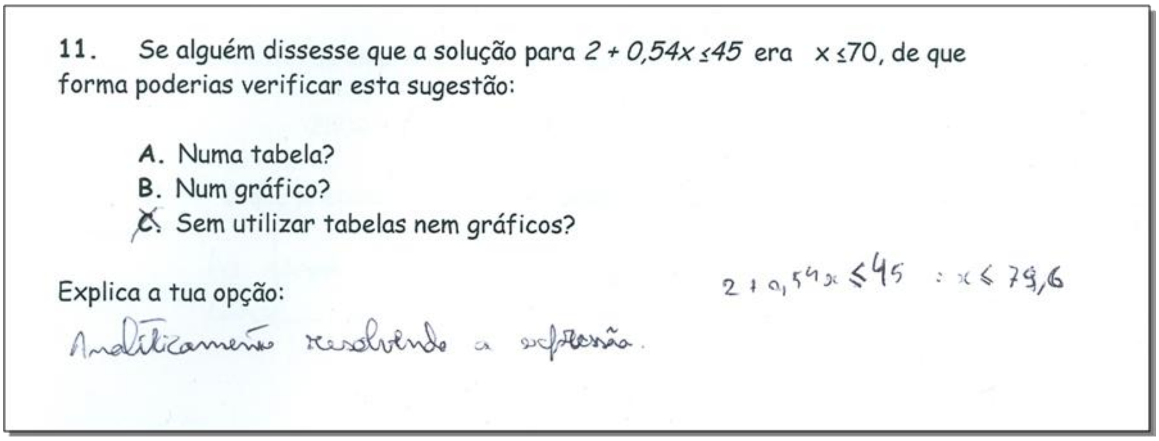
Entrevistadora: Fica o maior.

Pedro: Mas não tenho a certeza se deveria trocar estas duas.

Entrevistadora: As duas últimas, $f'(3)$ e $f''(5)$? Ok. Vamos à doze.

Pedro acaba por considerar que a segunda derivada no ponto $x=5$ é cinco escrevendo-o como o maior dos valores apesar de ter uma dúvida, legítima, sobre se $f''(3)$ não será o maior pois não é possível determinar o seu valor exato. A identificação da segunda derivada com a concavidade da curva e consequente atribuição de um valor inferior a zero permitir-lhe-ia o estabelecimento da relação correta entre os símbolos, de acordo com o proposto na tarefa.

Escolher a representação simbólica adequada. A escolha da representação adequada e, mais importante, a capacidade para transitar entre representações dentro ou fora do mesmos registo é um aspeto importante do sentido de símbolo. Pedro opta por uma resolução analítica numa questão que poderia ser facilmente respondida com uma tabela ou com um gráfico uma vez que tem à sua disposição a calculadora gráfica:



11. Se alguém dissesse que a solução para $2 + 0,54x \leq 45$ era $x \leq 70$, de que forma poderias verificar esta sugestão:

A. Numa tabela?
B. Num gráfico?
~~C.~~ Sem utilizar tabelas nem gráficos?

Explica a tua opção:

$2 + 0,54x \leq 45 \; : \; x \leq 79,6$

Analiticamente resolvendo a expressão.

No decorrer da entrevista, Pedro revela que pensou na tabela pois associa-a ao tema das inequações estudado em anos anteriores: No entanto é forçado a optar pela resolução analítica pois já não se lembra de como utilizar a tabela:

Entrevistadora: Aqui na onze resolveste analiticamente, escolheste logo a analítica ou ainda pensaste em talvez usar uma tabela ou um gráfico?

Pedro: Não, não por acaso pensei numa tabela porque lembro-me da matéria das inequações, normalmente utilizava tabelas para certas inequações e pensei em utilizar a tabela. Mas depois pensei que ir analiticamente… Acho que era mais simples.

Entrevistadora: Mais simples… E se fizesse com uma tabela como é que terias feito Pedro?

Pedro: Boa pergunta, não sei bem…

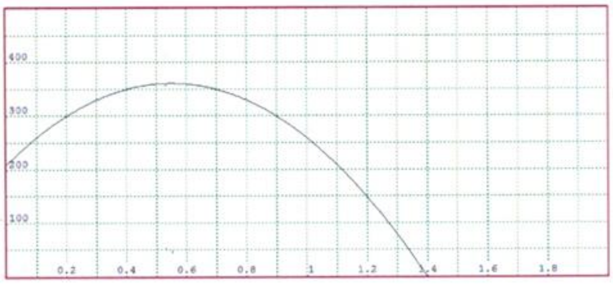
Entrevistadora: O que é que punhas ou o que é que vias com a tabela ou com o gráfico?

Pedro: Acho que tinha que ir à procura dos zeros da inequação. Oh, já não sei como é que era…

Pedro aparenta assim, neste caso, não dominar a utilização das diferentes representações. Na tarefa dez da entrevista é também requerida uma escolha de entre quatro representações algébricas propostas. É também fornecida a representação gráfica que pode ser utilizada para estimar ou confirmar resultados:

A altura atingida por uma bola de ténis depende do tempo que passou desde que foi lançada. Note que o gráfico é parabólico, mas pode não ser o mesmo que o da trajectória da bola. A sua altura (medida em metros) como função do tempo (medido em segundos) desde o instante em que foi lançada é:

$$210 + 550t - 500t^2$$



As expressões (a)-(d) apresentadas em baixo são equivalentes. Qual delas é mais útil para encontrar a altura máxima da bola e porquê?

(a) $210 + 550t - 500t^2$ (b) $-500\left(t - \frac{14}{10}\right)\left(t + \frac{3}{10}\right)$

(c) $\frac{1}{10}(700 - 500t)(10t + 3)$ (d) $-500\left(t - \frac{11}{20}\right)^2 + \frac{1445}{4}$

Pedro opta pela expressão a) e pelo recurso à fórmula resolvente para encontrar os zeros, a partir deles o ponto médio, e depois, por substituição, determinar a altura máxima da bola:

Entrevistadora: Se tivesses que escolher, qual escolhias e porquê?

Pedro: A altura máxima da bola! Seria esta *(indica a alínea a).*

Entrevistadora: A alínea a)? Como é que farias?

Pedro: Faria a fórmula resolvente. Posso fazer na fórmula resolvente? *(refere-se à utilização da calculadora).*

Entrevistadora: Sim, sim.

Pedro: -500 … Obtenho dois valores. -0,3 e …

Entrevistadora: 1,4.

Pedro: 1,4. Fazia o ponto médio disto, que dá 1,4 menos (-0,3) sobre 2. Dá 1,7 sobre 2.

Entrevistadora: 1,7 sobre 2.

Pedro: Depois fazia.

Entrevistadora: Dá 0,85.

Pedro: Dá 0,85. Depois fazia, substituía -500…

Entrevistadora: Substituías na expressão inicial e obterias. Olhando ali para o gráfico conseguias prever mais ou menos o valor que ias obter?

Pedro determina de forma incorreta a abcissa do ponto médio pois subtrai os valores em vez de os adicionar. No entanto, revela sentido de símbolo e capacidade de relacionar as representações, pois identifica o erro ao verificar no gráfico, dado que o máximo ocorre para um valor diferente do que obteve, e procede à sua correção:

Pedro: Isto não está a dar certo, porque aqui era mais. Aqui dava 1,1 (a dividir por 2) 0,55.

Entrevistadora: Ah!

Pedro: 0,55 exatamente. Aqui é mais. É isso mesmo.

Entrevistadora: E já dava.

Pedro: Já. Então e agora?

Entrevistadora: Achas que as outras fórmulas em que as expressões estão representadas não te seriam particularmente úteis?

Pedro: Hum. Não eram muito úteis não.

Entrevistadora: Para encontrar o zero, a b), a c) ou a d) não seriam… imagina que não tinhas a máquina para a fórmula resolvente. Alguma delas te poderia ser útil para determinar os zeros?

Pedro: Sim, qualquer uma delas na c) sabemos que para isto ser zero, igualávamos a zero *(indica um dos fatores entre parêntesis).*

Entrevistadora: Igualavas a c) a zero…

Pedro: E depois isto tinha de ser zero… *(indica o outro fator entre parêntesis).*

Entrevistadora: Hum, hum.

Pedro explicita o seu raciocínio e obtém os valores para os zeros que já tinha obtido pelo outro método, identifica a expressão da alínea b) como idêntica à c) na forma como encontraria os zeros e não considera a expressão da alínea d) como útil para a determinação da altura máxima da bola:

Pedro: Nesta aqui também dava a mesma coisa (indica a b)). Nesta aqui acho que não dava muito jeito (indica a d)).

Entrevistadora: Não te lembras do formato desta? De décimo ano!

Pedro: Ia dar a mesma coisa, só que íamos ter de fazer a raiz, penso eu. Não, aqui…

Entrevistadora: E depois para resolver…

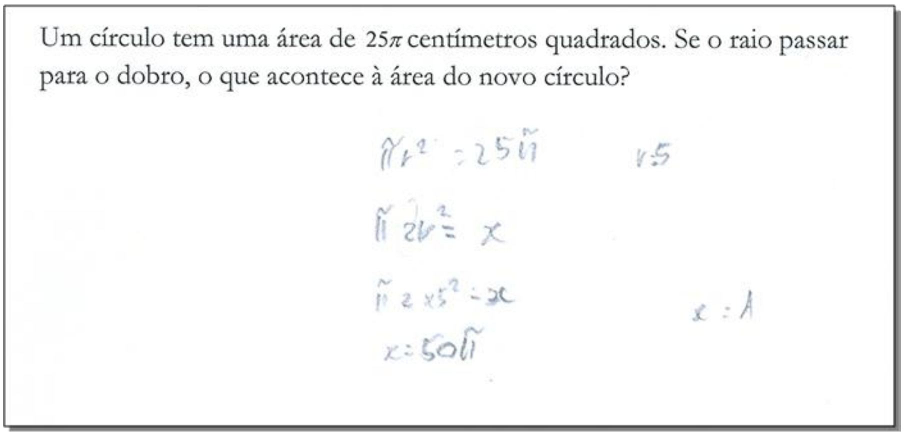
Pedro: Sim…

Entrevistadora: Mas a tua opção seria a a).

Pedro: Sim. Iria por aqui.

Efetivamente a alínea d) seria a melhor opção pois permite a leitura direta das coordenada do vértice da parábola, e consequentemente da altura máxima atingida pela bola, sem ser necessário recorrer a mais cálculos. Pedro revela assim uma tendência para a utilização da fórmula resolvente e mostra pouco sentido de símbolo ao fazer essa opção. O aluno nem sempre recorre à representação simbólica adequada para a sua análise e opta pela via analítica em detrimento do recurso ao gráfico ou à tabela, no entanto mostra que é capaz de trabalhar com transformações de representações dentro e entre registos, ou seja com tratamentos e com conversões (Duval, 2006b).

Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos. Na tarefa número catorze da entrevista, pretende-se que seja analisado o efeito que a variação do raio para o dobro tem na área do círculo. Pedro responde da seguinte forma:


Um círculo tem uma área de 25π centímetros quadrados. Se o raio passar para o dobro, o que acontece à área do novo círculo?

$\pi r^2 = 25\pi$ $\quad r5$

$\pi\, 2r^2 = x$

$\pi\, 2 \times 5^2 = x$ $\quad x = 1$

$x = 50\pi$

Entrevistadora: Um círculo tem uma área de 25π cm quadrados. Se o raio passar para o dobro o que é que te acontece à área?

Pedro: Ora, área π r ao quadrado, e isto é 25π, quer dizer que o raio é igual a 5. "Se o raio passar para o dobro…."

Entrevistadora: "… Se o raio passar para o dobro"

Pedro: "… A área do novo círculo?" π, 2r ao quadrado igual a x…temos 2 vezes 5… x igual a 50, x é a área.

Entrevistadora: Então, o que é que aconteceu à área?

Pedro: Passou para o dobro.

Entrevistadora: Quando o raio passa para o dobro, a área também passa para o dobro?

Pedro: Hum, exato.

Entrevistadora: Em qualquer círculo podes dizer que isso é verdade?

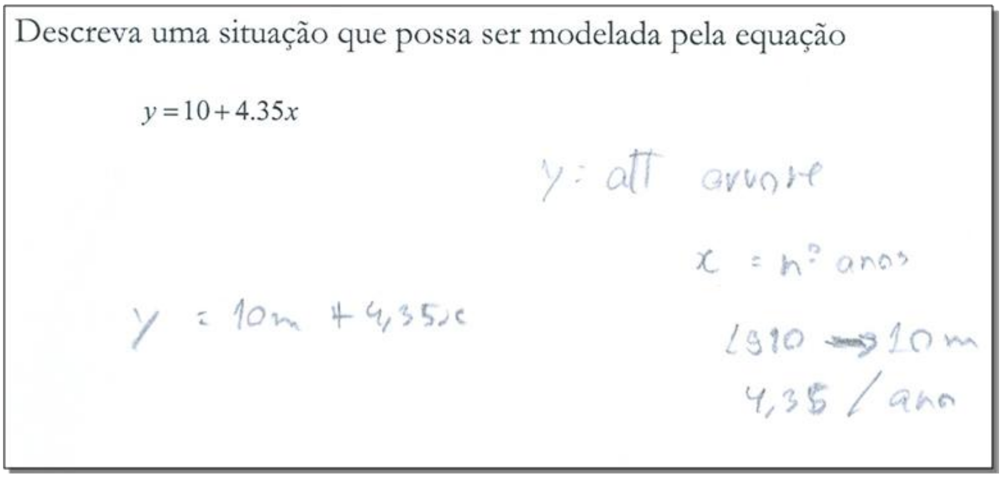
Pedro: Posso.

Entrevistadora: É uma relação linear, então? Entre o raio e a área?

Pedro: Sim, é.

Pedro não revela sentido de símbolo no seu trabalho nesta tarefa. Ao elevar apenas o r ao quadrado, obtêm uma relação linear entre o raio e a área e considera-a correta, não vendo a contradição com a expressão da própria área que não é linear em relação ao raio.

Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes. A tarefa catorze da entrevista aborda a modelação de forma contrária à usual. É dada uma expressão e propõe-se ao aluno que descreva uma situação que possa ser por ela modelada. Pedro descreve uma situação que envolve o crescimento de uma árvore:


Descreva uma situação que possa ser modelada pela equação

$y = 10 + 4.35x$

y: alt arvore

x = nº anos

y = 10m + 4,35x

1910 → 10m

4,35 / ano

Pedro: Ora temos uma árvore, y é a altura da árvore. O x será o número de anos, então a árvore no ano de 1910 tem a altura de 10 metros.

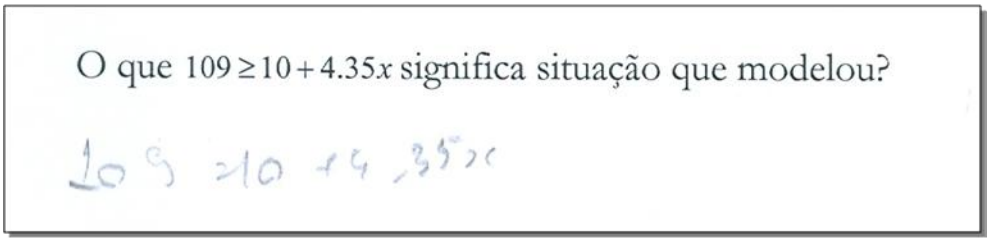
Entrevistadora: Sim.

Pedro: Cresce 4,35 metros. É uma árvore muito grande. Todos os anos… Então temos 10 metros.

Entrevistadora: Portanto a tua situação… Diz, diz.

Pedro: Após 1910 temos 10 metros mais 4,35.

O aluno mostra compreender os papéis dos símbolos na situação que descreve ao responder à seguinte questão:


O que $109 \geq 10 + 4.35x$ significa situação que modelou?

$109 \geq 10 + 4,35x$

Entrevistadora: Então, em que é a condição *109* maior ou igual que *10+4,35x* significa na tua situação?

Pedro: Quer dizer que a altura, quer dizer que a árvore só chegou aos *109* metros

Entrevistadora: Só?!

Pedro: E parou de crescer.

Entrevistadora: Parou de crescer e podes saber o ano em que isso aconteceu?

Pedro: Posso, sim senhora, basta igualar o *y* a *109*, hum, sim, sim.

Entrevistadora: E encontrar…

Pedro: Faz-se *109* igual a *10+4,35x*, encontramos o *x*, com casas decimais depois fazemos regras de três simples

Entrevistadora: Ok.

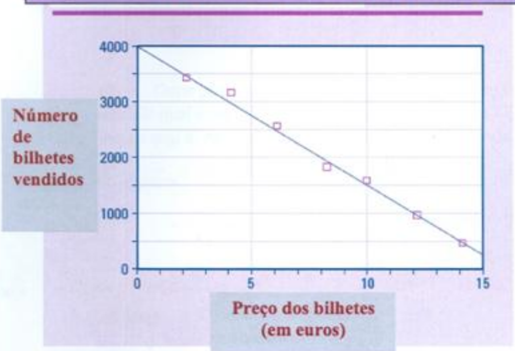
Pedro: Saber o mês!

Entrevistadora: Saber o mês e a hora e os segundo!!! Em que ela parou de crescer, uma árvore muito alta…

A décima terceira questão do teste diagnóstico, relativa a funções, envolve a modelação de uma situação envolvendo a expressão analítica e a representação gráfica. Pedro volta a mostrar que compreende a relação entre o gráfico e a expressão que o descreve:

13. O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espectáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).

Preço dos bilhetes e estimativa do número de bilhetes vendidos



Despesas:	
Banda	6000 €
Sala de espectáculos	1500 €

13.1 O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação:

Número de bilhetes vendidos = 4000 - 250 x (Preço do bilhete)

a) Como terá, o organizador, chegado a esta equação?

Declive.

ponto A: 0,4000

ponto B: 10,1500

$\text{Declive} = \dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \text{Declive} = \dfrac{1500 - 4000}{10} = -250$

$y = mx + b$

$m = -250$

x = preço dos bilhetes

b = ordenada na origem $= 4000$

Entrevistadora: Aqui o treze, o da organização do concerto, como é que chegaste a isto? Olhaste para o quê?

…

Pedro: Portanto temos a expressão de uma reta (indica o gráfico), calculado o declive a partir de dois pontos, este e este *(refere-se aos pontos (0, 4000) e (10, 1500)*.

Entrevistadora: Escolheste estes dois por acaso?

Pedro: Porque são os mais facilmente identificáveis. Fui calcular o declive e sabemos a ordenada na origem.

Entrevistadora: Portanto tu fizeste o modelo e depois verificaste que deu igual. Não tentaste ir à procura da razão para o 4000 e para o (-250)?

Pedro: Não, no fundo não.

De seguida Pedro relaciona e interpreta a situação fazendo uma crítica ao modelo proposto:

b) Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes vendidos? Explica a tua resposta.

Penso que não porque não é muito realista

Entrevistadora: Porque é que achas que o modelo não é muito realista?

Pedro: Bem, porque nós aqui, podemos ver que se nós aumentássemos mais um pouco o preço iriam haver zero pessoas a ir ao concerto e isso não costuma acontecer.

Entrevistadora: Pelo menos algumas vão sempre, é isso? Mas em termos de andamento do gráfico faz algum sentido ou não, o facto de mais bilhetes vendidos…

Pedro: Sim, isso sim.

Através das suas respostas e da forma como as fundamenta, Pedro mostra um sentido de símbolo desenvolvido no modo como compreende a utilização dos símbolos em contextos de modelação.

Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões. Ainda na questão treze do teste diagnóstico é solicitado ao aluno que tome decisões com base no modelo apresentado. Pedro mostra sentido de símbolo ao tentar estabelecer uma expressão geral para a função que denomina de "dinheiro arrecadado":

c) Como poderia o organizador utilizar a equação ou o gráfico para decidir qual o melhor preço de venda dos bilhetes? Explica o teu raciocínio e indica qual é, na tua opinião o melhor preço de venda dos bilhetes.

Dinheiro arrecadado: nº de bilhetes × preço

$= (4000 - 250x) \times x$

$= 4000x - 250x^2$

Parábola

$4000x - 250x^2 = 0$

$x(4000 - 250x) = 0$

$x = 0 \vee 4000 = 250x$

$x = 16$

Melhor preço é 16€

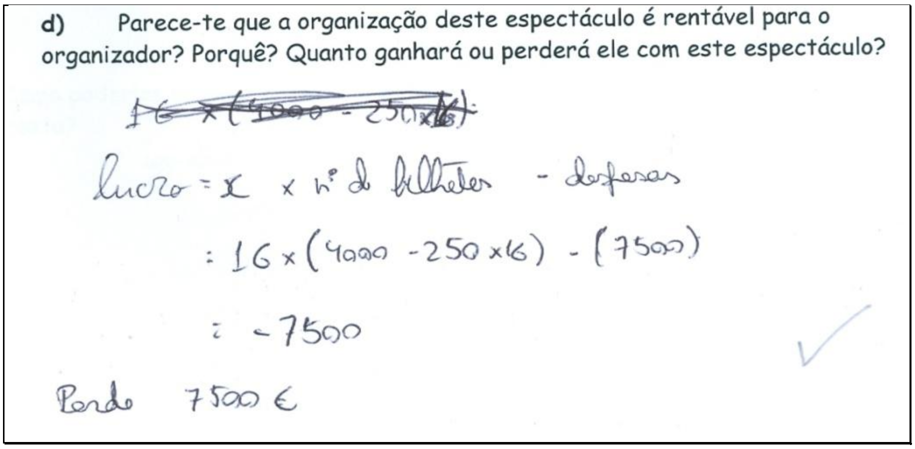
preço dos bilhetes $= x$

O objetivo de Pedro é encontrar o valor do preço do bilhete *(x)* que maximiza a função que definiu. O aluno encontra os zeros da função, que identifica como quadrática, e que associa ao gráfico de uma parábola, e depois considera um dos zeros como o melhor preço de venda. No decorrer da entrevista é questionado sobre o seu trabalho e identifica o erro esclarecendo o que pretendia fazer:

Entrevistadora: Porque é que igualaste a zero?

Pedro: Eu aí fui… Enganei-me aí. Portanto isto está bem só que está incompleto, eu supostamente tenho o "0" e o "16" e ia encontrar o ponto médio entre estes e ia ver o pico da parábola. O *x* que correspondesse ao pico da parábola, que seria 8 euros é que correspondia ao preço… ao melhor preço dos bilhetes e não o 16.

A última alínea da questão pede uma análise da rentabilidade do espetáculo, à luz dos resultados obtidos. Pedro com o valor incorreto que obteve no passo anterior conclui "corretamente" que o organizador perde 7500 euros.


d) Parece-te que a organização deste espectáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espectáculo?

~~16 × (4000 − 250 × 16)~~

Lucro = x × nº de bilhetes − despesas

= 16 × (4000 − 250 × 16) − (7500)

= −7500

Perde 7500 €

Apesar do seu erro Pedro toma decisões fundamentadas e conclui que o se perde muito dinheiro com a organização do espetáculo.

Também na alínea d) da questão doze do teste diagnóstico é requerida uma decisão sobre qual o melhor de dois planos de aluguer de uma carrinha. O plano A implica um maior investimento inicial e um pagamento semanal mais suave (75€) e o plano B um investimento inicial menor com um pagamento semanal de 90€. Pedro responde do seguinte modo:

12. Uma empresa de pizzas está a considerar a opção de fazer um aluguer (leasing) de uma carrinha para fazer entregas. Foram-lhe dadas duas opções, A e B que estão indicadas em baixo. Em cada caso, o custo do aluguer $A(t)$ e $B(t)$ (em euros) é uma função do período de tempo que durar (t em semanas).

Plano A: $A(t) = 2500 + 75t$
Plano B: $B(t) = 1000 + 90t$

d) Por qual dos planos deve decidir o responsável da empresa de pizzas? Porquê?

Deve escolher a opção B pois o negócio pode correr mal e não durar muito.

A resposta do aluno é um pouco surpreendente, mas reveladora de um forte sentido de símbolo na forma como apreende as implicações dos dois planos, e toma a sua decisão, o que é patente no seguinte excerto da entrevista:

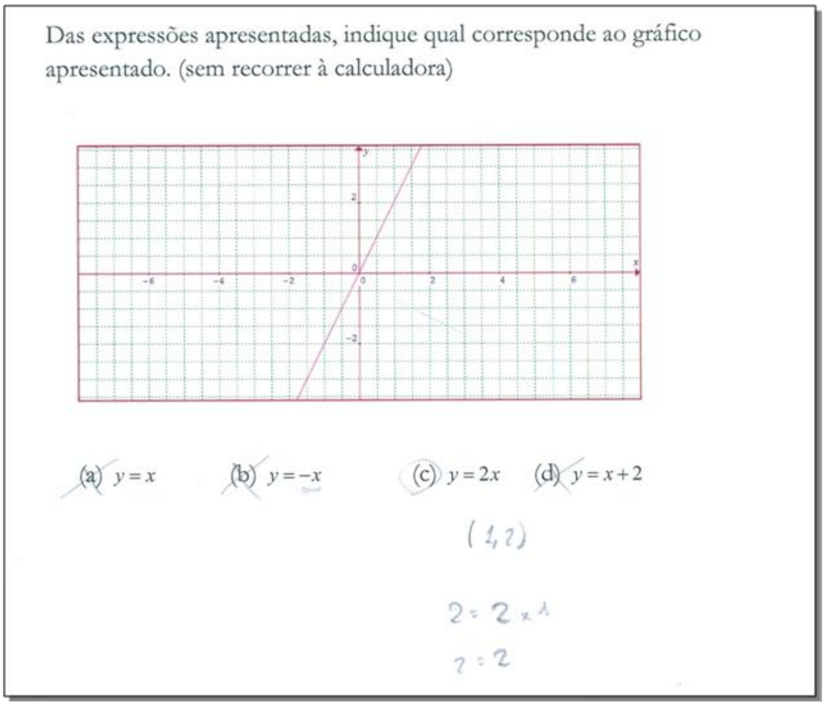
Pedro: Pois é exatamente eu quando dei a resposta sobe logo que era pessimismo.

…

Pedro: Se correr mal e realmente o negócio não durar muito, escolher o plano A não faz sentido porque o plano A só passa a ser mais lucrativo que o plano B passado um certo tempo. Por isso se o negócio correr mal vai ter pouco tempo e o plano B…

Pedro é capaz de tomar decisões fundamentadas e mostra ter este aspeto do sentido de símbolo particularmente desenvolvido.

Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático. Na tarefa doze da entrevista clínica que incide explicitamente na mudança de representações, Pedro identifica corretamente a expressão analítica correspondente à reta representada graficamente. Ao longo da conversa, justifica a sua opção através da eliminação fundamentada das restantes.



Entrevistadora: Qual é que achas que é a expressão que corresponde ao gráfico dado? Pensa alto ou como é que estás a pensar.

Pedro: Estou a pensar que esta aqui já está excluída. *(indica a opção b))*

Entrevistadora: A b) excluíste logo, porquê?

Pedro: Porque declive negativo, ao contrário.

Entrevistadora: A reta tinha de estar ao contrário?

Pedro: Exato. Esta aqui não pode ser, não passa no… *(indica a opção a)).*

Entrevistadora: Excluíste a a) porque não passa no ponto (1,1).

Pedro: Esta aqui *(indica a d))* não pode ser, porque o 2 faz levantar a função e ela passa no (0,0). É capaz de ser esta.

Entrevistadora: A c) por exclusão das outras?

Pedro: Sim.

Entrevistadora: E podes verificar se está bem?

Pedro: Ah. Posso. Se eu encontrar aqui, por exemplo, ah, olá (2,2), então… Isto aqui não é 2. Hum, posso, temos o ponto, sabemos que o gráfico passa no ponto (1,2). 2 é igual a 2 vezes 1 e isto dá 2 igual a 2, o que satisfaz a… Que é uma igualdade.

Quando questionado sobre como faria se lhe fosse dada a expressão, Pedro responde da seguinte forma:

Entrevistadora: E se eu fizesse ao contrário, te desse uma equação de uma reta, por exemplo *y =4x-1*, como é tu farias se da equação da reta te pedisse para traçar o gráfico? Como é que farias isso?

Pedro: Ora, temos o, sabemos logo de olhar para ela sabemos logo o (0, -1)

Entrevistadora: No ponto (0, -1).

Pedro: Exato. E precisamos de dois pontos para traçar uma reta.

Entrevistadora: Chega?

Pedro: Dois pontos? Chega! E então, o que fazemos é substituir o *x* por… Exato, o *x* por qualquer número, por exemplo, se for 1, ficamos com *y* igual a 4 vezes 1 menos 1, isto dá *y* igual a 3, quer dizer que o outro ponto será (1,3). Marcamos os pontos.

Pedro mostra que consegue transitar entre representações com alguma facilidade, conseguindo movimentar-se em direções contrárias. Apesar dos conhecimentos matemáticos envolvidos nessas movimentações serem os mesmos, uma das direções implica uma melhor compreensão da conversão (Duval, 2006b), a que corresponderá um sentido de símbolo bem desenvolvido.

A seguinte questão do teste diagnóstico também implica uma mudança de representação mas associada a uma modelação do lançamento de uma bola. Para Pedro parece ser mais intuitivo recorrer à trajetória real de uma bola, do que à expressão que a modela:

14. Para um lançamento típico de basket a altura da bola (em metros) será uma função do tempo de voo (em segundos), modelada pela seguinte equação:

$$h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$$

a. Qual o tipo de gráfico da relação (tempo de voo, altura)?

Parábola

Entrevistadora: Na catorze identificaste a parábola como? Porque imaginaste a bola a voar ou porque olhaste para a expressão?

Pedro: As duas, as duas.

Entrevistadora: Viste que uma batia certo com a outra?

Pedro: Hum, hum.

Entrevistadora: Então a parábola que imaginaste tinha a concavidade para cima ou a concavidade para baixo?

Pedro: Para baixo.

Entrevistadora: Para baixo. Por causa da bola ou por causa de qualquer coisa na função?

Pedro: Por causa da bola mais.

Entrevistadora: Mais… Olhando assim para a função não…

Pedro: Olhando para a função também ia lá mas fui primeiro à altura da bola… Ao movimento da bola, antes de olhar à expressão.

Pedro mostra sentido de símbolo na forma como trabalha com a representação gráfica e analítica do mesmo objeto matemático. Em casos de modelação de uma situação que conhece, faz também uma ligação com a realidade que lhe permite uma mais fácil identificação com a representação gráfica. O sentido de símbolo de Pedro quando trabalha com funções está resumido na tabela 5.8.

Tabela 5.8 - *Resumo do sentido de símbolo de Pedro em relação às funções*

Utilizar o símbolo para estabelecer relações.	Lê corretamente os símbolos, dá-lhes sentido e estabelece relações entre eles. Tem um sentido incorreto do conceito gráfico de segunda derivada.
Escolher a representação simbólica adequada.	Nem sempre escolhe a representação simbólica adequada e não trabalha da mesma forma com todas as representações.
Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.	Faz uma análise incorreta do efeito da variação do raio na área de um círculo.
Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.	Atribui sentido a uma modelação dada, e cria situações que se podem inserir num dado modelo. Tem uma perspetiva clara sobre os diferentes papéis que o símbolo pode desempenhar.
Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.	Utiliza e fundamenta as suas decisões com recurso ao símbolo.
Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.	Identifica corretamente a representação gráfica com a correspondente representação algébrica. Trabalha com os dois tipos de transformação de representações semióticas, tratamentos e conversões.

Tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas. Este aspeto do sentido de símbolo de alguma forma assenta nas outras facetas de sentido de símbolo, estando o seu grau de desenvolvimento diretamente com elas relacionado. Pedro mostra ter este aspeto do sentido de símbolo desenvolvido ao longo do seu trabalho, o que é visível na forma como o explica, na sua capacidade para tirar conclusões com fundamento e, ao aprofundar e refletir sobre o seu próprio raciocínio, no modo como corrige algumas das suas próprias ideias, quando inicialmente incorretas. Mesmo em situações que não consegue resolver totalmente, mostra autonomia e tenacidade na busca da solução associada a reflexões frequentes sobre o que vai fazendo.

5.2.2. O sentido de símbolo de Pedro e a sua aprendizagem da Álgebra

Na forma como Pedro trabalha com conteúdos específicos de 12.º ano é visível o seu sentido de símbolo. Nesta parte do trabalho procuro mostrar evidência sentide símbolo do aluno no seu trabalho escrito, realizado no decorrer do ano letivo, em contexto de avaliação sumativa.

Como já tinha mostrado ao longo do seu trabalho no teste diagnóstico e na entrevista, o sentido de símbolo de Pedro evidencia-se de forma positiva em questões de modelação, ao compreender os diferentes papéis que o símbolo desempenha. Numa questão de teste, analisa bem a situação, recorre à representação gráfica das funções que lhe são dadas na sua representação algébrica e tira conclusões consistentes, relacionando toda a informação que lhe é fornecida:

4.

Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por

$$A(t) = 4\,t^3\,e^{-t} \qquad \text{e} \qquad C(t) = 2\,t^3\,e^{-0,7\,t}$$

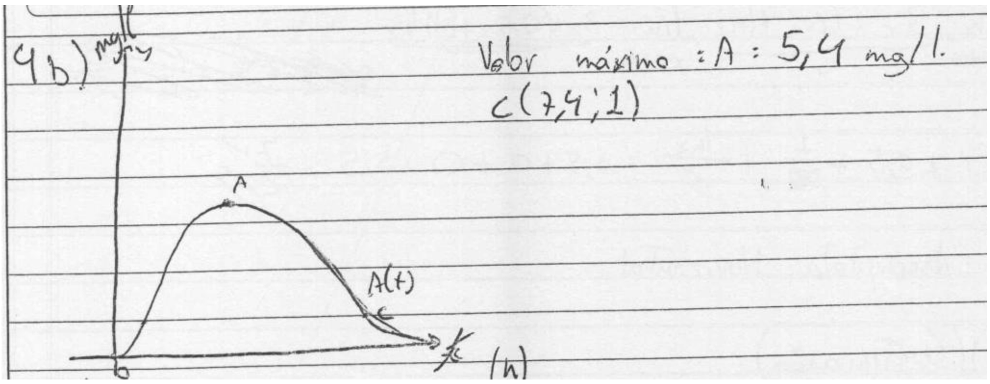
A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado $(t \in [0,\ 12])$.

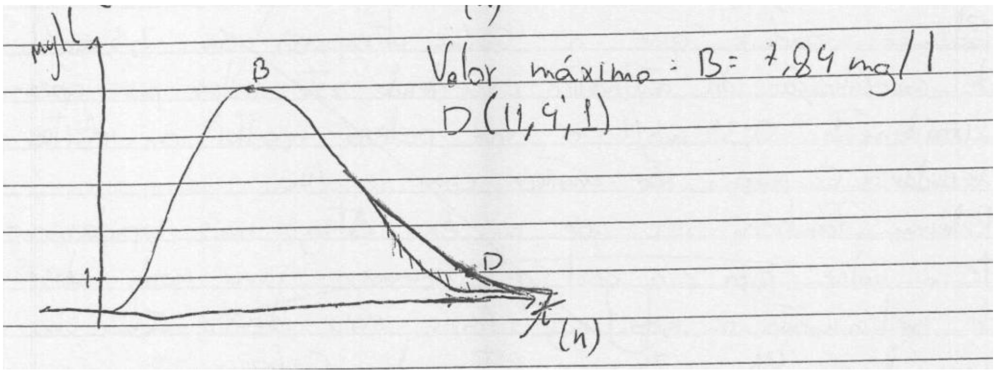
b) Considere as seguintes questões:

1. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*

2. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).





Podemos concluir que o Carlos ultrapassa os 7,5 mg/l de concentração do antibiótico, excedendo este valor por aproximadamente 0,34 mg/l o que poderá resultar em efeitos secundários. O mesmo não acontece com a Ana.
Podemos também ver que a Ana atinge mais rapidamente o valor para o qual é necessária uma nova dose de medicamento, ou seja, 1 mg/l. Assim, esta deverá tomar uma nova dose 4h e 24 mins antes do Carlos.

0,4 : 60 $\quad x = 24 \quad$ 11 - 7 = 4
0,4 : x

No exame nacional Pedro recorre ao seu sentido de símbolo também numa questão de modelação, na qual a manipulação simbólica é relevante. O aluno, além de definir a equação adequada ao contexto do modelo e tendo em consideração o que lhe é pedido, utiliza as propriedades dos logaritmos e os procedimentos necessários, sendo patente a forma eficaz como manipula os símbolos.

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

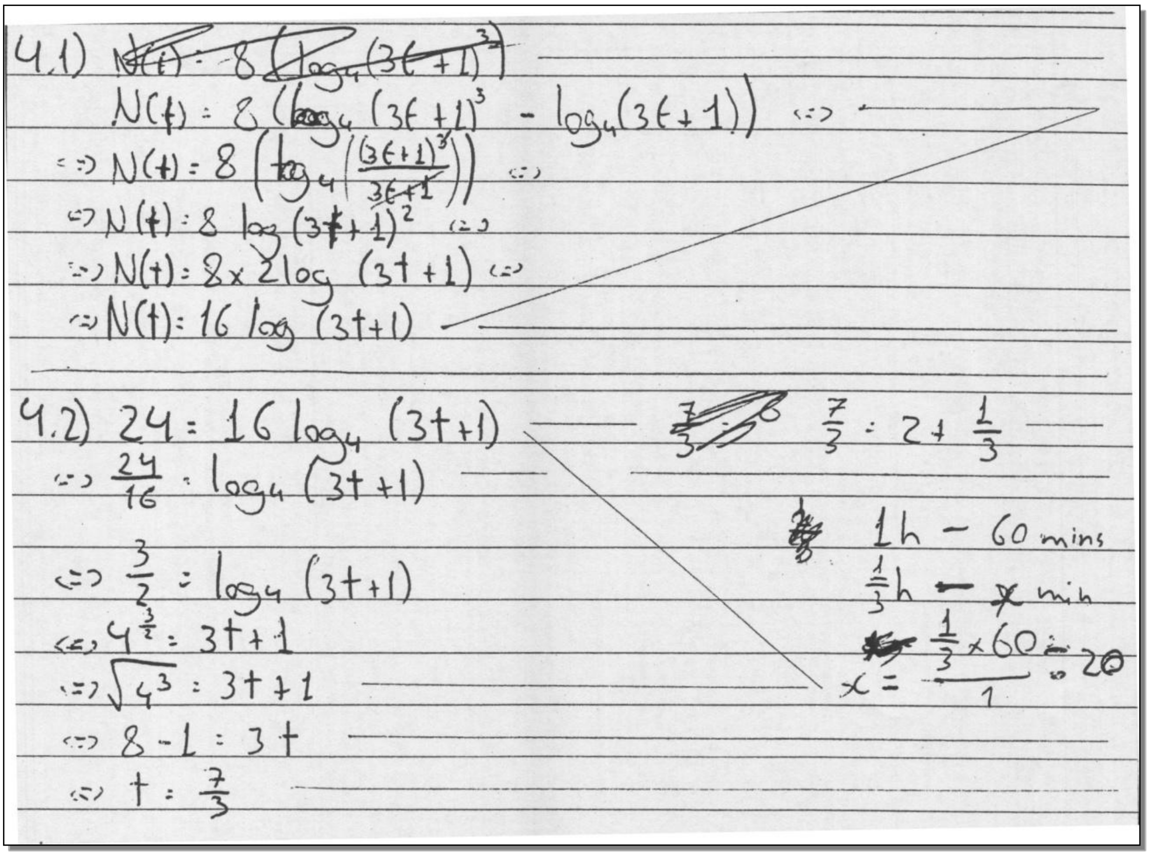
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.



4.1) $\cancel{N(t) = 8(\log_4(3t+1)^3)}$

$N(t) = 8(\log_4(3t+1)^3 - \log_4(3t+1))$ ⇔

⇔ $N(t) = 8\left(\log_4\left(\frac{(3t+1)^3}{3t+1}\right)\right)$ ⇔

⇔ $N(t) = 8\log(3t+1)^2$ ⇔

⇔ $N(t) = 8\times 2\log(3t+1)$ ⇔

⇔ $N(t) = 16\log(3t+1)$

4.2) $24 = 16\log_4(3t+1)$

⇔ $\frac{24}{16} = \log_4(3t+1)$

⇔ $\frac{3}{2} = \log_4(3t+1)$

⇔ $4^{\frac{3}{2}} = 3t+1$

⇔ $\sqrt{4^3} = 3t+1$

⇔ $8-1 = 3t$

⇔ $t = \frac{7}{3}$

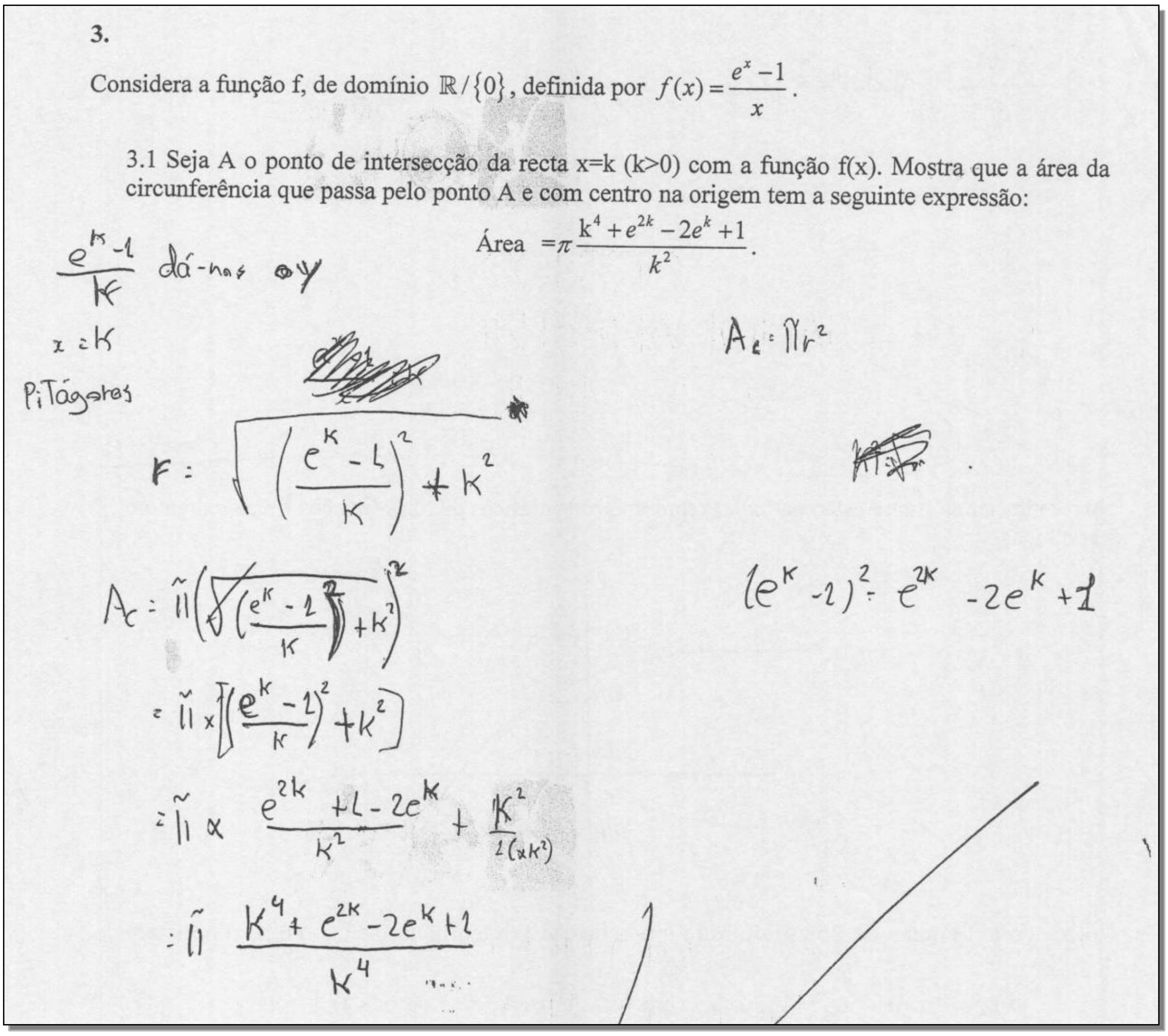
$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

1h — 60 mins

$\frac{1}{3}$h — x min

$x = \frac{\frac{1}{3}\times 60}{1} = 20$

No decorrer da entrevista, uma das tarefas propostas prende-se com a análise do efeito da variação do raio na área do círculo. Pedro, que mostra na entrevista pouco sentido de símbolo ao "aceitar" uma variação linear apesar da área do círculo variar com o quadrado do raio, revela nesta questão, aqui apresentada, um forte sentido de símbolo. O aluno congrega diferentes conhecimentos para obter as expressões necessárias para introduzir na expressão da área de forma a alcançar o resultado pretendido. Faz uma aposta clara na linguagem algébrica que se enquadra bem no seu sentido de símbolo, que, aparentemente, lhe permitir passar, sem problemas, das estruturas mais concretas para as mais abstratas.



3.

Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}/\{0\}$, definida por $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

3.1 Seja A o ponto de intersecção da recta x=k (k>0) com a função f(x). Mostra que a área da circunferência que passa pelo ponto A e com centro na origem tem a seguinte expressão:

$$\text{Área } = \pi\frac{k^4+e^{2k}-2e^k+1}{k^2}.$$

$\frac{e^k-1}{k}$ dá-nos y

$x = k$

PiTágoras

$A_c = \pi r^2$

$r = \sqrt{\left(\frac{e^k-1}{k}\right)^2 + k^2}$

$(e^k-1)^2 = e^{2k} - 2e^k + 1$

$A_c = \pi\left(\sqrt{\left(\frac{e^k-1}{k}\right)^2+k^2}\right)^2$

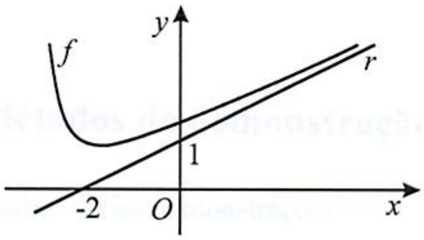
$= \pi \times \left[\left(\frac{e^k-1}{k}\right)^2 + k^2\right]$

$= \pi \times \frac{e^{2k}+1-2e^k}{k^2} + \frac{k^2}{1_{(\times k^2)}}$

$= \pi\,\frac{k^4+e^{2k}-2e^k+1}{k^4}$

Numa questão de uma prova de simulação de exame realizada em março é interessante ver o modo como o aluno corrige o seu próprio trabalho. Pedro começa por indicar que vai determinar o limite da função *g(x)* quando *x* tende para mais infinito, o que se enquadra na procura da assíntota horizontal que é o objetivo da questão. No entanto substitui nessa expressão *x* por $\frac{7}{2}$ e atribui a $f\left(\frac{7}{2}\right)$ o valor de $\frac{9}{2}$ que parece obter a partir da substituição de $\frac{7}{2}$ na equação a que chega para a assíntota da função *f*, com base no gráfico dado. Esse trabalho inicial está incorreto e revela pouco sentido de símbolo, evidenciando confusão entre o valor da função num ponto e o tomado pela sua assíntota nesse mesmo ponto:

5. Na figura está parte do gráfico de uma função f de domínio $]-3,+\infty[$

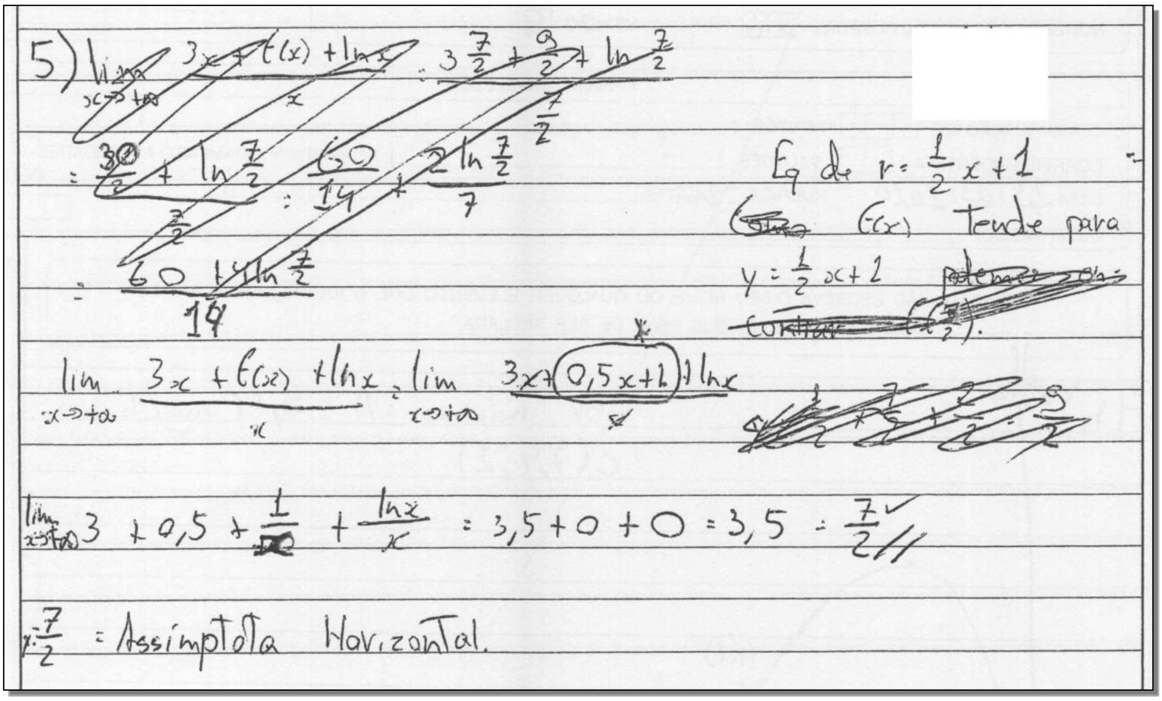


A recta r, que intersecta os eixos coordenados nos pontos (-2,0) e (0,1) é assímptota do gráfico de f.

Seja g a função, de domínio IR$^+$, definida por $g(x)=\dfrac{3x+f(x)+\ln x}{x}$

Prova que a recta de equação $y=\dfrac{7}{2}$ é assímptota do gráfico de g.

Pedro acaba por riscar o seu trabalho inicial, o que parece revelar uma inspeção do mesmo, e corrige-o determinando o limite correto para *g(x)*, substituindo a função *f(x)* pela expressão da sua assíntota, o que já estará correto pois insere-se num cálculo de limite quando *x* tende para infinito. O aluno acaba por demonstrar o que é pedido manifestando mais uma vez um apurado sentido de símbolo:

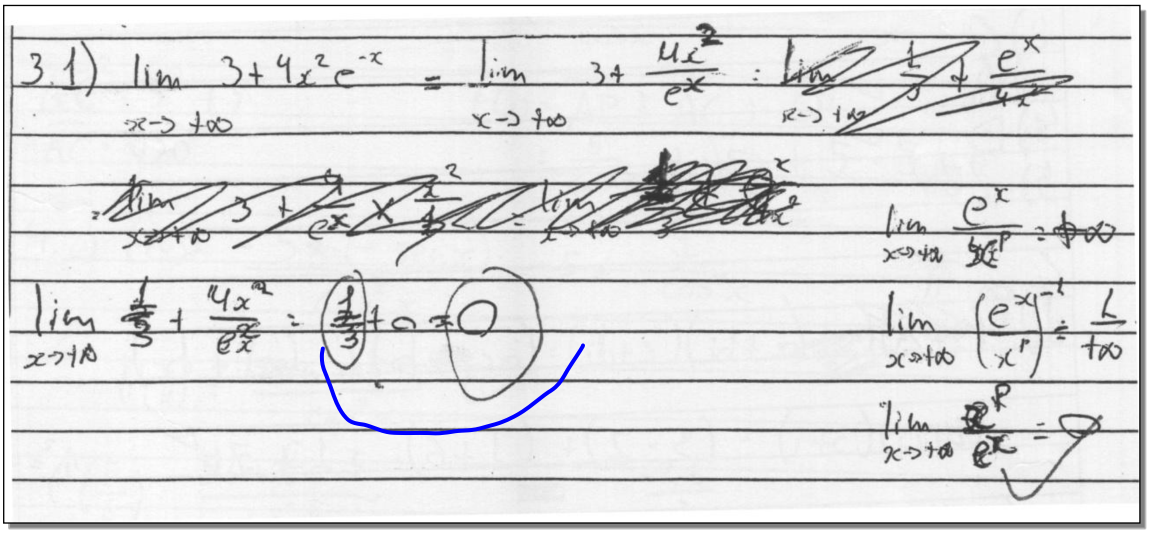


A inspeção posterior dos símbolos não é, no entanto, uma constante no trabalho de Pedro. No exemplo anterior, tal revisão poderá ter sido incentivada pelo facto de se tratar de uma questão que exige uma demonstração. Assim, a resposta é dada no próprio enunciado, pois coincide com o que se pretende que, efetivamente, o aluno demonstre. Na questão seguinte, retirada do teste intermédio de maio, à semelhança do que mostra numa tarefa do teste diagnóstico, o aluno evidencia que nem sempre faz uma inspeção dos seus procedimentos, e efetua cálculos complicados corretamente mas termina com um erro ,que se pode considerar básico(faz $\frac{1}{3}+0=0$), mas que poderia ser detetado com uma revisão dos símbolos no final do seu trabalho:

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4\,x^2\,e^{-x}$

Resolva os itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

3.1. Mostre que o gráfico da função f tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.



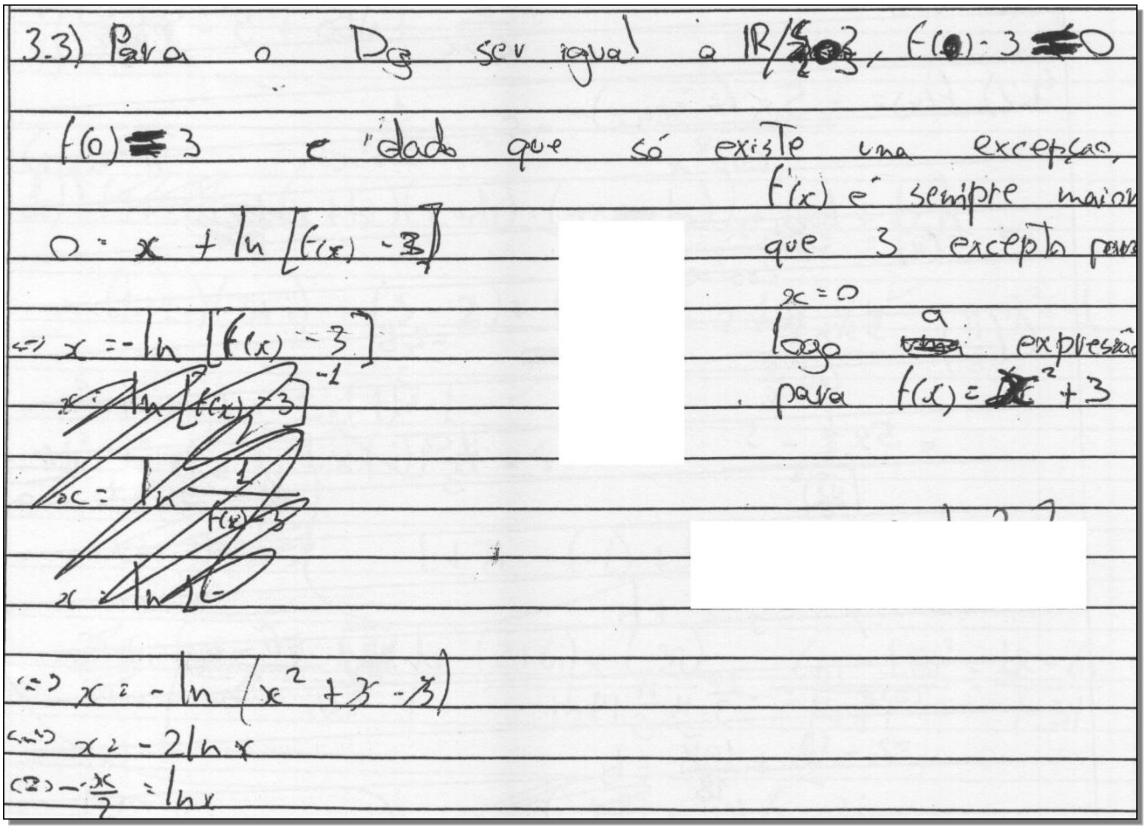
Ainda na mesma questão mas na terceira alínea, para qual seria necessário substituir uma função pela sua expressão analítica e resolver uma equação com logaritmos, Pedro mostra pouco sentido de símbolo:

3.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$g(x) = x + \ln[f(x) - 3] \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Determine os zeros da função g

Na entrevista com a questão das duas equações quadráticas, uma das quais envolvendo senos, Pedro insiste em introduzir no inicio da sua resolução os extremos do intervalo para o qual são pedidas as soluções. À semelhança do que ocorre na entrevista, na seguinte situação, o aluno não efetua a substituição da função *f(x),* que é dada no enunciado, e utiliza para a função uma expressão incorreta, apresentando uma justificação difícil de compreender à luz da questão e dos conceitos envolvidos. Acaba por nem resolver a equação com logaritmos, que resulta da sua substituição. Eis a sua resposta:


3.3) Para o D_g ser igual a $\mathbb{R}/\{0\}$, $f(0) - 3 = 0$

$f(0) = 3$ e dado que só existe uma excepção, $f(x)$ é sempre maior que 3 excepto para $x = 0$ logo a expressão para $f(x) = x^2 + 3$

$0 = x + \ln[f(x) - 3]$

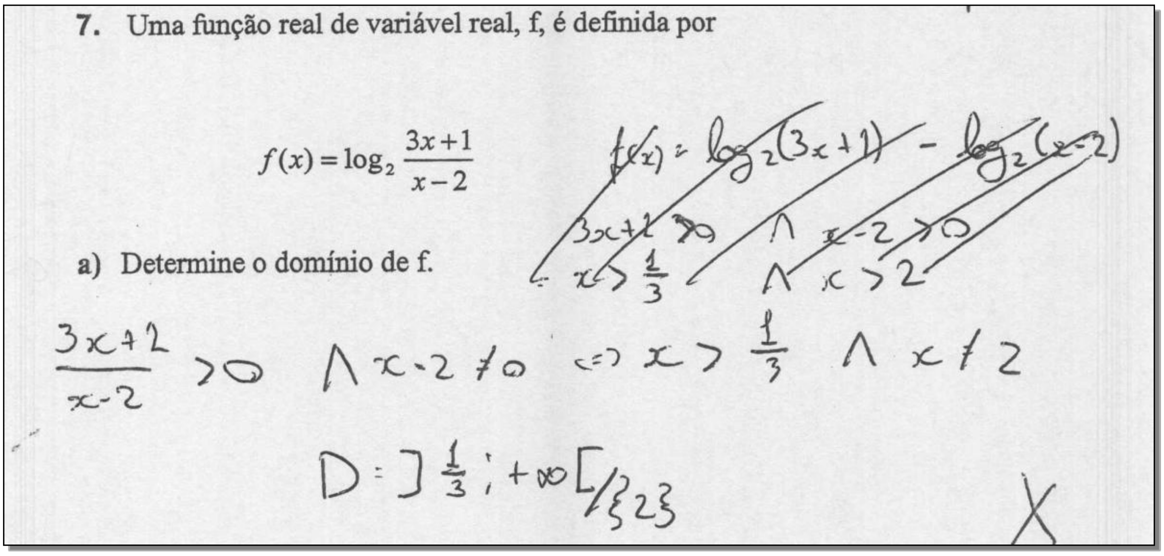
$\Leftrightarrow x = -\ln[f(x) - 3]^{-1}$

$\Leftrightarrow x = -\ln(x^2 + 3 - 3)$

$\Leftrightarrow x = -2\ln x$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln x$

Num exercício com funções logarítmicas que tem subjacente o trabalho com inequações fracionárias, Pedro, que apresenta a condição inicial correta, ao indicar que a fração tem que ser positiva devido ao domínio da função logaritmo não tem em consideração a dependência do sinal da fração com os sinais do numerador e do denominador. Limita-se a indicar que o denominador não pode tomar o valor zero e que o numerador terá que ser positivo "esquecendo" vários intervalos de valores possíveis para *x* que também tornariam a fração positiva. Neste exemplo é visível um aspeto menos desenvolvido do sentido de símbolo do aluno, quando trabalha com conceitos que não domina, ou que esqueceu, faltando também alguma reflexão sobre os resultados a que chega:



7. Uma função real de variável real, f, é definida por

$$f(x) = \log_2 \frac{3x+1}{x-2}$$

$\cancel{f(x) = \log_2(3x+1) - \log_2(x-2)}$

$\cancel{3x+1 > 0 \wedge x-2 > 0}$

$\cancel{\Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \wedge x > 2}$

a) Determine o domínio de f.

$$\frac{3x+2}{x-2} > 0 \wedge x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \wedge x \neq 2$$

$$D: \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[\setminus \{2\}$$

X

O desenvolvido sentido de símbolo de Pedro, na forma como trabalha com a representação gráfica, é visível quando responde a uma questão do segundo teste intermédio do ano letivo. A questão 3.3 envolve uma função definida por ramos e outra cuja expressão analítica também é explicitada, e pede os pontos de interseção com recurso á calculadora gráfica:

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & se \quad 0 < x < 2 \\ x\,e^{-x} + x + 1 & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

3.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$

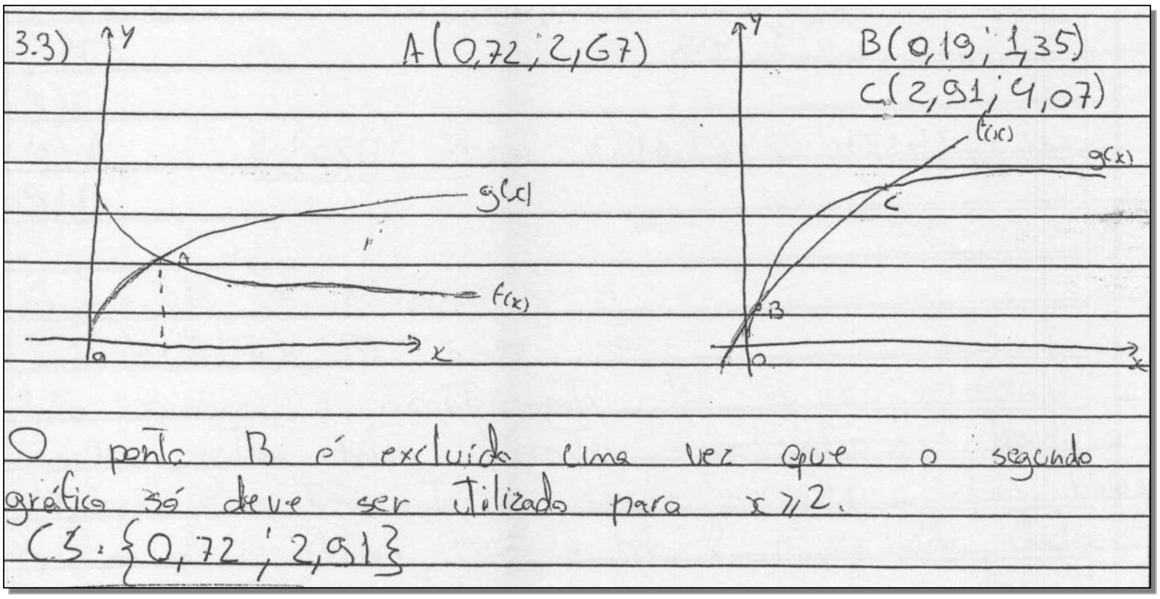
A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções.

Determine essas soluções, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

Pedro evidencia sentido de símbolo na forma como responde, traçando dois gráficos que correspondem a cada um dos ramos da função *f*, e mostrando que dá sentido às representações que efetua, pois tem em consideração o seu domínio de validade, o que o leva a excluir o ponto B, e apresenta a resposta correta que justifica de forma clara:

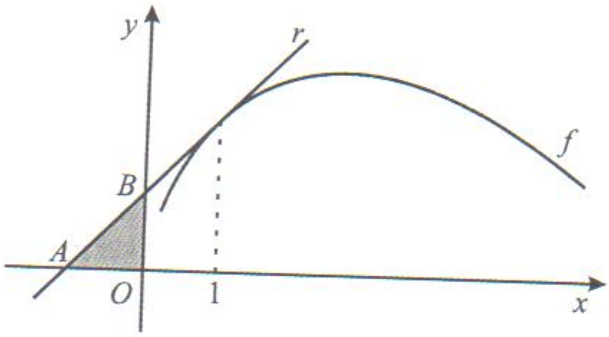


No exemplo seguinte, retirado de um teste sumativo realizado por Pedro, é mais uma vez patente o seu sentido de símbolo ao decidir a sua utilidade, bem como no modo como vai criando várias expressões simbólicas que resultam na resposta certa. Uma abordagem correta à questão implica um trabalho de transformação em ambas as direções entre as representações gráfica e analítica, assim como a associação da derivada ao declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto.

3 Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por *f(x)=2x-xlnx* (ln designa logaritmo de base e).

Utiliza métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

3.3 Na figura está, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função *f*.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, intersecta o eixo *Oy* no ponto B e o eixo *Ox* no ponto A. Determina a área do triângulo [AOB].

Pedro efetua a junção das várias representações estabelecendo entre elas a relação necessária e retirando de cada uma a informação pertinente para chegar às coordenadas dos pontos A e B e, consequentemente, à área do triângulo pedida:

3.3) $f'(x) = 1 - \ln x$ (resolvido em 3.1).

$f'(1) = 1 - \ln 1$

$= 1$

$f(1) = 2 \times 1 - 1 \times \ln 1$

$= 2$

$y = x + b \Rightarrow 2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$

$r: y = x + 1$

$A(-1, 0)$

$B(0, 1)$

$A_T = \frac{B \times alt}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

A questão cinco do exame nacional é formulada de uma forma contrária à habitual. É dada a expressão da função derivada de *f* e é solicitada uma análise da monotonia da função *f*. Estão em causa mudanças de representação associadas às conversões definidas por Duval. A partir da expressão analítica da derivada é necessário uma concretização da sua representação gráfica e, a partir da análise desta e mais concretamente do seu sinal para os vários valores possíveis de *x*, inferir o comportamento da função *f*.

5. Considere uma função f, de domínio $]0,3[$, cuja derivada f', de domínio $]0,3[$, é definida por

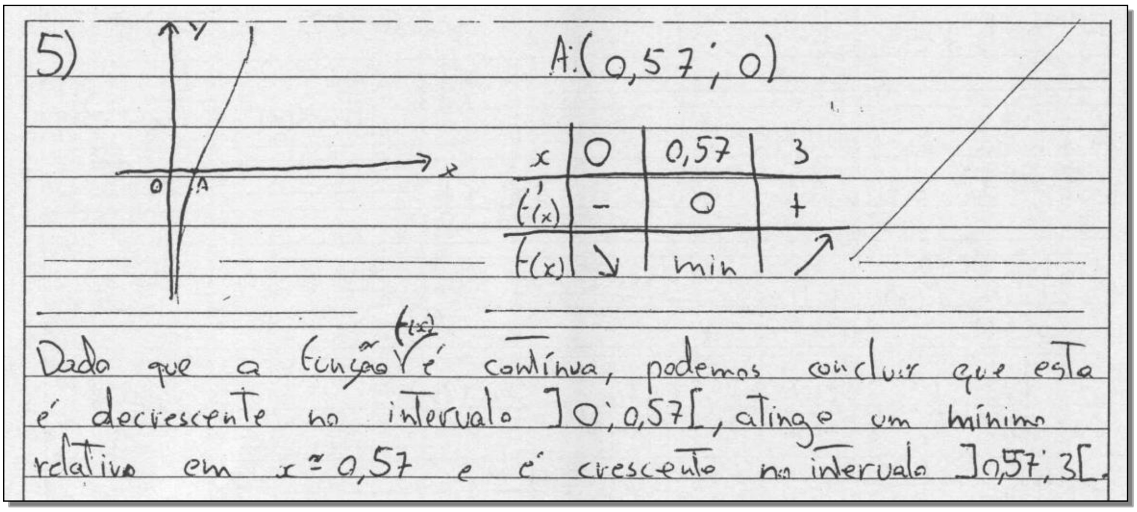
$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

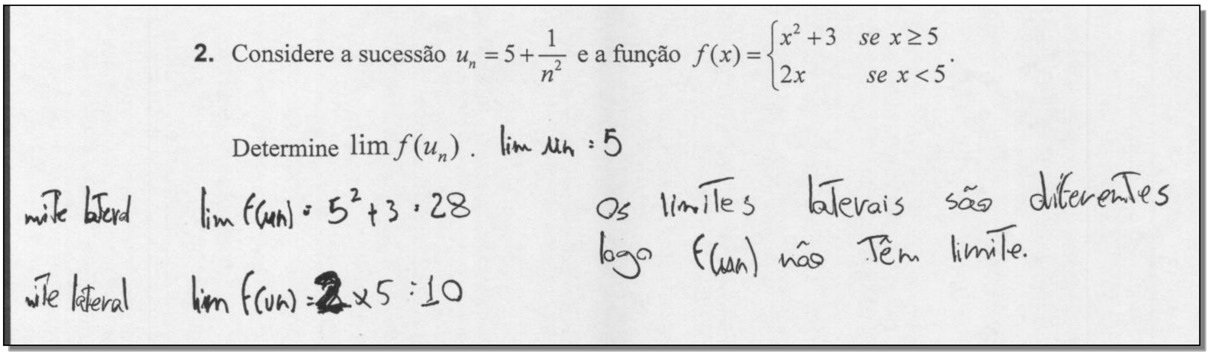
Pedro obtém a totalidade da pontuação prevista para esta questão, apresentando em poucas linhas o seu raciocínio, assente na leitura do gráfico, e explicitado numa tabela de variação de sinal:


5) A:(0,57; 0)

x	0	0,57	3
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

Dado que a função $f(x)$ é contínua, podemos concluir que esta é decrescente no intervalo $]0; 0{,}57[$, atinge um mínimo relativo em $x \approx 0{,}57$ e é crescente no intervalo $]0{,}57; 3[$.

Quando se depara com alguns conceitos que ainda não reificou, o aluno tenta utilizá-los atribuindo-lhes algum sentido ainda que incorreto. Tal é o caso do conceito gráfico de segunda derivada, no decorrer da entrevista, e acontece em relação à definição de limite segundo *Heine*, como mostra o seguinte trabalho do aluno:


2. Considere a sucessão $u_n = 5 + \frac{1}{n^2}$ e a função $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & se\ x \geq 5 \\ 2x & se\ x < 5 \end{cases}$.

Determine $\lim f(u_n)$. lim un = 5

mite lateral lim f(un) = 5²+3 = 28

mite lateral lim f(un) = 2×5 = 10

Os limites laterais são diferentes logo f(un) não tem limite.

Ao determinar ambos os limites laterais, Pedro mostra que não considera apenas o limite à direita, que estava implícito na questão e decorria da análise do andamento da sucessão u_n. Efetivamente $f(u_n)$ tem limite que é determinado pelo comportamento do ramo superior da função, para valores superiores mas sucessivamente mais próximos de cinco. Com a sua resposta, o aluno tenta utilizar um conceito que ainda não reificou, o de limite segundo *Heine*, misturado com outro que domina, o de limite de função num ponto, o que o conduz a uma conclusão incorreta.

Na seguinte questão retirada de uma prova de simulação de exame, realizada perto do final do ano letivo, Pedro confirma o que tinha indiciado na entrevista: um sentido de símbolo apurado, ao recorrer ao símbolo para generalizar, e ao dar sentido à reta e à sua equação. O aluno evidencia na seguinte questão esses aspetos do seu sentido de símbolo, associados ao cálculo de limites e à identificação do declive de uma assíntota:

4. Seja f uma função de domínio R^+, cujo gráfico admite uma assímptota paralela à bissectriz dos quadrantes pares. Seja ainda h uma função de domínio R^+ e tal que $h(x) = f(x) + 2x\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$. Prova que o gráfico de h admite uma assímptota paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Pedro identifica o declive da bissetriz dos quadrantes ímpares como sendo igual a 1, mostra que o limite que conduz ao declive da assíntota tem esse valor e tem o cuidado de clarificar que, ao ser conhecido apenas os seu declive, a assíntota não tem que ser a bissetriz mas qualquer reta paralela a esta, pelo que apresenta uma expressão geral introduzindo o símbolo *b* para escrever a expressão $y=x+b$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{2x}{x} \times \frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{x}$

CA
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{2x}{x} \times \frac{\ln e^x}{x} =$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{x}{x} = -1 + 2 \times 1 = 1$

~~CA~~: Declive de h: 1 logo tem uma assimptota de equação $y = x + b$, paralela aos quadrantes ímpares

Na resposta de Pedro à seguinte questão é visível a forma elegante e sucinta da sua resposta, à semelhança do que também apresenta, na secção anterior, em questões do teste diagnóstico. O aluno demonstra o que lhe é pedido, utilizando a linguagem corrente e explicando os conceitos matemáticos envolvidos com recurso à definição de derivada num ponto:

4. Relativamente a uma função f sabe-se que as rectas tangentes ao gráfico, respectivamente, em x=a e x=b são perpendiculares. Mostra que $f'(a)\times f'(b) = 1$.

A resposta de Pedro utiliza o poder dos símbolos para sintetizar na expressão $f'(a) = -\frac{1}{f'(b)}$ o que explica por palavras, mostrando um forte sentido de símbolo:

4) Raciocínio: para serem perpendiculares, duas recta precisam de ter declives inversos e simétricos. Como a derivada no ponto dá-nos o declive da recta tangente nesse ponto, para que as rectas tangentes sejam perpendiculares $f'(a) = -\frac{1}{f'(b)}$ tem que se verificar.

$f'(a) = -\frac{1}{f'(b)} \Leftrightarrow f'(a) \times f'(b) = -1$

A caracterização realizada na secção anterior do sentido de símbolo de Pedro é visível na forma como este trabalha os conteúdos e o tipo de questões específicas do 12.º ano. Tratam-se na sua maioria de questões com um grau de dificuldade elevado que implicam o recurso a um conjunto de conceitos e de aspetos do sentido de símbolo que Pedro consegue, normalmente, mobilizar com sucesso.

5.2.3. Conclusão

Pedro é um aluno com um forte sentido de símbolo. Esse sentido é visível no modo como utiliza os símbolos em tarefas diversificadas e progressivamente exigentes, e na forma como consegue recorrer a diversos aspetos do seu sentido de símbolo e os utiliza na construção das suas respostas, atingindo frequentemente o objetivo que lhe é proposto.

O aspeto menos desenvolvido do sentido de símbolo de Pedro é uma certa tendência para aplicar conceitos que não domina totalmente, em conjunto com outros que aparentam estar reificados. Essa mistura parece ser por vezes um pouco "perigosa" na medida em que torna mais difícil detetar as incorreções com base numa inspeção dos símbolos, o que leva a que o aluno não mantenha por vezes uma visão global do seu trabalho e, consequentemente, efetue algumas manipulações simbólicas destituídas de significado. Entre os conceitos trabalhados em anos letivos anteriores que aparenta não ter reificado encontram-se o de domínio de uma equação e o de condição universal, estando este último ligada à sua conceção errada que a solução de uma equação linear tem que ser única.

Não utiliza a representação por tabela e reconhece ter esquecido o modo de o fazer. No entanto, no seu trabalho com as representações gráfica e algébrica utiliza tratamentos e conversões, mostrando ter nesta área um apurado sentido de símbolo. Dentro da mesma representação, no caso estudado a algébrica, nem sempre opta pela mais eficaz para a sua resposta.

Realiza alguns erros simples, normalmente denominados "erros de distração", mas que poderiam ser corrigidos por uma inspeção *a posteriori* dos símbolos, o que Pedro nem sempre faz. Mesmo quando é levado a fazer essa revisão nem sempre consegue reler corretamente os símbolos e proceder à sua correção.

O aluno utiliza por vezes termos incorretos como é o caso da palavra "múltiplo" quando se refere a "coeficiente" e do termo "variável" em relação a qualquer letra, mesmo que esta não tenha esse papel no contexto da questão. Essa utilização incorreta dos termos, apesar de não ser desejável, não se traduz no entanto numa aplicação errada de conceitos pelo que não interfere de forma negativa com o seu sentido de símbolo nem com o trabalho que dele decorre.

Verifica-se que a identificação entre o que é pedido numa tarefa e o tema que o aluno se encontra a trabalhar nesse momento na sala de aula, resulta numa interferência negativa. Na situação analisada parece haver um desvio do aluno para a Trigonometria que o afasta das equações quadráticas que eram o centro da questão.

Outra prova do desenvolvimento dos vários aspetos do sentido de símbolo de Pedro encontra-se no modo como cria, analisa e interpreta vários modelos estabelecendo, por vezes, uma ligação com a realidade que lhe permite fundamentar conclusões interessantes e plausíveis. Por vezes é a própria realidade que o auxilia na sua análise simbólica como é o caso da trajetória da bola de basquete e da função quadrática. O seu sentido de símbolo é também forte no modo como manipula simbolicamente, recorre ao poder dos símbolos para sintetizar resultados e introduz símbolos literais para clarificar e/ou generalizar situações. Deste modo, a forma como concilia os diversos aspetos do seu sentido de símbolo, torna-o particularmente elaborado e eficaz quando os coloca ao serviço da sua atividade. O sentido de símbolo de Pedro que poderá ser uma ferramenta muito útil no seu futuro.

Capítulo 6

Conclusão

Neste último capítulo faço uma síntese do estudo e procuro responder às questões de investigação. Faço algumas recomendações com base nas conclusões a que cheguei e em alguns aspetos que, não estando inicialmente previstos, emergiram do próprio estudo. Termino com uma reflexão final sobre o que representou para mim este trabalho de investigação, com diversas considerações sobre o sentido de símbolo de alunos do ensino secundário e sugestões sobre caminhos para o reforço do seu desenvolvimento.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo insere-se na área de investigação sobre o conhecimento do aluno incidindo no seu sentido de símbolo. A Álgebra assume um papel de relevo na Matemática e no percurso escolar do aluno, o que está patente nos programas oficiais da disciplina tanto do ensino básico (ME, 2007) como do ensino secundário (ME, 2001). Por isso, a compreensão da forma como o aluno vê e trabalha os símbolos, dotando-os de sentido, é importante para adaptar e melhorar o trabalho letivo tendo em vista o desenvolvimento do seu sentido de símbolo, encarado como vertente fundamental do seu pensamento algébrico. Deste modo, a investigação procurou compreender o sentido de símbolo de alunos na fase final do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem da Álgebra, tendo como base duas questões: que sentido de símbolo revelam alunos do ensino secundário no modo como resolvem questões de Álgebra envolvendo expressões algébricas, equações, problemas e funções; e qual a relação entre o desenvolvimento do sentido de símbolo dos alunos e a sua capacidade de realização de questões que incidem sobre tópicos específicos do 12.º ano.

O quadro teórico que serve de referência a este estudo, começa por abordar os conceitos de signo, símbolo, significante e significado, e faz a passagem para o papel do signo e do símbolo na Matemática e discute, em particular, a importância do símbolo na linguagem algébrica. Foca a relação entre a Aritmética e a Álgebra, apresentando a perspetiva de Kaput sobre o pensamento algébrico. De seguida, analisa o processo de atribuir sentido à atividade matemática à luz da teoria de interiorização, condensação e reificação de Sfard e apresenta o trabalho algébrico como compreensão e atribuição de sentido aos símbolos do ponto de vista das mudanças de representações de Duval, da teoria da objetivação de Radford e dos aspetos do sentido de símbolo de Arcavi.

Neste estudo, a opção por compreender o sentido de símbolo dos alunos implica uma metodologia interpretativa e essencialmente qualitativa, com uma pequena componente quantitativa, com o *design* de estudos de caso e o recurso a entrevistas e análise documental. Inicialmente, a investigação incide sobre um grupo de vinte e um alunos do ensino secundário que constituem três turmas, 11.º e 12.º ano dos estudos portugueses e 12.º ano dos estudos ingleses. Seguidamente, foca-se em dois alunos do 12.º ano dos estudos portugueses – Diogo e Pedro – que apresentam um sentido de símbolo com níveis distintos de desenvolvimento.

6.2. Conclusões do estudo

Apresento as principais conclusões deste estudo de acordo com as questões de investigação e as categorias de análise. Numa primeira parte, caracterizo o sentido de símbolo de alunos do ensino secundário nas *expressões algébricas, equações, problemas e funções.* Para isso, baseio-me nas análises quantitativa e qualitativa do trabalho do grupo de vinte e um alunos (capítulo 4) e nos casos de Diogo e Pedro (capítulo 5), e procuro encontrar convergências e divergências em cada um dos vários aspetos do sentido de símbolo. Numa segunda parte, estabeleço uma relação entre o sentido de símbolo de Pedro e de Diogo e a forma como trabalham tópicos de 12.º ano.

O sentido de símbolo de alunos do ensino secundário

Expressões algébricas. A análise quantitativa indica que as tarefas do teste que implicam um trabalho com expressões algébricas são as mais facilmente resolvidas pelo grupo de vinte e um alunos. Com uma percentagem global de 64% de respostas corretas, não se verificam diferenças significativas entre as três turmas em estudo. Todos os alunos conseguem traduzir a linguagem corrente para a linguagem simbólica, o que também se verifica no trabalho de Diogo e Pedro em situações simples, de tradução quase direta. Apenas cinco dos vinte e um alunos não conseguem fazer essa tradução corretamente utilizando inadequadamente o símbolo "=" como indicação para "fazer algo", tal como relatado em Kieran e Filloy (1989). Perante situações mais complexas, Diogo evidencia atribuir esse sentido ao sinal de igualdade e não efetua a transposição para o caráter mais geral da letra, ficando limitado na tradução de diversas situações. Pedro consegue sem dificuldades a passagem para a linguagem simbólica em situações diversas e exigentes.

Apesar do trabalho com expressões algébricas ser o que apresenta melhores resultados globais, apenas dois dos vinte e um alunos conseguem a passagem de uma estrutura mais concreta para outra mais abstrata, associada à introdução de letras nas expressões e à utilização de propriedades específicas da Álgebra. Trata-se de um resultado de alguma forma surpreendente nos níveis de escolaridade em estudo. Um dos alunos com sentido de símbolo, é Pedro que confirma na entrevista uma utilização correta de todas as propriedades envolvidas, enquanto Diogo manifesta uma apropriação muito incorreta das propriedades do trabalho com monómios, não estabelecendo qualquer relação com o trabalho aritmético. Tal facto até poderia ser vantajoso tendo em consideração a rotura entre a Aritmética e a Álgebra que Filloy, Puig e Rojano (2008) preconizam como necessária para um efetivo domínio do simbolismo algébrico. No entanto Diogo não evidencia um domínio bem consolidado da Aritmética nem rompe com esta a caminho da abstração, ficando circunscrito a um conjunto de conceções erradas que considera corretas e às quais atribui um sentido próprio, mas desadequado e muito limitador. Este aluno enquadra-se no que Sfard e Linchevsky (1994) caracterizam como um pensamento *pseudoestrutural* o que, segundo as autoras, resulta de um desenvolvimento incorreto do sentido de símbolo ao longo do ensino.

Outro resultado surpreendente prende-se com a familiarização com os símbolos e a noção do papel que a letra pode representar, nomeadamente a possibilidade de tomar todo e qualquer valor real. O baixo nível de respostas corretas está em conformidade com o que Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram ser a "subtileza e dificuldade da ideia de variável" (p. 426) que torna pouco acessível aos alunos a sua compreensão da letra e da forma como esta varia em diferentes contextos. Entre os vinte e um alunos, dezasseis consideram que y^2 é sempre maior que y, treze admitem que $y/0{,}5$ é sempre superior a y, oito consideram que $y-0{,}5$ pode assumir por vezes valores maiores que y e doze tomam como certo que $\sqrt{y}$ nunca é superior a y. Pedro é um dos alunos que responde dessa forma na última situação, no entanto revela abertura para corrigir a sua conjetura inicial e mostra atribuir sentido ao y considerando na sua análise o facto de este poder tomar valores positivos e negativos e valores superiores e inferiores a 1. Diogo, pelo contrário, atribui a y o valor 1 e analisa todas as expressões com base nesse valor, mostrando não dar sentido ao conceito de variável. Conceções erradas semelhantes são identificadas por Pope e Sharma (2001) num estudo com alunos do ensino secundário. Esta dificuldade em compreender o que y representa em cada contexto, que torna impossível fazer uma análise correta das situações, acompanha estes alunos até perto do fim da sua escolaridade secundária e pode ter repercussões graves nos temas trabalhados neste ciclo de ensino, nomeadamente no estudo das funções. Segundo Arcavi (1994), alunos que apresentam respostas como estas, não evidenciam sentido de símbolo uma vez que não são capazes de "ler através dos símbolos", compreendendo o significado de y.

Equações. As tarefas com equações são razoavelmente trabalhadas pelos alunos das três turmas, mas com uma taxa de sucesso inferior ao das expressões algébricas (50%). A análise qualitativa revela discrepâncias significativas entre os vários aspetos do sentido de símbolo envolvidos. Assim, a manipulação simbólica é normalmente bem conseguida por todos os alunos. Diogo e Pedro também evidenciam um desenvolvimento elevado deste aspeto do sentido de símbolo apesar de Diogo ter dúvidas em situações que podem ser consideradas básicas no 12.º ano, como por exemplo a simplificação de frações algébricas. Com este aluno, verifica-se o que Radford e Puig (2007) consideram ser "uma compreensão parcial do sentido das transformações algébricas" (p. 158) que, por vezes, compromete os seus resultados finais. No entanto, Arcavi alerta para o facto de mesmo alunos que utilizam com sucesso as ferramentas algébricas não verem a Álgebra como uma ferramenta poderosa de resolução de problemas. Este estudo mostra que, apesar do sentido de símbolo compreender diversos aspetos de alguma forma interligados, o facto de um deles estar numa fase relativamente avançada de desenvolvimento, não implica que o mesmo ocorra com os outros. Apesar dos alunos manipularem bem os símbolos, não conseguem a manter uma visão mais global dessa manipulação, verificando-se uma forte tendência para aceitar o resultado obtido, sem o questionar. Essa ausência de questionamento é confirmada tanto por Diogo como por Pedro, que não fazem uma inspeção dos seus resultados, o que poderia levar a alterar a conclusão a que chegam inicialmente, trocando-a por outra com sentido no contexto da questão. Trata-se de um aspeto do sentido de símbolo que, não sendo concretizado, tem como consequência a manipulação simbólica destituída de significado, um procedimento criticado por vários autores, nomeadamente Freudhental (tal como referido por Ponte, Branco & Matos, 2002) e Kaput (1999).

Apenas seis dos vinte e um alunos conseguem escolher uma representação simbólica adequada e identificar expressões equivalentes. Em tarefas que implicam a identificação de uma expressão simbólica que traduz uma situação escrita em linguagem corrente, a maioria dos alunos opta por uma transposição direta de uma linguagem para outra, o que resulta na resposta incorreta. Sendo um erro comum que se encontra documentado num estudo de Clement (1982, in Arcavi, 1994) com alunos do 1.º ano de um curso de Engenharia, um sentido de símbolo desenvolvido implicaria uma verificação da resposta que poderia ser feita por uma simples substituição de valores. Neste ponto Pedro e Diogo mostram sentidos de símbolo distintos. Pedro identifica de uma forma quase intuitiva representações simbólicas que traduzem uma dada situação e identifica equivalências dentro do mesmo registo semiótico (tratamentos). Esta articulação de representações dentro do mesmo registo é um aspeto do sentido de símbolo que Duval (2004) considera central na atividade matemática. O mesmo autor também indica que é uma fonte de dificuldades para os alunos e assim parece ser no caso de Diogo. Efetivamente, apesar de manipular bem os símbolos, perante um conjunto de expressões, o aluno não consegue identificar as que são equivalentes, o que pode estar associado ao não atribuir sentido às expressões. Por outro lado, à importância que, o aluno, dá à manipulação valida os vários resultados que vai obtendo, apesar de não os reconhecer como equivalentes entre si. Diogo não consegue identificar expressões simbólicas que traduzam uma dada situação, mesmo confrontado com a possibilidade de substituir valores para concretizar a expressão e testar a sua validade, e revela em várias partes do seu trabalho, escrito e oral, que, para ele, não faz sentido atribuir às letras das expressões, valores que não constam do enunciado.

A rigidez de Diogo em relação à letra e ao seu papel em diversos contextos, limita o desenvolvimento de alguns aspetos do seu sentido de símbolo, que são mais trabalhados no 2.º e 3.º ciclos, associados a tópicos como casos notáveis, propriedades das potências e operações com monómios. No entanto, perante situações mais complexas como é o caso de duas equações quadráticas, uma das quais envolvendo o *sen(x)*, o aluno identifica a semelhança entre as duas equações e descreve um procedimento eficaz para a resolução da segunda a partir das soluções da primeira, mostrando nestas situações um sentido de símbolo flexível e apurado. Pedro, por outro lado, revela um sentido de símbolo notável na identificação de equações equivalentes e na previsão bem sustentada do valor lógico de igualdades que envolvem o desenvolvimento de binómios de 4.º grau. No entanto, quando confrontado com as duas equações e devido à presença de *sen(x)* e ao facto de estar nessa altura a estudar Trigonometria, não consegue ver com clareza e acaba por tomar um rumo rebuscado e incorreto.

Problemas. A análise quantitativa indica muitas dificuldades, por parte dos alunos, na resolução de problemas de natureza algébrica. Ao contrário dos aspetos de símbolo associados às outras categorias, os aspetos do sentido de símbolo mais visíveis no trabalho com problemas têm entre eles uma certa ordem imposta pelo próprio processo de resolver problemas. Nessa atividade, normalmente, a interpretação e utilização do símbolo no contexto do problema antecede a criação de uma expressão simbólica adequada que, por sua vez, tem que surgir antes da utilização dos símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar. Apesar dos conteúdos envolvidos serem acessíveis, o formato da questão mais aberto e requerendo que os alunos estabeleçam relações não explicitadas nos enunciados, leva a que apenas 17% das questões envolvendo problemas sejam respondidas de forma correta pelo grupo de vinte e um alunos. Uma razão para este fraco resultado quantitativo, poderá prender-se com o facto de serem cotadas apenas as respostas totalmente corretas, que, no caso dos problemas propostos, implicava chegar efetivamente a uma expressão geral e a partir dela tirar conclusões generalizáveis. No entanto, esta previsão dos resultados quantitativos é em parte confirmada pela análise qualitativa que identifica um sentido de símbolo incompleto nos aspetos em análise. Nas resoluções de 43% alunos ressalta uma tendência para particularizar e tirar conclusões gerais a partir de um só resultado particular. Isto sugere que estes alunos ainda não tomaram consciência como exprimir relações abstratas através de diferentes símbolos (Radford, Bardini & Sabena, 2007). Uma percentagem idêntica de alunos não responde ou não interpreta corretamente o enunciado, não demonstrando o que Radford e Puig (2007) identificam como a "habilidade cognitiva para transitar entre o sentido verbal e o *percetual*…" (p. 160). Diogo insere-se neste último grupo e mostra dificuldades na interpretação dos enunciados, o que bloqueia o restante trabalho. As entrevistas evidenciam que, para o aluno, não faz sentido atribuir números a letras ou trabalhar com letras que não estejam especificadas no enunciado, como um meio para traduzir situações e resolver problemas. Só quando recorre à "regra de três simples", numa situação em que esta não é aplicável, é que introduz a letra *x* que parece surgir mais ligada à própria regra do que à necessidade de introduzir uma incógnita, cujo conceito ainda não interiorizou, para resolver a tarefa proposta.

Pedro mostra uma atitude muito positiva no seu trabalho com problemas. Para o aluno, o caráter mais investigativo deste tipo de tarefas funciona como uma fonte de motivação. Em questões mais simples é visível a segurança com que recorre ao símbolo para estabelecer expressões que traduzem a situação e chega a uma expressão geral que lhe permite tirar conclusões de forma fundamentada. Em situações mais complexas evidencia uma busca pela solução correta, através da coordenação de uma análise constante do seu raciocínio e uma autocorreção das suas conjeturas iniciais com base no seu trabalho. Não só faz a passagem do verbal para o *percetual* (atribuição de sentido que tem em conta a forma das expressões simbólicas) como mostra consciência de que a complexidade sintática das expressões que vai transformando pode conduzir a vários níveis do sentido *percetual* (Radford & Puig, 2007).

Funções. Cerca de 81% dos vinte e um alunos optam por não utilizar a representação em tabela ou gráfica no trabalho com funções. A preferência dada à manipulação algébrica pode ser atribuída ao facto ser um aspeto do sentido de símbolo, que a maioria dos alunos evidencia ter bem desenvolvido. "Muitas propriedades matemáticas das funções são tão bem descritas pelos seus gráficos que o estudo da função… É normalmente feito com base num esboço da sua representação geométrica" (Ponte, 1984, p. 2). Tendo em consideração a importância que o estudo das funções assume no ensino secundário, essa opção preferencial pela representação algébrica pode ser indicadora de um fraco sentido de símbolo, que pode comprometer o desempenho neste importante tópico. A resposta dos alunos também mostra alguma tendência pela escolha de uma representação que é muito trabalhada em contexto letivo, mas que pode não ser sempre a mais útil. Diogo opta pela resolução algébrica porque mais uma vez lhe faltam os valores para atribui a x para a construção do gráfico ou da tabela. Além disso, o x como variável independente da função é um conceito que também não passou a fase da interiorização descrita por Sfard (1991); o aluno não parece dar sentido nem à Álgebra do valor fixo nem à Álgebra funcional. Pedro segue a opção da maioria e também mostra preferência pela utilização da manipulação algébrica, não optando pelo gráfico nem pela tabela – apesar de reconhecer que intuitivamente esta última é uma boa opção, não se lembra como a utilizar. Na escolha da melhor representação dentro do mesmo registo, tanto Pedro como Diogo optam pela que se relaciona mais com a forma como é trabalhado o tema das funções quadráticas no 12.º ano, com incidência na fórmula resolvente e na determinação da derivada para a obtenção de extremos relativos. No entanto, a sua opção não é a mais eficaz, e Pedro utiliza a representação gráfica que é fornecida para corrigir e validar o seu trabalho, enquanto Diogo se centra na descrição de um procedimento rotineiro e não utiliza nem estabelece qualquer relação com a representação gráfica fornecida.

Na utilização do símbolo para estabelecer relações, Diogo, que já tinha relatado todo o procedimento para a determinação de extremos relativos com recurso à derivada como se de uma receita se tratasse, não dá sentido à representação gráfica de derivada num ponto, mostrando uma dissociação entre representações. Evidencia um desempenho contrário da coordenação que Duval (2004) indica como fundamental à atividade matemática. Também não consegue a mudança da representação gráfica de uma reta para a representação algébrica nem a transformação contrária. Pedro faz tratamentos e conversões (Duval, 2004) coordenando bem as duas representações de derivada, assim como a representação gráfica e algébrica da reta, estabelecendo a relação com o seu declive em dois registos diferentes, algébrico e gráfico. O movimento feito por Pedro entre registos é bidirecional, o que reforça a eficácia do seu trabalho com as conversões que ocorrem numa das direções, evidenciando uma boa compreensão das variáveis visuais qualitativas (Duval, 2006b).

A utilização do símbolo para modelar situações, compreender as diferentes representações utilizadas e finalmente tomar decisões, não foi bem conseguida pela maioria dos vinte e um alunos. Apenas quatro fazem a interpretação correta do modelo dado no contexto do problema, evidenciando mais uma vez a dificuldade em coordenar representações em registos diferentes, o que tem consequências na forma como justificam a pertinência do modelo. Já identificam melhor o movimento de uma bola com uma função quadrática, talvez por se tratar de uma situação mais próxima da realidade dos alunos. No entanto, apesar de ser uma função muito trabalhada no ensino secundário, seis alunos não conseguiram identificar graficamente a expressão de uma parábola com a concavidade virada para baixo. Pedro reconhece que a associação com a trajetória de uma bola o leva mais rapidamente à representação gráfica da função, o que confirma a importância das representações mais associadas aos contextos do aluno na compreensão algébrica (Radford, 2002). O aluno mostra um sentido de símbolo apurado no trabalho de modelação e, mais uma vez, é evidente o seu interesse por tarefas que assume como desafiadoras. Interpreta as situações no contexto e tira conclusões bem fundamentadas; atribui sentido à manipulação simbólica que efetua e coloca-a ao serviço dos seus objetivos. Dada uma expressão é capaz de descrever uma situação que pode por ela ser modelada, atribuindo um sentido específico às letras que nela surgem. Pedro mostra assim sintonia entre a atividade que desenvolve e a notação simbólica que utiliza para a interpretar (Kaput, 1999). Pelo seu lado, Diogo não está à vontade com a modelação. A sua dificuldade no trabalho com e entre diferentes representações condiciona a sua abordagem, e impede-o de atribuir sentido às expressões algébrica e aos gráficos que modelam uma situação, o que afeta, naturalmente, a sua tomada de decisões consistentes.

O sentido de símbolo, o trabalho no 12.º ano e a aprendizagem da Álgebra

Os aspetos mais e menos desenvolvidos do sentido de símbolo de Pedro e Diogo transparecem na forma como abordam conteúdos programáticos do 12.º ano.

Diogo. A análise de documentos produzidos por Diogo em contexto de avaliação sumativa confirma o seu forte sentido de símbolo na manipulação simbólica assim como a sua dificuldade em articular representações e em atribuir sentido às modelações e aos símbolos menos óbvios que nelas intervêm. Embora aplique corretamente tópicos específicos do 12.º ano, como as regras operatórias dos logaritmos, e aparente ter na fase de condensação conceitos complexos como o de continuidade de uma função num ponto, as situações *pseudoestruturais* identificadas em Diogo e alguns conceitos essenciais menos interiorizados, parecem limitar o desenvolvimento do seu sentido de símbolo e afetam o seu trabalho na sala de aula.

O trabalho letivo de Diogo confirma que o aluno não fez a passagem do nível operacional para o estrutural, e detém uma compreensão essencialmente instrumental que lhe permite efetuar processos mas não abre uma passagem para a fase abstrata que lhe permitiria "ver através dos símbolos". Parece seguir receitas, algumas de grau de dificuldade elevado, que, por vezes, o conduzem a resultados corretos, mas o seu sentido de símbolo não é suficientemente flexível para alterar o seu trabalho quando a questão é colocada de outra forma, nem para identificar algumas soluções incorretas que apresenta.

Pedro. O trabalho de Pedro com conteúdos específicos do 12.º ano está em sintonia com o sentido de símbolo que evidencia no teste diagnóstico e nas entrevistas. É visível a boa coordenação entre representações, a interpretação dos símbolos em contexto na modelação e uma manipulação simbólica eficaz, à qual dá sentido e utiliza bem para atingir os objetivos propostos. No entanto, apesar de mostrar sentido de símbolo a inspecionar os símbolos e a autocorrigir o seu trabalho, não o faz de forma sistemática pelo que, por vezes, apresenta repostas incorretas que poderia evitar.

Perante conceitos que ainda não se encontram na fase da reificação, Pedro utiliza-os, atribuindo-lhes algum sentido. Não parece, no entanto, ficar "preso" numa situação *pseudoestrutural* mas sim estar a atravessar mais uma etapa do percurso de crescimento da flexibilidade do seu pensamento algébrico. Globalmente, o sentido de símbolo de Pedro permite-lhe lidar, de forma versátil, com a abstração apoiada nos símbolos, o que se traduz num trabalho, com compreensão, da Álgebra das operações formais e das estruturas abstratas descritas por Sfard e Linchevski (1994).

6.3. Recomendações

Este trabalho permitiu caracterizar o sentido de símbolo de um grupo de alunos do ensino secundário e, com mais profundidade, de dois alunos do 12.º ano, Diogo e Pedro. A base dessa caracterização foi o quadro de referência do Anexo 1, que se revelou um instrumento muito útil na medida em que permitiu estruturar o estudo. Assim, e porque um quadro desta natureza pode sempre ser testado e melhorado, seria útil a sua utilização em estudos futuros não só de natureza diagnóstica, mas como ponto de partida para desenhar e aplicar intervenções pedagógicas com vista ao desenvolvimento dos vários aspetos do sentido de símbolo de alunos em diferentes níveis de ensino.

O teste de diagnóstico ou mesmo as tarefas que serviram de base à segunda entrevista podem ser adaptados, ou utilizados tal como estão, em estreita relação com a tabela de referência, para diagnosticar no início do ano letivo o sentido de símbolo dos alunos de uma turma e a partir daí planificar o trabalho dando prioridade aos aspetos que são identificados como menos desenvolvidos. Tal pode ser uma boa utilização da avaliação diagnóstica que normalmente ocorre no início do ano escolar e, por vezes e por razões várias, é pouco consequente a nível das práticas letivas.

O fraco sentido de símbolo evidenciado pelos alunos nos aspetos relacionados com a resolução de problemas surpreendeu-me. O exame nacional e os testes intermédios não propõem tarefas com um grau de abertura que verifique aspetos do sentido de símbolo relacionados com os problemas, o que é uma consequência da especificidade da prova e do fim regulador a que se destina. A mesma situação ocorre com as avaliações externas realizadas nos últimos níveis dos estudos ingleses que são feitas pela Universidade de Cambridge e estão em conformidade com o currículo britânico. Mesmo questões que são de natureza mais aberta acabam por ser formalizadas numa demonstração fechada, sendo por regra indicada a expressão final a que se pretende que o aluno chegue. Essa situação tem, no meu entender, uma tradução direta na restante avaliação sumativa que também não contempla essa vertente. Penso que a prática letiva acaba por ser influenciada por esse facto e na sala de aula a resolução de problemas mais abertos não é muito trabalhada, o que talvez justifique o número tão reduzido de alunos que resolveu corretamente problemas que considero em termos de grau de dificuldade acessíveis a alunos do ensino secundário ou mesmo a alunos do 3.º ciclo. Constato que dada a importância que tem para o desenvolvimento de alguns aspetos do sentido de símbolo a capacidade transversal "resolução de problemas" do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), esta deve ser transposta e mais intensamente trabalhada com os alunos do ensino secundário.

Tanto em Diogo como em Pedro verificou-se uma interferência negativa dos tópicos estudados nas aulas regulares, nas tarefas algébricas que os alunos trabalharam neste estudo. Diogo "vê" uma função exponencial numa questão que apenas envolve uma equação quadrática e Pedro "perde-se" na Trigonometria numa questão que, mais uma vez, envolve uma simples quadrática. Esta tendência para encaixar os novos conteúdos de uma forma desenquadrada e por vezes descabida, reconhecida pelo próprio Pedro, fez emergir do estudo o que poderá ser um novo aspeto do sentido de símbolo, "o recurso aos conceitos adequadas à resolução do problema proposto". Uma prática letiva menos compartimentada que inclua com frequência tópicos de outros níveis de ensino e de outros temas que não apenas os trabalhados no momento, pode contribuir para aumentar o que Radford (2006b) considera ser a bagagem histórica e cultural do aluno, permitindo uma maior clarividência na identificação dos recursos que este necessita para melhor resolver um determinado problema.

6.4. Reflexão final

As perspetivas metodológicas com que me fui familiarizando ao longo deste estudo e o cuidado que foi necessário colocar no planeamento e execução de cada uma das fases da investigação, tornaram possível compreender melhor como pensam alguns alunos do ensino secundário. Foi um trabalho longo e difícil, mas que para mim se revelou útil e enriquecedor, tanto a nível metodológico como em relação aos resultados.

Desenvolvi ao longo desta investigação técnicas de análise do sentido de símbolo que, penso, me serão úteis no trabalho com os meus alunos, numa identificação mais afinada dos vários aspetos do sentido de símbolo visíveis no seu trabalho oral e escrito. As vertentes de comunicação oral e escrita, fortemente presentes neste estudo, levam-me a refletir sobre a importância da comunicação oral numa perspetiva de compreensão do pensamento do aluno. A comunicação escrita é naturalmente importante e central no ensino secundário, por vezes até a única possível, mas o seu papel como base para a comunicação oral deve ser promovido e tanto quanto possível generalizado tendo em conta a riqueza que a comunicação oral tem como fonte de compreensão das dificuldades de cada aluno.

A dimensão internacional do estudo resultante da integração nos vinte e um alunos dos seis que constituíam a turma dos estudos ingleses (*year 12*), mostra que as categorias dos problemas e das funções foram as que registaram a nível quantitativo as diferenças mais significativas de resultados, com os alunos dos estudos ingleses a apresentarem um desempenho inferior. Este pior resultado dos alunos dos estudos ingleses que na sua maioria não têm o inglês como primeira língua, pode dever-se a algumas dificuldades de interpretação dos enunciados, em particular no caso dos problemas e a algumas discrepâncias nos programas, nomeadamente o fato de o programa inglês introduzir um ano mais tarde do que o programa português o estudo aprofundado da função quadrática. No entanto, e sem querer generalizar, as dificuldades dos alunos parecem ser idênticas, dando uma indicação que a necessidade de trabalhar as diversas vertentes do sentido de símbolo, e de fazer um trabalho mais consistente com problemas algébricos e funções, não está limitada aos alunos dos estudos portugueses

Uma análise detalhada é importante assim como é fundamental estar sempre preparada para ser surpreendida pelo que um aluno consegue fazer. É importante ter presente que, ao longo do desenvolvimento do sentido de símbolo, há necessidade de lidar com uma compreensão parcial dos símbolos (Arcavi, 1994). Não se pode portanto catalogar um aluno como tendo ou não tendo sentido de símbolo. A análise por aspetos do sentido de símbolo seguida neste estudo está em sintonia com o que deve ser o trabalho na sala de aula. Pedro, por exemplo, apresenta um sentido de símbolo que se pode considerar desenvolvido mas com alguns aspetos que precisam de ser mais trabalhados, enquanto Diogo tem muitos aspetos a desenvolver mas realiza tarefas complexas e consegue terminar a disciplina que era o seu grande objetivo.

A forma como os alunos encaram a Matemática também pode ser importante no modo como vão desenvolvendo o seu sentido de símbolo. Por outro lado a forma como vão objetivando (dando sentido a) o seu saber matemático, também se reflete na sua visão da disciplina. Pedro considera que a Matemática é um desafiador jogo de lógica e encontra motivação em qualquer situação menos óbvia. Diogo vê a Matemática como uma disciplina na qual investe muito trabalho e cujo retorno é pouco motivador. É um aluno capaz de manipular simbolicamente expressões complexas e identificar semelhanças, mas algures no seu percurso escolar algo falhou e teve como resultado uma autoconfiança muito baixa no desenvolvimento da sua atividade matemática. A passagem para a Álgebra não foi concretizada e, apesar de conseguir resolver questões algébricas, não compreende o seu significado, não consegue dar sentido ao símbolo, e depressa se esquece o que não tem sentido…

Uma reflexão sobre o papel da análise quantitativa e o interesse da sua utilização neste estudo leva-me a concluir que, não sendo indispensável, permitiu um alerta inicial para alguns aspetos e foi um indicador útil de que a turma do 12.º ano seria a que tinha os alunos em melhores condições para constituírem os estudos de caso. Tendo em conta o objetivo do estudo esta análise tornou possível fazer um primeiro retrato ao sentido de símbolo de vinte e um alunos que, de outra forma, não seria exequível. Por outro lado, também comprovou que o quantitativo, na forma como foi utilizado neste estudo, de alguma forma esconde o qualitativo e ignora o esforço do aluno que não obtém o resultado final correto. Só com uma análise qualitativa se consegue realmente aceder ao pensamento dos alunos, e ao grau de desenvolvimento dos vários aspetos do sentido de símbolo envolvidos em cada questão. Apenas este tipo de análise dá a possibilidade ao professor de se colocar na perspetiva do aluno e assim compreender as suas dificuldades, o que me leva a questionar a utilização, por vezes excessiva, das questões de escolha múltipla no ensino secundário que só permitem uma análise quantitativa. Sendo sem dúvida práticas de corrigir e importantes para a "preparação para exame", nas avaliações que ocorrem durante o ano letivo pode-se, por vezes, pedir ao aluno que justifique a opção que fez na escolha múltipla conseguindo desta forma mais informação sobre o seu sentido de símbolo, o que pode resultar numa ajuda mais concreta para que ultrapasse eventuais dificuldades.

A relação encontrada entre o sentido de símbolo do aluno e a forma como este trabalha tópicos de 12.º ano era naturalmente esperada, mas não de forma tão clara. O modo como o sentido de símbolo do aluno transparece numa componente importante do seu trabalho, reforça a importância que deve ser dada ao desenvolvimento do sentido de símbolo nas atividades letivas. É preciso desenvolver o sentido de símbolo sendo necessários mais estudos sobre a melhor forma de o fazer, de uma forma contínua e sustentada, ao longo dos vários níveis de ensino. No caso particular do ensino secundário é importante inserir esse trabalho de desenvolvimento do sentido de símbolo na atividade letiva regular, sem alterar o número de aulas previstas para cada tema que o próprio programa e as condicionantes da avaliação externa não permitem.

Kaput (2008) ressalta a importância da integração da Álgebra com outros tópicos. Talvez o caminho esteja numa atenção particular ao desenvolvimento dos vários aspetos do sentido de símbolo interligados com os vários temas trabalhados no ensino secundário. As crianças aprendem as palavras que têm sentido para elas: mãe, pai, pão, bola. O mesmo acontece com a aprendizagem da Álgebra, (e de toda a Matemática), apesar dos objetos não existirem fisicamente e só serem acessíveis através das suas representações, têm que ter sentido. Um sentido que o aluno vai construindo internamente com o auxílio de agentes externos. A promoção e monitorização dessa construção de sentido é fundamental para evitar associações erradas, e para fomentar um crescimento sustentado de um sentido de símbolo flexível, poderoso e útil quando colocado ao serviço da resolução de qualquer tarefa algébrica.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carreira, S. P. (1998). Significado e aprendizagem da Matemática: dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais. *Colecção Teses Doutoramento*. Lisboa: Associação de Professores da Matemática.

Davis. P. J. & Hersh R. (1998). *The mathematical experience*. U.S.A. Mariner books.

Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y lasformas superiores en el dasarrollo cognitivo. Santiago de Cali, Colômbia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime, Número Especial*, 45-81.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of matehmatics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Filloy, E., Puig L. & Rojano, T. (2008). Educational algebra. A theoretical and empirical approach. Mathematical education library, volume 43. Springer.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind, the clinical interview in psychological research and practice*. Cambridge University Press.

Grossmann, M. T., Gonçalves, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Um enquadramento do sentido de símbolo no 3.º ciclo. *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 547), Braga: Universidade do Minho.

Guillham, B. (2005). Research interviewing. The range of techniques. Open University Press.

Guimarães, F., Arcavi, A., Gómez, B., Ponte, J.P., & Silva, J. N. (2006). O ensino/ aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas? Que desafios? In I. Vale et al. (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 361-379). Lisboa: SEM-SPCE.

Guimarães, H. M. (2003). Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática — um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário. *Colecção Teses Doutoramento*. Lisboa: Associação de Professores da Matemática.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7, (3),* 229-240.

Kirshner, D. & Chance, B. (2005). Measuring algebraic shophistication: instruments and results. In G. Lloyd, M. Wilson, J.L.M. Wilkins and S.L. Bhem (Eds). *Proceedings of the 27th Anual Meeting of PME-NA.*Virginia Tech.

Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 41-54.

Long, M. & Ben-Hur M. (1991). Informing learning through the clinical interview. *Arithmetic Teacher.* pp 157-167. NCTM.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 1-19.

Martinez, J.G.R.(2002). Building conceptual bridges. *Mathematics Teaching in the Middle School. 7*(6), 326-330.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics* 12 (3), (pp. 2-8 e 44).

ME (2001). *Programa do Ensino Secundário: Matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Recuperado em 2011, Julho 1, de http://www.dgidc.min-edu.pt/ matematica/ Documents/ProgramaMatematica.pdf

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (Tradução de Magda Melo). Lisboa: APM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2008). *Focus in high school matematics. Reasoning and sense making.*USA: NCTM.

Pimm, D. (1995). Symbols and meanings in school mathematics. London: Routledge.

Pólya, G. (2002). The goals of mathematical education. *Mathematics Teaching, 181,* 6-7 e 42-44.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18. APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, Branco e Matos (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100,*89-96.

Pope, S. & Sharma, R. (2001). Symbol sense: Teacher’s and student’s understanding. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 21(3). Recuperado em 2011, Julho 1, de http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip21-3/ BSRLM-IP-21-3-12.pdf

Puig, L. (1994). Semiótica y matematicas. Eutopias, série Documentos de trabajo, vol. 51. Valência: Ediciones Episteme.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2002). Algebra as *tekhnē* . Artefacts, symbosl and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* **1**(1), 31-56.

Radford, L. (2006a). Semiótica y educación matemática. *Relime, Número Especial*, 7-21.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoria cultural de la objetivación. *Relime, Número Especial*, 103-129.

Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: the multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics, 3, (5),* 507- 530.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 145-164.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigatioón y enseñanza. *Enseñanza de las ciências, 12, (1),* 45-56.

Saraiva, M. J. & Reis, A. (2010). A emancipação da Álgebra relativamente à Geometria. Aspectos da evolução matemática. *Educação e Matemática, 108,*17-22.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld A. H. & Arcavi A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher*. 81, 420-427.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*,1-36.

Sfard, A. & Linchevsky L. (1994).The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Sharma, R. (2000). Researching students' symbol sense. In T. Rowland (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. *20*(3).

Smart, A. (2010). A student's symbolic and hesitant understanding of introductory calculus. In M. Joubert & P. Andrews (Eds.) *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* , 215-222.

Usiskin, S. (1988). Conceptions of school álgebra and uses of variables. In A. F. Coxford &A. P. Schule (Eds.). *The ideas of algebra* (1988 Yearbook, pp. 8-19): Reston, VA: NCTM.

212

Anexos

Anexo 1

Quadro de Referência do Sentido de Símbolo

Expressões Algébricas	Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado.	*Tirar conclusões fundamentadas e autocorrigir ideias incorretas.*
	Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.	
	Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido de número para sentido de símbolo).	
	Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo.	
Equações	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	
	Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.	
	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.	
	Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais.	
	Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.	
Problemas	Decidir se é útil recorrer ao símbolo e interpretar o símbolo no contexto do problema.	
	Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.	
	Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas e generalizar.	
Funções	Utilizar o símbolo para estabelecer relações.	
	Escolher a representação simbólica adequada.	
	Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.	
	Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.	
	Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.	
	Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.	

Anexo 2

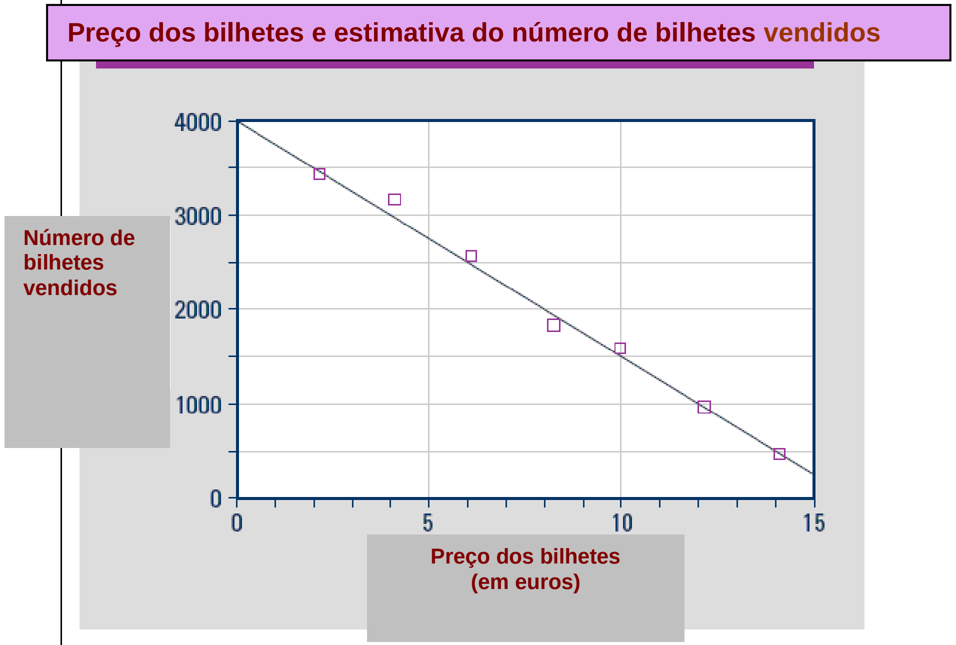
Matriz de Objetivos e Conteúdos do Teste Diagnóstico

Pergunta	**Objetivo**	**Conteúdos**
1. Considera *n* . Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática: Adiciona 5 a *n* e depois multiplica o resultado por 3.	Criar uma expressão simbólica. Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.	Expressões algébricas
2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$ $(A)\ 2$ $(B)\ 5$ $(C)\ 10$ $(D)\ 95$ *(In Martinez, 2002)*	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.	Equações do primeiro grau a uma incógnita.
3. Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado. a) $3+6=$; $3b+6b=$ b) $2^2\times 2^3\times 2^1=$; $a^2\times a^3\times a^1=$ c) $(2+6)+4=$; $(2a+6a)+4a=$ d) $(2\times 6)\times 4=$; $(2a\times 6a)\times 4a=$ *(In Martinez, 2002)*	Passar de uma experiência concreta para uma estrutura mais abstrata. (passagem com compreensão do sentido do número para o sentido de símbolo).	Expressões numéricas e algébricas.
4. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.	Utilizar o símbolo para provar relações que a aritmética não consegue. Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. Utilizar o símbolo para fazer conjeturas e generalizar.	Resolução de problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.
5. Considera a seguinte equação: $\frac{2x+4}{x+2}=10$ $2x+4=10(x+2)$ $2x+4=10x+20$ $4=8x+20$ $-16=8x$ $-2=x$ A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos. Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em situações destituídas de significado.	Equações do 1º grau a uma incógnita

6. A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população. $$p = 13000 + 250y$$ Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes? *(Adaptado de* www.keysschools.com/curriculum/math/highschool/Released%20test/20069thStrandD.pdf *, abril, 2009)*	Utilizar o símbolo em contexto e verificar o seu significado. Manter uma visão global do que se está a trabalhar.	Equações literais
7 Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução: $$2y^2 = y$$ $$2y = 1$$ $$y = \frac{1}{2}$$ Parece-te que a resolução dele é correta? Parcialmente correta? Ou incorreta? Justifica. *(In Sharma, 2000)*	Manter uma visão global do que se está a trabalhar. Compreender os diferentes papeis que os símbolos podem desempenhar.	Equações do 2º grau a uma incógnita
8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. **A** representa o número de alunos e **P** representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.* $A = 9 = P$ $\quad 9P = A$ $\quad \frac{P}{9} = A$ $9A = P$ $\quad P + 9 = A$ $\quad \frac{A}{9} = P$ $\quad A^9 = P$ *(In Arcavi, 1994)*	Escolher a representação simbólica adequada. Identificar equações equivalentes derivadas de manipulação simbólica.	Equações literais
9. a) y^2 $\quad$ b) $\sqrt{y}$ $\quad$ c) $\frac{1}{y}$ $\quad$ d) $y+1$ $\quad$ e) $\frac{y}{0{,}5}$ $\quad$ f) $y - 0{,}5$ i) Quais desta expressões são **sempre** maiores que *y*? ii) Quais desta expressões são **por vezes** maiores que *y*? iii) Quais desta expressões **nunca** são maiores que *y*? *(In Pope & Sharma, 2001)*	Utilizar o símbolo para autocorrigir conceções erradas. Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	Expressões algébricas

10. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria à sua **área** se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10% ? Justifica a tua resposta. *(In Arcavi, 1994)*	Decidir se é útil recorrer ao símbolo. Criar e manipular uma expressão simbólica para um determinado objetivo. Conjeturar e generalizar.	Resolução de problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.
11. Se alguém dissesse que a solução para $2 + 0{,}54x \leq 45$ era $x \leq 70$, de que forma poderias verificar esta sugestão: **A.** Numa tabela? **B.** Num gráfico? **C.** Sem utilizar tabelas nem gráficos? Explica a tua opção:	Escolher a representação simbólica adequada.	Funções
12. Uma empresa de pizzas está a considerar a opção de fazer um aluguer (leasing) de uma carrinha para fazer entregas. Foram-lhe dadas duas opções, A e B que estão indicadas em baixo. Em cada caso, o custo do aluguer $A(t)$ e $B(t)$ (em euros) é uma função do período de tempo que durar (t em semanas). Plano A: $A(t) = 2500 + 75t$ Plano B: $B(t) = 1000 + 90t$ **12.1.** O que representam os números 2500 e 1000 em cada um dos planos? E os números75 e 90? **12.2** O responsável da empresa de Pizzas, decidiu escrever a seguinte equação $2500 + 75t = 1000 + 90t.$ **a)** O que pretendia saber o responsável da empresa a partir desta equação? **b)** Depois de a escrever, o responsável da empresa resolveu a equação da seguinte forma: $2500 + 75t = 1000 + 90t$ $1500 + 75t = 90t$ $1500 = 15t$ $100 = t$ Como podes verificar se ele resolveu bem a equação e se $t = 100$ é solução da equação? **c)** Que informação dá $t = 100$ sobre os dois planos de aluguer? **d)** Por qual dos planos deve decidir o responsável da empresa de pizzas? Porquê? Adaptado de www.wmich.edu/cpmp/index.html, setembro, 2010	Utilizar o símbolo para modelar situações. Compreender o papel dos símbolos em diferentes contextos. Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.	Funções

13. O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espetáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).



Despesas:	
Banda	**6000 €**
Sala de espetáculos	**1500 €**

13.1 O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação:

Número de bilhetes vendidos = 4000 – 250 x (Preço do bilhete)

a) Como terá, o organizador, chegado a esta equação?

b) Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes vendidos? Explica a tua resposta.

Utilizar o símbolo para modelar situações e compreender o seu papel em contextos diferentes.
Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.
Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.

Funções

c) Como poderia o organizador utilizar a equação ou o gráfico para decidir qual o melhor preço de venda dos bilhetes? Explica o teu raciocínio e indica qual é, na tua opinião o melhor preço de venda dos bilhetes. **d)** Parece-te que a organização deste espetáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espetáculo? Adaptado de www.wmich.edu/cpmp/index.html, setembro, 2010		
14. Para um lançamento típico de basket a altura da bola (em metros) será uma função do tempo de voo (em segundos), modelada pela seguinte equação: $h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$ **a.** Qual o tipo de gráfico da relação (tempo de voo, altura)? **b.** Como poderias utilizar a relação entre a altura e o tempo de voo para determinar quando é que o lançamento alcançaria a altura do cesto (3 metros). **c.** Como poderias calcular o instante em que a bola bateria no chão se falhasse o cesto?	Compreender o papel dos símbolos e que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes. Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.	Funções

Teste Diagnóstico de Matemática

Anexo 3

Nome: ________________________________ Nº ___________

Apresenta todo o trabalho que realizares!

Grupo I

1. Considera *n* . Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática:
Adiciona 5 a *n* e depois multiplica o resultado por 3.

2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$

$(A)\ 2$ $(B)\ 5$ $(C)\ 10$ $(D)\ 95$

3. Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado.

a)
$3+6=$
$3b+6b=$

b)
$2^2\times 2^3\times 2^1=$
$a^2\times a^3\times a^1=$

c)
$(2+6)+4=$
$(2a+6a)+4a=$

d)
$(2\times 6)\times 4=$
$(2a\times 6a)\times 4a=$

4. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.

5. Considera a seguinte equação:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{2x+4}{x+2}=10 \\ \\ 2x+4=10(x+2) \\ \\ 2x+4=10x+20 \\ \\ 4=8x+20 \\ \\ -16=8x \\ \\ -2=x \end{array}}$$

A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.

6. A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população.

$$p = 13000 + 250y$$

Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes?

7. Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução:

$$2y^2 = y$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Parece-te que a resolução dele é correta? Parcialmente correta? Ou incorreta? Justifica.

8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. **A** representa o número de alunos e **P** representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.*

$A = 9 = P$ $\quad$ $9P = A$ $\quad$ $\frac{P}{9} = A$

$9A = P$ $\quad$ $P + 9 = A$ $\quad$ $\frac{A}{9} = P$ $\quad$ $A^9 = P$

9. $a)\ y^2$ b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ d) $y+1$ e) $\frac{y}{0,5}$ f) $y - 0,5$

i) Quais destas expressões são **sempre** maiores que *y*?

ii) Quais destas expressões são **por vezes** maiores que *y*?

iii) Quais destas expressões **nunca** são maiores que *y*?

10. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria à sua **área** se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10% ? Justifica a tua resposta.

11. Se alguém dissesse que a solução para $2 + 0{,}54x \leq 45$ era $x \leq 70$, de que forma poderias verificar esta sugestão:

A. Numa tabela?
B. Num gráfico?
C. Sem utilizar tabelas nem gráficos?

Explica a tua opção:

12. Uma empresa de pizzas está a considerar a opção de fazer um aluguer (leasing) de uma carrinha para fazer entregas. Foram-lhe dadas duas opções, A e B que estão indicadas em baixo. Em cada caso, o custo do aluguer $A(t)$ e $B(t)$ (em euros) é uma função do período de tempo que durar (t em semanas).

Plano A: $A(t) = 2500 + 75t$
Plano B: $B(t) = 1000 + 90t$

12.1. O que representam os números 2500 e 1000 em cada um dos planos? E os números75 e 90?

12.2 O responsável da empresa de Pizzas, decidiu escrever a seguinte equação

$$2500 + 75t = 1000 + 90t.$$

a) O que pretendia saber o responsável da empresa a partir desta equação?

b) Depois de a escrever, o responsável da empresa resolveu a equação da seguinte forma:

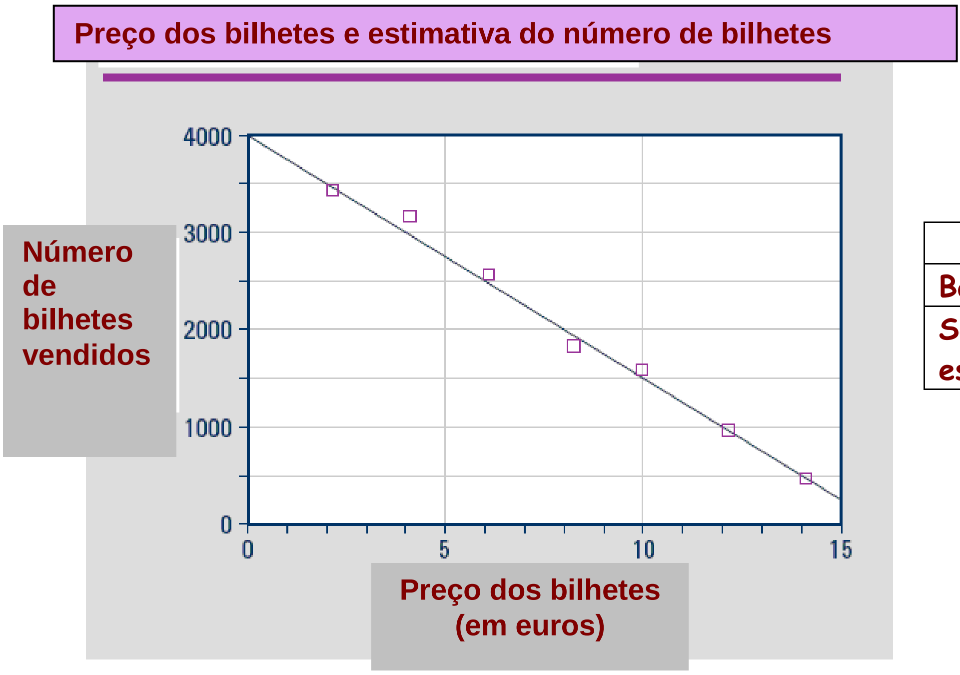
$2500 + 75t = 1000 + 90t$
$1500 + 75t = 90t$
$1500 = 15t$
$100 = t$

Como podes verificar se ele resolveu bem a equação e se $t = 100$ é solução da equação?

c) Que informação dá $t = 100$ sobre os dois planos de aluguer?

d) Por qual dos planos deve decidir o responsável da empresa de pizzas? Porquê?

13. O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espetáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).



Despesas:	
Banda	6000 €
Sala de espetáculos	1500 €

13.2 O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação:

Número de bilhetes vendidos = 4000 – 250 x (Preço do bilhete)

a) Como terá, o organizador, chegado a esta equação?

b) Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes vendidos? Explica a tua resposta.

c) Como poderia o organizador utilizar a equação ou o gráfico para decidir qual o melhor preço de venda dos bilhetes? Explica o teu raciocínio e indica qual é, na tua opinião o melhor preço de venda dos bilhetes.

d) Parece-te que a organização deste espetáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espetáculo?

14. Para um lançamento típico de basket a altura da bola (em metros) será uma função do tempo de voo (em segundos), modelada pela seguinte equação:

$$h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$$

a. Qual o tipo de gráfico da relação (tempo de voo, altura)?

b. Como poderias utilizar a relação entre a altura e o tempo de voo para determinar quando é que o lançamento alcançaria a altura do cesto (3 metros).

c. Como poderias calcular o instante em que a bola bateria no chão se falhasse o cesto?

Obrigada pela tua colaboração!

Anexo 4

Critérios de Correção da Análise Quantitativa

<table>
<tr><th>Pergunta</th><th>Critérios de Correção da análise quantitativa/ 1- certo ou 0 - errado</th></tr>
<tr><td>1. Considera n . Traduz a seguinte afirmação em linguagem matemática:
Adiciona 5 a n e depois multiplica o resultado por 3.</td><td>Certo: (5+n) x 3 ou equivalente</td></tr>
<tr><td>2. Se $3(x+5)=30$, então $x=$

$(A)\ 2$ (B) 5 (C) 10 (D) 95</td><td>Resposta (B): 5</td></tr>
<tr><td>3. Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado.
a) $3+6=$
$3b+6b=$
b) $2^2\times 2^3\times 2^1=$
$a^2\times a^3\times a^1=$
c) $(2+6)+4=$
$(2a+6a)+4a=$
d) $(2\times 6)\times 4=$
$(2a\times 6a)\times 4a=$</td><td>Respostas corretas</td></tr>
<tr><td>4. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria ao seu perímetro se uma das suas dimensões diminuísse cinco unidades e a outra dimensão aumentasse 6 unidades? Justifica a tua resposta.</td><td>Certo: Respostas que concluem que o retângulo aumenta 2 unidades recorrendo à álgebra ou a uma explicação abstrata.</td></tr>
<tr><td>5. Considera a seguinte equação:
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{2x+4}{x+2}=10\\&2x+4=10(x+2)\\&2x+4=10x+20\\&4=8x+20\\&-16=8x\\&-2=x\end{aligned}}$$
A solução obtida é verdadeira? Possivelmente verdadeira? Ou nunca é verdadeira? Justifica a tua resposta.</td><td>Certo: Resposta definitivamente errada por -2 não pertence ao domínio da expressão. Também é considerado certo quando é feita a substituição, na expressão inicial, de x por -2 e se conclui que não pode ser solução pois conduz a uma indeterminação. (a palavra indeterminação não tem que ser usada).</td></tr>
<tr><td>6. A população de uma cidade é de 13000 habitantes e aumenta cerca de 250 pessoas por ano. Esta informação pode ser representada pela seguinte equação, na qual y representa o número de anos e p a população.
$$p=13000+250y$$
Considerando esta equação, dentro de quantos anos será a população da cidade de 14500 habitantes?</td><td>Certo: y= 6 anos</td></tr>
</table>

7 Pediu-se ao Miguel para resolver a equação $2y^2 = y$. Aqui está a sua resolução: $2y^2 = y$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ Parece-te que a resolução dele é correta? Parcialmente correta? Ou incorreta? Justifica.	Certo: Resposta parcialmente correta., identificando a outra solução da equação de segundo grau (y=0).
8. Numa escola há 9 vezes mais alunos do que professores. **A** representa o número de alunos e **P** representa o número de professores nessa escola. *Coloca um círculo em volta da ou das afirmações seguintes que consideres verdadeiras.* $A = 9 = P$ $9P = A$ $\frac{P}{9} = A$ $9A = P$ $P + 9 = A$ $\frac{A}{9} = P$ $A^9 = P$	Certo: Apresentar as duas respostas certas equivalentes.
9. $a)\ y^2$ b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ d) $y+1$ e) $\frac{y}{0,5}$ f) $y - 0,5$ i) Quais desta expressões são **sempre** maiores que *y*? ii) Quais desta expressões são **por vezes** maiores que *y*? iii) Quais desta expressões **nunca** são maiores que *y*?	9i – Certo: d) $y+1$, se forem dadas outra ou mais respostas é considerado errado. 9ii – Certo: $a)\ y^2$ b) $\sqrt{y}$ c) $\frac{1}{y}$ e) $\frac{y}{0,5}$, se não forem apresentadas todas as respostas ou se foram dadas outras é considerado errado. 9iii – Certo: f) $y - 0,5$, se forem dadas outra ou mais respostas é considerado errado.
10. Considera um retângulo qualquer. O que aconteceria à sua **área** se uma das suas dimensões aumentasse 10% e a outra dimensão diminuísse 10% ? Justifica a tua resposta.	Certo: 0,99 A – A área é sempre menor. Conclusão obtida recorrendo à Álgebra. Conclusões tiradas com recurso a um retângulo específico são consideradas erradas.
11. Se alguém dissesse que a solução para *2 + 0,54x ≤45* era x ≤70, de que forma poderias verificar esta sugestão: **A.** Numa tabela? **B.** Num gráfico? **C.** Sem utilizar tabelas nem gráficos? Explica a tua opção:	Certo: qualquer uma das respostas desde que corretamente explicada. (Por exemplo resolvendo a inequação).
12. Uma empresa de pizzas está a considerar a opção de fazer um aluguer (leasing) de uma carrinha para fazer entregas. Foram-lhe dadas duas opções, A e B que estão indicadas em baixo. Em cada caso, o custo do aluguer *A(t)* e *B(t)* (em euros) é uma função do período de tempo que durar (*t* em semanas). Plano A: *A*(*t*) = 2500 + 75*t* Plano B: *B*(*t*) = 1000 + 90*t* **12.1.** O que representam os números 2500 e 1000 em cada um dos planos? E os números75 e 90? **12.2** O responsável da empresa de Pizzas, decidiu escrever a seguinte equação 2500 + 75*t* = 1000 + 90*t*.	12.1 – Certo: 2500 e 1000 representam o custo inicial em cada um dos planos. 75 e 90 o custo por semana também em cada um dos planos. (ou repostas equivalentes desde que identifiquem os valores como custo inicial e custo por semana) 12.2.a – Certo: Ao fim de quantas semanas o custo do aluguer é o mesmo em ambos os planos (ou equivalente) 12.2.b - Certo: Substituindo o t na expressão inicial e verificando se dá uma condição universal. (Também é aceite se for apresentada uma resolução alternativa

a) O que pretendia saber o responsável da empresa a partir desta equação?

b) Depois de a escrever, o responsável da empresa resolveu a equação da seguinte forma:

$2500 + 75t = 1000 + 90t$
$1500 + 75t = 90t$
$1500 = 15t$
$100 = t$

Como podes verificar se ele resolveu bem a equação e se $t = 100$ é solução da equação?

c) Que informação dá $t = 100$ sobre os dois planos de aluguer?

d) Por qual dos planos deve decidir o responsável da empresa de pizzas? Porquê?

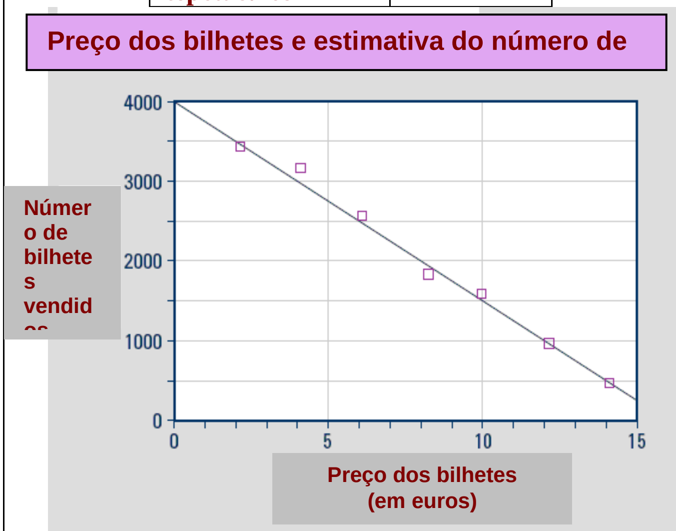
que conduza ao mesmo resultado).
Se for apenas dito que t=100 é solução, é considerado errado.

12.2.c - Certo: Ao fim de 100 semana o custo do aluguer é o mesmo. (Se a resposta já tiver sido dada em alíneas anteriores considerar correto).

12.2.d – Certo: Para menos de 100 semanas paga-se menos com o plano B. Para mais de 100 semanas paga-se menos com o plano B. (è considerada certa qualquer resposta que evidencie o raciocínio explicito na resposta acima).

13. O organizador de um concerto está a planear um concerto de uma banda famosa. Uma investigação sobre os custos e as possíveis vendas de bilhetes pode dar origem a um modelo que prevê os lucros do espetáculo em função do número de bilhetes vendidos. A investigação do organizador conduz ao seguinte modelo (admitindo que não há outras despesas nem outras fontes de rendimento para além das indicadas).

Despesas:	
Banda	**6000 €**
Sala de espetáculos	**1500 €**



O organizador utilizou a informação (preço do bilhete, número de bilhetes vendidos) e recorreu a um modelo linear para obter a equação:

Número de bilhetes vendidos = 4000 – 250 x (Preço do bilhete)

a) Como terá, o organizador, chegado a esta equação?

b) Será a equação um bom modelo da relação entre o preço do bilhete e número de bilhetes

13.1 .a. - Certo: 4000 é a interseção com o eixo dos yy, e 250=2500/10 é o declive da linha. Trata-se de um declive negativo pois y diminui com o aumento de x.

13.1.b - Certo. Sim porque a reta está de acordo com a informação obtida experimentalmente. Ou sim porque quanto mais caro o bilhete menos serão vendidos.

13.1. c – Certo: Recorrendo à substituição de valores e concluir que valores entre 5€ e 10 € conduzem a receitas acima dos 13500€. A identificação de 8€ como o preço que conduz a maior receitas não é indispensável. Também é considerado certo se for escrita a função lucro $L = x(4000 - 250x)$ e encontrado o seu máximo.

13.1.d – Certo: Subtração das despesa (7500€) ao valor encontrado na alínea anterior e concluir em conformidade se o espetáculo é ou não rentável e por quanto.

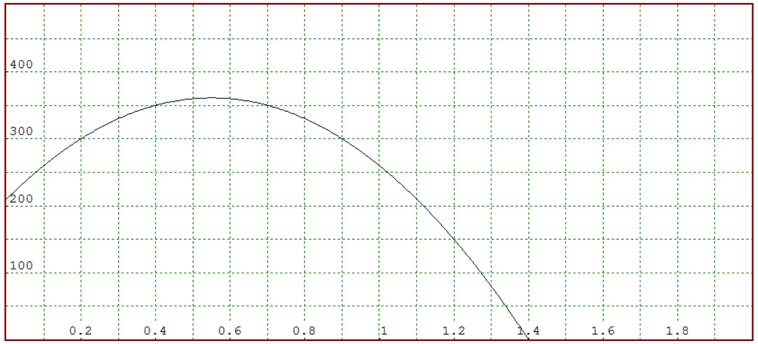
vendidos? Explica a tua resposta. **c)** Como poderia o organizador utilizar a equação ou o gráfico para decidir qual o melhor preço de venda dos bilhetes? Explica o teu raciocínio e indica qual é, na tua opinião o melhor preço de venda dos bilhetes. **d)** Parece-te que a organização deste espetáculo é rentável para o organizador? Porquê? Quanto ganhará ou perderá ele com este espetáculo?	
14. Para um lançamento típico de basket a altura da bola (em metros) será uma função do tempo de voo (em segundos), modelada pela seguinte equação: $$h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}8$$ **a)** Qual o tipo de gráfico da relação (tempo de voo, altura)? **b)** Como poderias utilizar a relação entre a altura e o tempo de voo para determinar quando é que o lançamento alcançaria a altura do cesto (3 metros). **c)** Como poderias calcular o instante em que a bola bateria no chão se falhasse o cesto?	14.a – Certo: Parábola (com concavidade para baixo). (Aceitar só parábola). 14.b. – Certo: Fazer h=3 (as respostas t= 0,102s ou t=2,38s não são necessárias, no entanto se for feito um erro grave na resolução da equação de segundo grau, considerar errado). 14.c – Certo: Fazer h=0 (as respostas t = -0.139s ou t=2,63s não são necessárias, mas se forem apresentadas, a resposta negativa deve ser excluída). Nota: se for feito um erro grave na resolução da equação de segundo grau, considerar errado.

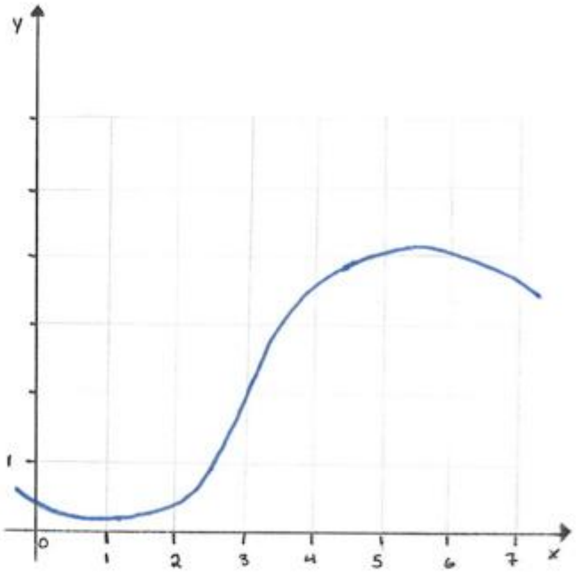
Anexo 5

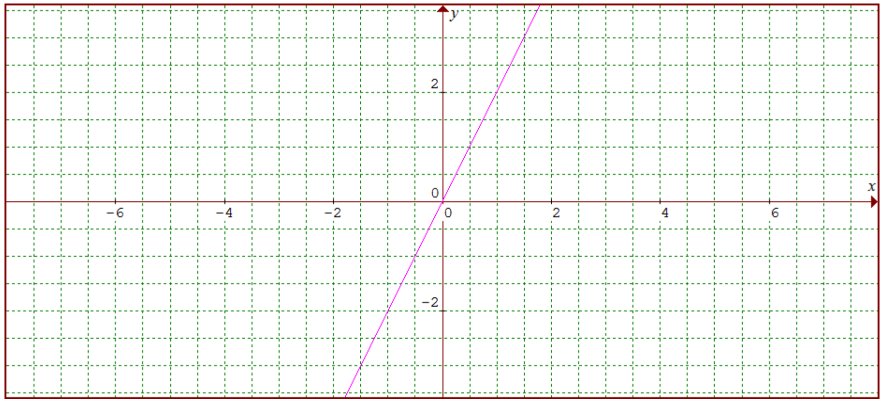
Matriz de Objetivos e Conteúdos das Tarefas da Entrevista

Pergunta	Objetivo	Conteúdos
1. Escreva uma expressão algébrica que simbolize o seguinte: a) Seis vezes um certo número. b) Menos seis do que um certo número. c) Um certo número menos que seis. d) A soma de três números inteiros consecutivos. e) Duas vezes o produto de dois números é vinte. f) O quociente de dois números é igual à soma desses números. g) O quadrado de um número ímpar ao qual é subtraído um. O que pode dizer sobre os números que resultam dessa expressão? (Arcavi, 1994)	Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente. Fazer uma escolha ótima do símbolo a utilizar. Encontrar novos aspetos dos significados originais.	Expressões algébricas
2. O David é 10cm mais alto que o Pedro. O Pedro tem uma altura de *h* cm. O que pode escrever sobre a altura do *(In Macgregor & Stacey, 1997)*	Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo.	Expressões algébricas
3. Sem fazer cálculos, indique se as seguintes igualdades são verdadeiras ou falsas e explique o que o levou à sua conclusão: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$ $(a+2b)^4 = 17a^4 + 8a^3b + b^3a + \sqrt{ab}$	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	Equações literais
4. Resolva a equação em ordem a *x*. $abcx - d + e - f = 0$	Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.	Equações
5. Resolva: $3x+5=4x$ $\frac{3x-15}{2x+1}=0$ $\frac{2x+3}{4x+6}=2$ (Arcavi, 1994)	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.	Equações

6. Alguns alunos encontravam-se a resolver um problema. A sua solução foi: $\frac{8y-6}{4}=\frac{1}{2}(4y-3)$ $2y-6=2y-\frac{3}{2}$ $-6=-\frac{3}{2}$ Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correta mas não conseguiam identificar o que tinham feito errado. Será que tu consegues? *(In Sharma, 2000)*	Verificar o significado do símbolo no início e durante a aplicação de um procedimento.	Equações
7. Foram vendidos 1000 bilhetes. Os bilhetes de adulto custam 8,50€ , os de criança 4,50€ e vendeu-se um total de 7300€. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?	Decidir se é útil recorrer ao símbolo. Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.	Equações / Problemas
8. Analise as seguintes equações: a. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2x+3=\frac{21}{4}$ b. $\left(2\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-2\sin x+3=\frac{21}{4}$ Indique como procederia se lhe pedissem para encontrar todas as soluções de cada uma das equações no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. *(In Kirshner&Chance, 2005)*	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado. Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.	Equações
9. São acendidas duas velas diferentes. Elas consomem-se com taxas diferentes e uma é 3 cm mais comprida que a outra. A vela mais comprida foi acesa às 17:30 e a mais curta às 19:00. Às 21:30 elas tinham ambas a mesma altura. A maior consumiu-se completamente às 23:30 e a mais curta às 23:00. Qual o comprimento original de cada vela? Será possível escrever uma expressão geral para o comprimento original das velas com base na diferença de altura e na taxa de consumo de cada vela? *(In www.nrich.maths.org, abril, 2010)*	Criar uma expressão simbólica que traduza a situação. Manipular simbolicamente mantendo uma visão global do significado do símbolo durante a aplicação de um procedimento e a resolução do problema. Interpretar o símbolo no contexto do problema. Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas. Generalizar	Problemas

10 A altura atingida por uma bola de ténis depende do tempo que passou desde que foi lançada. Note que o gráfico é parabólico, mas pode não ser o mesmo que o da trajetória da bola. A sua altura (medida em metros) como função do tempo (medido em segundos) desde o instante em que foi lançada é: $210+550t-500t^2$  As expressões (a)-(d) apresentadas em baixo são equivalentes. Qual delas é mais útil para encontrar a altura máxima da bola e porquê? (a) $210+550t-500t^2$ (b) $-500\left(t-\frac{14}{10}\right)\left(t+\frac{3}{10}\right)$ (c) $\frac{1}{10}(700-500t)+(10t+3)$ (d) $-500\left(x-\frac{11}{20}\right)^2+\frac{1445}{4}$ *(In NCTM, 2009)*	Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões. Escolher a representação simbólica adequada.	Funções / Expressões

11. Para a função *f* (cujo gráfico é apresentado) ordene os seguintes números por ordem crescente e explique a sua resposta: $0, 1, f'(2), f'(3), f'(5), f''(5)$.  *(In Smart, 2010)*	Utilizar o símbolo para estabelecer relações.	Funções
12. Descreva uma situação que possa ser modelada pela equação $y = 10 + 4.35x$. O que $109 \geq 10 + 4.35x$ significa situação que modelou?	Utilizar o símbolo para modelar situações.	Funções

13. Das expressões apresentadas, indique qual corresponde ao gráfico apresentado. (sem recorrer à calculadora)  (a) $y = x$ (b) $y = -x$ (c) $y = 2x$ (d) $y = x + 2$ *(In Duval, 2006b)*	Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático.	Funções
14. Um círculo tem de raio *5cm* tem uma área de 25π centímetros quadrados. Se o raio passar para o dobro, qual é a área do novo círculo? *(In* www.keysschools.com/curriculum/math/highschool/Released%20test/20069thStrandD.pdf *, abril, 2009)*	Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.	Funções
15. Se substituir -1, -2 ou -3 na expressão algébrica (x+2)(x+6), obtém três resultados. Será possível, sem fazer as contas, indicar qual das substituições produz o maior resultado e qual produz o menor? *(In* *www.nrich.maths.org*, *abril, 2010)*	Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos.	Expressões algébricas

Anexo 6

Tarefas da Entrevista

Escreva uma expressão algébrica que simbolize o seguinte:

a) Seis vezes um certo número.

b) Menos seis do que um certo número.

c) Seis menos que um certo número.

d) A soma de três números inteiros consecutivos.

e) Duas vezes o produto de dois números é vinte.

f) O quociente de dois números é igual à soma desses números.

g) O quadrado de um número ímpar ao qual é subtraído um. O que pode dizer sobre os números que resultam dessa expressão?

O David é 10cm mais alto que o Pedro. O Pedro tem uma altura de *h* cm. O que pode escrever sobre a altura do David?

Sem fazer cálculos, indique se as seguintes igualdades são verdadeiras ou falsas e explique o que o levou à sua conclusão:

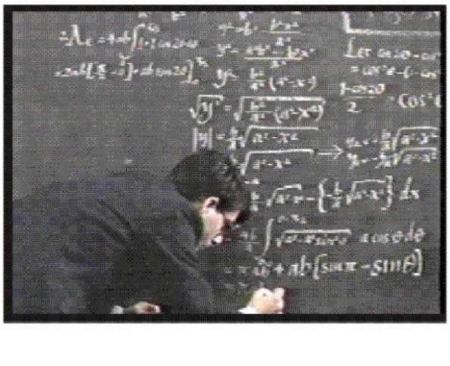
a. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

b. $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$

c. $(a+2b)^4 = 17a^4 + 8a^3b + b^3a + \sqrt{ab}$

Resolva a equação em ordem a x.

$$abcx - d + e - f = 0$$



Resolva:

a. $3x + 5 = 4x$

b. $\dfrac{3x - 15}{2x + 1} = 0$

c. $\dfrac{2x + 3}{4x + 6} = 2$

Alguns alunos encontravam-se a resolver um problema. A sua solução foi:

$$\frac{8y-6}{4}=\frac{1}{2}(4y-3)$$
$$2y-6=2y-\frac{3}{2}$$
$$-6=-\frac{3}{2}$$

Os alunos sabiam que a sua resposta não estava correta mas não conseguiam identificar o que tinham feito errado. Será que tu consegues?

Foram vendidos 1000 bilhetes. Os bilhetes de adulto custam 8,50€ , os de criança 4,50€ e vendeu-se um total de 7300€. Quantos bilhetes de cada tipo foram vendidos?

Analise as seguintes equações:

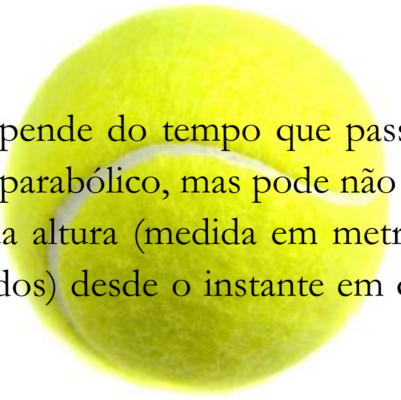
a. $$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-2x+3=\frac{21}{4}$$

b. $$\left(2\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-2\sin x+3=\frac{21}{4}$$

Indique como procederia se lhe pedissem para encontrar todas as soluções de cada uma das equações no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

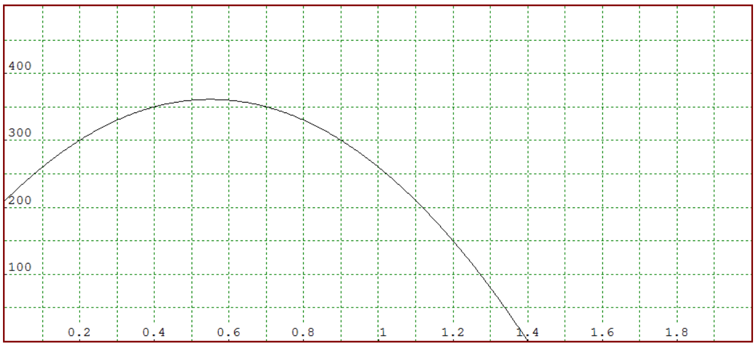
São acendidas duas velas diferentes. Elas consomem-se com taxas diferentes e uma é 3 cm mais comprida que a outra.
A vela mais comprida foi acesa às 17:30 e a mais curta às 19:00.
Às 21:30 elas tinham ambas a mesma altura.
A maior consumiu-se completamente às 23:30 e a mais curta às 23:00.
Qual o comprimento original de cada vela?

Será possível escrever uma expressão geral para o comprimento original das velas com base na diferença de altura e na taxa de consumo de cada vela?



A altura atingida por uma bola de ténis depende do tempo que passou desde que foi lançada. Note que o gráfico é parabólico, mas pode não ser o mesmo que o da trajetória da bola. A sua altura (medida em metros) como função do tempo (medido em segundos) desde o instante em que foi lançada é:

$$210+550t-500t^2$$



As expressões (a)-(d) apresentadas em baixo são equivalentes. Qual delas é mais útil para encontrar a altura máxima da bola e porquê?

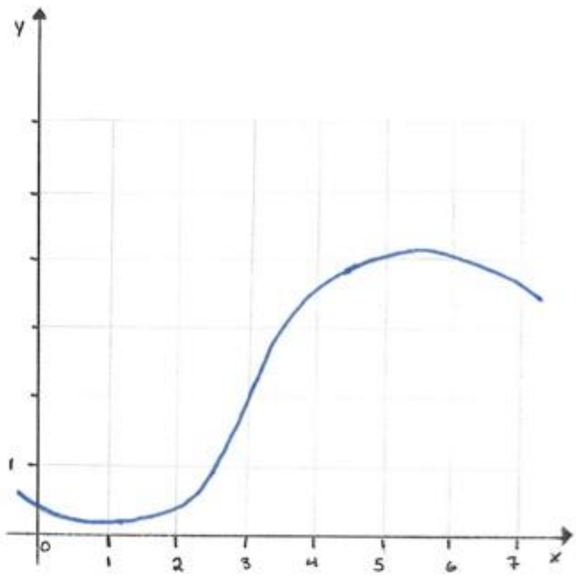
(a) $210+550t-500t^2$

(b) $-500\left(t-\frac{14}{10}\right)\left(t+\frac{3}{10}\right)$

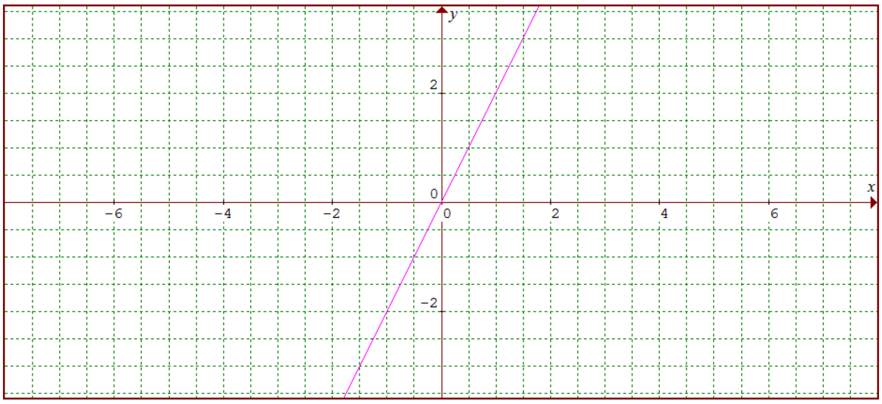
(c) $\frac{1}{10}(700-500t)+(10t+3)$

(d) $-500\left(t-\frac{11}{20}\right)^2+\frac{1445}{4}$

Para a função *f* (cujo gráfico é apresentado) ordene os seguintes números por ordem crescente e explique a sua resposta:
0, 1, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(5)$, $f''(5)$.



Das expressões apresentadas, indique qual corresponde ao gráfico apresentado. (sem recorrer à calculadora)

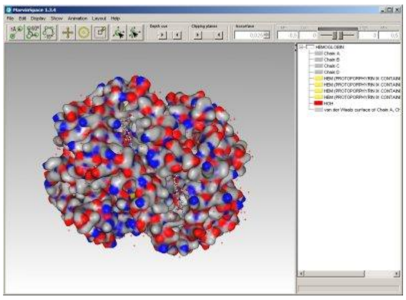


(a) $y = x$ (b) $y = -x$ (c) $y = 2x$ (d) $y = x + 2$

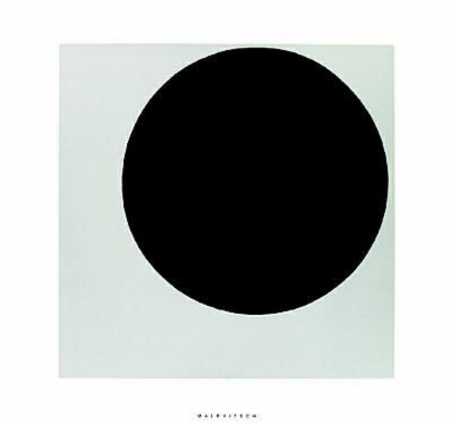
Descreva uma situação que possa ser modelada pela equação

$$y = 10 + 4.35x$$

O que $109 \geq 10 + 4.35x$ significa situação que modelou?



Um círculo tem uma área de 25π centímetros quadrados. Se o raio passar para o dobro, o que acontece à área do novo círculo?



Se substituir -1, -2 ou -3 na expressão algébrica $(x+2)(x+6)$, obtém três resultados. Será possível, **<u>sem fazer as contas</u>**, indicar qual das substituições produz o maior resultado e qual produz o menor?

Guião da Segunda Entrevista

Anexo 7

Temas a abordar	**Tópicos / Possíveis questões**
Introdução	• Apresentar o objetivo da entrevista. • Realçar que não tem qualquer influência na avaliação da disciplina. • Motivar e pôr à vontade o entrevistado.
Expressões algébricas	1. Porque representaste "um certo número" por essa letra? 2. Poderias ter respondido às questões sem utilizar letras? Porquê? 3. Como verificaste se as expressões eram verdadeiras ou falsas?
Equações	4. Se fosse pedido para resolver a equação em ordem a *b*, o que alterarias na tua resolução? 5. Haveria uma maneira mais rápida de resolves esta questão? 6. Como é que os alunos sabiam que a resposta estava errada? 7. Porque escreveste a questão como uma equação? Haveria outra forma de a resolver? 8. Há uma grande diferença entre a questão *a* e a questão *b*? E em termos de soluções, há alguma diferença? Porquê?
Problemas	9. E esta questão? Conseguias resolver sem recorrer a equações? E a expressão geral que encontraste achas que é mesmo geral? Qual te parece que é a vantagem de uma expressão geral?
Funções	10. Concordas que as expressões apresentadas são equivalentes? O que é "ser equivalente?" 11. O que representa a derivada num ponto? E achas que a derivada é uma função? Consegues com o que é dado na questão saber o valor exato da derivada nos pontos $x=2$, $x=3$ e $x=5$? E um valor aproximado, como procederias? E para a segunda derivada? 12. Porque escolheste essa situação? O que tiveste em conta na expressão dada para encontrares essa situação? 13. Porque escolheste essa expressão? E se eu te der uma expressão, consegues desenhar o seu gráfico? O que é mais fácil para ti. Porquê? 14. Como pensaste? Podes dizer que sempre que o raio passa para o dobro isso acontece à área? Como seria o gráfico da área de um círculo em função do seu raio?
Expressões algébricas	15. Como pensaste? Se os valores dados fossem positivos a questão seria mais fácil de resolver?

Documentos em Análise

Anexo 8

Nº	Tipo de documento	Data
1	Teste diagnóstico	4/12/2010
2	Entrevista do teste diagnóstico	9-15 Dez. 2009
3	Ex. Sumativo Funções	7/1/2010
4	Ex. Sumativo Logaritmos	21/1/2010
5	Ex. Sumativo Limites	4/2/2010
6	Ficha Sumativa	8/3/2010
7	2º Teste Intermédio Nacional	15/3/2010
8	1ª Simulação De Exame	31/5/2010
9	Teste Sumativo	26/4/2010
10	3º Teste Intermédio Nacional	19/5/2010
11	2ª Simulação de Exame	31/5/2010
12	Exame Nacional	1ªf– 21/6/2010 2ªf- 19/7/2010
13	Tarefas – Trabalho escrito	maio 2010
14	Entrevista baseada nas tarefas	maio 2010
15	Questionário sobre Álgebra	Após a entrevista
16	Ficha do aluno “o que é para si a Matemática”	Início do ano letivo 16/9/2009

Pedidos de Autorização

Anexo 9

Exmo. Sr.
Presidente do Conselho Pedagógico

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann, professora de Matemática desta escola vem solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o projecto de investigação em educação intitulado “O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário”. Este projecto visa novos contributos para a compreensão do sentido de símbolo em alunos do ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem das funções, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto implicará a recolha de dados, de alunos das turmas do 11º e 12º ano dos estudos portugueses e 12º ano dos estudos ingleses. A recolha de dados dos alunos do 12º ano dos estudos portugueses envolverá gravações em áudio e/ou vídeo de algumas entrevistas realizadas dentro da escola, mas fora dos tempos lectivos e em horário previamente acordado, feitas aos alunos que concordarem em ser os participantes principais do estudo. Serão objecto de análise nesta investigação i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos; ii) transcrições das entrevistas que lhes sejam realizadas; iii) respostas dos exames nacionais relacionadas com o tema em estudo. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos no campo da Álgebra.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes. Os encarregados de educação dos alunos do 12º ano dos estudos portugueses serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento, para possibilitar a participação dos alunos que nele pretendam vir a colaborar.

25 de Setembro de 2009

Pede deferimento,

____
(Maria Teresa Rebelo Abranches Grossmann)

Exmo. Sr.
Encarregado de Educação

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann, professora de Matemática, vem comunicar que pretende realizar o projecto de investigação em educação intitulado "O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário". Este projecto visa novos contributos para a compreensão do sentido de símbolo em alunos de ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem das funções, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto implicará a recolha de dados, dos alunos do 12º ano que envolverá gravações em áudio e/ou vídeo de algumas entrevistas realizadas dentro da escola, mas fora dos tempos lectivos e em horário previamente acordado com os alunos. Serão objecto de análise nesta investigação i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos; ii) transcrições das entrevistas que lhes sejam realizadas; iii) respostas dos exames nacionais relacionadas com o tema em estudo. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos no campo da Álgebra.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes, sendo essencial o consentimento de alunos e respectivos encarregados de educação para a sua participação. Estarei sempre disponível para prestar qualquer esclarecimento adicional.

Antecipadamente agradeço a colaboração de todos os intervenientes neste processo.

26 de Setembro de 2009

A professora de Matemática,

____

Autorização

Eu, __________________________________encarregado(a) de educação do aluno ___________, nº __, da turma __, do 12º ano do Ensino Secundário, tomei conhecimento dos objectivos do projecto de investigação em educação intitulado "O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário", que envolverá a turma do 12º ano, no âmbito da disciplina de Matemática A, e _______________________(autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando.

Relativamente às entrevistas ou a outras actividades que envolvam o meu educando, no âmbito deste projecto de investigação, __________________(autorizo/ não autorizo) a sua gravação em áudio e/ou vídeo e uso para efeitos de investigação, com a salvaguarda do respectivo anonimato.

26 de Setembro de 2009

O Encarregado de Educação

____

Exma. Sra.
Coordenadora do Ensino Secundário

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann, professora de Matemática, vem comunicar que a turma do 12º ano dos estudos portugueses irá participar no projecto de investigação em educação intitulado "O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário". Este projecto visa novos contributos para a compreensão do sentido de símbolo em alunos de ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem das funções, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto encontra-se deferida pela Direcção Pedagógica, em comunicação datada de 25 de Novembro de 2009. Os objectivos do estudo, serão também dados a conhecer à Directora de Turma do 12º ano, aos alunos e aos encarregados de educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente no estudo e o consentimento dos respectivos encarregados de educação, serão duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto.

A recolha de dados dos alunos do 12º ano envolverá gravações em áudio e/ou vídeo de algumas entrevistas realizadas dentro da escola, mas fora dos tempos lectivos e em horário previamente acordado, feitas aos alunos que concordarem em ser os participantes principais do estudo. Serão objecto de análise nesta investigação i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos; ii) transcrições das entrevistas que lhes sejam realizadas; iii) respostas dos exames nacionais relacionadas com o tema em estudo. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos no campo da Álgebra.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes.

Antecipadamente agradeço a colaboração de todos os intervenientes neste processo.

26 de Setembro de 2009

A professora de Matemática,

____

Tomei conhecimento:

A Coordenadora do Ensino Secundário

____

Data: __ /__ / 2009

Exma. Sra.
Directora de Turma do 12º ano

Maria Teresa Santos Graça Rebelo Abranches Grossmann, professora de Matemática, vem comunicar que a turma do 12º ano dos estudos portugueses irá participar no projecto de investigação em educação intitulado “O sentido de símbolo em alunos do ensino secundário”. Este projecto visa novos contributos para a compreensão do sentido de símbolo em alunos de ensino secundário e a sua relação com a aprendizagem das funções, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto encontra-se deferida pela Direcção Pedagógica, em comunicação datada de 25 de Novembro de 2009 e foi dada a conhecer à Coordenadora do Ensino Secundário. Os objectivos do estudo, serão também dados a conhecer aos alunos e aos encarregados de educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente no estudo e o consentimento dos respectivos encarregados de educação, serão duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto.

A recolha de dados dos alunos do 12º ano envolverá gravações em áudio e/ou vídeo de algumas entrevistas realizadas dentro da escola, mas fora dos tempos lectivos e em horário previamente acordado, feitas aos alunos que concordarem em ser os participantes principais do estudo. Serão objecto de análise nesta investigação i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos; ii) transcrições das entrevistas que lhes sejam realizadas; iii) respostas dos exames nacionais relacionadas com o tema em estudo. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos no campo da Álgebra.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes.

Antecipadamente agradeço a colaboração de todos os intervenientes neste processo.

27 de Setembro de 2009

A professora de Matemática,

____

Tomei conhecimento

A Directora de Turma do 12º ano

____

Data: __ /__ / 2009