

Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional



# Modelos Limite para a Fiabilidade de Sistemas de Grande Dimensão

Paula Cristina Martins dos Reis

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional  
(Especialidade em Probabilidades e Estatística)

2011

Universidade de Lisboa  
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional



# Modelos Limite para a Fiabilidade de Sistemas de Grande Dimensão

Paula Cristina Martins dos Reis

Orientação de Prof.<sup>a</sup> Doutora Luísa Canto e Castro Loura  
Co-orientação de Prof. Doutor José António Caldeira Duarte

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional  
(Especialidade em Probabilidades e Estatística)

2011

# Conteúdo

Glossário de Termos e Abreviaturas	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Prefácio	xv
Agradecimentos	xix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Teoria de Valores Extremos. Resultados Gerais . . . . .	1
1.1.1 Distribuição Limite para o Máximo . . . . .	2
1.1.2 Caracterização dos Domínios de Atracção para o Máximo Normalizado. Constantes de Atracção . . . . .	5
1.1.3 Aproximações <i>Ultimate</i> e <i>Penultimate</i> . Velocidades de Convergência . . . . .	18
1.1.4 Extensão dos Resultados para a Distribuição Limite do Mínimo Normalizado . . . . .	20
1.2 Fiabilidade em Sistemas Série-Paralelo e Paralelo-Série. Resultados Gerais . . . . .	28
<b>2 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelos, Regulares e Homogéneos</b>	<b>37</b>
2.1 Análise do Comportamento Assintótico da Cauda Direita de Leis Estáveis para Mínimos . . . . .	38
2.1.1 Lei de Weibull para Mínimos - $\gamma < 0$ . . . . .	38
2.1.2 Lei de Fréchet para Mínimos - $\gamma > 0$ . . . . .	41
2.1.3 Lei de Gumbel para Mínimos - $\gamma = 0$ . . . . .	42
2.2 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e Homogéneos . . . . .	43

2.3	Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e Homogéneos . . . . .	54
2.4	Estudo de Simulação . . . . .	55
2.4.1	Teste de Ajustamento à Distribuição de Gumbel. Estatística de Teste . . . . .	56
2.4.2	Resultados do Estudo de Simulação . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Modelos <i>Penultimate</i> para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelo, Regulares e Homogéneos</b>	<b>67</b>
3.1	Análise do Comportamento <i>Penultimate</i> da Cauda Direita de Leis Estáveis para Mínimos . . . . .	69
3.2	Modelos <i>Penultimate</i> para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e Homogéneos . . . . .	75
3.3	Modelos <i>Penultimate</i> Para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e Homogéneos . . . . .	78
3.4	Estudo de Simulação . . . . .	79
3.4.1	Teste à Condição de Valores Extremos. Estatísticas de teste . . . . .	80
3.4.2	Resultados do Estudo de Simulação . . . . .	83
3.4.3	Parâmetro <i>Penultimate</i> vs Parâmetro <i>Ultimate</i> . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelo, Regulares, Não-Homogéneos</b>	<b>99</b>
4.1	Análise do Comportamento Assintótico da Cauda Direita do Produto de Leis Estáveis para Mínimos . . . . .	102
4.2	Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e não Homogéneos . . . . .	106
4.3	Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e não Homogéneos . . . . .	114

# Lista de Figuras

1.1	Funções densidade para a Distribuição Generalizada de Valores Extremos . . . . .	5
1.2	Funções densidade para a Distribuição Generalizada de Valores Extremos para mínimos . . . . .	22
1.3	Funções densidade das distribuições generalizadas de valores extremos para máximos $G_{0.7}$ e para mínimos $H_{0.7}$ . . . . .	23
1.4	Funções densidade das distribuições generalizadas de valores extremos para máximos $G_{-0.7}$ e para mínimos $H_{-0.7}$ . . . . .	24
1.5	Esquema de um sistema em série . . . . .	30
1.6	Esquema de um sistema paralelo . . . . .	31
1.7	Esquema de um sistema série-paralelo . . . . .	32
1.8	Esquema de um sistema paralelo-série . . . . .	33
1.9	Esquema de um sistema série-paralelo regular . . . . .	34
1.10	Esquema de um sistema paralelo-série regular . . . . .	35



# Lista de Tabelas

2.1	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	62
2.2	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	62
2.3	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	63
2.4	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	63
2.5	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	64
2.6	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	64
2.7	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	65
2.8	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	65
3.1	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	84
3.2	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	85
3.3	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	85
3.4	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	86
3.5	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	86
3.6	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	87
3.7	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos . . . . .	87

3.8	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	88
3.9	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	88
3.10	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	89
3.11	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	89
3.12	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	90
3.13	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos . . . . .	90
3.14	Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição para mínimos . . . . .	91
3.15	Valores calculados para o parâmetro penultimate . . . . .	92
3.16	Erro quadrático médio e Viés das estimativas de teta, para os parâmetros penultimate e ultimate . . . . .	94
3.17	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	95
3.18	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	95
3.19	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	96
3.20	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	96
3.21	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	97
3.22	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	97
3.23	Valores do erro quadrático médio e do viés . . . . .	98



# Glossário de Termos e Abreviaturas

$\xrightarrow{d}$	converge em distribuição
$\xrightarrow{p}$	converge em probabilidade
$\xrightarrow{q.c.}$	converge quase certamente
$\Rightarrow$	converge fracamente
$\stackrel{d}{=}$	igual em distribuição
<i>a.a.</i>	amostra aleatória
<i>f.d.</i>	função de distribuição ou funções de distribuição
<i>i.i.d.</i>	independentes e identicamente distribuídas
<i>v.a.</i>	variável aleatória
$x^F$	limite superior do suporte de $F$
$x_F$	limite inferior do suporte de $F$
$F_{M_n}(\cdot)$	função de distribuição do máximo
$F_{m_n}(\cdot)$	função de distribuição do mínimo
$\Lambda(\cdot)$	função de distribuição de Gumbel (para máximos)
$\Phi_\alpha(\cdot)$	função de distribuição de Fréchet (para máximos)
$\Psi_\alpha(\cdot)$	função de distribuição de Weibull (para máximos)
$G_\gamma(\cdot)$	Distribuição Generalizada de Valores Extremos (para máximos)
GEV	Distribuição Generalizada de Valores Extremos (para máximos)
$\Lambda^{\min}(\cdot)$	função de distribuição de Gumbel para mínimos
$\Phi_\alpha^{\min}(\cdot)$	função de distribuição de Fréchet para mínimos
$\Psi_\alpha^{\min}(\cdot)$	função de distribuição de Weibull para mínimos
$H_\gamma(\cdot)$	Distribuição Generalizada de Valores Extremos (para mínimos)
GEV <sup>min</sup>	Distribuição Generalizada de Valores Extremos (para mínimos)
$L(\cdot)$	função de variação lenta
$RV_\rho$	função de variação regular no infinito, com índice de variação $\rho$
$RV_{-\infty}$	função de variação rápida
$\mathcal{D}(G)$	domínio de atracção de uma distribuição de valores extremos $G$
$\mathcal{C}_G$	conjunto dos pontos de continuidade da função de distribuição $G$

$S$	sistema em série, paralelo, série-paralelo e paralelo-série
$E_i$	componente de sistemas em série e paralelo
$R_i(\cdot)$	função de fiabilidade da componente $E_i$
$F_i(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida da componente $E_i$
$R_n^{ser}(\cdot)$	função de fiabilidade de sistemas em série
$R_n^{par}(\cdot)$	função de fiabilidade de sistemas em paralelo
$R_\gamma^*(\cdot)$	fiabilidade limite para sistemas em série
$R_\gamma(\cdot)$	fiabilidade limite para sistemas em paralelo
$E_{ij}$	componente de sistemas série-paralelo e paralelo-série
$R_{ij}(\cdot)$	função de fiabilidade da componente $E_{ij}$
$F_{ij}(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida da componente $E_{ij}$
$R_n^*(\cdot)$	função de fiabilidade de sistemas série-paralelo
$F_n^*(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida de sistemas série-paralelo
$R_n(\cdot)$	função de fiabilidade de sistemas paralelo-série
$F_n(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida de sistemas paralelo-série
$R_0^*(\cdot)$	fiabilidade limite para sistemas em série-paralelo
$R_0(\cdot)$	fiabilidade limite em sistemas paralelo-série
$E_{ij}^{(k)}$	componente do $k$ -ésimo sistema paralelo-série e série-paralelo
$R^{(k)}(\cdot)$	função de fiabilidade comum de componentes $E_{ij}^{(k)}$
$F^{(k)}(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida da componente $E_{ij}^{(k)}$
$F_{n_k}^{(k)}(\cdot)$	função de distribuição do tempo de vida do $k$ -ésimo sistema paralelo-série

# Resumo

Em alguns sistemas de grande dimensão, o estudo da função de fiabilidade exacta pode tornar-se um problema intratável e de pouca utilidade prática. Nestes casos, admite-se que o número de componentes do sistema tende para infinito e procuraram-se modelos assintóticos para extremos (máximos e mínimos), que possam dar uma boa interpretação da função de distribuição do tempo de vida do sistema e naturalmente da função de fiabilidade. Contudo em algumas situações, em que a velocidade de convergência uniforme da fiabilidade exacta para o modelo limite é muito lenta, constata-se a existência de outros modelos mais próximos da função de fiabilidade do que o próprio modelo limite (*ultimate*). Tal aproximação, que em teoria de valores extremos se designa por *aproximação penultimate* ou pré-assintótica, induz uma velocidade de convergência uniforme mais rápida do que a verificada na aproximação assintótica inicial.

Neste trabalho são estudados e desenvolvidos modelos *ultimate* e *penultimate* para a fiabilidade de sistemas regulares, paralelo-série e série-paralelo de grande dimensão, com recurso a importantes resultados da teoria assintótica de valores extremos.

Palavras chave: Sistemas paralelo-série e série-paralelo de grande dimensão; função de fiabilidade; distribuição generalizada de valores extremos; aproximação penultimate.



# Abstract

In some large-scale systems, the study of the exact reliability function can be an intricate problem. In these cases it is better to admit that the number of system components goes to infinity so as to find extreme asymptotic models (for maxima and minima), that give a good interpretation of the distribution function of the system lifetime and naturally of the reliability. However, in some situations, leading with a very slowly uniform rate of convergence to the limit model, the referred reliability can be better approximated by a different reliability model than by the own limit model. Such an approximation, in extreme value theory, is called *penultimate* or pre-asymptotic and yields an improvement of the convergence rate.

In this work, are studied and developed ultimate and penultimate models for the reliability of large-scale regular series-parallel and parallel-series systems, using important results of the asymptotic theory of extremes.

Key-words: Large-scale series-parallel and parallel-series systems; reliability function; generalized extreme value distribution; penultimate approximation.



# Prefácio

Ao se estudar a *fiabilidade* de alguns *sistemas* tecnológicos, defrontamo-nos com a presença de situações muito complexas que resultam não só do elevado número de *componentes* que constituem esses sistemas como ainda da forma como o processo operativo utiliza essas componentes. Assim, há situações em que não se pode simplificar o sistema de modo a considerá-lo como sendo constituído apenas por componentes em série ou em paralelo, sendo necessário considerar um desenho em *série-paralelo* (*subsistemas* em série com componentes em paralelo), ou em *paralelo-série* (subsistemas em paralelo com componentes em série). Nestes casos, é preferível admitir que o número de componentes do sistema vai para infinito e encontrar modelos assintóticos e pré-assintóticos que possam descrever bem a *função de fiabilidade*. Exemplos reais de grandes sistemas, com estruturas complexas, podem ser encontrados nas redes de transporte de petróleo, gás, água e outros líquidos ou gases, nas redes de carga e descarga em grandes portos marítimos, nas redes de distribuição de energia eléctrica e nas redes de telecomunicações.

A teoria assintótica de valores extremos estabelecida por Gnedenko ([27]) em 1943, conduziu de imediato à identificação de modelos limite para a fiabilidade de sistemas com elevado número de componentes em série ou em paralelo. Trabalhos posteriores abordaram o mesmo problema para sistemas série-paralelo e paralelo-série com *tempos de vida* (das componentes) independentes. Entre esses trabalhos sobressaem os de Smirnov [40], Chernoff and Teicher [7] e Kolowrocki [31], [32].

A abordagem que rege esta tese e que motivou a sua realização, recorre à *caracterização dos domínios de atracção* para *máximos* e para *mínimos* da chamada *distribuição generalizada de valores extremos* (GEV), diferindo por isso da utilizada por outros autores em contextos análogos e por essa via, pretende constituir um suporte teórico alternativo no estudo do comportamento limite da fiabilidade em sistemas série-paralelo e paralelo-série de grande dimensão.

No primeiro capítulo será exposto, na secção 1.1, um conjunto de resultados gerais da teoria de valores extremos, alusivos ao comportamento assintótico (*ultimate*) e pré-assintótico (*penultimate*) das sucessões do máximo e do mínimo de *v.a.'s i.i.d.*, com enquadramento quer no modelo geral GEV (para máximos e para mínimos), quer nos modelos standard das designadas *leis de valores extremos*: Fréchet, Gumbel e Weibull (também para máximos e para mínimos). Tais resultados de primordial importância, estabelecem a ponte com a teoria da fiabilidade e permitem compreender com facilidade o comportamento limite da função de distribuição do *tempo total de vida* de sistemas com componentes em série ou em paralelo, a apresentar na secção 1.2 deste capítulo. Também aqui, serão descritos alguns conceitos preliminares inerentes aos sistemas série-paralelo e paralelo-série, nomeadamente os de *regularidade e homogeneidade*, necessários para o estudo do tempo de vida destes sistemas quando apresentam um grande número de componentes.

No segundo capítulo, irei apresentar alguns resultados teóricos já investigados e publicados em Reis e Canto e Castro [35], começando por assumir que a função de distribuição comum a todos os tempos de vida das componentes que constituem um sistema paralelo-série regular, *pertence ao domínio de atracção* para mínimos de alguma *lei estável*  $H_\gamma(\cdot)$ , de parâmetro de forma  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Representando por  $F_n$  a sequência de funções de distribuição dos tempos de vida destes sistemas e mediante uma condição assintótica que incide sobre o número  $n$  de subsistemas em paralelo e o número  $l_n$  de componentes em série, começarei por identificar sucessões de constantes normalizadoras,  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , para as quais se tem  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$  a convergir para uma função de distribuição estável para máximos. Neste caso em particular, analisarei com especial relevo, o comportamento assintótico da cauda direita das leis  $H_\gamma(\cdot)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , o qual como se verá, será decisivo no estudo do comportamento limite da função de distribuição  $F_n$  e naturalmente da função de fiabilidade  $R_n = 1 - F_n$ . Recorrendo à conhecida relação entre o máximo e o mínimo, reformularei o resultado para as sequências de funções de distribuição e de fiabilidade de sistemas série-paralelo, respectivamente  $F_n^*$  e  $R_n^*$ , admitindo-se neste caso, que a função de distribuição comum a todos os tempos de vida das componentes pertence ao domínio de atracção para máximos de alguma lei estável  $G_\gamma(\cdot)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . No final deste capítulo efectuar-se-á um estudo de simulação com o objectivo de apurar algumas características comportamentais do tempo de vida de sistemas paralelo-série, quando o número de componentes é finito, confrontando-se desse modo os resultados obtidos no estudo em questão com os resultados teóricos desenvolvidos.

No terceiro capítulo, partindo novamente de sistemas paralelo-série regulares e homogéneos, irei admitir que  $n$  é grande, mas fixo e identificarei



condições que garantam a existência de uma *sequência penultimate* de distribuições de valores extremos, i.e., de uma lei estável para extremos cujo parâmetro de forma varie com  $n$  e que seja uma melhor aproximação para  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , do que a própria lei limite, com uma velocidade de convergência uniformemente válida em  $\mathbb{R}$ . Também neste caso, como se verá, o comportamento *penultimate* da cauda direita das leis para mínimos  $H_\gamma(\cdot)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , será preponderante na obtenção de modelos *penultimate* para a fiabilidade  $R_n(\alpha_n x + \beta_n)$ . Posteriormente serão adaptadas e reformuladas todas as considerações teóricas desenvolvidas, agora para as sequências de funções de distribuição  $F_n^*$  e de fiabilidade  $R_n^*$ , caso se trate de sistemas série-paralelo. Todo este trabalho investigado é suportado num artigo de Gomes e De Haan [26], no qual se consideram funções de distribuição com caudas direitas a verificarem as *condições de von Mises* de primeira e de segunda ordem e ainda uma *condição penultimate*. Os resultados teóricos desenvolvidos neste capítulo serão complementados com a realização de um novo estudo de simulação, onde numa primeira fase se efectuará um teste à hipótese da função de distribuição  $F_n$  estar próxima de uma lei estável para máximos,  $G_\theta$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , considerando sistemas paralelo-série com um número finito de componentes. Numa fase seguinte será apurado se as estimativas obtidas para o parâmetro de forma  $\theta$  estão mais próximas do parâmetro *penultimate* ou pelo contrário, estão mais próximas do parâmetro *ultimate*.

A constatação de que em muitas situações reais, a modelização da função de fiabilidade em sistemas paralelo-série e série-paralelo, e noutro tipo de sistemas, carece da hipótese de idêntica distribuição para os tempos de vida das componentes, levou a que numa primeira abordagem desta tese, fossem investigadas condições que assegurem a convergência para uma lei de extremos da função de distribuição de  $m$  sistemas paralelo-série (dispostos em paralelo), regulares e *não-homogêneos*, para  $m$  fixo e natural. A análise desta questão a desenvolver no quarto capítulo, irá cingir-se ao estudo de alguns casos particulares inserido nos modelos GEV (para máximos e para mínimos) e será sustentada num resultado de Resnick [37], indicado quando se pretende ter um  $m$  produto de distribuições “dominado” por uma certa função de distribuição dita dominante, entre as  $m$  funções de distribuição do produto, e onde ambos (produto e função de distribuição dominante) são atraídos para a mesma lei de extremos. Assim, à luz dos resultados estipulados no segundo capítulo, começarei por supor que a função de distribuição  $F^{(k)}$ , comum a todos os tempos de vida das componentes que constituem cada  $k$ -ésimo sistema paralelo-série, com  $k = 1, \dots, m$ , pertence ao domínio de atracção para mínimos de alguma lei estável  $H_{\gamma_k}(\cdot)$ , com  $\gamma_k \neq 0$  e baseando-me em Resnick [37], identificarei sucessões de constantes normalizadoras comuns a todos os  $k$ -ésimos sistemas, com  $k = 1, \dots, m$ , para as quais a função de dis-

tribuição dos  $m$  sistemas paralelo-série converge para uma lei de extremos para máximos. Mais uma vez, o estudo do comportamento limite da cauda direita do produto finito de  $m$  leis estáveis  $H_{\gamma_k}, \gamma_k \in \mathbb{R}$ , será fundamental para se obter um modelo limite para a fiabilidade de  $m$  paralelos sistemas com estrutura paralelo-série. Os resultados investigados serão depois estendidos para as funções de distribuição e de fiabilidade quando se tem em série  $m$  sistemas série-paralelo, com  $m \in \mathbb{N}$  e fixo.

O trabalho que proponho, espelha a indiscutível relevância da teoria de valores extremos na obtenção de modelos assintóticos e pré-assintóticos para a função de fiabilidade de sistemas de grande dimensão. É minha convicção, de que todos os resultados que desenvolvo no âmbito desta tese, poderão ser aplicados e extrapolados para sistemas ou situações que aqui não são analisadas. Entre essas situações, saliento em particular o problema da caracterização dos domínios de atracção para produtos (finitos) de funções de distribuição ou de funções de fiabilidade, no contexto anteriormente descrito do quarto capítulo e no caso em que  $\gamma_k = 0$ , precisamente quando se têm funções de distribuição  $F^{(k)}$ , comuns a cada  $k$ -ésimo sistema, com  $k = 1, \dots, m$ , a serem atraídas para o domínio da lei de Gumbel (para máximos ou para mínimos). Dado o interesse deste problema, pretendo aprofundá-lo e desenvolvê-lo num trabalho futuro.

# Agradecimentos

O meu agradecimento, muito especial, à minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Doutora Luísa Canto e Castro de Loura, pelos ensinamentos que me transmitiu ao longo do trabalho de doutoramento. Reconheço que o seu entusiasmo, a sua determinação e a sua capacidade de trabalho, reforçaram o meu gosto pela investigação e me ajudaram a realizar esta tese com maior convicção e motivação.

O meu agradecimento ao meu co-orientador, Prof. Doutor José António Caldeira Duarte, pelo desafio proposto em realizar o doutoramento sobre um tema que não me era particularmente próximo: a fiabilidade. Agradeço-lhe também o incentivo e o apoio manifestados.

À colega Prof.<sup>a</sup> Doutora Sandra Dias da UTAD, a minha enorme gratidão pela sua amizade, paciência, pelas sugestões e cooperação preciosas, que tanto contribuíram para o enriquecimento desta tese.

O meu reconhecimento, igualmente, ao meu colega Prof. Doutor Miguel Moreira da EST-IPS pelos seus contributos e disponibilidade incessantes.

À Prof.<sup>a</sup> Doutora Maria Ivette Gomes quero agradecer a prontidão que sempre manifestou em ajudar-me.

Ao departamento de Matemática, à Escola Superior de Tecnologia e ao Instituto Politécnico de Setúbal, agradeço a dispensa de serviço docente concedida. Ao CEAUL, agradeço todo o apoio prestado ao longo destes anos de trabalho.

Aos meus pais agradeço todo o seu amparo e o estímulo recebido com todo o carinho. Sei que lhes proporcionei um sonho há muito desejado.

Finalmente, uma palavra de gratidão por toda a compreensão familiar e o estímulo recebido com todo o carinho do meu marido Pedro e da minha prole Miguel, Afonso, Maria, Tiago, Carolina e Tomás. Agradeço-lhes particularmente a paciência que tiveram em especial nesta última fase do trabalho e da qual não me esquecerei: "Mamã já acabaste? Mamã tu vais conseguir!".



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Teoria de Valores Extremos. Resultados Gerais

A teoria assintótica de valores extremos centra-se essencialmente no estudo do comportamento limite de estatísticas ordinais extremas em amostras  $n$ -dimensionais, entre as quais sobressaem as sucessões do máximo e do mínimo de variáveis aleatórias. Fenómenos diversos envolvendo estas duas estatísticas ocorrem frequentemente no nosso quotidiano. Destacamos entre outros exemplos: os *desastres naturais*, tais como, as secas, cheias, temperaturas extremas, pressões atmosféricas extremas, tornados e furacões, terremotos e tsunamis; a *concentração da poluição do ar*; as *falhas de funcionamento das componentes* em certos *equipamentos* ou máquinas (teoria da fiabilidade); a *tensão de ruptura* a que muitos materiais são sujeitos sob stress ou tensão de uma determinada lei ou força; a identificação de *estimadores estatísticos óptimos* sempre que estes envolvam estatísticas de ordem. Ora, o estudo deste tipo de problemas e o consequente impacto nefasto que alguns deles exercem nomeadamente no sector financeiro, económico e social, motivaram a investigação de uma vasta colecção de resultados, transversais a todas as áreas das ciências, desde a Física, a Engenharia, Economia e Finanças, Actuariedade, entre outras, contribuindo desse modo para a modernização da teoria de valores extremos e naturalmente da própria Estatística e Probabilidades. Nesta secção serão introduzidos alguns desses resultados, que constituem na sua essência a base da modelização da função de fiabilidade em sistemas de grande dimensão, tipo série-paralelo e paralelo-série, tema a que este trabalho se dedica.

No que se segue e ao longo desta dissertação usarei frequentemente o termo *distribuição* em vez de *função de distribuição* para não tornar a leitura do texto demasiado pesada.

### 1.1.1 Distribuição Limite para o Máximo

Seja  $F$  uma função de distribuição, com limite superior do suporte representado por  $x^F$ , tal que

$$x^F = \sup \{x : F(x) < 1\}$$

e com limite inferior do suporte simbolizado por  $x_F$ , onde

$$x_F = \inf \{x : F(x) > 0\}.$$

Dada uma sucessão de *v.a.'s i.i.d.*,  $\{X_i\}, i \geq 1$ , com função de distribuição comum  $F$ , a variável aleatória  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , com  $n \geq 1$ , tem função de distribuição conhecida definida por,

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] = F^n(x). \quad (1.1)$$

A utilização em situações práticas da função de distribuição do máximo em (1.1) acarreta dificuldades no respeito à estimação, mesmo quando a *f.d.*  $F(x)$  da amostra é totalmente conhecida. Usualmente tenta-se encontrar uma distribuição limite para  $F^n$  cuja expressão não dependa de  $F$ . Contudo, para valores muito grandes de  $n$  a *f.d.*  $F_{M_n}$  é degenerada, pois para  $x < x^F$ , tem-se  $F(x) < 1$  e portanto, quando  $n \rightarrow +\infty$ , virá  $P(M_n \leq x) = F^n(x) \rightarrow 0$ . Por outro lado, para  $x^F < +\infty$  e  $x \geq x^F$ , tem-se  $P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1$ , pelo que em ambos os casos  $M_n \xrightarrow{p} x^F$  e, uma vez que  $\{M_n\}$  é uma sucessão não decrescente em  $n$ , tem-se por conseguinte  $M_n \xrightarrow{q.c.} x^F$ . A teoria clássica de valores extremos garante que a existência de uma distribuição limite, não degenerada, só poderá ocorrer mediante uma normalização adequada para o máximo e sob determinadas propriedades de convergência fraca a que este obedece. Em particular, existindo sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , onde  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , ter-se-á  $a_n^{-1}(M_n - b_n) \Rightarrow X$ , para alguma *v.a.*  $X$ , não degenerada, i.e., a distribuição do máximo convenientemente normalizada,  $F^n(a_n x + b_n)$ , convergirá para uma função de distribuição,  $G$ , não degenerada, no conjunto dos pontos de continuidade da distribuição limite  $G$ . A estas distribuições que surgem como limite de uma sucessão de funções de distribuição é usual serem designadas por *leis*.

O estudo da convergência fraca para a distribuição do máximo normalizado é fundamentado no conhecido teorema de Kintchine, no qual é retrada

a estreita relação entre os conceitos de convergência fraca, transformações lineares e *tipos*. Note-se que duas f.d.  $G$  e  $G^*$  dizem-se *do mesmo tipo* se existirem constantes  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que  $G^*(ax + b) = G(x), \forall x$ .

**Proposição 1.1 (teorema de kintchine)** *Sejam  $G(x)$  e  $G^*(x)$  duas f.d. não degeneradas e  $\mathcal{C}_G, \mathcal{C}_{G^*}$  os respectivos conjuntos de pontos de continuidade. Suponhamos que para  $n \geq 1$ , existem sucessões  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , para as quais a sequência de funções de distribuição  $\{F_n\}$  converge fracamente, i.e.,*

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x), \text{ para } x \in \mathcal{C}_G.$$

Então, para  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , a convergência

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G^*(x), \text{ para } x \in \mathcal{C}_{G^*},$$

é válida sse existirem constantes  $A > 0$  e  $B \in \mathbb{R}$ , tais que

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \longrightarrow A, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \longrightarrow B. \quad (1.2)$$

Além disso,

$$G(x) = G^*(Ax + B), \forall x. \quad (1.3)$$

O Teorema de Kintchine permitiu identificar a classe de distribuições *max-estáveis*, que é fechada precisamente para as transformações lineares, como a única classe de possíveis leis limite para a distribuição do máximo normalizado. Relembramos que uma *v.a.* não degenerada  $X$ , independente e identicamente distribuída com a sequência de *v.a.'s i.i.d.*  $\{X_i\}, i \geq 1$ , diz-se *max-estável* caso existam constantes  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$  para cada  $n \geq 1$  tais que  $\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ . Resulta desta definição e por (1.3), que qualquer distribuição  $G$ , estável para máximos satisfaz a propriedade  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $G^n(x) = G((x - a_n)/b_n)$ , ou seja,  $G^n$  e  $G$  são distribuições do mesmo tipo. Estas leis gozam de um interessante conjunto de propriedades, nomeadamente o facto de terem função característica absolutamente integrável, o que implica que qualquer lei max-estável é absolutamente contínua, com função densidade infinitamente diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Note-se que, o facto de estarmos a trabalhar com distribuições limite contínuas, faz com que as noções de convergência fraca e convergência em distribuição sejam equivalentes, pelo que é indiferente estipular resultados em termos de uma ou outra convergência.

A classe das leis limite para o máximo normalizado foi deduzida por Fisher e Tippett, mas formalmente demonstrada por Gnedenko no chamado *teorema de tipos extremais*, constituindo um marco fundamental no desenvolvimento da teoria de valores extremos.

**Proposição 1.2 (Fisher-Tippet/ Teorema de Tipos Extremais)** *Seja  $\{X_i\}, i \geq 1$ , uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. e com f.d. comum  $F$ . Se existirem  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$  e uma v.a.  $X$  com f.d.  $G(\cdot)$ , não degenerada, tais que*

$$a_n^{-1} (M_n - b_n) \xrightarrow{d} X,$$

*ou de forma equivalente, se para cada  $x$  pertencente ao conjunto dos pontos de continuidade de  $G$ ,*

$$P[M_n \leq a_n x + b_n] = [F(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} G(x), \quad (1.4)$$

*então o tipo de lei a que pertence  $G$  ou é Gumbel, ou Fréchet ou Weibull, cujas formas standard são*

$$\begin{aligned} \text{Gumbel} & : & \Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{Fréchet} & : & \Phi_\alpha(x) &= \exp(-x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad x > 0 \\ \text{Weibull} & : & \Psi_\alpha(x) &= \exp(-(-x)^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

*As distribuições limite  $\Lambda$ ,  $\Phi_\alpha$  e  $\Psi_\alpha$  designam-se por distribuições de valores extremos (para máximos).*

**Observação 1.1** É frequente aparecer na literatura  $a_n^{-1} (M_n - b_n) \xrightarrow{d} G$  em vez de  $a_n^{-1} (M_n - b_n) \xrightarrow{d} X$ , tendo obviamente o mesmo significado.

**Observação 1.2** A condição em (1.4) também é conhecida por condição de valores extremos.

**Observação 1.3** No contexto do tratamento probabilístico estes três modelos de distribuições de valores extremos são totalmente distintos, mas do ponto de vista matemático estão relacionados, pois para  $x > 0$ , verificam

$$\Phi_\alpha(x) = \Lambda(\ln x^\alpha) = \Psi_\alpha(-x^{-1}).$$

Os três tipos de distribuições de valores extremos que vimos anteriormente podem ser representados numa forma paramétrica única denominada por *forma de von Mises-Jenkinson* ou *distribuição generalizada de valores extremos*, (GEV do inglês Generalized Extreme Value), que depende somente de um único parâmetro,  $\gamma$ , designado por *índice de valores extremos*, a menos de localização e escala,

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & 1 + \gamma x \geq 0, \quad \gamma \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0 \end{cases}, \quad (1.5)$$



onde  $G_0(x) := \Lambda(x)$  é obtida como expressão limite de  $G_\gamma(x)$  à esquerda e à direita de  $\gamma = 0$ . Repare-se que

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \Lambda(x), & \gamma = 0 \\ \Phi_{1/\gamma}(1 + \gamma x), & \gamma > 0 \\ \Psi_{-1/\gamma}(-(1 + \gamma x)), & \gamma < 0 \end{cases} . \quad (1.6)$$

Na figura 1.1 estão representadas as funções densidade para o modelo  $G_\gamma$ , com  $\gamma$  a tomar os valores  $-0.7$ ,  $0$  e  $0.7$ .

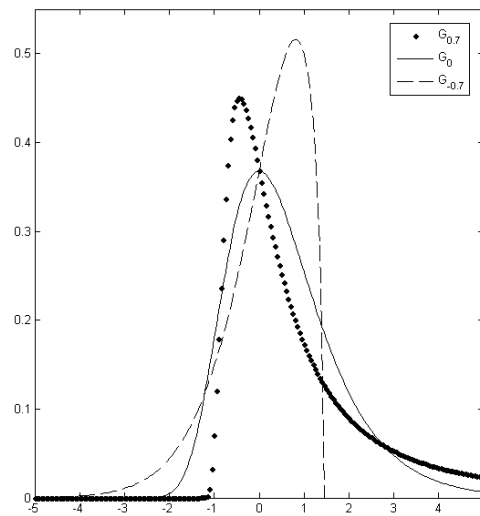


Figura 1.1: Funções densidade para a Distribuição Generalizada de Valores Extremos

### 1.1.2 Caracterização dos Domínios de Atracção para o Máximo Normalizado. Constantes de Atracção

Depois de estabelecidas as possíveis leis limite para o máximo normalizado urge saber por um lado que condições devem ser impostas à distribuição  $F$  de modo a garantir a convergência em (1.4) e por outro lado, como escolher adequadamente as constantes normalizadoras que certificam essa mesma convergência. Pela própria definição de máximo, facilmente se constata que as suas propriedades dependem da quantidade de probabilidade existente na cauda direita de  $F$ , mais precisamente, a que se concentra “em torno” do limite superior do suporte de  $F$ . Por conseguinte, é presumível que os resultados desenvolvidos abarquem condições necessárias e suficientes que incidem

concretamente sobre o comportamento assintótico da cauda  $1 - F(x)$ . Entramos assim, no âmbito dos domínios de atracção, um dos grandes temas de investigação em teoria de valores extremos. A caracterização de domínios de atracção está fortemente relacionada com o estudo das funções de variação regular. Sobre esta matéria, salientamos os trabalhos de De Haan [12], Balkema e De Haan [3], Goldie e Resnick [23], Gnedenko [27], entre outros, que contribuíram de forma singular para o desenvolvimento da teoria moderna de valores extremos. Restringiremos a nossa análise a cinco importantes resultados, quatro direccionados para o domínio de atracção das distribuições de valores de extremos na sua forma standard, enquanto o quinto é formulado para o modelo paramétrico *GEV*. Na exposição que se segue, começamos por apresentar uma breve revisão de alguns conceitos básicos das funções de variação regular. Para uma leitura mais profunda sobre esta matéria consulte-se por exemplo Resnick [36] e Seneta [39].

**Definição 1.1 (Função de Variação Regular)** *Uma função mensurável  $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  diz-se de variação regular no infinito com índice  $\rho \in \mathbb{R}$  e escreve-se  $U \in RV_\rho$ , se para todo  $x > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho. \quad (1.7)$$

*O expoente  $\rho$  é designado por expoente de variação regular. Quando  $\rho = 0$ ,  $U$  diz-se **função de variação lenta**.*

As funções de variação lenta são normalmente representadas na literatura por  $L(x)$ . Note-se que se  $U \in RV_\rho$ , então  $U(x)/x^\rho \in RV_0$ , pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(tx)/(tx^\rho)}{U(t)/(t^\rho)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^\rho}{x^\rho} = 1.$$

Fazendo  $L(x) = U(x)/x^\rho$ , resulta que  $U(x) = x^\rho L(x)$ , o que significa que qualquer função de variação regular com índice  $\rho$  pode ser identificada pela função de variação lenta que lhe está associada. A definição anterior pode ser extendida à origem e nesse caso dizemos que  $U$  é de *variação regular em zero* sse  $U(x^{-1})$  é de variação regular em infinito. Doravante, sempre que escrevermos  $f(x) \sim g(x)$  significa que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$ . Alguns exemplos de funções de variação regular em infinito são a própria função  $x^\rho$  e a função  $(1+x^2)^p$  com expoente de variação  $2p$ . Todas as potências de  $|\ln x|$  são de variação lenta em zero e em infinito. Qualquer função positiva e mensurável a partir de certo valor e possuindo um limite positivo quando

$x \rightarrow +\infty$  é uma função de variação lenta. As funções de distribuição  $F$  que verificam a propriedade  $1 - F(x) \sim cx^{-\alpha}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $c > 0$  e  $\alpha > 0$ , têm caudas de variação regular no infinito. Para  $0 < \alpha < 2$ , estas funções pertencem à classe das chamadas leis estáveis<sup>1</sup>.

As **funções de variação lenta** verificam as seguintes **propriedades**:

1. Se  $L(\cdot)$  é uma função de variação lenta, então,
  - a. Para todo o  $\gamma > 0$ ,  $x^{-\gamma}L(x) \rightarrow 0$  e  $x^\gamma L(x) \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow \infty$ ;
  - b.  $\ln L(x) / \ln x \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ ;
  - c. A função  $L^\alpha(x)$  é de variação lenta para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Se  $L_1(\cdot)$  e  $L_2(\cdot)$  são funções de variação lenta,
  - a.  $L_1(x) + L_2(x)$  e  $L_1(x)L_2(x)$  são funções de variação lenta;
  - b. Se  $L_2(x) \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , então  $L_1(L_2(x))$  é de variação lenta.

**Definição 1.2 (Função de Variação Rápida)** *Uma função mensurável  $V : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  diz-se de variação rápida com índice  $(-\infty)$ , e escreve-se  $V \in RV_{-\infty}$ , se para todo  $x > 0$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} .$$

Por exemplo as funções  $f(x) = 1 - e^{-e^x}$  e  $g(x) = e^{-x^2}$  são de variação rápida.

---

<sup>1</sup>Uma *v.a.*  $X$  diz-se *estável* ou tem *distribuição estável* sse  $\forall n \geq 1$ , existirem  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , tais que  $X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ , para quaisquer *v.a.s* *i.i.d.*  $X_1, \dots, X_n$ , independentes e com a mesma distribuição de  $X$ .

Estamos agora aptos para caracterizar os domínios de atracção para cada uma das distribuições de valores extremos:

**Definição 1.3 (Domínio de Atracção para Máximos)** *Uma função de distribuição  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma lei estável para máximos  $G$  e escrevemos  $F \in \mathcal{D}(G)$ , sse existirem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , verificando a condição de valores extremos (1.4).*

Tomando logaritmos e expandindo (1.4), obtém-se uma definição equivalente à anterior:

**Definição 1.4 (Domínio de Atracção para Máximos)** *Uma função de distribuição  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma lei estável para máximos  $G$  sse existirem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , tais que*

$$n(1 - F(a_n x + b_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln G(x),$$

para  $x$  tal que  $G(x) > 0$ .

Obviamente, estas definições podem ser reformuladas considerando  $G(x)$  no modelo paramétrico GEV de parâmetro  $\gamma$ . Para  $\gamma > 0$ , temos os domínios de atracção das leis de Fréchet, para  $\gamma < 0$ , os domínios de atracção das leis de Weibull e para  $\gamma = 0$ , o domínio de atracção da lei de Gumbel. Note-se que as constantes normalizadoras  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , também designadas por *constantes de atracção*, não são únicas, pelo que nos próximos teoremas, serão apresentados apenas possíveis escolhas das mesmas. Por outro lado, o teorema de Kintchine garante que os domínios de atracção são disjuntos, donde se conclui que uma outra escolha de constantes de atracção  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$  para a distribuição do máximo, obedece indubitavelmente a (1.2).

As funções de distribuição pertencentes ao domínio das leis de Fréchet e de Weibull apresentam caudas direitas que podem ser descritas por funções de variação regular com índice finito, condição necessária para que se possa caracterizar os respectivos domínios de atracção, como é ilustrado nos próximos dois teoremas demonstrados por Gnedenko [27]:

**Teorema 1.1 (Domínio de Atracção da Lei de Fréchet)** *Uma f.d.  $F$ , com limite superior do suporte  $x^F = +\infty$ , pertence ao domínio de atracção da lei de extremos Fréchet,  $\Phi_\alpha(x)$ , sse existir  $\alpha > 0$ , tal que, para todo  $x > 0$ , se tenha  $1 - F \in RV_{-\alpha}$ , i.e.,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}.$$

Nesse caso existe uma seqüência  $a_n > 0$ , tal que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$a_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha,$$

ou seja,

$$F^n(a_n x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_\alpha(x), \quad x > 0, \quad (1.8)$$

onde a constante de atracção  $a_n$  pode ser escolhida tomando

$$a_n = \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}. \quad (1.9)$$

O domínio de atracção da Fréchet é constituído por todas as distribuições de caudas com decaimento polinomial. Deste domínio de atracção fazem parte as distribuições ditas de "caudas pesadas" uma vez que  $E(X^+)^\delta = +\infty$ , para  $\delta > \alpha$ . Este domínio integra as conhecidas distribuições Log-gama, Pareto, Bur e ainda a distribuição de Cauchy como se ilustra no próximo exemplo,

**Exemplo 1.1** A *f.d.* de Cauchy,

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad x \in \mathbb{R},$$

tem limite superior do suporte infinito, tendo-se pela regra de Cauchy

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan tx}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + t^2)x}{1 + (tx)^2} = x^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $a_n$  é tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan a_n = \frac{1}{n},$$

ou seja,

$$a_n = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{n}{\pi}.$$

Logo,

$$F^n \left( \frac{n}{\pi} x \right) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{nx}{\pi} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_1(x), \quad x > 0,$$

já que, novamente pela regra de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{tx}{\pi} \right)^t &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left\{ \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{tx}{\pi} \right)^t \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{tx}{\pi} \right)}{\frac{1}{t}} \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left\{ - \frac{t^2 x}{(1 + t^2 x^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{tx}{\pi} \right)} \right\} \\
&= \exp \left\{ - \frac{1}{x} \right\}.
\end{aligned}$$

**Observação 1.4** Se tomarmos logaritmos em (1.8), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n (-\ln F(a_n x)) = x^{-\alpha}.$$

Utilizando a relação assintótica  $-\ln(1-z) \sim z$ , quando  $z \rightarrow 0$ , no limite anterior temos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} n (-\ln F(a_n x)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (-\ln(1 - (1 - F(a_n x)))) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (1 - F(a_n x)) = x^{-\alpha}. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $1 - F \in RV_{-\alpha}$ , então a cauda direita de  $F$  pode ser escrita na forma

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0. \quad (1.11)$$

Fazendo  $x = 1$  em (1.10) vem que  $n(1 - F(a_n)) \sim 1$ , donde

$$1 - F(a_n) \sim \frac{1}{n},$$

Por sua vez, por (1.11), tem-se

$$1 - F(a_n) = a_n^{-\alpha} L(a_n),$$

pelo que  $a_n^{-\alpha} L(a_n) \sim \frac{1}{n}$  e portanto as constantes de atracção  $\{a_n\}$  para a lei de Fréchet verificam

$$a_n \sim n^{1/\alpha} L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0. \quad (1.12)$$

**Observação 1.5** No caso do modelo paramétrico  $G\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , podemos igualmente deduzir uma expressão assintótica para as constantes de atracção, que representamos agora por  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , onde  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ . De facto, atendendo a (1.6), ao teorema de Kintchine (proposição 1.1) e tomando  $\gamma = 1/\alpha$  em (1.12), vem que

$$\alpha_n \sim An^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad A > 0, \gamma > 0.$$

Por outro lado, uma vez tendo-se  $(\beta_n - b_n)/a_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$  e  $b_n = 0$ , então

$$\beta_n \sim Bn^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad B \in \mathbb{R}, \gamma > 0,$$

**Teorema 1.2 (Domínio de Atracção da Lei de Weibull)** *Uma função de distribuição  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma lei de extremos Weibull,  $\Psi_\alpha$ , sse o limite superior do suporte  $x^F < +\infty$  e se existir  $\alpha > 0$ , tal que  $1 - F(x^F - \frac{1}{x}) \in RV_{-\alpha}$ , para  $x > 0$ . Nesse caso, tomando a sequência  $b_n = x^F$  e a sequência positiva*

$$a_n = x^F - \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

ter-se-á,

$$\frac{M_n - x^F}{a_n} \xrightarrow{d} \Psi_\alpha,$$

ou seja,

$$F^n(a_n x + x^F) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi_\alpha(x), \quad x < 0. \quad (1.13)$$

Note-se que somente as distribuições de caudas (direitas) curtas com suporte limitado superiormente poderão pertencer ao domínio de atracção de uma lei de Weibull, como é o caso das distribuições Beta e Uniforme, esta última apresentada no próximo exemplo.

**Exemplo 1.2** Considere-se a *f.d.* Uniforme no intervalo  $(0, 1)$ ,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Sendo  $x^F = 1$ , tem-se para  $x > 0$ ,  $1 - F(1 - \frac{1}{x}) \in RV_{-1}$ , pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(1 - \frac{1}{tx})}{1 - F(1 - \frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{tx}}{\frac{1}{t}} = x^{-1}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\} &= \inf \left\{ x : 1 - x \leq \frac{1}{n} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

resulta por aplicação do teorema anterior que  $n(M_n - 1) \xrightarrow{d} \Psi_1$ , i.e,

$$F^n \left( \frac{x}{n} + 1 \right) = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x, \quad x < 0,$$

com constantes de atracção  $a_n = \frac{1}{n}$  e  $b_n = 1$ .

**Observação 1.6** Aplicando logaritmos no limite em (1.13) e atendendo a que  $-\ln(1-z) \sim z$ , se  $z \rightarrow 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n [-\ln F(a_n x + x^F)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (-\ln(1 - (1 - F(a_n x + x^F)))) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n (1 - F(a_n x + x^F)) \\ &= (-x)^\alpha, \quad x < 0, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como a cauda direita de  $F$  para  $y = x^F - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ , é de variação regular no infinito com índice  $(-\alpha)$ , podemos escrever

$$1 - F \left( x^F - \frac{1}{x} \right) = x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0, \quad (1.15)$$

pelo que tomando  $x = -1$  em (1.14) e  $x = a_n^{-1}$  em (1.15), obtém-se

$$(a_n)^\alpha L(a_n^{-1}) \sim \frac{1}{n},$$

resultando assim a expressão assintótica,

$$a_n \sim n^{-1/\alpha} L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0. \quad (1.16)$$

**Observação 1.7** Para o modelo paramétrico  $G\gamma$ , com  $\gamma < 0$ , tem-se atendendo a (1.6), ao teorema de Kintchine (proposição 1.1) e tomando  $\gamma = 1/\alpha$  em (1.16),

$$\alpha_n \sim A n^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad A > 0, \gamma < 0.$$

e

$$\beta_n \sim B n^\gamma L(n) + x^F, \quad n \rightarrow +\infty, \quad B \in \mathbb{R}, \gamma < 0,$$

uma vez que  $(\beta_n - b_n)/a_n \rightarrow B \in \mathbb{R}$  e  $b_n = x^F$ .



O domínio de atracção da lei de Gumbel é constituído por todas as distribuições de caudas leves com limite superior do suporte finito e por distribuições de caudas moderadamente pesadas, com decaimento tipo exponencial (variação rápida), cujo limite superior do suporte é infinito. Porque as caudas não são de variação regular e por incluir uma grande variedade de distribuições, torna-se assim o domínio mais difícil de caracterizar, abrangendo conseqüentemente um conjunto significativo de resultados para diferentes tipos de caracterizações. Note-se que a multiplicidade de formas das caudas de funções de distribuição atraídas para a lei de Gumbel invalida uma expressão assintótica conhecida para as constantes de atracção, como as encontradas para as leis de Fréchet e de Weibull. Para este domínio de atracção, começamos por apresentar uma caracterização, cuja demonstração pode ser consultada em Galambos [22]:

**Teorema 1.3 (Domínio de Atracção da Lei de Gumbel)** *Uma f.d.  $F$ , com  $x^F \leq +\infty$ , pertence ao domínio de atracção da lei de Gumbel,  $\Lambda(x)$ , se e só se existir um número real  $a$  para o qual*

$$\int_a^{x^F} (1 - F(y)) dy < +\infty,$$

de modo que, para todo o real  $x$ , se tenha

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \frac{1 - F(t + xK(x))}{1 - F(t)} = e^{-x},$$

onde para  $x_F < t < x^F$ , a função  $K(t)$  é definida por

$$K(t) = (1 - F(t))^{-1} \int_t^{x^F} (1 - F(y)) dy.$$

Nesse caso, existem sucessões  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , dadas por

$$a_n = K(b_n),$$

e

$$b_n = \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

para as quais

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda,$$

ou seja,

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entre as distribuições mais conhecidas atraídas para a lei de Gumbel, destacamos a Normal, a Log-normal, a Gama e a Exponencial retratada no seguinte exemplo,

**Exemplo 1.3** Para a *f.d.* Exponencial,  $F(x) = 1 - e^{-x}$ ,  $x > 0$ , de limite superior do suporte  $x^F = +\infty$ , facilmente se reconhece que para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^{x^F} (1 - F(y)) dy = \int_a^{+\infty} e^{-y} dy < +\infty.$$

Sendo,

$$K(t) = (e^{-t})^{-1} \int_t^{+\infty} e^{-y} dy = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(t + xK(x))}{1 - F(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(t+x)}}{e^{-t}} = e^{-x},$$

pelo que tomando  $a_n = 1$  e  $b_n$  tal que,

$$e^{-b_n} = \frac{1}{n},$$

i.e.,  $b_n = \ln n$ , resulta pelo teorema anterior, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$F^n(x + \ln n) = (1 - e^{-(x + \ln n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \rightarrow \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(M_n - \ln n) \xrightarrow{d} \Lambda, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uma outra caracterização para este domínio de atracção, da qual iremos recorrer no próximo capítulo, foi estabelecida por Balkema e De Haan [3]. Como se constatará, o maior obstáculo nesta caracterização é a identificação de duas funções  $w(x)$  e  $g(x)$  por estas não serem efectivamente únicas.

**Teorema 1.4 (Domínio de Atracção da Lei de Gumbel)** *Uma f.d.  $F$ , com  $x^F \leq +\infty$ , pertence ao domínio de atracção da lei de Gumbel,  $\Lambda(x)$ , se e só se existirem uma função positiva  $w$  satisfazendo  $\lim_{x \rightarrow x^F} w(x) = 1$  e uma função auxiliar  $g$  diferenciável e positiva tal que*

$$-\ln F(x) = w(x) \exp \left\{ - \int_{z_0}^x \frac{1}{g(u)} du \right\}, \quad z_0 < x < x^F \quad (1.17)$$

para algum  $z_0$  e onde se tem  $\lim_{x \rightarrow x^F} g'(x) = 0$ , com  $g'(\cdot)$  a função derivada de  $g(\cdot)$ .

No caso em que a *f.d.*  $F$  é absolutamente contínua, von Mises [34] deduziu separadamente para cada um dos domínios de atracção, condições assintóticas para que uma dada distribuição possa ser atraída para uma estável de extremos e que constituem uma alternativa às caracterizações anteriores. As *condições de von Mises*, tal como são conhecidas, podem ser reformuladas e agrupadas numa única condição suficiente uniformizada para o modelo geral  $G_\gamma$ , para qualquer  $\gamma \in \mathbb{R}$ , veja-se por exemplo Canto e Castro [6]. Tal condição faz uso da função  $u(x) := -\ln(-\ln F(x))$ , cuja função derivada será determinante na construção das constantes de atracção.

**Proposição 1.3 (Condição de von Mises)** *Sejam  $F$  uma *f.d.* absolutamente contínua com função densidade  $f$  satisfazendo*

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \left( \frac{1}{u'(x)} \right)' = \gamma, \quad (1.18)$$

então  $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$ .

Note-se que na representação (1.17) do teorema (1.4), se a função  $F$  for absolutamente contínua, podemos tomar  $w(x) = 1$  e  $g(x) = 1/u'(x)$ , com

$$u'(x) = -\frac{f(x)}{F(x) \ln F(x)}. \quad (1.19)$$

Fazendo  $g'(x) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow x^F$  obtém-se precisamente a condição de von Mises para o domínio de atracção da Gumbel ( $\gamma = 0$ ). Uma escolha plausível de constantes de atracção que validam (1.17) e (1.18), sugerida em Gomes e de Haan [26] e Canto e Castro [6], é a seguinte:

$$\begin{cases} b_n : & F(b_n) = \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ a_n : & a_n = \frac{1}{u'(b_n)} \end{cases}. \quad (1.20)$$

**Exemplo 1.4** Considere-se a *f.d.*  $F$  com  $x^F = 1$ , definida por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-(1-x)^{-1}\right), & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tendo em conta que,

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{(1-x)^{-2} \exp\left(-(1-x)^{-1}\right)}{(1 - \exp\left(-(1-x)^{-1}\right)) \ln\left(1 - \exp\left(-(1-x)^{-1}\right)\right)} \\ &= -\frac{1}{(1-x)^2 \left(\exp\left(1-x\right)^{-1} - 1\right) \ln\left(1 - \exp\left(-(1-x)^{-1}\right)\right)}, \end{aligned}$$

vem,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{u'(x)} \right)' &= -2(x-1)(1 - \exp(1-x)^{-1}) \ln(1 - \exp(-(1-x)^{-1})) \\ &\quad - \exp(1-x)^{-1} \ln(1 - \exp(-(1-x)^{-1})) \\ &\quad + (\exp(-(1-x)^{-1}) - 1)(1 - \exp(-(1-x)^{-1})). \end{aligned}$$

Tomando limites, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^F} \left( \frac{1}{u'(x)} \right)' &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [(-2(x-1)(\exp(-(1-x)^{-1}) + 1)) \times \\ &\quad \times \frac{\ln(1 - \exp(-(1-x)^{-1}))}{-\exp(-(1-x)^{-1})}] - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelo que, aplicando a condição de von Mises, se conclui  $F \in \mathcal{D}(G_0)$ . Calculando as constantes de atracção, resulta por(1.20),

$$\begin{aligned} F(b_n) &= \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \exp(-(1-b_n)^{-1}) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow (1-b_n)^{-1} = -\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow b_n = 1 - \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{-1}, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{u'(b_n)} \\ &= \frac{1}{n \exp\left(\frac{1}{n}\right) (1-b_n)^{-2} (1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right))} \\ &= \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^2}. \end{aligned}$$

Referimos anteriormente que os domínios de atracção são disjuntos o que significa que uma distribuição não pode ser simultaneamente atraída para diferentes leis estáveis para máximos (que não sejam do mesmo tipo). Outra propriedade não menos importante dos domínios de atracção é serem fechados para distribuições com *caudas equivalentes*:

**Definição 1.5 (Equivalência de Cauda)** *Duas distribuições  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  têm caudas equivalentes se têm o mesmo limite superior do suporte, i.e.,  $x^{F_1} = x^{F_2}$ , e se*

$$\lim_{x \rightarrow x^{F_1}} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = c \in \mathbb{R}^+.$$

**Proposição 1.4 (Resnick, S. [36] e [38])** *Sejam  $F_1$  e  $F_2$  duas funções de distribuição com limite superior do suporte comum, i.e.,  $x^{F_1} = x^{F_2}$ .*

1. *Suponha-se que  $F_1 \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ , com constantes de atracção  $a_n > 0$ , verificando*

$$F_1^n(a_n x + x^{F_1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_\alpha(x), \quad x > 0.$$

*Então,*

$$F_2^n(a_n x + x^{F_1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_\alpha(ax), \quad x > 0,$$

*para algum  $a > 0$ , sse  $F_1$  e  $F_2$  são distribuições com caudas equivalentes tal que,*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = a^\alpha.$$

2. *Suponha-se que  $F_1 \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ , com constantes de atracção  $a_n > 0$ , verificando*

$$F_1^n(a_n x + x^{F_1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi_\alpha(x), \quad x < 0.$$

*Então,*

$$F_2^n(a_n x + x^{F_1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi_\alpha(ax), \quad x < 0,$$

*para algum  $a > 0$ , sse  $F_1$  e  $F_2$  são distribuições com caudas equivalentes tal que,*

$$\lim_{x \rightarrow x^{F_1}} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = a^{-\alpha}.$$

3. *Suponha-se que  $F_1 \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , com constantes de atracção  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , verificando*

$$F_1^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Então,*

$$F_2^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda(x + b), \quad x \in \mathbb{R},$$

*para algum  $b \in \mathbb{R}$ , sse  $F_1$  e  $F_2$  são distribuições com caudas equivalentes tal que,*

$$\lim_{x \rightarrow x^{F_1}} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = e^b.$$

Este resultado é extremamente útil, pois sugere o uso do mesmo par de constantes de atracção para distribuições que tenham caudas equivalentes, e por conseguinte, pertencentes ao mesmo domínio de atracção. Iremos ver no quarto capítulo que os domínios de atracção são igualmente fechados para o produto finito de funções de distribuição, mediante uma condição assintótica adicional que reflecte a dominância de uma certa distribuição sobre as restantes. Nesse caso a função de distribuição dominante e o produto de funções de distribuição têm caudas equivalentes.

### 1.1.3 Aproximações *Ultimate* e *Penultimate*. Velocidades de Convergência

Conhecida a lei limite para a distribuição do máximo normalizado, é de todo conveniente medir por algum processo “como e quão próximo” está  $F^n(a_nx + b_n)$  de  $G(x)$ , ou seja, sempre que  $F \in \mathcal{D}(G)$ , para uma escolha adequada de constantes normalizadoras,  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , pretende-se avaliar a qualidade da aproximação *ultimate* ou assintótica,

$$F^n(a_nx + b_n) \approx G(x).$$

O estudo desta aproximação pode ser feito precisamente recorrendo à estimação da distância entre a função exacta  $F^n(a_nx + b_n)$  e a respectiva lei limite,

$$|F^n(a_nx + b_n) - G(x)|.$$

Ora, como a convergência em distribuição para leis não degeneradas é uniforme no suporte da lei limite, o problema resume-se a tomar o supremo da expressão anterior e analisar como este converge para zero, i.e., averiguar em que condições se tem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^n(a_nx + b_n) - G(x)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (1.21)$$

e determinar ainda a velocidade com que essa convergência se processa. Para se perceber o conceito de *velocidade de convergência uniforme*, suponha-se que a sucessão de funções

$$\Delta_n(x) = F^n(a_nx + b_n) - G(x),$$

pode ser escrita na forma

$$\Delta_n(x) = \delta(x) u_n + o(u_n), \quad (1.22)$$

onde  $\delta(x)$  é uma função não identicamente nula e não dependente de  $n$ ,  $\{u_n\}$  é um infinitésimo de comportamento conhecido (tipo  $1/n^p, 1/\ln^p n$  ou

$(\ln n)/n$ ), e  $o(u_n)$  é uma sucessão que normalmente depende de  $x$ . Por vezes torna-se mais fácil trabalhar directamente com uma função majorante,  $d(x)$ , suficientemente próxima de  $\Delta_n(x)$ , com  $|\Delta_n(x)| \leq d(x), \forall x$  e que possa ser escrita como em (1.22). Em qualquer dos casos, mostrar a convergência em (1.21) equivale então a provar que o termo  $o(u_n)$  converge uniformemente para zero e, assim sendo, diz-se que a *velocidade de convergência uniforme* de  $F^n(a_nx + b_n)$  para  $G(x)$  é da ordem de  $u_n$ . Note-se que a velocidade de convergência depende quer da escolha das constantes de atracção quer do comportamento assintótico da cauda direita da função de distribuição  $F$ .

O problema da obtenção da velocidade de convergência tem constituído o mote de importantes investigações científicas em teoria de valores extremos, tendo sido analisado isoladamente para cada um dos três domínios de atracção Gumbel, Fréchet e Weibull. Destacamos nesta área, os trabalhos de Fisher e Tippett [21], Uzgören [45] e Hall [28], que estabeleceram velocidades de convergência para modelos de *v.a.'s* independentes com distribuição normal, incluída no domínio da Gumbel. Já Anderson [1], obteve velocidades de convergência uniformemente válidas sobre intervalos limitados, abrangendo os diferentes domínios de atracção. De referir ainda os estudos desenvolvidos por Cohen [9] para o domínio de atracção da Gumbel, por Smith [42], para os domínios da Fréchet e da Weibull e por Davis [11], que levaram à dedução de velocidades de convergência uniforme em todo o suporte da lei limite. Alguns destes resultados foram reformulados e uniformizados por Canto e Castro [5] e [6], para o modelo geral  $G_\gamma$  em amostras de *v.a.'s* independentes e identicamente distribuídas. Ainda para o referido modelo, Canto e Castro [6] propõe uma escolha de constantes de atracção distinta da utilizada por outros autores, o que originou igualmente uma diferente expressão assintótica final para  $F^n(a_nx + b_n) - G_\gamma(x)$ , válida em qualquer domínio de atracção. As respectivas velocidades de convergência uniforme foram deduzidas considerando quer intervalos limitados no suporte da  $G_\gamma$  quer tomando todo o seu suporte.

No seu artigo, Fisher e Tippett [21], constataram ainda no caso do modelo normal, para o qual a velocidade de convergência uniforme é habitualmente lenta (quanto muito da ordem de  $1/\ln n$ ), que a distribuição do máximo amostral, convenientemente normalizada, poderia ser “melhor” aproximada a uma sequência de distribuições de valores extremos distintas da própria distribuição *ultimate* Gumbel. Essa sequência de distribuições de extremos, convergente para a lei limite e designada pelos mesmos autores por *sequência penultimate* ou *pré-assintótica*, induziria assim uma velocidade de convergência uniforme mais rápida do que a verificada na aproximação assintótica inicial. Outros autores tais como Cohen [8] e Gomes [24] debruçaram-se exactamente sobre o mesmo problema, também para a sucessão do máximo amostral de

*v.a.* normais. Gomes e Pestana [25], Smith [44], Gomes e De Haan [26] e ainda Kaufmann [30], estudaram as *aproximações penultimate* para  $F^n(a_n x + b_n)$  contextualizadas no modelo paramétrico  $G_\gamma$ . Salientamos em particular o trabalho de Gomes e De Haan [26] por ser aquele que servirá de base para o estudo do comportamento *penultimate* da função de fiabilidade em sistemas com estrutura paralelo-série e série-paralelo a desenvolver no capítulo 3 desta dissertação. Nesse artigo, os autores consideraram funções de distribuição  $F$  cujas caudas direitas verificam as condições de von Mises de primeira ordem (proposição 1.3) e de segunda ordem, envolvendo o parâmetro  $\gamma$  e ainda um parâmetro de segunda ordem,  $\rho$ . Com essas condições provaram, para modelos de *v.a.'s i.i.d.*, que a existência de uma sequência de distribuições *penultimate* só é possível, quando a aproximação da distribuição do máximo, convenientemente normalizado,  $F^n(a_n x + b_n)$ , à sua lei limite  $G_\gamma(x)$ , é muito lenta, i.e., quando  $\rho = 0$  e estabeleceram uma terceira condição a que chamaram *condição de von Mises tipo penultimate*, ou simplesmente, *condição penultimate*, para obter a referida sequência,  $G_{\gamma_n}(x)$ , onde  $\gamma_n \neq \gamma$  e  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , com uma velocidade de convergência uniformemente válida em  $\mathbb{R}$ . O estudo da *aproximação penultimate*,

$$F^n(a_n x + b_n) \approx G_{\gamma_n}(x),$$

ganha contornos particularmente interessantes quando  $\gamma = 0$ , por abranger um leque variado de possíveis funções de distribuição *penultimate*. Na verdade, tomando  $n$  fixo e suficientemente grande são obtidas para  $\gamma_n > 0$ , distribuições de Fréchet,  $G_{\gamma_n}$ , enquanto que para  $\gamma_n < 0$ , obtêm-se distribuições de Weibull. Qualquer uma destas distribuições está mais próxima de  $F^n(a_n x + b_n)$  do que a lei limite Gumbel.

### 1.1.4 Extensão dos Resultados para a Distribuição Limite do Mínimo Normalizado

Considere-se novamente uma sucessão de *v.a.'s i.i.d.*,  $\{X_i\}$ ,  $i \geq 1$ , com função de distribuição comum  $F$ . A variável aleatória  $m_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , com  $n \geq 1$ , tem função de distribuição definida por,

$$F_{m_n}(x) = 1 - P(m_n > x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P[X_i \leq x]) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

É a quantidade de probabilidade existente na cauda esquerda de  $F$ , especificamente a que se concentra em torno do seu limite inferior do suporte,  $x_F$ , que será agora relevante para o estudo do comportamento limite do mínimo



normalizado. Contudo, pela estreita relação entre o máximo e o mínimo, traduzida pela conhecida igualdade

$$\min_{1 \leq i \leq n} (X_i) = -\max_{1 \leq i \leq n} (-X_i), \quad (1.23)$$

é fácil de reconhecer que todos os resultados obtidos para a teoria assintótica dos valores extremos relativos ao máximo de variáveis aleatórias, podem ser directamente formulados e extendidos para a sucessão do mínimo. Na verdade, se a variável aleatória  $\max_{1 \leq i \leq n} (-X_i)$  puder ser normalizada de modo a admitir como limite uma variável  $Z$ , não degenerada, então pelo que vimos anteriormente, podemos deduzir que a função de distribuição de  $Z$  será do tipo de  $G_\gamma$ , para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ , pelo que a lei limite para o mínimo, verificará

$$F_{-Z}(x) = P[-Z \leq x] = P[Z \geq -x] = 1 - G_\gamma(-x) =: H_\gamma(x),$$

com  $G_\gamma(x)$  a distribuição generalizada de valores extremos para máximos (GEV) e  $H_\gamma(x)$  a *distribuição generalizada de valores extremos para mínimos* (GEV<sup>min</sup>), definida por

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & 1 - \gamma x \geq 0, \quad \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp(-e^x), & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0 \end{cases}, \quad (1.24)$$

sendo que a Gumbel para mínimos  $H_0(x) := \Lambda^{\min}(x) = 1 - \exp(-e^x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é obtida como expressão limite de  $H_\gamma(x)$  à esquerda e à direita de  $\gamma = 0$ . Diremos então que a função de distribuição  $F$  de uma variável aleatória  $X$  está no *domínio de atracção para mínimos* de  $H_\gamma$  sse a função de distribuição de  $(-X)$  estiver no domínio de atracção para máximos de  $G_\gamma$ . É então possível reescrever a definição 1.2, para a distribuição do mínimo, convenientemente normalizado, estipulando que

**Definição 1.6 (Domínio de Atracção para Mínimos)** *Uma f.d.  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma lei min-estável  $H_\gamma$  e escreve-se  $F \in \mathcal{D}(H_\gamma)$ , sse existirem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , tais que para cada  $n \in \mathbb{N}$*

$$1 - (1 - F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_\gamma(x). \quad (1.25)$$

Para  $\gamma > 0$ , temos a classe das distribuições de Fréchet para mínimos, para  $\gamma < 0$  a classe das distribuições de Weibull para mínimos e para  $\gamma = 0$  a distribuição de Gumbel para mínimos. Na figura 1.2 estão exemplificados os gráficos correspondentes à função densidade de uma  $H_\gamma$ , com  $\gamma$  a tomar os valores  $-0.7$ ,  $0$  e  $0.7$ .

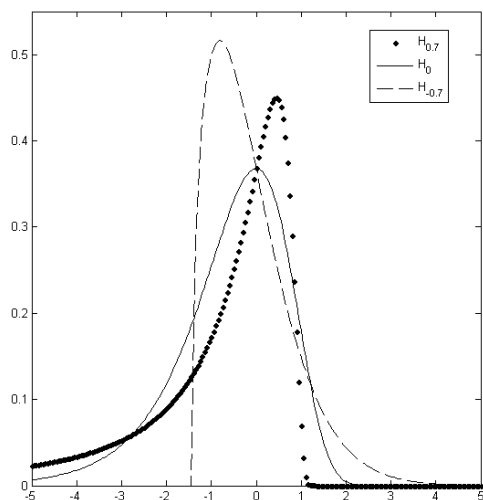


Figura 1.2: Funções densidade para a Distribuição Generalizada de Valores Extremos para mínimos

Repare-se que as distribuições de Fréchet e de Weibull para mínimos, na sua forma standard definem-se agora respectivamente por

$$\Phi_\alpha^{\min}(x) = 1 - \exp(-(-x)^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad x < 0.$$

e ainda,

$$\Psi_\alpha^{\min}(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad x > 0,$$

tendo-se naturalmente,

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \Phi_{1/\gamma}^{\min}(1 - \gamma x), & \gamma > 0 \\ \Psi_{-1/\gamma}^{\min}(-(1 - \gamma x)), & \gamma < 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Note-se que, caso existam sucessões  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , tais que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $F_X^n(a_n x + b_n) \rightarrow G_\gamma(x)$ , para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ , então a distribuição da *v.a.* simétrica de  $X$ , a função  $F_{-X}$ , pertencerá ao domínio de atracção de  $H_\gamma(x)$ , com uma possível escolha de constantes de atracção dada por

$\alpha_n = a_n$  e  $\beta_n = -b_n$ , pois uma vez que  $F_{-X}(x) = 1 - F_X(-x)$ , ter-se-á

$$\begin{aligned} 1 - (1 - F_{-X}(\alpha_n x + \beta_n))^n &= 1 - (1 - (1 - F_X(-\alpha_n x - \beta_n)))^n \\ &= 1 - [F_X(a_n(-x) + b_n)]^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_\gamma(-x), \end{aligned}$$

onde,  $1 - G_\gamma(-x) = H_\gamma(x)$ . Resulta daqui, que quando uma distribuição é simétrica relativamente à origem, i.e., satisfazendo  $F_{-X} = F_X$ , verificará necessariamente

$$[F_X(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_\gamma(x)$$

sse

$$1 - (1 - F_X(a_n x - b_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_\gamma(x).$$

Nas figuras 1.3 e 1.4 estão representados as funções densidade de distribuições de valores extremos para máximos e para mínimos.

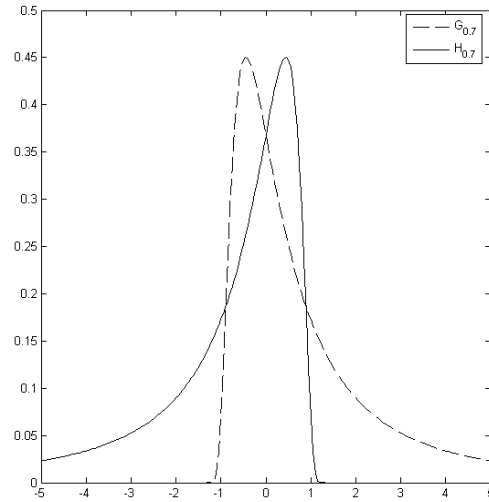


Figura 1.3: Funções densidade das distribuições generalizadas de valores extremos para máximos  $G_{0.7}$  e para mínimos  $H_{0.7}$

Apresentamos por último três resultados similares aos teoremas (1.1), (1.2) e (1.3), reformulados agora para a *v.a.*  $(-X_i)$ , que tal como os primeiros estabelecem condições necessárias e suficientes para que uma função de distribuição possa ser atraída agora para uma lei de mínimos. Tais resultados podem ser consultados com maior detalhe em Galambos [22].

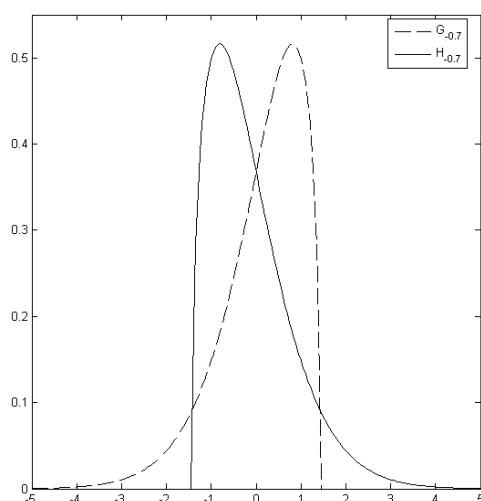


Figura 1.4: Funções densidade das distribuições generalizadas de valores extremos para máximos  $G_{-0.7}$  e para mínimos  $H_{-0.7}$

**Teorema 1.5 (Domínio de Atracção da Fréchet para Mínimos)** *Uma f.d.  $F$ , com limite inferior do suporte  $x_F = -\infty$ , pertence ao domínio de atracção da lei de Fréchet para mínimos,  $\Phi_\alpha^{\min}(x)$ , sse existir  $\alpha > 0$ , tal que, para todo  $x > 0$ , se tenha  $F \in RV_{-\alpha}$ , i.e.,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\alpha}.$$

Nesse caso existe uma sequência  $a_n > 0$ , tal que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$a_n^{-1} m_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha^{\min},$$

ou seja,

$$1 - (1 - F(a_n x))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_\alpha^{\min}, \quad x < 0, \quad (1.27)$$

onde a constante de atracção  $a_n$  pode ser escolhida tomando

$$a_n = \sup \left\{ x : F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

**Exemplo 1.5** Vimos no exemplo 1.1, que a f.d. de Cauchy

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, \quad x \in \mathbb{R},$$

com  $a_n \sim \frac{n}{\pi}$  e  $b_n = 0$ , verifica

$$F^n \left( \frac{n}{\pi} x \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi_1(x), \quad x > 0.$$

A simetria de  $F(x)$  relativamente à origem sugere-nos que tomemos como constantes de atracção de mínimos  $\alpha_n = a_n$  e  $\beta_n = -b_n$ , pelo que quando  $n \rightarrow +\infty$ , ter-se-á

$$1 - \left( 1 - F \left( \frac{n}{\pi} x \right) \right)^n \longrightarrow \left( 1 - e^{\frac{1}{x}} \right) = \Phi_1^{\min}(x), \quad x < 0.$$

**Observação 1.8** O limite em (1.27) equivale a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - F(a_n x))^n = \exp(-(-x)^{-\alpha}), \quad x < 0, \quad \alpha > 0,$$

pelo que, se tomarmos logaritmos na expressão anterior, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n [-\ln(1 - F(a_n x))] = (-x)^{-\alpha}, \quad x < 0, \quad \alpha > 0.$$

Utilizando novamente a relação assintótica  $-\ln(1 - z) \sim z$ , quando  $z \rightarrow 0$ , no limite anterior, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n F(a_n x) = (-x)^{-\alpha}, \quad x < 0, \quad \alpha > 0. \quad (1.28)$$

Por outro lado, como a cauda esquerda de  $F$  é de variação regular no infinito, com índice  $(-\alpha)$ , pode ser escrita na forma

$$F(-x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0. \quad (1.29)$$

Fazendo  $x = -1$  em (1.28) e  $x = a_n$  em (1.29), resulta que

$$F(-a_n) \sim \frac{1}{n},$$

e também,

$$F(-a_n) \sim a_n^{-\alpha} L(a_n),$$

pelo que  $a_n^{-\alpha} L(a_n) \sim \frac{1}{n}$  e portanto, as constantes de atracção  $\{a_n\}$  para a lei de Fréchet para mínimos são assintoticamente definidas por

$$a_n \sim n^{1/\alpha} L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0, \quad (1.30)$$

tal como as constantes de atracção para a lei de Fréchet para máximos, como vimos na observação 1.4.

**Observação 1.9** Tomando agora  $\gamma = 1/\alpha$  em (1.30), atendendo a (1.26) e ao teorema de Kintchine (proposição 1.1), as constantes de atracção para o modelo paramétrico  $H_\gamma, \gamma > 0$  são assintoticamente definidas por

$$\alpha_n \sim An^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad A > 0, \gamma > 0$$

e

$$\beta_n \sim Bn^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad B \in \mathbb{R}, \gamma > 0.$$

**Teorema 1.6 (Domínio de Atracção da Weibull para Mínimos)** *Uma f.d.  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma lei de Weibull para mínimos,  $\Psi_\alpha^{\min}$ , sse o limite inferior do suporte  $x_F$  é finito e se existir  $\alpha > 0$ , tal que  $F(x_F - \frac{1}{x}) \in RV_{-\alpha}$ , para  $x < 0$ . Nesse caso, tomando a sequência  $b_n = x_F$  e a sequência positiva*

$$a_n = \sup \left\{ x : F(x) \leq \frac{1}{n} \right\} - x_F,$$

ter-se-á,

$$\frac{m_n - x_F}{a_n} \xrightarrow{d} \Psi_\alpha^{\min},$$

ou seja,

$$1 - (1 - F(a_n x + x_F))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi_\alpha^{\min}(x), \quad x > 0. \quad (1.31)$$

**Exemplo 1.6** Considere-se novamente a f.d. Uniforme do exemplo 1.2,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

onde  $x_F = 0$ . Ora,  $F(x_F - \frac{1}{x}) = F(-\frac{1}{x})$ , para  $x < -1$  e como para todo  $x > 0$  se tem

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{F(-\frac{1}{tx})}{F(-\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{tx}}{\frac{1}{t}} = x^{-1},$$

então tomando  $b_n = 0$  e  $a_n = \frac{1}{n}$ , vem pelo teorema anterior

$$1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = \Psi_1^{\min}(x), \quad x > 0.$$

**Observação 1.10** Usando o limite (1.31) e o facto de  $F(y)$ , para  $y = x_F - \frac{1}{x}$ , ser de variação regular no infinito (como função de  $x$ ), com índice  $(-\alpha)$ , é possível mostrar, à semelhança da constante normalizadora  $\{a_n\}$  da lei de Weibull para máximos, retratada na observação 1.6, que a constante de atracção  $\{a_n\}$  para a lei de Weibull para mínimos é assintoticamente definida por

$$a_n \sim n^{-1/\alpha} L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0. \quad (1.32)$$

**Observação 1.11** Tomando  $\gamma = 1/\alpha$  em (1.32), resulta pelo teorema de Kintchine (proposição 1.1) e por (1.26), as seguintes expressões assintóticas para as constantes de atracção no caso do modelo paramétrico  $H_\gamma, \gamma > 0$ ,

$$\alpha_n \sim An^\gamma L(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad A > 0, \gamma < 0$$

e,

$$\beta_n \sim Bn^\gamma L(n) + x_F, \quad n \rightarrow +\infty, \quad B \in \mathbb{R}, \gamma < 0.$$

**Teorema 1.7 (Domínio de Atracção da Gumbel para Mínimos)** *Uma f.d.  $F$ , com limite inferior do suporte finito ou infinito,  $x_F$ , pertence ao domínio de atracção da Lei de Gumbel para mínimos,  $\Lambda^{\min}(x)$ , se e só se existir um número real  $a$  para o qual*

$$\int_{x_F}^a F(y) dy < +\infty,$$

de modo que, para todo o real  $x$ , se tenha

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{F(t + xk(x))}{F(t)} = e^x,$$

onde para  $t > x_F$ , a função  $k(t)$  é definida por

$$k(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{x_F}^t F(y) dy.$$

Nesse caso, existem sucessões normalizadoras  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , dadas por

$$a_n = k(b_n),$$

e

$$b_n = \sup \left\{ x : F(x) \leq \frac{1}{n} \right\},$$

para as quais

$$\frac{m_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda^{\min},$$

ou seja,

$$1 - (1 - F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda^{\min}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 1.7** Facilmente se prova que a função de distribuição,

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

verifica as condições do teorema anterior, pois para qualquer real  $a$

$$\int_{-\infty}^a e^y dy < +\infty,$$

e sendo  $k(t) = 1$ , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(t + xk(x))}{F(t)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{t+x}}{e^t} = e^x,$$

pelo que tomando  $a_n = 1$  e  $b_n = -\ln n$ , se tem,

$$\begin{aligned} 1 - (1 - F(a_n x + b_n))^n &= 1 - (1 - (e^{x - \ln n}))^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{e^x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Lambda^{\min}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uma das nossas preocupações no próximo capítulo será averiguar se uma lei estável para mínimos poderá ser atraída para uma lei estável para máximos. Como se verá a resposta é afirmativa e constituirá uma condição fulcral no estudo do comportamento limite da função de fiabilidade para os sistemas tipo série-paralelo e paralelo-série.

## 1.2 Fiabilidade em Sistemas Série-Paralelo e Paralelo-Série. Resultados Gerais

A avaliação do comportamento de um determinado *produto*, *equipamento* ou *sistema*  $S$  e a conseqüente estimação dos parâmetros relacionados com o *tempo de vida*  $X$  desse sistema, é uma das áreas de investigação em teoria de fiabilidade e que passa pelo conhecimento da *função de fiabilidade*,  $R(x) = P(X > x)$ . Para um sistema de grande dimensão, a dificuldade inerente ao cálculo da sua função de fiabilidade, sugere claramente a necessidade de se admitir que o número de componentes do sistema tenda para infinito, de modo a que se possam encontrar modelos limite representativos dessa fiabilidade. Quando as componentes do sistema estão organizadas numa estrutura simples em série ou em paralelo, a função de distribuição do tempo de vida de todo o sistema,  $F(x) = 1 - R(x)$ , reduz-se respectivamente à conhecida distribuição do mínimo ou do máximo entre os tempos de vida de



cada uma das componentes e, por conseguinte, o estudo do comportamento assintótico da função de fiabilidade é naturalmente sustentado em resultados da teoria de valores extremos. A existência de sistemas com estruturas mais complexas, nomeadamente os sistemas designados por série-paralelo e paralelo-série, motivaram à posteriori o desenvolvimento de estudos para as distribuições das estatísticas minmax e maxmin. Entre esses estudos salientamos os de Barlow e Proschan [4], Chernoff and Teicher [7], Smith [41], [43] e Kolowrocki [31], [32].

Na exposição que se segue serão apresentados alguns conceitos básicos, importantes para a compreensão do funcionamento dos referidos sistemas série-paralelo e paralelo-série, onde se assume que as distribuições dos tempos de vida das componentes que os constituem não se restringem necessariamente ao intervalo  $[0, +\infty[$ .

Sejam  $E_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ , as componentes de um sistema  $S$  com funções de fiabilidade dadas por

$$R_i(x) = P(X_i > x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.33)$$

onde  $X_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ , são *v.a.'s* independentes que representam os tempos de vida das componentes  $E_i$  e têm funções de distribuição

$$F_i(x) = 1 - R_i(x) = P(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da relação existente entre a função de fiabilidade e a função de distribuição, naturalmente se conclui que  $R_i(x)$  é uma função decrescente, contínua à direita, além de que,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R_i(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}.$$

**Definição 1.7 (Sistema em Série)** *Diz-se que  $S$  é um sistema com componentes em série se o seu tempo de vida  $X$  é a v.a. definida por*

$$X = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i). \quad (1.34)$$

Da definição anterior facilmente se depreende que o sistema não falha se e só se cada uma das componentes  $E_i$  não falhar, por conseguinte a função de fiabilidade para um sistema em série vem dada por

$$R_n^{ser}(x) = \prod_{i=1}^n R_i(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na figura seguinte está representado um esquema de um sistema em série.



Figura 1.5: Esquema de um sistema em série

**Definição 1.8 (Sistema em Paralelo)** Diz-se que  $S$  é um sistema com componentes em paralelo se o seu tempo de vida  $X$  é a v.a. definida por

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i). \quad (1.35)$$

Deduz-se da definição anterior que o sistema falha se todas as suas componentes falharem, por conseguinte a função de fiabilidade do sistema vem agora dada por

$$R_n^{par}(x) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

Na figura 1.6 é ilustrado o esquema de um sistema em paralelo.

**Definição 1.9 (Sistema Homógeno/ Não-Homógeno)** Um sistema  $S$  em série ou em paralelo, diz-se homogéneo sempre que todas as componentes  $E_i$  tenham a mesma função de fiabilidade

$$R(x) = P(X_i > x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

i.e., sempre que as v.a.'s  $X_i$  tenham a mesma função de distribuição

$$F(x) = P(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, o sistema diz-se não-homogéneo.

Atendendo à definição anterior, a função de fiabilidade de um sistema em série ganha a forma,

$$R_n^{ser}(x) = [R(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.36)$$

enquanto para um sistema em paralelo, ter-se-á

$$R_n^{par}(x) = 1 - [F(x)]^n, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

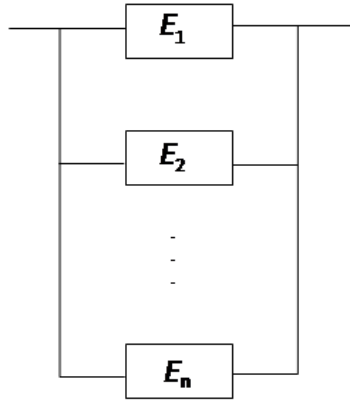


Figura 1.6: Esquema de um sistema paralelo

Note-se que, à luz dos resultados que vimos na secção anterior, concluímos que sob a hipótese de independência e idêntica distribuição dos tempos de vida  $X_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$ , se existirem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , para as quais a distribuição do tempo de vida de um sistema em série, convenientemente normalizada, converge para uma estável de mínimos  $H_\gamma(x)$ , para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ , então a função de fiabilidade, para a mesma normalização, verificará

$$R_n^{ser}(a_n x + b_n) = [1 - F(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_\gamma^*(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde,

$$R_\gamma^*(x) = 1 - H_\gamma(x), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, para um sistema em paralelo, existindo constantes de atracção  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , para as quais a distribuição do tempo total de vida é atraída para a lei  $G_\gamma(x)$ , para algum  $\gamma \in \mathbb{R}$ , então o modelo limite para a função de fiabilidade virá

$$R_n^{par}(a_n x + b_n) = 1 - [F(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde,

$$R_\gamma(x) = 1 - G_\gamma(x), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Para definirmos os sistemas mistos paralelo-série e série-paralelo comecemos por considerar as componentes,  $E_{ij}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, l_i, n \in \mathbb{N}$  e  $\{l_n\}$  uma sucessão de números naturais. As funções de fiabilidade das componentes  $E_{ij}$  vêm dadas por

$$R_{ij}(x) = P(X_{ij} > x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde  $X_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, l_i, n \in \mathbb{N}$ , são *v.a.'s* independentes que representam os tempos de vida dessas componentes, i.e.,  $X_{ij}$  representa o tempo de vida da  $j$ -ésima componente da  $i$ -ésimo subsistema e cujas funções de distribuição se definem por

$$F_{ij}(x) = 1 - R_{ij}(x) = P(X_{ij} \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.10 (Sistema Série-Paralelo)** *Um sistema  $S$  diz-se série-paralelo se o seu tempo de vida  $X$  é a v.a. definida por*

$$X = \min_{1 \leq i \leq n} \left( \max_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij} \right).$$

Note-se que este tipo de sistemas é constituído por  $n$  subsistemas em série cada um dos quais agrupa  $l_i$  componentes em paralelo (veja-se a figura 1.7). É fácil de reconhecer, atendendo a (1.36) e (1.37), que a função de fiabilidade para um sistema série-paralelo se escreve agora,

$$R_n^*(x) = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^{l_i} F_{ij}(x) \right], \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.38)$$

enquanto que a função de distribuição do tempo de vida  $X$  vem dada por,

$$F_n^*(x) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^{l_i} F_{ij}(x) \right], \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.39)$$

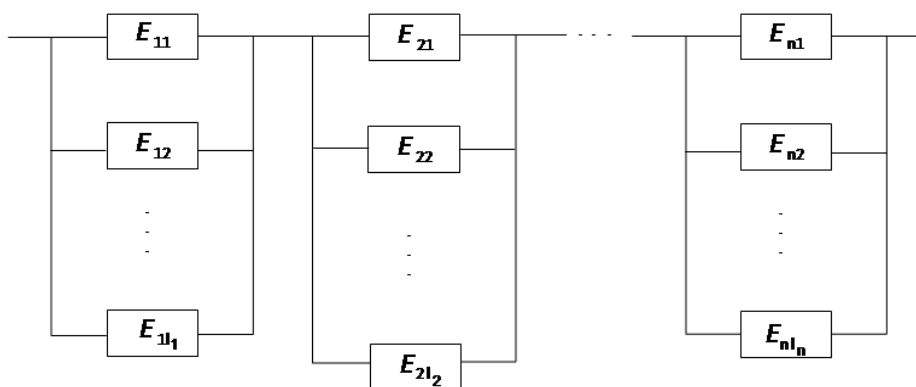


Figura 1.7: Esquema de um sistema série-paralelo

**Definição 1.11 (Sistema Paralelo-Série)** *Um sistema  $S$  diz-se paralelo-série se o seu tempo de vida  $X$  é a v.a. definida por*

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \min_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij} \right). \quad (1.40)$$

Repare-se agora que num sistema paralelo-série, os  $n$  subsistemas estão organizados em paralelo, cada um dos quais constituído por  $l_i$  componentes em série (veja-se a figura 1.8), pelo que atendendo novamente a (1.36) e (1.37), a função de fiabilidade é

$$R_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^{l_i} R_{ij}(x) \right], \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.41)$$

e a função de distribuição do seu tempo de vida  $X$ , define-se por

$$F_n(x) = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{j=1}^{l_i} (1 - F_{ij}(x)) \right], \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.42)$$

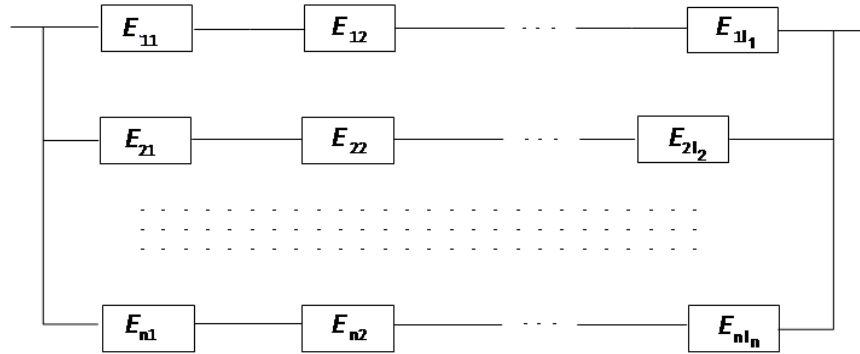


Figura 1.8: Esquema de um sistema paralelo-série

**Definição 1.12 (Sistema Homogéneo/ Não-Homogéneo)** *Um sistema  $S$ , série-paralelo ou paralelo-série, diz-se homogéneo sempre que todas as componentes  $E_{ij}$  tenham a mesma função de fiabilidade*

$$R(x) = P(X_{ij} > x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, l_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

*i.e., sempre que todas as v.a.'s  $X_{ij}$  tenham a mesma função de distribuição*

$$F(x) = P(X_{ij} \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, l_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Caso contrário o sistema diz-se não-homogéneo.*

**Definição 1.13 (Sistema Regular)** *Um sistema  $S$ , série-paralelo ou paralelo-série, diz-se regular se*

$$l_1 = l_2 = \dots = l_n, l_n \in \mathbb{N},$$

*i.e., se o número de componentes em paralelo para cada subsistema for igual (no caso de um sistema série-paralelo) ou se o número de componentes em série para cada subsistema for o mesmo (no caso de um sistema paralelo-série).*

Nas figuras 1.9 e 1.10 estão representados respectivamente, os esquemas de um sistema série-paralelo e paralelo-série regulares.

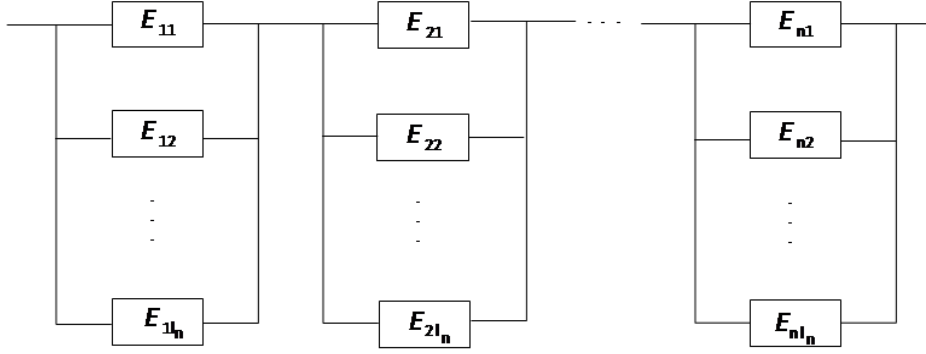


Figura 1.9: Esquema de um sistema série-paralelo regular

Tendo em conta as expressões em (1.38) e (1.39), as funções de fiabilidade e de distribuição para um sistema série-paralelo, regular e homogêneo, tomam a forma

$$R_n^*(x) = \left[ 1 - (1 - R(x))^{l_n} \right]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.43)$$

e

$$F_n^*(x) = 1 - \left[ 1 - (F(x))^{l_n} \right]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (1.44)$$

Tratando-se de um sistema regular e homogêneo, com estrutura em paralelo-série, as suas funções de fiabilidade e de distribuição escrevem-se agora, atendendo a (1.41) e (1.42),

$$R_n(x) = 1 - \left[ 1 - (R(x))^{l_n} \right]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (1.45)$$

e também,

$$F_n(x) = \left[ 1 - (1 - F(x))^{l_n} \right]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

Admitindo que  $F$  está no domínio de atracção de uma lei  $H_\gamma$ , estável para mínimos, a nossa preocupação no próximo capítulo será estudar o comportamento assintótico das funções  $R_n(x)$  e  $F_n(x)$  definidas em (1.45) e (1.46). Tomando a sucessão de números inteiros positivos  $\{l_n\}$ , iremos averiguar que condição assintótica esta deverá obedecer de modo a obter-se um limite não degenerado para  $R_n(x)$  e  $F_n(x)$ , mediante uma normalização conveniente. Recorrendo à relação entre o máximo e o mínimo, serão estabelecidos resultados similares para as funções  $R_n^*(x)$  e  $F_n^*(x)$ , definidas em (1.43) e (1.44), para os sistemas série-paralelo, que verificam igualmente as propriedades de regularidade e homogeneidade. Nas demonstrações destes resultados e de outros, envolvendo o número componentes dispostas em série ou em paralelo, para cada subsistema em paralelo ou em série respectivamente, consideraremos  $\{l_n\}$ , como sendo uma sucessão de números reais. Trata-se de uma questão meramente prática, já que todo o número real positivo é representado pela soma da sua parte natural com a restante parte real, pelo que o retorno a  $\{l_n\}$  como sucessão de números naturais é trivial.

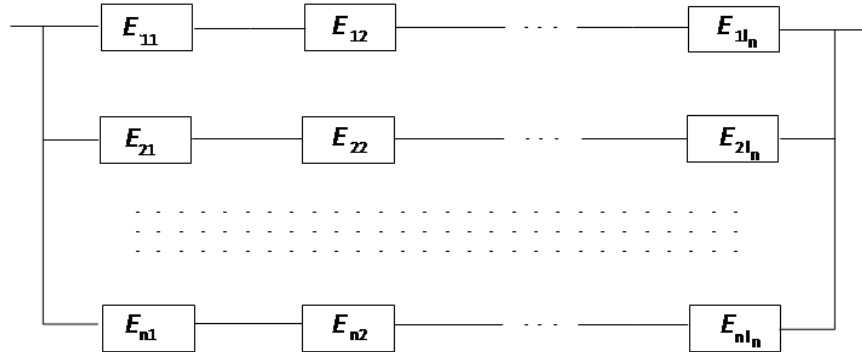


Figura 1.10: Esquema de um sistema paralelo-série regular





## Capítulo 2

# Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelos, Regulares e Homogéneos

Tendo em conta que em (1.46),  $F_n(x)$  representa a função de distribuição do máximo de  $n$  variáveis aleatórias *i.i.d.* onde, por sua vez, cada uma dessas variáveis aleatórias tem função de distribuição  $H_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ , estamos agora interessados em perceber a que domínio de atracção para máximos pode pertencer  $H_n(x)$ . Observando (1.40), facilmente se constata que o comportamento da cauda direita de  $\min_{1 \leq j \leq n} X_{ij}$  é fundamental para o estudo do tempo de vida  $X$  em sistemas de grande dimensão. Ora, se admitirmos que  $F$  está no domínio de atracção para mínimos de uma lei  $H_\gamma$ , então o comportamento assintótico da cauda direita de  $H_n$  deverá ser análogo ao da cauda direita da lei para mínimos  $H_\gamma$ . Isto leva-nos a reformular o problema e colocar ênfase na questão: a que domínio de atracção para máximos pode pertencer uma lei estável para mínimos,  $H_\gamma(x)$ ? Note-se que na maioria das aplicações envolvendo tempos de vida, as leis limite  $H_\gamma(x)$  restringem-se ao caso  $\gamma \leq 0$ . De facto, um tempo de vida  $X$  é sempre não negativo, pelo que  $-X$  é uma *v.a.* com limite superior do suporte finito e por conseguinte, a distribuição  $F_{-X}$  só poderá pertencer ao domínio de atracção de uma Weibull ou de uma Gumbel para mínimos. Contudo, porque existem sistemas de extensa durabilidade, estudaremos também o caso  $\gamma > 0$ .

## 2.1 Análise do Comportamento Assintótico da Cauda Direita de Leis Estáveis para Mínimos

### 2.1.1 Lei de Weibull para Mínimos - $\gamma < 0$

Comecemos então por averiguar a que domínio de atracção para máximos poderá estar uma Weibull para mínimos. A função  $H_\gamma(x)$  vem definida para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , por

$$\begin{aligned} H_\gamma(x) &= 1 - G_\gamma(-x) \\ &= \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & 1 - \gamma x > 0 \\ 0 & 1 - \gamma x \leq 0 \end{cases} \quad (2.1) \\ &= \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & x > \frac{1}{\gamma} \\ 0 & x \leq \frac{1}{\gamma} \end{cases}. \end{aligned}$$

Uma vez que o limite superior do suporte é infinito, vamos ver se  $H_\gamma$  está no domínio de atracção de uma lei de Fréchet para máximos. Pelo teorema 1.1 e por (1.7) vem que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - H_\gamma(tx)}{1 - H_\gamma(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(- (1 - \gamma tx)^{-1/\gamma}\right)}{\exp\left(- (1 - \gamma t)^{-1/\gamma}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left\{ \left(- (1 - \gamma tx)^{-1/\gamma}\right) \left[ 1 - \left(\frac{1 - \gamma t}{1 - \gamma tx}\right)^{-1/\gamma} \right] \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left\{ \left(- (1 - \gamma tx)^{-1/\gamma}\right) \left[ 1 - \left(\frac{\frac{1}{\gamma t} - 1}{\frac{1}{\gamma t} - x}\right)^{-1/\gamma} \right] \right\} \\ &= \begin{cases} 0, & x^{1/\gamma} < 1 \\ +\infty & x^{1/\gamma} > 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

donde resulta que a cauda direita,  $1 - H_\gamma(x)$ , não é função de variação regular no infinito, sendo pelo contrário de variação rápida, por conseguinte, que a lei de mínimos  $H_\gamma$  não poderá pertencer ao domínio de atracção de uma Fréchet para máximos. Resta ver se  $H_\gamma \in \mathcal{D}(G_0)$ . Embora  $H_\gamma$  seja uma função absolutamente contínua, para qualquer  $\gamma \in \mathbb{R}$ , optaremos por utilizar o teorema 1.4, por declíneo da condição de von Mises contemplada na proposição 1.3, considerando uma função  $w(x) \neq 1$  nas condições do

referido teorema. Esta opção é justificada meramente por uma simplificação de cálculos, proporcionando no nosso entender, uma resolução mais elegante e menos hermética. Assim sendo, notemos que

$$\ln H_\gamma(x) \sim -(1 - H_\gamma(x)), \quad x \rightarrow x^H,$$

pelo que  $-\frac{\ln H_\gamma(x)}{1-H_\gamma(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x^H} 1$ . Tomando então  $w(x) = -\frac{\ln H_\gamma(x)}{1-H_\gamma(x)} > 0$ , para qualquer  $x$ , temos pelo teorema 1.4

$$\begin{aligned} -\ln H_\gamma(x) &= \left( -\frac{\ln H_\gamma(x)}{1-H_\gamma(x)} \right) (1-H_\gamma(x)) \\ &= w(x) \exp\left( -(1-\gamma x)^{-1/\gamma} \right) \\ &= w(x) \exp\left\{ -\int_{1/\gamma}^x \frac{1}{g(u)} du \right\}, \end{aligned}$$

para  $x > \frac{1}{\gamma}$  e onde  $g(x) = (1-\gamma x)^{1/\gamma+1} > 0$  é tal que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -(\gamma+1)(1-\gamma x)^{1/\gamma} \right] = 0,$$

garantindo-se que  $H_\gamma(x)$ , para  $\gamma < 0$ , está no domínio de atracção de uma Gumbel para máximos. Relembramos que uma possível escolha de constantes de atracção definida em 1.20, é a seguinte,

$$\begin{cases} b_n := H_\gamma(b_n) = \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ a_n := a_n = \frac{1}{u'(b_n)}, \end{cases}$$

onde,

$$u'(b_n) := -\frac{H'_\gamma(b_n)}{H_\gamma(b_n) \ln H_\gamma(b_n)}.$$

para  $u(x) := -\ln(-\ln F(x))$ .

Ora,

$$\begin{aligned}
H_\gamma(b_n) &= \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow 1 - \exp\left(- (1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma}\right) = \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow \exp\left(- (1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow (1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma} = -\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right] \\
&\Leftrightarrow 1 - \gamma b_n = \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{-\gamma} \\
&\Leftrightarrow b_n = \frac{1 - \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{-\gamma}}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{u'(b_n)} \Leftrightarrow a_n = -\frac{H_\gamma(b_n) \ln H_\gamma(b_n)}{H'_\gamma(b_n)} \\
&= -\frac{\exp\left(-\frac{1}{n}\right) \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)}{(1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma-1} (1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right))} \\
&= \frac{1}{n \exp\left(\frac{1}{n}\right) (1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma-1} (1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right))} \\
&= \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) (1 - \gamma b_n)^{-1/\gamma-1}} \\
&= \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{\gamma+1}}.
\end{aligned}$$

Assim conclui-se que toda a lei de Weibull para mínimos é atraída para a lei de Gumbel para máximos, podendo tomar-se as constantes de atracção,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{\gamma+1}}, \\ b_n = \frac{1 - \left(-\ln\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right]\right)^{-\gamma}}{\gamma}, \end{cases} \quad \gamma < 0. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Lei de Fréchet para Mínimos - $\gamma > 0$

Suponhamos agora que a função de distribuição do tempo de vida de cada componente do nosso sistema está no domínio de atracção de uma lei de Fréchet para mínimos. Tem-se então para  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 H_\gamma(x) &= 1 - G_\gamma(-x) = \\
 &= \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & 1 - \gamma x > 0 \\ 1 & 1 - \gamma x \leq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & x < \frac{1}{\gamma} \\ 1 & x \geq \frac{1}{\gamma} \end{cases} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Neste caso como o limite superior do suporte é finito,  $x^H = \frac{1}{\gamma}$ , então  $H_\gamma(x)$  não pode estar no domínio de atracção de uma lei de Fréchet para máximos, podendo estar eventualmente no domínio de atracção de uma Weibull ou de uma Gumbel para máximos. Recorrendo ao teorema 1.2, note-se que,

$$\begin{aligned}
 1 - H_\gamma\left(x^F - \frac{1}{x}\right) &= \exp\left\{-\left(1 - \gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{x}\right)\right)^{-1/\gamma}\right\} \\
 &= \exp\left\{-\left(\frac{\gamma}{x}\right)^{-1/\gamma}\right\} \\
 &= \exp\left(-\gamma^{-1/\gamma}x^{1/\gamma}\right), \quad \gamma > 0, \quad x > 0.
 \end{aligned}$$

Tendo em conta (1.7), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(-\gamma^{-1/\gamma}(tx)^{1/\gamma}\right)}{\exp\left(-\gamma^{-1/\gamma}t^{1/\gamma}\right)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\gamma^{-1/\gamma}t^{1/\gamma}(x^{1/\gamma} - 1)\right) \\
 &= \begin{cases} 0, & x^{1/\gamma} > 1 \\ +\infty, & x^{1/\gamma} < 1 \end{cases},
 \end{aligned}$$

concluindo-se deste modo que a função  $H_\gamma$  não está no domínio de atracção para máximos de uma lei de Weibull. Seguindo o mesmo raciocínio do caso  $\gamma < 0$ , resta ver se  $H_\gamma \in \mathcal{D}(G_0)$ . Novamente, pelo teorema (1.4) temos,

$$\begin{aligned}
 -\ln H_\gamma(x) &= w(x) \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right) \\
 &= w(x) \exp\left\{-\int_{-\infty}^x \frac{1}{g(u)} du\right\},
 \end{aligned}$$

para  $x < \frac{1}{\gamma}$  e onde  $g(x) = (1 - \gamma x)^{1/\gamma+1} > 0$  é tal que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\gamma}^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\gamma}^-} \left[-(\gamma + 1)(1 - \gamma x)^{1/\gamma}\right] = 0,$$

donde se conclui que toda a lei de mínimos,  $H_\gamma, \gamma > 0$ , está no domínio de atracção para máximos de uma lei de Gumbel, com constantes de atracção definidas por

$$\begin{cases} b_n : H_\gamma(b_n) = \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ a_n : a_n = \frac{1}{w'(b_n)}, \end{cases}$$

obtendo-se similarmente ao caso anterior,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)(-\ln[1-\exp(-\frac{1}{n})])^{\gamma+1}}, \\ b_n = \frac{1 - (-\ln[1-\exp(-\frac{1}{n})])^{-\gamma}}{\gamma}, \end{cases} \quad \gamma > 0. \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Lei de Gumbel para Mínimos - $\gamma = 0$

Falta-nos analisar o caso em que os tempos de vida das componentes são atraídos para uma Gumbel de mínimos. A função  $H_0(x)$  vem definida para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , por

$$H_0(x) = 1 - G_0(-x) = 1 - \exp(-\exp(x)).$$

Como consequência imediata do teorema 1.4 resulta que,

$$\begin{aligned} -\ln H_0(x) &= w(x) \exp(-\exp(x)) \\ &= w(x) \exp\left\{-\int_{-\infty}^x e^u du\right\}. \end{aligned}$$

Para  $g(x) = e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = 0$ , pelo que a função de distribuição  $H_0(x)$  está, como vemos, no domínio de atracção para máximos de uma lei de Gumbel. As sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  são agora dadas por,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \\ b_n = \ln(-\ln[1-\exp(-\frac{1}{n})]), \end{cases} \quad (2.5)$$

uma vez que,

$$\begin{aligned} H_0(b_n) &= \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \exp(-\exp(b_n)) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \exp(b_n) = -\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow b_n = \ln\left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right), \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{u'(b_n)} = -\frac{(1 - \exp(-\exp(b_n))) \ln(1 - \exp(-\exp(b_n)))}{\exp(b_n) \exp(-\exp(b_n))} \\
 &= \frac{\exp(-\frac{1}{n}) \ln(\exp(-\frac{1}{n}))}{\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})) (1 - \exp(-\frac{1}{n}))} \\
 &= \frac{1}{n (\exp(\frac{1}{n}) - 1) (-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))}.
 \end{aligned}$$

O estudo dos três casos anteriores responde inequivocamente à questão que colocámos no início deste capítulo e relembrando mais uma vez que a convergência em distribuição para leis não degeneradas é uniforme no suporte da lei limite, podemos enunciar o seguinte resultado,

**Proposição 2.1** *Todas a leis estáveis de mínimos pertencem ao domínio de atracção para máximos da lei de Gumbel, i.e.,  $\forall \gamma \in \mathbb{R}$  existem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , tais que*

$$H_\gamma^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x), \quad (2.6)$$

uniformemente em  $\mathbb{R}$ , sendo (1.20) uma escolha plausível de constantes de atracção.

No capítulo 3 trataremos da questão da velocidade de convergência uniforme subjacente à convergência estabelecida em (2.6).

## 2.2 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e Homogéneos

A proposição (2.1) permite-nos compreender o comportamento limite da função de fiabilidade, devidamente normalizada, no caso de um sistema regular paralelo-série, sempre que os tempos de vida de cada uma das suas componentes sejam *i.i.d.* e se encontrem no domínio de atracção de alguma lei estável para mínimos. O resultado é formulado no próximo teorema.

**Teorema 2.1** *Seja  $F$  uma função de distribuição pertencente ao domínio de atracção para mínimos de uma lei  $H_\gamma(x)$ , i.e., existem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$1 - (1 - F(a_n x + b_n))^n = H_\gamma(x) + \varepsilon_n(x), \quad (2.7)$$

onde  $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $H_\gamma(x)$  é definida por (1.24). Dada uma sucessão de inteiros positivos  $\{l_n\}$ , tal que

$$\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n = o(1), \quad (2.8)$$

onde  $e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)|$ , então para qualquer  $\gamma \in \mathbb{R}$ , existem sucessões  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que, para a sequência de funções de distribuição, convenientemente normalizada, é válido o limite

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \left[ 1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x), \quad (2.9)$$

uniformemente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , i.e., para um sistema regular e homogéneo, constituído por  $n$  subsistemas em paralelo de  $l_n$  componentes em série, a sequência de funções de fiabilidade, convenientemente normalizada, verifica

$$R_n(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \left[ 1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_0(x),$$

uniformemente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $R_0(x) = 1 - G_0(x)$ . Além disso, podemos tomar

$$\alpha_n = a_n a_n^* \quad e \quad \beta_n = a_n b_n^* + b_n, \quad (2.10)$$

com  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  sucessões auxiliares definidas por

$$a_n^* = \frac{1 - \gamma b_n^*}{n \left( \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \left( -\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \right)} \quad (2.11)$$

e

$$b_n^* = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma} \left[ \left( \frac{l_n}{n(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \right)^\gamma - 1 \right], & \gamma \neq 0 \\ -\ln \left( \frac{l_n}{n(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \right), & \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

**Dem.** Dadas as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  para as quais (2.7) é válida e tomando  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  tais que  $\alpha_n = a_n a_n^*$  e  $\beta_n = a_n b_n^* + b_n$ , temos que,

$$\begin{aligned} (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} &= (1 - F(a_n a_n^* x + a_n b_n^* + b_n))^{l_n} \\ &= \left[ (1 - F(a_n (a_n^* x + b_n^*) + b_n)) \right]^{\frac{l_n}{n}} \\ &= (1 - H_\gamma(a_n^* x + b_n^*) + \varepsilon_n(a_n^* x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} \\ &= (1 - H_\gamma(a_n^* x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} + \rho_n(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$



Começemos por analisar a parcela  $(1 - H_\gamma(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}}$ , onde as sucessões  $\{l_n\}$ ,  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  satisfazem (2.8), (2.11) e (2.12), para posteriormente provarmos que  $n\rho_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Ora, para  $\gamma \neq 0$  temos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
 (1 - H_\gamma(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} &= [G_\gamma(- (a_n^*x + b_n^*))]^{\frac{l_n}{n}} & (2.14) \\
 &= \left( \exp \left\{ - (1 - \gamma(a_n^*x + b_n^*))^{-1/\gamma} \right\} \right)^{\frac{l_n}{n}} \\
 &= \exp \left\{ - \frac{l_n}{n} (1 - \gamma(a_n^*x + b_n^*))^{-1/\gamma} \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \left( \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} - \gamma \left( \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} a_n^*x + \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} b_n^* \right) \right)^{-1/\gamma} \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \left( 1 - \gamma \left( \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} a_n^*x - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} + \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} b_n^* + \frac{1}{\gamma} \right) \right)^{-1/\gamma} \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \left( 1 - \gamma \left( \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} a_n^*x + \left( \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} \left( \frac{\gamma b_n^* - 1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \right) \right) \right)^{-1/\gamma} \right\} \\
 &= \exp \left\{ - (1 - \gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*))^{-1/\gamma} \right\} = 1 - H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*),
 \end{aligned}$$

com,

$$\begin{cases} \alpha_n^* = \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} a_n^* \\ \beta_n^* = \left( \frac{l_n}{n} \right)^{-\gamma} \left( \frac{\gamma b_n^* - 1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \end{cases} . \quad (2.15)$$

Por conseguinte, tomando  $\alpha_n = a_n a_n^*$ ,  $\beta_n = a_n b_n^* + b_n$  e para  $\alpha_n^*$  e  $\beta_n^*$  definidos em (2.15), podemos escrever,

$$(1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} = 1 - H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*) + \rho_n(x). \quad (2.16)$$

Para provar o resultado pretendido no caso  $\gamma \neq 0$  e uma vez que, como vimos,  $H_\gamma$  está no domínio de atracção para máximos de uma lei Gumbel, é necessário verificar que as sucessões  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$  são apropriadas para se obter essa convergência. Ora, por (2.11), (2.12) e (2.15), a sequência de

números reais  $\{\alpha_n^*\}$  verifica,

$$\begin{aligned}
\alpha_n^* &= \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} a_n^* = \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \frac{1 - \gamma b_n^*}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)} \\
&= \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \left( \frac{1 + \left(\frac{l_n}{n(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n}))}\right)^\gamma - 1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)} \right) \\
&= \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \left( \frac{1 - \gamma \left(\frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{l_n}{n(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n}))}\right)^\gamma - 1\right]\right)}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)} \right) \\
&= \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \left( \frac{\left(\frac{l_n}{n}\right)^\gamma}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^\gamma} \right) \\
&= \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\gamma+1}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em conta (2.12), vem

$$l_n = n \left( -\ln \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{n} \right) \right) \right) (1 - \gamma b_n^*)^{1/\gamma},$$

pelo que,

$$\begin{aligned}
\beta_n^* &= \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \left(\frac{\gamma b_n^* - 1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{n^{-\gamma} \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{-\gamma} (1 - \gamma b_n^*)^{-1} (\gamma b_n^* - 1)}{\gamma n^{-\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \\
&= -\frac{\left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{-\gamma} (1 - \gamma b_n^*)^{-1} (1 - \gamma b_n^*)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{1 - \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{-\gamma}}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$  verificam (2.2) para  $\gamma < 0$  e (2.4) para  $\gamma > 0$ , constituindo assim uma possível escolha de constantes de atracção na obtenção da convergência de  $H_\gamma^n$  para a lei de Gumbel para máximos. Para se provar que  $\rho_n(x)$  em (2.16) é tal que  $n\rho_n(x)$  converge para zero, comecemos por observar que tendo-se

$$n \left( \exp \left( \frac{1}{n} \right) - 1 \right) \sim 1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

e também,

$$-\ln \left( 1 - \exp \left( -\frac{1}{n} \right) \right) \sim \ln n, \quad n \rightarrow +\infty,$$

então as constantes de atracção  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$  são assintoticamente definidas por

$$\alpha_n^* \sim \frac{1}{(\ln n)^{\gamma+1}} \quad \text{e} \quad \beta_n^* \sim \frac{1 - (\ln n)^{-\gamma}}{\gamma}, \quad (2.17)$$

pelo que usando (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} a_n^* x + b_n^* &= \left( \frac{l_n}{n} \right)^\gamma \alpha_n^* x + \left( \frac{l_n}{n} \right)^\gamma \left( \frac{\gamma \beta_n^* - 1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \\ &= \left( \frac{l_n}{n} \right)^\gamma \left( (\alpha_n^* x + \beta_n^*) - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \\ &\sim \left( \frac{l_n}{n \ln n} \right)^\gamma \left( \frac{x}{\ln n} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Atendendo a (2.14), (2.15) e (2.18), observe-se ainda que,

$$\begin{aligned} (1 - H_\gamma(a_n^* x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n} - 1} &\sim \frac{\exp \left\{ - \left( 1 - \gamma \left( \frac{1}{(\ln n)^{\gamma+1}} x + \frac{1 - (\ln n)^{-\gamma}}{\gamma} \right) \right)^{-1/\gamma} \right\}}{\exp \left\{ - \left( 1 - \gamma \left( \left( \frac{l_n}{n \ln n} \right)^\gamma \left( \frac{x}{\ln n} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \right) \right)^{-1/\gamma} \right\}} \\ &\sim \frac{\exp \left\{ - \frac{1}{(\ln n)^{\gamma+1}} \left( (\ln n)^\gamma - \gamma \frac{x}{\ln n} - (\ln n)^\gamma + 1 \right)^{-1/\gamma} \right\}}{\exp \left\{ - \left( \frac{l_n}{n \ln n} \right)^{-1} \left( \left( \frac{n \ln n}{l_n} \right)^\gamma - \gamma \frac{x}{\ln n} - \left( \frac{n \ln n}{l_n} \right)^\gamma + 1 \right)^{-1/\gamma} \right\}} \\ &\sim \frac{\exp \left\{ - \ln n \left( 1 - \gamma \frac{x}{\ln n} \right)^{-1/\gamma} \right\}}{\exp \left\{ - \frac{n \ln n}{l_n} \left( 1 - \gamma \frac{x}{\ln n} \right)^{-1/\gamma} \right\}} \\ &\sim \exp \left\{ \left( \frac{n \ln n}{l_n} - \ln n \right) \left( 1 - \gamma \frac{x}{\ln n} \right)^{-1/\gamma} \right\} \\ &\sim \exp \left\{ \left( \frac{n}{l_n} - 1 \right) \ln n \left( 1 - \frac{\gamma}{\ln n} x \right)^{-1/\gamma} \right\} \\ &\sim n^{\frac{n}{l_n} - 1}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Por outro lado, sendo  $H_\gamma$  contínua em  $\mathbb{R}$ , então a convergência de  $\varepsilon_n(x)$  em (2.7) é naturalmente a convergência uniforme e por conseguinte podemos escrever  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)| \right] = 0$ . Observando novamente (2.18), facilmente se constata que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$a_n^*x + b_n^* \rightarrow x^{H_\gamma}$  ou  $a_n^*x + b_n^* \rightarrow x_{H_\gamma}$  e, uma vez que  $\varepsilon_n(\cdot)$  converge uniformemente para zero, no suporte da lei estável  $H_\gamma$ , vem para  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  definidos em (2.11) e (2.12), que  $\varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Estes resultados juntamente com (2.19) e  $\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , permite-nos deduzir a seguinte aproximação para  $\rho_n(x)$  em (2.13),

$$\begin{aligned} \rho_n(x) &= \frac{l_n}{n} \varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*) (1 - H_\gamma(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}-1} + o(\xi_n) \\ &\sim \frac{l_n}{n^2} \varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*) n^{\frac{n}{l_n}} + o(\xi_n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

com  $\xi_n = \frac{l_n}{n^2} n^{\frac{n}{l_n}} e_n$ , donde se conclui que  $n\rho_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , uniformemente em  $\mathbb{R}$ . Para se obter o resultado pretendido em (2.9) para  $\gamma \neq 0$ , observe-se que, a partir de (2.16), podemos escrever

$$\begin{aligned} F_n(\alpha_n x + \beta_n) &= \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n = [H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*) - \rho_n(x)]^n \\ &= H_\gamma^n(\alpha_n^*x + \beta_n^*) \left[1 - \frac{\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*)}\right]^n \\ &= H_\gamma^n(\alpha_n^*x + \beta_n^*) \left[1 - \frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*)} + o\left(\frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*)}\right)\right], \end{aligned}$$

onde, como vimos,  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$  são constantes normalizadoras para a convergência uniforme de  $H_\gamma^n$  para  $G_0(x)$ , i.e., satisfazem (2.6). Por outro lado uma vez que  $H_\gamma(\alpha_n^*x + \beta_n^*) \rightarrow 1$ , pois  $\alpha_n^*x + \beta_n^* \rightarrow x^{H_\gamma}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , vem finalmente

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , ou de forma equivalente,

$$R_n(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0(x) = R_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ .

No caso em que  $\gamma = 0$ , temos novamente por (2.7) e 2.10,

$$\begin{aligned} (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} &= [(1 - F(a_n(a_n^*x + b_n^*) + b_n))]^{\frac{l_n}{n}} \\ &= (1 - H_0(a_n^*x + b_n^*) + \varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} \\ &= [1 - H_0(a_n^*x + b_n^*) + \varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*)]^{\frac{l_n}{n}} \\ &= (1 - H_0(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} + \rho_n(x). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 (1 - H_0(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}} &= (\exp\{-e^{(a_n^*x + b_n^*)}\})^{\frac{l_n}{n}} \\
 &= \exp\left\{-\frac{l_n}{n}e^{(a_n^*x + b_n^*)}\right\} = \exp\left\{-e^{\ln(\frac{l_n}{n}) + (a_n^*x + b_n^*)}\right\} \\
 &= \exp\left\{-e^{a_n^*x + (b_n^* + \ln(\frac{l_n}{n}))}\right\} = \exp\{-e^{\alpha_n^*x + \beta_n^*}\} \\
 &= 1 - H_0(\alpha_n^*x + \beta_n^*), \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

por conseguinte, a expressão em (2.21) escreve-se agora

$$(1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} = 1 - H_0(\alpha_n^*x + \beta_n^*) + \rho_n(x)$$

para,

$$\begin{cases} \alpha_n^* = a_n^* \\ \beta_n^* = b_n^* + \ln\left(\frac{l_n}{n}\right). \end{cases} \tag{2.23}$$

Tendo em conta (2.11), (2.12) e (2.23) segue-se que

$$\alpha_n^* = \frac{1}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))},$$

e também,

$$\begin{aligned}
 \beta_n^* &= b_n^* + \ln\left(\frac{l_n}{n}\right) = -\ln\left(\frac{l_n}{n(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))}\right) + \ln\left(\frac{l_n}{n}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{\frac{l_n}{n}}{\frac{l_n}{n(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))}}\right) = \ln\left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Isto significa que as sucessões  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$  verificam (2.5), pelo que são constantes normalizadoras apropriadas na convergência uniforme de  $H_0^n$  para a lei de Gumbel. Notando que  $\alpha_n^* \sim \frac{1}{\ln n}$ ,  $\beta_n^* \sim \ln(\ln n)$  e atendendo a (2.23), tem-se a aproximação, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned}
 a_n^*x + b_n^* &= \alpha_n^*x + \beta_n^* - \ln\left(\frac{l_n}{n}\right) \\
 &\sim \frac{x}{\ln n} + \ln(\ln n) - \ln\left(\frac{l_n}{n}\right) \\
 &\sim \frac{x}{\ln n} + \ln\left(\frac{n \ln n}{l_n}\right),
 \end{aligned}$$

pelo que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , se obtém

$$\begin{aligned}
(1 - H_0(a_n^*x + b_n^*))^{\frac{l_n}{n}-1} &= \frac{G_0(-(\alpha_n^*x + \beta_n^*))}{G_0(-(a_n^*x + b_n^*))} = \\
&\sim \frac{\exp\left\{-\exp\left(\frac{x}{\ln n} + \ln(\ln n)\right)\right\}}{\exp\left\{-\exp\left(\frac{x}{\ln n} - \ln\left(\frac{l_n}{n \ln n}\right)\right)\right\}} \\
&\sim \exp\left\{-\exp(\ln(\ln n)) + \exp\left(-\ln\left(\frac{l_n}{n \ln n}\right)\right)\right\} \\
&\sim \exp\left\{-\ln n + \frac{n \ln n}{l_n}\right\} \\
&\sim \exp\left\{-\ln n + \frac{n \ln n}{l_n}\right\} \\
&\sim \exp\left\{\left(\frac{n}{l_n} - 1\right) \ln n\right\} \\
&\sim n^{\frac{n}{l_n}-1}.
\end{aligned}$$

Observando (2.18), constatamos novamente que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $a_n^*x + b_n^* \rightarrow x^{H_0}$  ou  $a_n^*x + b_n^* \rightarrow x_{H_0}$ , mas relembrando mais uma vez que  $\varepsilon_n(\cdot)$  converge uniformemente para zero, no suporte da lei  $H_0$ , vem para  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  definidos em (2.11) e (2.12), que  $\varepsilon_n(a_n^*x + b_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Estes resultados juntamente com  $\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , permite-nos deduzir uma aproximação para  $\rho_n(x)$  similar a (2.20), obtendo-se tal como no caso anterior a convergência para zero de  $n\rho_n(x)$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , donde,

$$\begin{aligned}
F_n(\alpha_n x + \beta_n) &= \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n = [H_0(\alpha_n^*x + \beta_n^*) - \rho_n(x)]^n \\
&= H_0^n(\alpha_n^*x + \beta_n^*) \left[1 - \frac{n\rho_n(x)}{H_0(\alpha_n^*x + \beta_n^*)} + o\left(\frac{n\rho_n(x)}{H_0(\alpha_n^*x + \beta_n^*)}\right)\right] \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x),
\end{aligned}$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.,

$$R_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0(x) = R_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , como pretendíamos demonstrar. ■

**Exemplo 2.1** seja  $X \rightsquigarrow \text{Exp}(1)$ , onde

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Observe-se que,

$$\begin{aligned} \left(1 - F\left(\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right)\right)^n &= \left(e^{-\left(\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right)}\right)^n = e^{-(1+x)} \\ &= \Psi_1(-(1+x)) = 1 - H_{-1}(x), \end{aligned}$$

pelo que estamos nas condições do teorema anterior para  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  e  $\varepsilon_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Neste caso, para qualquer sequência  $\{l_n\}$ , sendo

$$\begin{cases} a_n^* = \frac{1+b_n^*}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \\ b_n^* = \left(\frac{l_n}{n(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))}\right)^{-1} - 1, \end{cases}$$

tem-se,

$$\alpha_n = \frac{1 + b_n^*}{n^2 (\exp(\frac{1}{n}) - 1) (-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))} = \frac{1}{l_n n (\exp(\frac{1}{n}) - 1)}$$

e,

$$\beta_n = \frac{(-\ln(1 - \exp(-\frac{1}{n})))}{l_n}$$

donde,

$$\begin{aligned} F_n(\alpha_n x + \beta_n) &= \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n = [1 - \exp(-l_n(\alpha_n x + \beta_n))]^n \\ &= \left[1 - \exp\left(\frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)} + \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \exp\left(\frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{\exp\left(\frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}}\right]^n \\ &= \left(\left[1 - \frac{\exp\left(\frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}}\right]^{(1-\exp(-\frac{1}{n}))^{-1}}\right)^{n(1-\exp(-\frac{1}{n}))} \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , vem que,

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} \rightarrow +\infty \quad (2.24)$$

e

$$n \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow 1, \quad (2.25)$$

obtendo-se a convergência

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-e^{-x}) = G_0(x),$$

i.e.,

$$R_n(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0(x) = R_0(x).$$

**Exemplo 2.2** Seja novamente  $X \curvearrowright Exp(1)$ . Observe-se que para  $a_n = \frac{1}{n}$  e  $b_n = \sin \frac{1}{n}$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - F\left(\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right)\right)^n &= \left(e^{-\left(\frac{x}{n} + \sin \frac{1}{n}\right)}\right)^n = e^{-(x+n \sin \frac{1}{n})} \\ &\rightarrow \Psi_1(-(x+1)) = 1 - H_{-1}(x), \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ . Tendo em conta que,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= (1 - H_{-1}(x)) - \left(1 - F\left(\frac{x}{n} + \frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= e^{-(x+1)} \left(1 - e^{1-n \sin \frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

com,

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

e

$$e^{1-n \sin \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

vem que,

$$e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)| = e^{-1} \left(\frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Por conseguinte para  $l_n = n^2$ , estamos nas condições do teorema pois,

$$\begin{aligned} \frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n &= \frac{n}{e} n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{n^{\frac{1}{n}}}{e} \left(\frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$



pelo que neste caso as sucessões auxiliares são dadas por

$$\begin{cases} a_n^* = \frac{1+b_n^*}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \\ b_n^* = \left( \frac{n^2}{n(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} \right)^{-1} - 1. \end{cases}$$

Como,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1+b_n^*}{n^2(\exp(\frac{1}{n})-1)(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))} = \frac{1}{nl_n(\exp(\frac{1}{n})-1)} \\ &= \frac{1}{n^3(\exp(\frac{1}{n})-1)} \end{aligned}$$

e

$$\beta_n = \frac{(-\ln(1-\exp(-\frac{1}{n})))}{l_n} - \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n},$$

vem que,

$$\begin{aligned} F_n(\alpha_n x + \beta_n) &= \left[ 1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} \right]^n = \left[ 1 - \exp(-l_n(\alpha_n x + \beta_n)) \right]^n \\ &= \left[ 1 - \exp\left( \frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)} + \ln(1-\exp(-\frac{1}{n})) - \frac{n^2}{n} + n^2 \sin \frac{1}{n} \right) \right]^n \\ &= \left[ 1 - \frac{\exp\left( \frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)} \right)}{(1-\exp(-\frac{1}{n}))^{-1}} \exp(-n(1-n \sin \frac{1}{n})) \right]^n \\ &= \left[ 1 - \frac{\exp\left( \frac{-x}{n(\exp(\frac{1}{n})-1)} \right) \exp(-n(1-n \sin \frac{1}{n}))}{(1-\exp(-\frac{1}{n}))^{-1}} \right]^{(1-\exp(-\frac{1}{n}))^{-1} \frac{(1-\exp(-\frac{1}{n}))}{n-1}} \end{aligned}$$

Por (2.24), (2.25) e  $n(1-n \sin \frac{1}{n}) = n(\frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \rightarrow 0$ , resulta finalmente,

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \left[ 1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n} \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-e^{-x}) = G_0(x),$$

i.e.,

$$R_n(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0(x) = R_0(x).$$

## 2.3 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e Homogéneos

Com o objectivo de adaptar o resultado estabelecido no teorema (2.1) para a sequência de funções de distribuição,  $F_n^*$ , definida em (1.44), quando os sistemas em causa apresentam uma estrutura em série-paralelo, traduzida por  $n$  subsistemas em série, cada um dos quais com  $l_n$  componentes em paralelo, necessitamos previamente de assumir que a função de distribuição  $F$ , comum a todos os tempos de vida  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, l_n$ , pertence agora ao domínio de atracção de alguma lei estável para máximos  $G_\gamma(x)$ . Recorde-se que o tempo total de vida para este tipo de sistemas define-se pelo mínimo do máximo de cada um dos tempos parciais  $X_{ij}$ . Ora, tendo presente que

$$\min(\max(X_{ij})) = -\max(\min(-X_{ij}))$$

e admitindo que a distribuição de  $\min(-X_{ij})$  verifica as condições do referido teorema, decorre então por aplicação do mesmo, a convergência para a sequência de funções de distribuição,  $\tilde{F}_n$ , da *v.a.*  $\max(\min(-X_{ij}))$ , mediante uma normalização conveniente. Por outro lado, para a distribuição  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$ , ter-se-á

$$F_n^*(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \tilde{F}_n[-(\alpha_n x + \beta_n)],$$

pelo que, novamente pelo teorema (2.1), o resultado pretendido é obtido. Esta nossa argumentação, formulada para a distribuição  $F_n^*$  e para a fiabilidade  $R_n^*$ , é apresentada no seguinte teorema:

**Teorema 2.2** *Seja  $F$  uma função de distribuição pertencente ao domínio de atracção para máximos de uma lei  $G_\gamma(x)$ , i.e., existem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$(F(a_n x + b_n))^n = G_\gamma(x) + \varepsilon_n(x),$$

onde  $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $G_\gamma(x)$  é definida em (1.5). Dada uma sucessão de inteiros positivos  $(l_n)$ , tal que

$$\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n = o(1),$$

onde  $e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)|$ , então para qualquer  $\gamma \in \mathbb{R}$ , existem sucessões  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que, para a a sequência de funções

de distribuição, convenientemente normalizada, é válido o limite

$$F_n^*(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \left[1 - (F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_0(x),$$

uniformemente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , i.e., para um sistema regular e homogêneo, constituído por  $n$  subsistemas em série, cada um dos quais com  $l_n$  componentes em paralelo, a sequência de funções de fiabilidade, convenientemente normalizada, verifica

$$R_n^*(\alpha_n x + \beta_n) = \left[1 - (F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_0^*(x),$$

uniformemente, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $R_0^*(x) = 1 - H_0(x)$ . Além disso, podemos tomar

$$\alpha_n = a_n a_n^* \quad e \quad \beta_n = a_n b_n^* + b_n,$$

com  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  definidas por (2.11) e (2.12) respectivamente.

**Observação 2.1** O estudo da velocidade de convergência das sequências de distribuição  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$  e  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$  para as respectivas leis limites, será abordado à luz dos resultados estipulados nos teoremas (2.1), (2.2) e da investigação da existência de aproximações *penultimate* para as mesmas distribuições a realizar no próximo capítulo.

## 2.4 Estudo de Simulação

Nesta secção apresentamos um estudo de simulação realizado com o objectivo de testar o ajustamento à distribuição de Gumbel, ou seja, testar a hipótese da distribuição do tempo de vida de um sistema paralelo-série ser uma distribuição de Gumbel, quando o número de componentes do sistema é finito. Simultaneamente, pretendemos averiguar se os resultados obtidos por simulação são afectados pela forma como varia o número de subsistemas em paralelo,  $n$ , e o número de componentes em série,  $l_n$ .

Para esse efeito, iremos considerar que as *v.a.'s*  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, l_n$ , representando os tempos de vida das componentes  $E_{ij}$  de um sistema paralelo-série, são independentes e têm a mesma função de distribuição comum  $F$ . Relembre-se que o tempo total de vida deste tipo de sistemas é a *v.a.*

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \min_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij} \right), \quad (2.26)$$

Em conformidade com a notação utilizada neste capítulo, designaremos por  $F_n(\cdot)$  a sequência de funções de distribuição, que representa a distribuição

da *v.a.*  $X$  e que como vimos se define por,

$$F_n(x) = \left[1 - (1 - F(x))^{l_n}\right]^n, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

ou seja,  $F_n(x)$  representa a função de distribuição do máximo de  $n$  variáveis aleatórias *i.i.d.* onde, por sua vez, cada uma dessas variáveis aleatórias tem função de distribuição

$$H_n(x) = 1 - (1 - F(x))^{l_n}. \quad (2.28)$$

Relembramos, que em virtude de estarmos a trabalhar em simultâneo com leis de extremos para mínimos e leis de extremos para máximos, utilizaremos o usual parâmetro  $\gamma$ , como parâmetro de forma para as estáveis de mínimos,  $H_\gamma$ , optando pelo uso do parâmetro  $\theta$  para as estáveis de máximos  $G_\theta$ .

### 2.4.1 Teste de Ajustamento à Distribuição de Gumbel. Estatística de Teste

Para efectuarmos o teste de ajustamento à distribuição de Gumbel, vamos utilizar uma estatística de teste que é uma modificação da estatística de teste de Anderson-Darling, proposta em Laio [33]. Alguns dos métodos mais usados para realizar este tipo de testes de ajustamento, são baseados na função de distribuição empírica,  $F_r$ , onde  $r$  representa a dimensão da amostra. Os referidos métodos têm por objectivo medir a discrepância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição na hipótese nula, que simbolizaremos por  $F$ . Uma forma de se medir essas discrepâncias, passa pela utilização das estatísticas de teste quadráticas,

$$Q^2 = r \int_{-\infty}^{+\infty} [F_r(x) - F(x)] \psi(x) dF(x), \quad (2.29)$$

onde  $\psi(x)$  é uma função de ponderação. Quando  $\psi(x) = 1$ , a estatística anterior reduz-se à estatística de Cramer-von Mises,  $\omega^2$ , enquanto se  $\psi(x) = (F(x)(1 - F(x)))^{-1}$ , obtém-se a estatística de Anderson-Darling,  $A^2$ , indicada quando se pretende que as caudas da distribuição  $F$ , tenham mais peso no calculo da estatística de teste do que a parte central da distribuição. Na prática, estas duas estatísticas são calculadas da seguinte forma,

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^r \left[ F(x_i) - \frac{2i-1}{2r} \right]^2 + \frac{1}{12r}$$

e

$$A^2 = -r - \sum_{i=1}^r [(2i - 1) \ln(F(x_i)) + (2r + 1 - 2i) \ln(1 - F(x_i))],$$

onde,  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  é a amostra observada da *v.a.*  $X$  e  $r$  é a dimensão da amostra. Considerando a transformação  $z = F(x)$ , a estatística de  $Q^2$  em (2.29), pode ser escrita como,

$$Q^2 = r \int_0^1 (F_r(z) - z) \psi(z) dz = \int_0^1 Y_r^2(z) dz, \quad (2.30)$$

onde  $F_r(z)$  é a função de distribuição empírica da variável  $z$  e

$$Y_r(z) = \sqrt{r} (F_r(z) - z) \sqrt{\psi(z)}.$$

Darling [10] e Durbin [20], provaram que  $Y_r(z)$  converge para um processo gaussiano  $Y(z)$  de média nula e covariância,

$$\rho(z, s) = [\min(z, s) - zs - [g(z)]^T \Sigma^{-1} g(s)] \sqrt{\psi(z) \psi(s)}, \quad (2.31)$$

onde  $0 \leq s, z \leq 1$ ,  $[g(z)]^T$  é a transposta do vector  $g(z) = (\partial z / \partial \theta_*)|_{\theta_* = \hat{\theta}_*}$ , com  $\theta_*$  o vector dos parâmetros da *f.d.*  $F$  na hipótese nula,  $\hat{\theta}_*$  o vector das estimativas e  $\Sigma^{-1}$  a inversa da matriz de informação dividida por  $r$ , i.e.,

$$\Sigma^{-1} = E \left( \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \theta_*} \cdot \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \theta_*^T} \right),$$

sendo  $f(x)$  a função densidade associada à *f.d.*  $F$ .

Os valores críticos destas estatísticas de teste foram calculados para funções de distribuição,  $F$ , totalmente conhecidas e também para algumas funções de distribuição conhecidas, mas em geral tendo no máximo dois parâmetros desconhecidos. Além disso, sabe-se que as distribuições das estatísticas  $\omega^2$  e  $A^2$ , no caso em que se tem todos os parâmetros conhecidos, são diferentes do caso em que se tem parâmetros desconhecidos. No entanto, o comportamento das funções de distribuição é semelhante em ambos os casos, em particular na cauda direita. Ora, estes factos, levaram a que em Laio [33], fosse proposta a seguinte transformação da estatística de teste,  $Q^2$  em (2.30),

$$\omega = \begin{cases} \beta_0 \left( \frac{Q^2 - \xi_p}{\beta_p} \right)^{\frac{\eta_p}{\eta_0}} + \xi_0, & 1.2\xi_p \leq Q^2 \\ \left[ \beta_0 \left( \frac{0.2\xi_p}{\beta_p} \right)^{\frac{\eta_p}{\eta_0}} + \xi_0 \right] \frac{Q^2 - 0.2\xi_p}{\beta_p}, & 1.2\xi_p > Q^2, \end{cases} \quad (2.32)$$

a qual é independente da função de distribuição que se considera na hipótese nula. Esta estatística de teste, prescinde da implementação de uma tabela de valores críticos para cada distribuição, sendo apenas necessário, determinar também para cada distribuição, os coeficientes,  $\xi_0, \xi_p, \beta_0, \beta_p, \eta_0$  e  $\eta_p$ . Segundo o mesmo autor, estes coeficientes podem ser calculados seguindo o procedimento:

1. A partir da covariância em (2.31), calcular a média  $\mu$ , a variância  $\sigma^2$  e o momento centrado de terceira ordem,  $M_3$ , da seguinte forma

$$\begin{cases} \mu = \int_0^1 \rho(z, z) dz \\ \sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 \rho(z, s) \rho(s, z) ds dz \\ M_3 = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho(z, s) \rho(s, t) \rho(t, z) dt ds dz \end{cases}$$

2. Determinar os coeficientes  $\xi, \beta$  e  $\eta$ , usando as relações

$$\begin{cases} \mu = \xi + \beta \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \\ \sigma^2 = \beta^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\eta} \right) - \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \right] \\ M_3 = \beta^3 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{3}{\eta} \right) - 3\Gamma \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\eta} \right) + 2\Gamma^3 \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) \right], \end{cases}$$

onde,  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama.

Os coeficientes  $\xi_0, \beta_0$  e  $\eta_0$ , correspondem ao caso em que a *f.d.*  $F$ , é totalmente conhecida, situação em que o termo  $[g(z)]^T \sum^{-1} g(s)$  em (2.31) desaparece. Por outro lado os coeficientes  $\xi_p, \beta_p$  e  $\eta_p$ , dizem respeito ao caso em que se conhece a família de modelos a que  $F$  pertence, mas desconhecem-se  $p$  dos seus parâmetros.

Em Laio [33], os valores dos coeficientes anteriores foram determinados para várias distribuições com alguns parâmetros desconhecidos, entre as quais a distribuição de Gumbel com dois parâmetros desconhecidos (a localização e a escala). Nesse mesmo artigo consta ainda, um estudo de comparação dos resultados obtidos quando se efectua um teste de ajustamento com as estatísticas modificadas de Cramer- von Mises e de Anderson-Darling, em relação aos resultados obtidos por intermédio de outras estatísticas de teste, como a estatística de Kolmogorov-Smirnov ou a estatística do qui-quadrado. Com esse estudo, o autor conclui que a estatística modificada de Anderson-Darling apresenta melhores resultados do que as outras estatísticas de teste,

quando se pretende testar o ajustamento da distribuição de Gumbel aos dados, aconselhando neste caso, o uso dos seguintes valores para os coeficientes em (2.32),

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0.0403; & \beta_0 &= 0.116; & \eta_0 &= 0.851; \\ \xi_p &= 0.169; & \beta_p &= 0.229; & \eta_p &= 1.141. \end{aligned}$$

Assim para testarmos a hipótese da distribuição Gumbel ser a distribuição subjacente aos dados, iremos proceder da seguinte forma, tal como é sugerido Laio [33]:

1. Estimar os parâmetros de localização e de escala da distribuição Gumbel, usando os estimadores de máxima verosimilhança;
2. Ordenar a amostra por ordem crescente e calcular  $z_i = F(x_i, \hat{\theta}_*)$ , onde  $F$  é a função de distribuição Gumbel e  $\hat{\theta}_* = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  o vector de parâmetros da distribuição de Gumbel e  $x_i$  os valores ordenados da *a.a.* para a *v.a.*  $X$  (no nosso caso o tempo de vida do sistema).
3. Calcular  $A^2$  e seguidamente determinar  $\omega$  em (2.32). Comparar os resultados com os valores críticos e caso  $\omega$  seja superior ao valor crítico, rejeitar a hipótese da distribuição subjacente aos dados ser a lei de Gumbel.

Observe-se ainda que, no nosso caso, como temos dois parâmetros desconhecidos (a localização e a escala), a hipótese nula deve ser rejeitada, segundo Laio [33], caso  $\omega$  seja superior a 0.347, 0.461 e 0.743, para os níveis de significância de 0.1, 0.05 e 0.01 respectivamente.

### 2.4.2 Resultados do Estudo de Simulação

Neste estudo de simulação os tempos de vida,  $X_{ij}$ , das componentes do sistema, foram gerados usando a relação entre máximos e mínimos em (1.23) e considerando para a distribuição comum de  $(-X_{ij})$  os modelos paramétricos para máximos (a menos de localização e de escala), GEV e GPD. Para esse efeito foram utilizadas as funções *gevinv* (para a GEV de máximos) e *gpinv* (para a GPD de máximos) do package MATLAB. Isto significa na prática, que para a distribuição comum dos tempos de vida  $X_{ij}$  simulados foram tomados os modelos paramétricos (a menos de localização e de escala), Pareto Generalizado para mínimos,

$$\text{GPD}_\gamma^{\min}(x) = \begin{cases} (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}, & \gamma \neq 0 \\ \exp(x), & \gamma = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

onde,

$$\begin{cases} x \leq 0, & \text{se } \gamma \geq 0 \\ 1/\gamma \leq x \leq 0, & \text{se } \gamma < 0, \end{cases}$$

e o já nosso conhecido modelo GEV para mínimos,

$$\text{GEV}_{\gamma}^{\min}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right), & 1 - \gamma x \geq 0, \quad \gamma \neq 0 \\ \exp(-\exp(x)), & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0 \end{cases}. \quad (2.34)$$

Para se obter uma *a.a.* do tempo total de vida  $X$  em (2.26), foram simuladas *a.a.'s* das *v.a.'s*  $X_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, l_n$ , para cada uma das classes de distribuição anteriormente representadas em (2.33) e (2.34) e de modo que, a função de distribuição  $F$  pertencesse ao domínio de atração de uma lei estável para mínimos,  $H_{\gamma}$ , com o parâmetro  $\gamma$  a tomar os valores  $-2, -1.5, -1, -0.5$  e  $1$ . Por outro lado, para o número de subsistemas em paralelo,  $n$ , tomámos os valores  $20, 50$  e  $100$ , enquanto que, para o número de componentes em série,  $l_n$ , considerámos os valores  $2, 10, 20, 50$  e  $100$ . Neste estudo, foram geradas amostras de dimensão  $r = 500$  da *v.a.*  $X$ , tendo o procedimento sido replicado  $1000$  vezes. Refira-se ainda, que a escolha intencional dos valores de  $\gamma$  e  $n$  assenta na possibilidade das *a.a.'s* geradas poderem ser utilizadas nos estudos de simulação a serem apresentados no próximo capítulo. Atempadamente voltaremos a esclarecer esta questão.

Nas tabelas 2.1 a 2.8 estão representadas as probabilidades de rejeição empíricas, i.e., as probabilidades correspondentes aos erros do tipo I estimados, para os níveis de significância  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.05$  e  $\alpha = 0.01$ , em contexto GEV (tabelas de 2.1 a 2.4) e GPD (tabelas de 2.5 a 2.8). Da observação dos resultados podemos extrair algumas ilações:

1. Para tempos de vida das componentes com função de distribuição GEV de mínimos:
  - Os erros de tipo I estimados têm valores muito próximos de um, havendo quase sempre a rejeição da hipótese nula, i.e., rejeição da distribuição do tempo de vida do sistema,  $F_n$ , ser uma função de distribuição Gumbel. A exceção ocorre quando  $\gamma = -1$ , verificando-se neste caso que os erros de tipo I estimados têm valores muito próximos dos três níveis de significância  $\alpha = 0.1, \alpha = 0.05$  e  $\alpha = 0.01$ , por conseguinte os resultados simulados apontam para a adopção do modelo Gumbel como distribuição do tempo de vida do sistema neste caso particular;
  - Pela análise das tabelas constata-se que, à medida que nos aproximamos do parâmetro de forma  $\gamma = -1$ , os resultados melhoram, no sentido



em que os erros de tipo I estimados vão diminuindo para os níveis de significância considerados, enquanto que para valores de  $\gamma$  mais distantes de  $-1$ , os valores dos erros de tipo I estimados aumentam para valores próximos de um;

- Constata-se ainda que os resultados obtidos não parecem ser afectados pelo número  $l_n$  de componentes em série, mas pelo contrário, melhoram à medida que  $n$  aumenta.
2. Para tempos de vida das componentes com função de distribuição GPD de mínimos:
- Os erros de tipo I estimados têm valores muito próximos de um, havendo quase sempre a rejeição da distribuição do tempo de vida do sistema,  $F_n$ , ser uma função de distribuição Gumbel. A excepção ocorre quando  $\gamma = -1$  e para grandes valores de  $l_n$  (100) e  $n$  (50, 100), observando-se que os valores dos erros de tipo I estimados são próximos dos três níveis de significância considerados, por conseguinte, os resultados obtidos sugerem neste caso a aceitação do modelo Gumbel como distribuição do tempo total de vida do sistema;
  - Pela análise das tabelas verifica-se ainda que os resultados vão melhorando para valores de  $\gamma$  mais próximos de  $-1$  e piorando caso contrário;
  - De uma forma geral os valores dos erros de tipo I estimados melhoram (diminuem) quando  $n$  aumenta.

**Conclusão 2.3** Os resultados que acabámos de expor são reveladores de que só para  $\gamma = -1$  é que há coerência entre as considerações teóricas estipuladas no teorema 2.1 e os resultados encontrados neste estudo de simulação. Também não é de estranhar que para esta situação particular, a adequação do modelo Gumbel em contexto GEV (para mínimos), seja independente do número de componentes em série,  $l_n$ , contrariamente ao que se passa no caso GPD (para mínimos). Isto acontece no primeiro caso, por se terem mesmo distribuições GEV na parte em série e por estas distribuições pertencerem ao próprio domínio de atracção. A constatação desta realidade e o facto da função de distribuição,  $F_n$ , do tempo de vida deste tipo de sistemas paralelo-série, representar a distribuição do máximo de *v.a.s*, motivou a investigação, a ser apresentada no próximo capítulo, da existência de outras leis de extremos para máximos que eventualmente possam constituir um melhor modelo para  $F_n$  do que o próprio modelo limite Gumbel.

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-2$			$\gamma=-1.5$	
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9810	0.9630
	50	1.0000	1.0000	0.9990	0.8760	0.8010
	100	0.9990	0.9980	0.9910	0.7350	0.6310
10	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9790	0.9620
	50	1.0000	0.9990	0.9970	0.8790	0.8090
	100	0.9990	0.9950	0.9860	0.7630	0.6540
20	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9820	0.9690
	50	1.0000	0.9990	0.9980	0.8940	0.8100
	100	0.9990	0.9970	0.9870	0.7590	0.6580
50	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9900	0.9770
	50	1.0000	1.0000	0.9980	0.8600	0.7810
	100	0.9990	0.9960	0.9880	0.7590	0.6570
100	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9830	0.9760
	50	1.0000	1.0000	1.0000	0.8670	0.7870
	100	0.9990	0.9960	0.9870	0.7730	0.6680

Tabela 2.1: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-1$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	0.1430	0.0720	0.0220
	50	0.1100	0.0510	0.0060
	100	0.1040	0.0560	0.0090
10	20	0.1480	0.0810	0.0170
	50	0.0960	0.0430	0.0090
	100	0.1100	0.0500	0.0070
20	20	0.1240	0.0720	0.0150
	50	0.1020	0.0450	0.0120
	100	0.0940	0.0420	0.0080
50	20	0.1350	0.0740	0.0200
	50	0.0940	0.0370	0.0060
	100	0.0970	0.0520	0.0130
100	20	0.1320	0.0630	0.0190
	50	0.0960	0.0430	0.0040
	100	0.0940	0.0460	0.0090

Tabela 2.2: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-0.5$			$\gamma=0$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	0.8990	0.8450	0.6770	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.7870	0.6780	0.4570	1.0000	1.0000	0.9990
	100	0.7080	0.5830	0.3430	1.0000	0.9990	0.9930
10	20	0.9040	0.8310	0.6350	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.8000	0.6970	0.4890	1.0000	0.9990	0.9990
	100	0.6950	0.5690	0.3530	1.0000	1.0000	0.9930
20	20	0.8930	0.8240	0.6180	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.7860	0.6850	0.4750	1.0000	1.0000	1.0000
	100	0.6740	0.5610	0.3590	1.0000	0.9990	0.9870
50	20	0.9020	0.8420	0.6420	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.7840	0.6890	0.4650	1.0000	1.0000	0.9950
	100	0.7100	0.5920	0.3630	0.9980	0.9970	0.9840
100	20	0.9090	0.8470	0.6670	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.8150	0.6860	0.4480	1.0000	1.0000	0.9970
	100	0.6760	0.5520	0.3420	1.0000	1.0000	0.9930

Tabela 2.3: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=0.5$			$\gamma=1$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	20	0.9970	0.9970	0.9970	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
50	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
100	20	0.9990	0.9990	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2.4: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-2$			$\gamma=-1.5$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	20	0.9890	0.9720	0.8940	0.2780	0.1690	0.0570
	50	0.6490	0.5030	0.2950	0.1050	0.0490	0.0080
	100	0.3420	0.2320	0.0970	0.1230	0.0580	0.0140
20	20	1.0000	1.0000	0.9990	0.7720	0.6700	0.4470
	50	0.9890	0.9740	0.9000	0.3820	0.2750	0.1240
	100	0.9160	0.8410	0.6620	0.2080	0.1190	0.0380
50	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9390	0.8930	0.7610
	50	0.9990	0.9990	0.9890	0.7320	0.6040	0.3510
	100	0.9880	0.9790	0.9380	0.5280	0.4060	0.2130
100	20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9710	0.9470	0.8400
	50	1.0000	1.0000	0.9980	0.8030	0.7080	0.4830
	100	0.9990	0.9930	0.9690	0.6350	0.5180	0.3020

Tabela 2.5: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-1$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000
10	20	0.5640	0.4260	0.2040
	50	0.6930	0.5610	0.3170
	100	0.7300	0.6140	0.3780
20	20	0.1660	0.0990	0.0270
	50	0.2210	0.1310	0.0400
	100	0.2560	0.1730	0.0600
50	20	0.1070	0.0550	0.0120
	50	0.1150	0.0520	0.0110
	100	0.1210	0.0590	0.0130
100	20	0.1160	0.0650	0.0130
	50	0.0980	0.0540	0.0090
	100	0.0830	0.0370	0.0080

Tabela 2.6: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-0.5$			$\gamma=0$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	20	0.9990	0.9980	0.9910	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.9990	0.9980	0.9790	1.0000	1.0000	1.0000
	100	0.9960	0.9890	0.9490	1.0000	1.0000	0.9990
20	20	0.9880	0.9700	0.9120	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.9620	0.9270	0.8170	1.0000	1.0000	0.9990
	100	0.9520	0.9040	0.7540	1.0000	1.0000	0.9970
50	20	0.9620	0.9280	0.7930	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.8880	0.8190	0.6080	1.0000	1.0000	1.0000
	100	0.8330	0.7280	0.5240	1.0000	1.0000	0.9970
100	20	0.9320	0.8950	0.7290	1.0000	1.0000	1.0000
	50	0.8540	0.7620	0.5630	1.0000	1.0000	0.9980
	100	0.7590	0.6590	0.4360	1.0000	1.0000	0.9960

Tabela 2.7: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=0.5$			$\gamma=1$		
$l_n$	$n$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
2	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
50	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
100	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	50	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	100	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2.8: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos



## Capítulo 3

# Modelos *Penultimate* para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelo, Regulares e Homogêneos

Provamos no teorema 2.1, que sob a hipótese da distribuição dos tempos de vida de cada componente, convenientemente normalizada, pertencer ao domínio de atracção de uma lei de mínimos, a sequência de funções de distribuição,  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , poderia ser aproximada à lei de Gumbel  $G_0(x)$ , para uma escolha adequada de coeficientes de atracção,  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , quando a sucessão  $\{l_n\}$  verifica a condição assintótica em (2.8). Este resultado permitiu-nos imediatamente identificar, para a mesma normalização,  $R_0(x) = 1 - G_0(x)$ , como sendo o possível modelo limite para a função de fiabilidade,  $R_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , em sistemas organizados por  $n$  subsistemas em paralelo, cada um dos quais com  $l_n$  componentes em série. Deliberadamente, foram adaptadas e reescritas conclusões similares para os sistemas série-paralelo, estabelecendo-se que sob a mesma condição assintótica envolvendo  $n$  subsistemas em série de  $l_n$  componentes em paralelo, obteríamos respectivamente a Gumbel para mínimos  $H_0(x)$  e a função  $R_0^*(x) = 1 - H_0(x)$ , como os modelos limite representativos da distribuição do tempo de vida do sistema  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$  e da fiabilidade  $R_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$ . Começando por considerar novamente sistemas paralelo-série, a nossa preocupação é agora, num contexto pré-assintótico, assumir que  $n$  é fixo e grande e averiguar a eventual existência de uma sequência *penultimate* de distribuições de valores extremos convergente para a distribuição limite Gumbel,  $G_0(x)$ , que seja uma melhor aproximação para  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ . Recorde-se que o comportamento

da cauda direita de  $\min_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij}$  é decisivo para o estudo do tempo total de vida destes sistemas, daí que seja necessário em primeiro lugar, focarmos cuidadosamente a nossa atenção sobre o comportamento *penultimate* da cauda direita de leis estáveis para mínimos,  $H_\gamma(x)$ . Com esse propósito, seguiremos um resultado, já anteriormente mencionado de Gomes e De Haan [26], reformulado no próximo teorema, apenas para o caso Gumbel. O referido teorema é desenvolvido para *f.d.*  $F$  que verificam as condições suficientes de von Mises e faz uso de dois parâmetros de primeira e segunda ordem,  $\gamma$  e  $\rho$  respectivamente, bem como das funções  $u(x) := -\ln(-\ln F(x))$  e  $v(x) := u^\leftarrow(x)$ , a função inversa generalizada<sup>1</sup> de  $u$ . A condição de von Mises de primeira ordem, outrora retrada na proposição (1.3), garante a convergência da distribuição do máximo normalizado,  $F^n(a_n x + b_n)$ , para a lei limite  $G_\gamma(x)$ , mediante uma escolha óptima de constantes de atracção, que no nosso caso sendo  $\gamma = 0$ , coincidem precisamente com as sucessões apresentadas em (1.20). A condição de von Mises de segunda ordem permite detectar se a velocidade de convergência associada à aproximação assintótica inicial é demasiado lenta, condição validada para  $\rho = 0$ , garantindo-se desse modo, a existência de uma nova sequência de leis de extremos diferentes da lei limite e mais próxima de  $F^n(a_n x + b_n)$ . Finalmente, a última condição, designada pelos autores de *condição de von Mises tipo penultimate*, permite identificar a referida sequência com uma velocidade de convergência uniforme válida em todo o conjunto  $\mathbb{R}$ . A dedução de tais condições é parcialmente sustentada num artigo de De Haan e Resnick [14], no qual são demonstrados alguns resultados importantes para velocidades de convergência no âmbito da teoria de variação regular de segunda ordem. Na aplicação do teorema de Gomes e de Haan, denotaremos por  $\theta$  o parâmetro de primeira ordem em vez do usual  $\gamma$ , para não haver risco de confusão com o parâmetro  $\gamma$  das nossas leis estáveis para mínimos  $H_\gamma$ .

---

<sup>1</sup>Assuma-se que o ínfimo de qualquer subconjunto vazio em  $\mathbb{R}$  é  $+\infty$ . Dada uma função  $F$ , não decrescente em  $\mathbb{R}$ , chama-se *inversa generalizada* de  $F$  e representa-se por  $F^\leftarrow$ , à função definida por

$$F^\leftarrow(y) = \inf \{s : F(s) \geq y\}$$



### 3.1 Análise do Comportamento *Penultimate* da Cauda Direita de Leis Estáveis para Mínimos

**Teorema 3.1** (Gomes and de Haan, [26], parâmetro de 1ª ordem,  $\theta = 0$ )  
 Sejam  $u(x) := -\ln(-\ln F(x))$  e  $v(x) := u^{\leftarrow}(x)$ , a função inversa generalizada de  $u$ . Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \left( \frac{1}{u'(x)} \right)' = 0$$

ou de forma equivalente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0, \quad (\text{condição de von Mises de 1ª ordem}) \quad (3.1)$$

onde,

$$\eta(x) := \frac{v''(x)}{v'(x)}.$$

Asuma-se que,

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \frac{([u'(x)]^{-1})''}{u'(x) ([u'(x)]^{-1})'} = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v'''(x)}{v''(x)} = \rho = 0, \quad (\text{condição de von Mises de 2ª ordem com } \rho = 0) \quad (3.2)$$

e ainda que,

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \frac{([u'(x)]^{-1})'''}{u'(x) ([u'(x)]^{-1})'} = 0$$

ou de forma equivalente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta''(x)}{\eta'(x)} = 0. \quad (\text{condição de von Mises tipo penultimate}) \quad (3.3)$$

Então, existe uma sequência de parâmetros  $\{\theta_n\}$  tal que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(a_n x + b_n) - G_{\theta_n}(x)}{\eta'(\ln n)} = \frac{x^3}{6} G'_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , com  $a_n := v'(\ln n)$  e  $b_n := v(\ln n)$ . Além do mais, podemos considerar

$$\theta_n := \eta(\ln n).$$

**Proposição 3.1** Para qualquer  $\gamma \neq -1$ , uma lei estável de mínimos,  $H_\gamma$ , está nas condições do teorema (3.1), tendo-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_\gamma^n(a_n x + b_n) - G_{\theta_n}(x)}{\frac{(\gamma+1)}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} G'_0(x), \quad (3.4)$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $\{\theta_n\}$  é assintoticamente definido por

$$\theta_n = -(\gamma + 1) \frac{1}{\ln n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.5)$$

**Dem.** Para provar a condição de 1ª ordem estipulada no teorema (3.1), consideremos

$$u(x) := -\ln(-\ln H_\gamma(x)) = \begin{cases} -\ln\left(-\ln\left(1 - \exp\left\{- (1 - \gamma x)^{-1/\gamma}\right\}\right)\right), & \gamma \neq 0 \\ -\ln[-\ln(1 - \exp\{-\exp(x)\})], & \gamma = 0, \end{cases}$$

e a respectiva função inversa,

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \left(1 - [-\ln(1 - \exp\{-\exp(-x)\})]^{-\gamma}\right), & \gamma \neq 0 \\ \ln[-\ln(1 - \exp\{-\exp(-x)\})], & \gamma = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

Começaremos por tomar  $\gamma \neq 0$  e  $\gamma \neq -1$  e analisaremos estes dois casos posteriormente. Designando,

$$g(x) := -\ln(1 - \exp\{-\exp(-x)\}),$$

a primeira e segunda derivadas de  $v(x)$  vêm dadas por,

$$v'(x) = \left(\frac{1 - (g(x))^{-\gamma}}{\gamma}\right)' = g'(x) g^{-\gamma-1}(x)$$

e

$$v''(x) = \left[g''(x) - (\gamma + 1)(g'(x))^2 g^{-1}(x)\right] g^{-\gamma-1}(x), \quad (3.7)$$

logo,

$$\eta(x) := \frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)} - (\gamma + 1) \frac{g'(x)}{g(x)}. \quad (3.8)$$

Atendendo à expansão em série da função exponencial, obtemos o seguinte desenvolvimento assintótico, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} e^{-e^{-x}} &= 1 - e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} + O(e^{-3x}) \Leftrightarrow \\ 1 - e^{-e^{-x}} &= e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + O(e^{-3x}), \end{aligned}$$

e conseqüentemente, tendo em conta que  $-\ln(1-z) \sim z$ , quando  $z \rightarrow 0$ , vem que

$$\begin{aligned} g(x) &= -\ln\left(e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} + O(e^{-3x})\right) = -\ln\left(e^{-x}\left(1 - \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})\right)\right) \\ &= x - \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})\right) = x + \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por outro lado, uma vez que

$$g'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) \quad \text{e} \quad g''(x) = \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}), \quad (3.10)$$

tem-se,

$$\frac{g''(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})}{1 - \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})} = \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})$$

e

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})}{x + \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})} = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} + O(e^{-2x}).$$

Regressando à expressão em (3.8), resulta que,

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) - (\gamma + 1) \left( \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} + O(e^{-2x}) \right) \\ &= -(\gamma + 1) \frac{1}{x} + O(e^{-x}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

pelo que tomando  $x \rightarrow +\infty$ , obtemos a condição de von Mises de 1ª ordem em (3.1). Note-se que pelos cálculos anteriores, podemos extrapolar que, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$g(x) \rightarrow +\infty, \quad g'(x) \rightarrow 1, \quad g''(x) \rightarrow 0, \quad \frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{g''(x)}{g'(x)} \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Com vista a provar a condição de von Mises de 2ª ordem, notemos primeiro,

$$\begin{aligned} v'''(x) &= \left[ g'''(x) - (\gamma + 1) \left( \frac{2g''(x)g'(x)}{g(x)} - \frac{(g'(x))^3}{(g(x))^2} \right) \right] g^{-\gamma-1}(x) \\ &\quad - (\gamma + 1) v''(x) g'(x) g^{-1}(x), \end{aligned}$$

pelo que, atendendo a (3.7), chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{v'''(x)}{v''(x)} &= \frac{g'''(x)g(x) - (\gamma + 1) \left( 2g''(x)g'(x) - \frac{(g'(x))^3}{g(x)} \right)}{g''(x)g(x) - (\gamma + 1)(g'(x))^2} \\ &\quad - (\gamma + 1) \frac{g'(x)}{g(x)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ora, uma vez que temos os limites em (3.12), para se obter a referida condição em (3.2), precisamos de garantir, na expressão anterior, que  $g''(x)g(x) \rightarrow 0$  e  $g'''(x)g(x) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ . Por (3.9) e (3.10) tem-se,

$$\begin{aligned} g''(x)g(x) &= \left( \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) \right) \left( x + \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) \right) \\ &= \frac{xe^{-x}}{2} + O(xe^{-2x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g'''(x) &= g''(x) [(e^{-x} - 1) + g'(x)] + g'(x) (-e^{-x} + g''(x)) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} g'''(x)g(x) &= \left( -\frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) \right) \left( x + \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) \right) \\ &= -\frac{xe^{-x}}{2} + O(xe^{-2x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

pelo que a condição de von Mises de 2ª ordem (3.2) é verificada, i.e.,  $v'''(x)/v''(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Finalmente, para validarmos (3.3), teremos que analisar previamente o comportamento assintótico de  $\eta'(x)$  e  $\eta''(x)$ . Observando (3.11), tem-se,

$$\eta'(x) = (\gamma + 1) \frac{1}{x^2} + O(e^{-x})$$

e

$$\eta''(x) = -2(\gamma + 1) \frac{1}{x^3} + O(e^{-x}),$$

de modo que a condição de von Mises tipo *penultimate* é satisfeita, uma vez que,

$$\frac{\eta''(x)}{\eta'(x)} = \frac{-2(\gamma + 1) \frac{1}{x^3} + O(e^{-x})}{(\gamma + 1) \frac{1}{x^2} + O(e^{-x})} = -\frac{2}{x} + O(e^{-x}) \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

quando  $x \rightarrow +\infty$ . Concluimos, assim pelo teorema (3.1), que para  $\gamma \neq 0$  e  $\gamma \neq -1$ , existe uma sequência *penultimate* de leis extremos de máximos para a distribuição  $H_\gamma^n$ . Mais precisamente, tomando

$$\theta_n := \eta(\ln n) = -(\gamma + 1) \frac{1}{\ln n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

o seguinte limite é válido,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_\gamma^n(a_n x + b_n) - G_{\theta_n}(x)}{\frac{(\gamma+1)}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} G'_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , onde,

$$a_n := v'(\ln n) = \frac{1}{n \left( \exp \left\{ \frac{1}{n} \right\} - 1 \right) \left( -\ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \right)^{\gamma+1}}, \quad (3.15)$$

e

$$b_n := v(\ln n) = \frac{1 - \left[ -\ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \right]^{-\gamma}}{\gamma}, \quad (3.16)$$

são uma possível escolha de constantes de atracção para se obter a convergência em (2.6), como vimos no capítulo anterior.

Vamos analisar agora o caso  $\gamma = 0$ . Comecemos por notar que a função  $v(x)$  definida em (3.6) é contínua para qualquer  $\gamma \in \mathbb{R}$ , com funções derivadas de qualquer ordem igualmente contínuas, o que nos permite substituir  $\gamma = 0$  em (3.11), (3.13) e (3.14), obtendo-se as três condições de von Mises,

$$\eta(x) = -\frac{1}{x} + O(e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\frac{v'''(x)}{v''(x)} = \frac{g'''(x)g(x) - \left( 2g''(x)g'(x) - \frac{(g'(x))^3}{g(x)} \right)}{g''(x)g(x) - (g'(x))^2} - \frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

e,

$$\frac{\eta''(x)}{\eta'(x)} = \frac{\frac{-2}{x^3} + O(e^{-x})}{\frac{1}{x^2} + O(e^{-x})} = -\frac{2}{x} + O(e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Por conseguinte, concluímos que existe uma sequência  $\{\theta_n\}$  definida por,

$$\theta_n := \eta(\ln n) = -\frac{1}{\ln n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

tal que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_0^n(a_n x + b_n) - G_{\theta_n}(x)}{\frac{(\gamma+1)}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} G'_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , onde agora,

$$a_n := v'(\ln n) = \frac{1}{n \left( \exp \left\{ \frac{1}{n} \right\} - 1 \right) \left( -\ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \right)} \quad (3.17)$$

e

$$b_n := v(\ln n) = \ln \left[ -\ln \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right) \right]. \quad (3.18)$$

Note-se novamente que as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  constituem a possível escolha de constantes de atracção da convergência de  $H_0^n$  para a Gumbel, que vimos em (2.6).

A única excepção que invalida o teorema (3.1) é o caso  $\gamma = -1$ . De facto, a condição de 1ª ordem é verificada, uma vez que,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v''(x)}{v'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g''(x)}{g'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x}) = 0, \end{aligned}$$

no entanto, a condição de 2ª ordem, não é válida, pois agora,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v'''(x)}{v''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})}{\frac{e^{-x}}{2} + O(e^{-2x})} = -1,$$

o que significa, que o parâmetro de 2ª ordem  $\rho$  é  $-1$  e não zero, condição necessária para que uma aproximação *penultimate* possa existir. ■

Podemos sumariar os resultados obtidos, concluindo-se que, sendo  $H_\gamma$  uma lei estável para mínimos, se  $\gamma > -1$ ,  $G_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Weibull para  $H_\gamma^n$  e se  $\gamma < -1$ ,  $G_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Fréchet para  $H_\gamma^n$ . Em ambos os casos a aproximação pré-assintótica ou *penultimate*,

$$H_\gamma^n(a_n x + b_n) \approx G_{\theta_n}(x),$$

processa-se a uma velocidade de convergência uniforme da ordem de

$$\eta'(\ln n) = \frac{\gamma + 1}{\ln^2 n}.$$

De referir ainda que nos seus artigos, De Haan e Resnick [14] e Gomes e De Haan [26], mostram que a convergência da distribuição do máximo, convenientemente normalizado, para a lei limite  $G_\gamma$ , é controlada pela velocidade de convergência uniforme da ordem de  $\eta(\ln n) - \theta = v''(\ln n)/v'(\ln n) - \theta$ . Como no nosso caso  $\theta = 0$ , significa que a aproximação assintótica ou *ultimate*,

$$H_\gamma^n(a_n x + b_n) \approx G_0(x),$$

processa-se a uma velocidade de convergência uniforme da ordem de

$$\eta(\ln n) = -\frac{\gamma + 1}{\ln n}, \quad \gamma \neq -1.$$

### 3.2 Modelos *Penultimate* para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e Homogéneos

Recorrendo à proposição anterior é possível construirmos modelos *penultimate* ou pré-assintóticos, para a função de fiabilidade em sistemas paralelo-série, com igual número de componentes,  $l_n$ , para as quais os tempos de vida são *i.i.d.* e pertencem ao domínio de atracção de uma lei de extremos para mínimos. Tais modelos são descritos no próximo teorema, cuja demonstração segue de perto a do teorema 2.1 do capítulo anterior, razão pela qual apresentaremos de forma abreviada algumas expressões já deduzidas e iteradas no referido teorema.

**Teorema 3.2** *Seja  $F$  uma função de distribuição pertencente ao domínio de atracção para mínimos de uma lei  $H_\gamma(x)$ , i.e., existem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$1 - (1 - F(a_n x + b_n))^n = H_\gamma(x) + \varepsilon_n(x),$$

onde  $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $H_\gamma(x)$  definida em (1.24). Dada uma sucessão de inteiros positivos  $\{l_n\}$ , tal que

$$\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n = o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right), \quad (3.19)$$

onde  $e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)|$ , então para qualquer  $\gamma \neq -1$ , existem sucessões  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e uma sucessão de parâmetros  $\{\theta_n\}$  tais que, para a sequência de funções de distribuição, convenientemente normalizada,  $F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n$ , é válido o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n(\alpha_n x + \beta_n) - G_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} G'_0(x),$$

uniformemente para  $x \in \mathbb{R}$ , i.e., para um sistema paralelo-série, constituído por  $n$  subsistemas em paralelo, de  $l_n$  componentes em série, a sequência de funções de fiabilidade, convenientemente normalizada,  $R_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , verifica,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n(\alpha_n x + \beta_n) - (1 - G_{\theta_n}(x))}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = -\frac{x^3}{6} G'_0(x),$$

uniformemente para  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Além disso, podemos tomar

$$\theta_n = -(\gamma + 1)(\ln n)^{-1} + O(n^{-1}),$$

$\alpha_n = a_n a_n^*$ ,  $\beta_n = a_n b_n^* + b_n$ , com  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  definidas respectivamente em (2.11) e (2.12).

**Dem.** Dadas as sequências  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  para as quais (2.7) é válida e tomando  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  tais que  $\alpha_n = a_n a_n^*$  e  $\beta_n = a_n b_n^* + b_n$ , vimos pelo teorema 2.1 que se a sucessão  $\{l_n\}$  é tal que  $\frac{l_n}{n} n^{\frac{1}{n}} e_n = o(1)$ , onde  $e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)|$ , então para constantes convenientes  $\{\alpha_n^*\}$  e  $\{\beta_n^*\}$ , a sequência de funções  $\rho_n(x)$  dada em (2.16) por,

$$\rho_n(x) = (1 - H_\gamma(\alpha_n^* x + \beta_n^*)) - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n},$$

verifica  $n\rho_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde para  $\gamma \neq 0$ , podemos tomar

$$\begin{cases} \alpha_n^* = \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} a_n^* \\ \beta_n^* = \left(\frac{l_n}{n}\right)^{-\gamma} \left(\frac{\gamma b_n^* - 1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}, \end{cases} \quad (3.20)$$

e para  $\gamma = 0$ ,

$$\begin{cases} \alpha_n^* = a_n^* \\ \beta_n^* = b_n^* + \ln\left(\frac{l_n}{n}\right). \end{cases} \quad (3.21)$$

Atendendo a (2.11), (2.12) e (3.20), vimos ainda na demonstração do teorema (2.1) que para  $\gamma \neq 0$ ,

$$\alpha_n^* = \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\gamma+1}},$$

e

$$\beta_n^* = \frac{1 - \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{-\gamma}}{\gamma},$$

enquanto para  $\gamma = 0$ , se obteve por (3.21),

$$\alpha_n^* = \frac{1}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)},$$

e

$$\beta_n^* = b_n^* + \ln\left(\frac{l_n}{n}\right) = \ln\left(-\ln\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

Portanto,  $(\alpha_n^*)$  e  $(\beta_n^*)$  verificam (3.15) e (3.16), para  $\gamma \neq 0$  e também (3.17) e (3.18), para  $\gamma = 0$ , constituindo em qualquer dos casos uma possível escolha de constantes de atracção para se obter a convergência de  $H_\gamma^n$  para  $G_0(x)$  e para as quais o seguinte desenvolvimento é válido

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) = H_\gamma^n(\alpha_n^* x + \beta_n^*) \left[ 1 - \frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^* x + \beta_n^*)} + o\left(\frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^* x + \beta_n^*)}\right) \right].$$



Ora, utilizando a expansão anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{F_n(\alpha_n x + \beta_n) - G_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} &= \left( \frac{F_n(\alpha_n x + \beta_n) - H_\gamma^n(\alpha_n^* x + \beta_n^*)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{H_\gamma^n(\alpha_n^* x + \beta_n^*) - G_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} \right) \\ &= \left( \frac{H_\gamma^n(\alpha_n^* x + \beta_n^*) - \frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^* x + \beta_n^*)} + o\left(\frac{n\rho_n(x)}{H_\gamma(\alpha_n^* x + \beta_n^*)}\right)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} \right) \\ &\quad + \frac{H_\gamma^n(\alpha_n^* x + \beta_n^*) - G_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} \end{aligned}$$

A proposição (3.1) juntamente com a hipótese  $\frac{l_n}{n} n^{\frac{n}{l_n}} e_n = o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$  garantem, para qualquer  $\gamma \neq -1$ , a existência de uma sequência  $\{\theta_n\}$  definida por,

$$\theta_n = -(\gamma + 1) \frac{1}{\ln n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

tal que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n(\alpha_n x + \beta_n) - G_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} G'_0(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

uniformemente para  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja, para sistemas regulares paralelo-série, constituídos por  $n$  subsistemas em paralelo de  $l_n$  componentes em série, a sequência de funções de fiabilidade, convenientemente normalizada,  $R_n(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \left[1 - (1 - F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n$  verifica,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n(\alpha_n x + \beta_n) - (1 - G_{\theta_n}(x))}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = -\frac{x^3}{6} G'_0(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

uniformemente em  $\mathbb{R}$ , o que prova o resultado. ■

Repare-se que, sob as condições impostas pelo teorema anterior e pela proposição 3.1, resulta que quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $\theta_n \rightarrow 0$  e por conseguinte,  $F_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow G_0(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , com uma velocidade de convergência conhecida da ordem de  $-(\gamma + 1)(\ln n)^{-1}$ , onde  $\gamma \neq -1$ . Por outro lado, quando  $\gamma > -1$ ,  $G_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Weibull para  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , enquanto para  $\gamma < -1$ ,  $G_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Fréchet para  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ , com uma velocidade de convergência uniforme em ambos os casos agora da ordem de  $(\gamma + 1) \ln^{-2} n$ .

Para  $\gamma = -1$ , recorde-se que nenhum comportamento *penultimate* foi detectado para  $H_{-1}^n$ , pelo que, a aproximação de  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$  à lei de Gumbel  $G_0(x)$  não pode ser melhorada.

### 3.3 Modelos *Penultimate* Para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e Homogéneos

Atendendo novamente à estreita relação entre o máximo e o mínimo, apresentamos no próximo teorema uma reformulação do resultado anterior, adaptado agora para sistemas regulares série-paralelo, cujos tempos de vida de cada uma das suas componentes são independentes e têm distribuição comum pertencente ao domínio de atracção de uma lei estável de máximos.

**Teorema 3.3** *Seja  $F$  uma função de distribuição pertencente ao domínio de atracção para máximos de uma lei  $G_\gamma(x)$ , i.e., existem sucessões  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) = G_\gamma(x) + \varepsilon_n(x),$$

onde  $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $G_\gamma(x)$  é definida em (1.5). Dada uma sucessão de inteiros positivos  $\{l_n\}$ , tal que  $\frac{l_n}{n} n^{\frac{\gamma}{l_n}} e_n = o\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$ , para  $e_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_n(x)|$ , então para qualquer  $\gamma \neq -1$ , existem sucessões  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$ , com  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$  e uma sucessão de parâmetros  $\{\theta_n\}$ , tais que, para a sequência de funções de distribuição, convenientemente normalizada,  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n) = 1 - \left[1 - (F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n$ , é válido o limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n^*(\alpha_n x + \beta_n) - H_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = \frac{x^3}{6} H_0'(x),$$

uniformemente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , i.e., para sistemas regulares série-paralelo, organizados por  $n$  subsistemas em série de  $l_n$  componentes em paralelo, a sequência de funções de fiabilidade, convenientemente normalizada,  $R_n^*(\alpha_n x + \beta_n) = \left[1 - (F(\alpha_n x + \beta_n))^{l_n}\right]^n$  verifica,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n^*(\alpha_n x + \beta_n) - R_{\theta_n}(x)}{(\gamma + 1) \frac{1}{\ln^2 n}} = -\frac{x^3}{6} H_0'(x),$$

uniformemente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $R_{\theta_n}(x) = 1 - H_{\theta_n}(x)$ . Além disso, podemos tomar

$$\theta_n = -(\gamma + 1)(\ln n)^{-1} + O(n^{-1}),$$

$\alpha_n = a_n a_n^*$  and  $\beta_n = a_n b_n^* + b_n$ , com  $\{a_n^*\}$  e  $\{b_n^*\}$  dados respectivamente por (2.11) e (2.12).

Concluimos por este teorema e pela proposição (3.1), que, para  $\gamma > -1$ ,  $H_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Weibull de mínimos para  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$  e quando  $\gamma < -1$ ,  $H_{\theta_n}(x)$  é uma sequência *penultimate* de distribuições Fréchet de mínimos para  $F_n^*(\alpha_n x + \beta_n)$ , com uma velocidade de convergência uniforme da ordem de  $(\gamma + 1) \ln^{-2} n$ . Para  $\gamma = -1$ , a lei limite  $H_0(x)$  será a melhor aproximação para a distribuição do tempo de vida do sistema.

### 3.4 Estudo de Simulação

O resultado estabelecido no teorema (3.2) para sistemas com estrutura paralelo-série, sugere-nos que mediante a validade de uma condição assintótica que envolve o número  $n$  de subsistemas em paralelo e o número de componentes em série,  $l_n$ , e caso a *f.d.*  $F$  comum às variáveis independentes  $X_{ij}$  em (3.22), seja atraída para uma min-estável,  $H_\gamma$ , para algum  $\gamma \neq -1$ , então existem constantes normalizadoras apropriadas,  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n \in \mathbb{R}$ , para as quais, a sequência de funções de distribuição,  $F_n$ , representando o tempo total de vida  $X$  neste tipo de sistemas, está mais próxima da chamada sequência *penultimate* de distribuições max-estáveis,  $G_{\theta_n}(x)$ , com  $\theta_n \neq 0 = \theta$  e  $\theta_n \rightarrow 0$ , do que a própria lei limite gumbel,  $G_0(x)$ , onde, recorde-se mais uma vez

$$X = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \min_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij} \right), \quad (3.22)$$

$$F_n(x) = [H_n(x)]^n = \left[ 1 - (1 - F(x))^{l_n} \right]^n, \quad (3.23)$$

e o parâmetro de forma *penultimate*,  $\theta_n$ , é tal que,

$$\theta_n = -(\gamma + 1)(\ln n)^{-1} + O(n^{-1}). \quad (3.24)$$

Ora, isto significa, que quando tomamos  $n$  fixo e suficientemente grande, consoante se tenha  $\gamma > -1$  ou  $\gamma < -1$ , assim se obtêm distribuições de Weibull ou distribuições de Fréchet próximas de  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$ . Para  $\gamma = -1$ , vimos ainda pelo referido resultado e nas condições do teorema (2.1), que a melhor aproximação para  $F_n(\alpha_n x + \beta_n)$  é a própria lei limite, a Gumbel  $G_0(x)$ ,

facto este consolidado com o estudo de simulação realizado no capítulo 2, aquando do teste de ajustamento à distribuição de Gumbel.

Ora nesta secção efectuamos um novo estudo de simulação, onde numa primeira etapa, descrita na secção 3.4.1, se pretende testar a condição de valores extremos para a distribuição  $F_n$ , i.e., testar se a função  $H_n(x)$  em (3.23), para um determinado valor de  $l_n$ , pertence ao domínio de atracção de uma lei de extremos para máximos,  $G_\theta(x)$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , quando o número de componentes é finito.

A segunda etapa, descrita na secção 3.4.2, permite-nos inferir se as estimativas para o parâmetro de forma  $\theta$ , obtidas pela metodologia clássica de estimação da máxima verosimilhança na secção anterior, estão mais próximas do parâmetro *penultimate*,  $\theta_n$ , ou pelo contrário, estão mais próximas do parâmetro *ultimate* ( $\theta = 0$ ). Além disso, queremos apurar mais uma vez se os resultados são afectados pela forma como varia o número de subsistemas em paralelo,  $n$ , e o número de componentes em série,  $l_n$ .

No que se segue, iremos supor que  $X_{(i)}$ , é a  $(r - i + 1)$ -ésima estatística ordinal associada a uma *a.a.* de dimensão  $r$ , do tempo de vida  $X$  em (3.22), com função de distribuição  $F_n(x)$ .

### 3.4.1 Teste à Condição de Valores Extremos. Estatísticas de teste

Recorde-se novamente que uma função de distribuição  $F$  pertence ao domínio de atracção de uma max-estável  $G_\theta$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , se existirem sucessões  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ , verificando a condição de valores extremos

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_\theta(x), \quad (3.25)$$

onde  $G_\theta$  é a distribuição generalizada de valores extremos definida como em (1.5). Num artigo de 1984, De Haan [13], mostrou que a condição anterior é equivalente a ter-se, para  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a_0(t)} = \begin{cases} \frac{x^\theta - 1}{\theta}, & \theta \neq 0 \\ \ln x, & \theta = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $a_0(\cdot)$  é uma função positiva e  $U$  é a inversa generalizada de  $(1 - F)^{-1}$ , ou seja,

$$U(t) := \left( \frac{1}{1 - F} \right)^\leftarrow (t) = \inf \left\{ s : \frac{1}{1 - F(s)} \geq t \right\},$$

também conhecida por *função quantil de cauda empírica*. A partir da condição (3.26), De Haan e Stadtmüller [15] deduziram a seguinte condição de 2ª or-

dem, para  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{U(tx) - U(t)}{a_0(t)} - \frac{x^\theta - 1}{\theta}}{A_0(t)} := \psi_{\theta, \rho}(x), \quad (3.27)$$

onde  $\rho \leq 0$ ,  $\psi_{\theta, \rho}(x)$  é uma função que não é múltipla de  $(x^\theta - 1)/\theta$ ,  $A_0(\cdot)$  é uma função de sinal constante verificando  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A_0(t) = 0$  e cujo valor absoluto,  $|A_0(\cdot)|$ , é função de variação regular em  $+\infty$  com índice finito  $\rho$ , tendo-se ainda

$$\psi_{\theta, \rho}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\theta+\rho} - 1}{\theta + \rho}, & \text{se } \rho < 0 \text{ e } \theta + \rho \neq 0 \\ \ln x & \text{se } \rho < 0 \text{ e } \theta + \rho = 0 \\ \frac{1}{\theta} x^\theta \ln x & \text{se } \rho = 0 \neq \theta \\ \frac{1}{2} \ln^2 x & \text{se } \rho = 0 = \theta, \end{cases}$$

para  $a_0(\cdot)$  e  $A_0(\cdot)$ , escolhidas de forma conveniente. Posteriormente, Draisma *et al.* [18], deduziram também a partir de (3.26), uma outra condição de 2ª ordem,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln U(tx) - \ln U(t)}{a_0(t)/U(t)} - \frac{x^{\theta_-} - 1}{\theta_-}}{A_*(t)} := \psi_{\theta, \rho^*}^*(x), \quad (3.28)$$

para todo  $x > 0$ , onde  $\rho^* \leq 0$ ,  $\theta_- := \min(\theta, 0)$ ,  $A_*(\cdot)$  é uma função de sinal constante tal que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A_*(t) = 0$  e

$$\psi_{\theta, \rho^*}^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^*} \left( \frac{x^{\theta_- + \rho^*} - 1}{\theta_- + \rho^*} - \frac{x^{\theta_-} - 1}{\theta_-} \right), & \text{se } \rho^* \neq 0 \\ \frac{1}{\gamma} \left( x^\theta \ln x - \frac{x^\theta - 1}{\theta} \right) & \text{se } \rho^* = 0 \text{ e } \theta < 0 \\ \frac{1}{2} \ln^2 x & \text{se } \rho^* = 0 \text{ e } \theta \geq 0, \end{cases}$$

para uma escolha apropriada de  $a_0(\cdot)$  e  $A_*(\cdot)$ . Note-se que qualquer uma destas condições de 2ª ordem, são suficientes para garantirem a condição de valores extremos em (3.26), quando  $x > 0$ .

Mediante a validade da condição (3.28), em Dietrich *et al.* [17] é desenvolvida a primeira estatística de teste com a respectiva distribuição limite, para a condição de valores extremos:

$$E_{m_r, r} = m_r \int_0^1 \left( \frac{\ln X_{([m_r t])} - \ln X_{(m_r)}}{\widehat{\theta}_+} - \frac{t^{\theta_-} - 1}{\widehat{\theta}_-} (1 - \widehat{\theta}_-)^2 \right) t^\eta dt,$$

onde,  $r$  é a dimensão da amostra,  $\{m_r\}$  é uma sucessão de inteiros tal que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} m_r = +\infty$  e  $\lim_{r \rightarrow +\infty} (m_r)/r = 0$ ,  $\theta_+ = \max\{0, \theta\}$  e  $t^\eta$ , com  $\eta > 0$ , é

um factor de ponderação usado para garantir que o integral é finito. Esta estatística baseia-se nas estatísticas ordinais e nos estimadores,  $\widehat{\theta}_-$  e  $\widehat{\theta}_+$ , que foram fixados por Dietrich *et al.* [17], como sendo os estimadores dos momentos de  $\theta_-$  e  $\theta_+$ , obtidos por Dekkers *et al.* [16]. Mais concretamente, para  $m_r < r$  e  $j = 1, 2$ , definindo

$$M_{m_r, r}^{(j)} = \frac{1}{m_r} \sum_{i=0}^{m_r} (\ln X_{(i)} - \ln X_{(m_r)})^j,$$

então os estimadores de  $\theta_-$  e  $\theta_+$ , são dados respectivamente por

$$\widehat{\theta}_- = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\left( M_{m_r, r}^{(1)} \right)^2}{M_{m_r, r}^{(2)}} \right)^{-1}$$

e

$$\widehat{\theta}_+ = M_{m_r, r}^{(1)}.$$

Assumindo a validade da condição de 2ª ordem em (3.27), Drees *et al.* [19], desenvolveram uma outra estatística de teste para a condição de valores extremos, restrita a  $\theta > -1/2$ ,

$$T_{m_r, r} = m_r \int_0^1 \left( \frac{r}{m_r} \overline{F}_r \left( \widehat{a}_{r/m_r} \frac{t^{-\widehat{\theta}} - 1}{\widehat{\theta}} + \widehat{b}_{r/m_r} \right) - t \right)^2 t^{\eta-2} dt,$$

para  $\eta > 0$  e onde  $\overline{F}_r = 1 - F_r$ , com  $F_r$  a função de distribuição empírica associada à amostra de dimensão  $r$ . Como estimadores de  $\theta$ ,  $a_{r/m_r}$  e  $b_{r/m_r}$ , Drees *et al.* [19] propõem os estimadores de máxima verosimilhança para estes parâmetros do modelo Pareto Generalizado, ou seja,  $\widehat{\theta}$ ,  $\widehat{a}_{r/m_r} := \widehat{\sigma}_r$  e  $\widehat{b}_{r/m_r} := X_{(m_r)}$ . Note-se que na prática,  $m_r$  representa o número de estatísticas ordinais de topo.

Num outro artigo da autoria de Hüsler e Li [29], foram construídas tabelas com os valores críticos para as distribuições assintóticas das duas estatísticas de teste anteriormente descritas, investigando-se em particular, que valores de  $\eta$  devem ser considerados para cada uma destas estatísticas de teste. Nesse mesmo artigo, foi elaborado um extenso estudo de simulação com o propósito de se analisar o erro do tipo I e a potência de teste, obtidos quando a dimensão da amostra é finita e proveniente de um grande leque de distribuições. O referido estudo permitiu àqueles autores sugerir que em aplicações práticas seja utilizado o seguinte método:

1. Estimar o índice de valor extremo,  $\theta$ , utilizando o estimador dos momentos e o estimador de máxima verosimilhança;

2. Se ambas as estimativas forem superiores a 0.05, i.e., se suspeitar que o valor de  $\theta$  é positivo, então deve ser usada a estatística de teste  $T_{m_r, r}$ , com  $\eta = 1$ . Caso contrário deve-se usar a estatística de teste  $E_{m_r, r}$ , com  $\eta = 2$ .

### 3.4.2 Resultados do Estudo de Simulação

Neste estudo foram utilizadas as mesmas amostras aleatórias da *v.a.* tempo total de vida,  $X$ , geradas aquando do estudo de simulação realizado no capítulo 2. Recorde-se que no referido estudo, para se obter uma *a.a.* da *v.a.*  $X$ , foram simuladas *a.a.'s* das *v.a.'s*  $X_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, l_n$ , considerando para a distribuição comum  $F$ , os modelos paramétricos  $GEV^{\min}$  e  $GPD^{\min}$ , a menos de localização e de escala, definidos respectivamente em (2.34) e (2.33), e, de modo que a *f.d.*  $F$  pertencesse ao domínio de atracção de uma lei estável para mínimos,  $H_\gamma$ , com o parâmetro de forma para mínimos,  $\gamma$ , a tomar os valores:  $-2, -1.5, -1, -0.5$  e  $1$ . Voltamos a relembrar que o número de subsistemas em paralelo considerados neste estudo,  $n$ , foram os valores de 20, 50 e 100, enquanto que, para o número de componentes em série,  $l_n$ , tomámos os valores 2, 10, 20, 50 e 100. Recorde-se ainda que foram geradas amostras de dimensão  $r = 500$  da *v.a.*  $X$ , tendo o procedimento sido replicado 1000 vezes.

O teste para a condição de extremos foi realizado aos níveis de significância  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.05$  e  $\alpha = 0.01$ , onde o número de estatísticas ordinais de topo consideradas foram  $m_r = 15, 25$  e  $50$  (i.e.,  $m_r = 0.03r, 0.05r$  e  $0.1r$ ). Para testar a hipótese nula  $\mathcal{H}_0 : H_n(x) \in \mathcal{D}(G_\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  ao nível de significância  $\alpha$ , efectuámos os seguintes passos:

1. Estimar o valor do índice de valores extremos,  $\theta$ , utilizando o método dos momentos e o estimador de máxima verosimilhança;
2. Se ambas as estimativas são superiores a 0.05, calcular o valor da estatística de teste  $T_{m_r, r}$ , com  $\eta = 1$ ; caso contrário usar a estatística de teste  $E_{m_r, r}$ , com  $\eta = 2$ ;
3. Determinar o valor crítico desejado, utilizando os valores críticos da estatística de teste seleccionada (ver tabela de valores críticos em Hüsler e Li [29]; caso o valor crítico para a estimativa de  $\theta$ , não esteja tabelada, usar interpolação linear para o determinar);
4. Se o valor da estatística de teste for superior ao valor crítico encontrado, rejeitar a hipótese da distribuição estar no domínio de atracção de uma  $G_\theta$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Nas tabelas 3.1 a 3.14, estão representadas as probabilidades de rejeição empíricas, ou seja, a frequência relativa das amostras para as quais a hipótese nula foi rejeitada e que correspondem ao erro do tipo I estimado, uma vez que estamos a testar a condição de valores extremos. Analisando as referidas tabelas, constatamos que de uma forma geral, os erros de tipo I estimados têm valores muito próximos dos níveis de significância considerados,  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.05$  e  $\alpha = 0.01$ , pelo que a hipótese da função de distribuição de tempo de vida de cada sistema paralelo-série simulado, estar próxima de uma max-estável,  $G_\theta$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , não é rejeitada. Além disso os resultados obtidos não revelam nenhum padrão de comportamento relativamente à forma como variam os valores de  $n$  e de  $l_n$ .

$GEV_{-2}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.075	0.083	0.089	0.035	0.042	0.047	0.004	0.005	0.011
	50	0.087	0.091	0.103	0.045	0.044	0.037	0.005	0.010	0.008
	100	0.094	0.083	0.079	0.049	0.041	0.036	0.007	0.010	0.012
10	20	0.086	0.076	0.087	0.044	0.038	0.045	0.008	0.007	0.011
	50	0.101	0.098	0.095	0.045	0.049	0.045	0.007	0.008	0.010
	100	0.090	0.075	0.094	0.041	0.040	0.055	0.008	0.003	0.009
20	20	0.090	0.089	0.071	0.041	0.046	0.040	0.008	0.009	0.004
	50	0.078	0.082	0.091	0.032	0.033	0.043	0.003	0.008	0.005
	100	0.068	0.086	0.094	0.030	0.036	0.038	0.010	0.005	0.009
50	20	0.088	0.095	0.079	0.042	0.043	0.048	0.007	0.007	0.016
	50	0.101	0.092	0.100	0.042	0.053	0.043	0.010	0.012	0.009
	100	0.081	0.086	0.092	0.042	0.031	0.043	0.008	0.003	0.003
100	20	0.090	0.098	0.107	0.045	0.042	0.057	0.005	0.007	0.015
	50	0.077	0.089	0.107	0.043	0.044	0.053	0.007	0.005	0.009
	100	0.091	0.102	0.090	0.050	0.047	0.047	0.006	0.007	0.008

Tabela 3.1: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos



$GEV_{-1.5}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.077	0.095	0.095	0.039	0.051	0.039	0.009	0.011	0.010
	50	0.090	0.083	0.092	0.049	0.033	0.041	0.014	0.008	0.007
	100	0.074	0.094	0.083	0.033	0.047	0.045	0.007	0.007	0.011
10	20	0.080	0.090	0.097	0.033	0.040	0.051	0.006	0.006	0.009
	50	0.102	0.078	0.082	0.046	0.042	0.043	0.009	0.005	0.008
	100	0.095	0.081	0.084	0.052	0.040	0.047	0.006	0.007	0.008
20	20	0.098	0.075	0.097	0.037	0.036	0.046	0.008	0.008	0.006
	50	0.093	0.085	0.098	0.046	0.040	0.046	0.007	0.005	0.010
	100	0.084	0.091	0.096	0.028	0.044	0.036	0.007	0.008	0.009
50	20	0.079	0.081	0.092	0.039	0.040	0.037	0.008	0.004	0.006
	50	0.083	0.092	0.082	0.050	0.039	0.041	0.005	0.008	0.006
	100	0.096	0.092	0.100	0.047	0.044	0.049	0.009	0.004	0.008
100	20	0.094	0.095	0.095	0.045	0.046	0.043	0.007	0.010	0.005
	50	0.085	0.081	0.087	0.049	0.034	0.045	0.011	0.004	0.011
	100	0.093	0.093	0.089	0.037	0.046	0.046	0.006	0.006	0.009

Tabela 3.2: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

$GEV_{-1}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.097	0.087	0.078	0.043	0.036	0.037	0.003	0.010	0.005
	50	0.097	0.093	0.084	0.045	0.040	0.041	0.008	0.005	0.006
	100	0.091	0.082	0.089	0.039	0.038	0.041	0.005	0.006	0.008
10	20	0.082	0.080	0.107	0.036	0.039	0.049	0.007	0.006	0.010
	50	0.086	0.085	0.085	0.036	0.040	0.039	0.008	0.010	0.006
	100	0.094	0.062	0.090	0.040	0.032	0.047	0.007	0.010	0.011
20	20	0.097	0.089	0.106	0.048	0.035	0.049	0.009	0.006	0.005
	50	0.082	0.087	0.092	0.037	0.050	0.050	0.008	0.011	0.011
	100	0.084	0.077	0.100	0.039	0.043	0.051	0.004	0.005	0.009
50	20	0.091	0.091	0.107	0.043	0.049	0.048	0.006	0.013	0.005
	50	0.082	0.109	0.088	0.035	0.043	0.048	0.009	0.009	0.012
	100	0.094	0.087	0.091	0.035	0.040	0.052	0.003	0.005	0.006
100	20	0.081	0.094	0.099	0.042	0.047	0.055	0.011	0.012	0.015
	50	0.087	0.088	0.117	0.037	0.041	0.057	0.007	0.008	0.011
	100	0.090	0.094	0.097	0.047	0.047	0.045	0.009	0.009	0.011

Tabela 3.3: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

$GEV_{-0.5}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.090	0.098	0.100	0.045	0.045	0.055	0.012	0.009	0.007
	50	0.069	0.097	0.099	0.031	0.046	0.052	0.004	0.005	0.016
	100	0.075	0.088	0.105	0.031	0.039	0.048	0.008	0.008	0.007
10	20	0.092	0.080	0.088	0.041	0.041	0.047	0.006	0.005	0.009
	50	0.099	0.088	0.101	0.056	0.045	0.045	0.010	0.017	0.012
	100	0.079	0.088	0.103	0.033	0.043	0.051	0.002	0.008	0.007
20	20	0.081	0.094	0.085	0.041	0.054	0.048	0.006	0.010	0.011
	50	0.091	0.079	0.101	0.040	0.033	0.045	0.013	0.008	0.012
	100	0.101	0.088	0.116	0.050	0.039	0.055	0.009	0.005	0.010
50	20	0.085	0.083	0.102	0.039	0.047	0.057	0.011	0.008	0.011
	50	0.086	0.102	0.091	0.046	0.051	0.057	0.009	0.010	0.013
	100	0.090	0.096	0.081	0.039	0.045	0.040	0.009	0.011	0.009
100	20	0.075	0.093	0.117	0.037	0.048	0.061	0.006	0.011	0.012
	50	0.100	0.106	0.099	0.053	0.050	0.050	0.008	0.009	0.010
	100	0.098	0.080	0.093	0.043	0.038	0.040	0.009	0.005	0.011

Tabela 3.4: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

$GEV_0^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.091	0.090	0.118	0.060	0.046	0.060	0.010	0.006	0.007
	50	0.084	0.091	0.100	0.044	0.042	0.047	0.009	0.013	0.006
	100	0.091	0.088	0.105	0.049	0.048	0.057	0.005	0.008	0.005
10	20	0.093	0.098	0.092	0.048	0.036	0.044	0.011	0.008	0.008
	50	0.105	0.083	0.091	0.058	0.044	0.040	0.010	0.009	0.011
	100	0.087	0.101	0.118	0.047	0.049	0.065	0.012	0.008	0.009
20	20	0.092	0.103	0.099	0.040	0.051	0.042	0.011	0.009	0.014
	50	0.093	0.085	0.102	0.046	0.040	0.047	0.010	0.006	0.016
	100	0.088	0.081	0.103	0.037	0.032	0.050	0.001	0.009	0.012
50	20	0.100	0.090	0.114	0.050	0.046	0.062	0.008	0.007	0.022
	50	0.097	0.082	0.097	0.040	0.033	0.046	0.005	0.008	0.007
	100	0.091	0.102	0.102	0.050	0.055	0.045	0.009	0.011	0.012
100	20	0.098	0.088	0.083	0.051	0.046	0.036	0.009	0.007	0.008
	50	0.105	0.105	0.106	0.048	0.051	0.050	0.011	0.016	0.006
	100	0.102	0.102	0.091	0.049	0.046	0.049	0.010	0.013	0.011

Tabela 3.5: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

$GEV_{0.5}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.101	0.083	0.093	0.050	0.043	0.051	0.012	0.007	0.006
	50	0.107	0.096	0.098	0.055	0.051	0.048	0.009	0.010	0.016
	100	0.099	0.083	0.083	0.051	0.045	0.045	0.008	0.009	0.015
10	20	0.095	0.105	0.091	0.040	0.056	0.043	0.008	0.009	0.009
	50	0.099	0.107	0.105	0.048	0.049	0.051	0.007	0.008	0.011
	100	0.076	0.099	0.082	0.040	0.049	0.045	0.010	0.010	0.008
20	20	0.082	0.108	0.117	0.033	0.050	0.056	0.007	0.008	0.010
	50	0.088	0.098	0.089	0.043	0.054	0.046	0.007	0.014	0.009
	100	0.077	0.097	0.091	0.037	0.043	0.039	0.005	0.005	0.013
50	20	0.102	0.096	0.114	0.053	0.046	0.058	0.012	0.008	0.010
	50	0.087	0.099	0.099	0.048	0.050	0.047	0.008	0.013	0.010
	100	0.085	0.102	0.115	0.046	0.053	0.062	0.010	0.011	0.006
100	20	0.079	0.100	0.102	0.040	0.044	0.060	0.011	0.006	0.012
	50	0.115	0.103	0.089	0.061	0.055	0.048	0.014	0.007	0.006
	100	0.092	0.099	0.085	0.041	0.050	0.046	0.006	0.008	0.006

Tabela 3.6: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

$GEV_1^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.088	0.106	0.083	0.049	0.053	0.038	0.008	0.010	0.010
	50	0.091	0.096	0.093	0.058	0.048	0.050	0.014	0.012	0.003
	100	0.093	0.095	0.094	0.044	0.048	0.053	0.007	0.010	0.008
10	20	0.105	0.083	0.094	0.052	0.040	0.054	0.011	0.005	0.009
	50	0.104	0.089	0.090	0.056	0.050	0.049	0.012	0.007	0.008
	100	0.098	0.105	0.123	0.040	0.052	0.052	0.010	0.008	0.015
20	20	0.095	0.096	0.119	0.048	0.042	0.063	0.011	0.007	0.016
	50	0.090	0.089	0.101	0.039	0.041	0.060	0.009	0.007	0.011
	100	0.085	0.090	0.097	0.040	0.042	0.052	0.007	0.009	0.011
50	20	0.089	0.124	0.105	0.039	0.066	0.053	0.005	0.011	0.014
	50	0.115	0.111	0.125	0.064	0.062	0.067	0.014	0.014	0.010
	100	0.099	0.079	0.095	0.052	0.038	0.042	0.014	0.012	0.010
100	20	0.107	0.101	0.101	0.053	0.047	0.055	0.010	0.005	0.014
	50	0.092	0.099	0.094	0.048	0.050	0.047	0.010	0.007	0.011
	100	0.083	0.105	0.107	0.038	0.054	0.065	0.008	0.014	0.019

Tabela 3.7: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GEV para mínimos

GPD $_{-2}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.117	0.082	0.106	0.061	0.041	0.055	0.014	0.004	0.008
	50	0.130	0.101	0.114	0.061	0.053	0.053	0.010	0.013	0.010
	100	0.098	0.097	0.090	0.049	0.056	0.038	0.009	0.015	0.009
10	20	0.097	0.089	0.113	0.047	0.045	0.056	0.012	0.009	0.007
	50	0.095	0.101	0.113	0.055	0.048	0.047	0.012	0.007	0.004
	100	0.086	0.091	0.091	0.039	0.043	0.048	0.007	0.007	0.007
20	20	0.087	0.100	0.091	0.039	0.051	0.042	0.006	0.008	0.006
	50	0.101	0.081	0.100	0.052	0.040	0.045	0.009	0.009	0.007
	100	0.090	0.082	0.082	0.041	0.043	0.047	0.004	0.011	0.013
50	20	0.093	0.086	0.088	0.044	0.041	0.042	0.005	0.004	0.008
	50	0.082	0.083	0.099	0.036	0.030	0.048	0.008	0.002	0.007
	100	0.085	0.103	0.088	0.043	0.055	0.040	0.010	0.012	0.007
100	20	0.088	0.100	0.108	0.041	0.051	0.051	0.007	0.012	0.006
	50	0.091	0.087	0.099	0.045	0.044	0.052	0.006	0.012	0.009
	100	0.080	0.083	0.093	0.036	0.036	0.042	0.003	0.001	0.009

Tabela 3.8: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD $_{-1.5}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.104	0.094	0.096	0.052	0.053	0.046	0.006	0.011	0.009
	50	0.100	0.102	0.095	0.045	0.050	0.046	0.006	0.008	0.008
	100	0.095	0.105	0.097	0.052	0.064	0.039	0.012	0.011	0.007
10	20	0.081	0.087	0.083	0.037	0.042	0.033	0.009	0.007	0.008
	50	0.100	0.119	0.101	0.046	0.067	0.046	0.007	0.012	0.013
	100	0.085	0.120	0.102	0.045	0.060	0.048	0.009	0.011	0.006
20	20	0.105	0.100	0.095	0.048	0.049	0.045	0.009	0.008	0.011
	50	0.082	0.073	0.093	0.045	0.025	0.040	0.008	0.006	0.005
	100	0.104	0.090	0.093	0.048	0.044	0.049	0.006	0.012	0.007
50	20	0.093	0.077	0.090	0.041	0.031	0.046	0.007	0.005	0.004
	50	0.078	0.087	0.110	0.035	0.049	0.055	0.006	0.011	0.004
	100	0.089	0.098	0.084	0.043	0.048	0.043	0.009	0.008	0.008
100	20	0.095	0.082	0.083	0.037	0.037	0.037	0.008	0.003	0.010
	50	0.090	0.089	0.100	0.041	0.048	0.049	0.006	0.008	0.009
	100	0.107	0.092	0.094	0.060	0.044	0.044	0.011	0.010	0.009

Tabela 3.9: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD $_{-1}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.104	0.086	0.106	0.053	0.042	0.042	0.010	0.012	0.004
	50	0.108	0.103	0.099	0.053	0.056	0.050	0.012	0.011	0.006
	100	0.110	0.110	0.096	0.058	0.062	0.040	0.010	0.010	0.006
10	20	0.101	0.107	0.083	0.053	0.050	0.039	0.009	0.006	0.006
	50	0.101	0.116	0.100	0.047	0.066	0.043	0.010	0.008	0.008
	100	0.086	0.092	0.092	0.044	0.047	0.039	0.010	0.010	0.011
20	20	0.083	0.095	0.089	0.042	0.051	0.045	0.009	0.007	0.009
	50	0.088	0.091	0.088	0.047	0.045	0.047	0.005	0.012	0.010
	100	0.096	0.089	0.104	0.056	0.037	0.055	0.008	0.006	0.015
50	20	0.095	0.105	0.102	0.042	0.055	0.044	0.006	0.008	0.008
	50	0.089	0.104	0.096	0.033	0.056	0.037	0.006	0.009	0.006
	100	0.097	0.084	0.118	0.049	0.037	0.057	0.006	0.008	0.009
100	20	0.100	0.097	0.100	0.041	0.039	0.050	0.008	0.012	0.016
	50	0.091	0.078	0.088	0.043	0.031	0.037	0.006	0.005	0.005
	100	0.094	0.092	0.093	0.046	0.045	0.046	0.009	0.012	0.007

Tabela 3.10: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD $_{-0.5}^{\min}$		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.106	0.098	0.098	0.054	0.048	0.054	0.013	0.009	0.010
	50	0.114	0.086	0.106	0.051	0.045	0.046	0.009	0.004	0.012
	100	0.112	0.108	0.099	0.059	0.056	0.047	0.011	0.009	0.013
10	20	0.089	0.093	0.090	0.042	0.050	0.041	0.010	0.009	0.004
	50	0.094	0.107	0.102	0.047	0.060	0.045	0.007	0.010	0.006
	100	0.078	0.088	0.105	0.040	0.043	0.059	0.008	0.007	0.015
20	20	0.101	0.091	0.083	0.052	0.045	0.040	0.004	0.010	0.010
	50	0.093	0.089	0.095	0.043	0.043	0.045	0.008	0.010	0.006
	100	0.088	0.098	0.097	0.046	0.053	0.049	0.006	0.013	0.006
50	20	0.085	0.091	0.108	0.047	0.049	0.056	0.010	0.009	0.009
	50	0.077	0.093	0.095	0.042	0.048	0.048	0.010	0.009	0.006
	100	0.089	0.094	0.095	0.033	0.045	0.041	0.002	0.009	0.011
100	20	0.088	0.102	0.102	0.043	0.050	0.057	0.009	0.007	0.015
	50	0.099	0.094	0.093	0.053	0.044	0.056	0.010	0.010	0.009
	100	0.103	0.082	0.088	0.047	0.037	0.040	0.012	0.009	0.007

Tabela 3.11: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sub>0</sub> <sup>min</sup>		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.097	0.106	0.102	0.043	0.054	0.047	0.010	0.010	0.014
	50	0.103	0.100	0.112	0.045	0.048	0.060	0.012	0.008	0.012
	100	0.112	0.125	0.112	0.058	0.060	0.066	0.012	0.010	0.008
10	20	0.091	0.093	0.106	0.051	0.043	0.051	0.010	0.013	0.008
	50	0.093	0.101	0.091	0.047	0.044	0.050	0.008	0.010	0.005
	100	0.087	0.095	0.100	0.048	0.051	0.055	0.009	0.012	0.012
20	20	0.078	0.090	0.089	0.033	0.042	0.051	0.009	0.008	0.015
	50	0.080	0.079	0.100	0.039	0.030	0.055	0.006	0.005	0.014
	100	0.080	0.099	0.098	0.035	0.049	0.052	0.009	0.013	0.013
50	20	0.095	0.092	0.093	0.042	0.058	0.051	0.005	0.011	0.015
	50	0.092	0.084	0.077	0.035	0.047	0.033	0.006	0.008	0.007
	100	0.081	0.079	0.098	0.031	0.042	0.052	0.003	0.003	0.010
100	20	0.099	0.082	0.100	0.045	0.039	0.050	0.008	0.012	0.008
	50	0.092	0.082	0.103	0.049	0.043	0.046	0.010	0.006	0.005
	100	0.095	0.085	0.092	0.050	0.051	0.052	0.012	0.009	0.011

Tabela 3.12: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sub>0.5</sub> <sup>min</sup>		$\alpha=0.1$			$\alpha=0.05$			$\alpha=0.01$		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0.112	0.103	0.087	0.055	0.050	0.045	0.011	0.014	0.005
	50	0.102	0.106	0.096	0.054	0.052	0.041	0.011	0.008	0.007
	100	0.118	0.108	0.113	0.054	0.051	0.057	0.010	0.010	0.008
10	20	0.095	0.104	0.112	0.038	0.046	0.062	0.006	0.008	0.010
	50	0.101	0.090	0.093	0.052	0.046	0.051	0.010	0.009	0.008
	100	0.083	0.116	0.091	0.047	0.055	0.040	0.010	0.011	0.013
20	20	0.104	0.093	0.111	0.050	0.041	0.059	0.008	0.011	0.016
	50	0.097	0.093	0.101	0.037	0.047	0.052	0.011	0.008	0.012
	100	0.087	0.082	0.076	0.043	0.044	0.039	0.007	0.002	0.010
50	20	0.080	0.086	0.112	0.043	0.039	0.057	0.006	0.005	0.014
	50	0.096	0.102	0.110	0.048	0.050	0.051	0.013	0.008	0.011
	100	0.092	0.103	0.095	0.047	0.048	0.053	0.010	0.006	0.013
100	20	0.096	0.117	0.104	0.043	0.053	0.051	0.005	0.012	0.010
	50	0.106	0.098	0.114	0.051	0.052	0.053	0.014	0.011	0.015
	100	0.086	0.090	0.104	0.035	0.040	0.056	0.004	0.008	0.012

Tabela 3.13: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição GPD para mínimos

GPD <sub>1</sub> <sup>min</sup>		α=0.1			α=0.05			α=0.01		
$l_n$	$n$	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50	k=15	k=25	k=50
2	20	0,122	0,098	0,105	0,063	0,044	0,047	0,012	0,011	0,009
	50	0,107	0,102	0,096	0,051	0,052	0,040	0,012	0,017	0,009
	100	0,100	0,089	0,095	0,049	0,046	0,059	0,016	0,006	0,019
10	20	0,094	0,101	0,117	0,039	0,048	0,050	0,008	0,011	0,010
	50	0,089	0,104	0,112	0,048	0,054	0,059	0,006	0,013	0,009
	100	0,092	0,088	0,107	0,044	0,047	0,054	0,007	0,008	0,010
20	20	0,082	0,097	0,097	0,042	0,052	0,049	0,010	0,014	0,006
	50	0,101	0,109	0,098	0,039	0,059	0,053	0,005	0,013	0,016
	100	0,083	0,085	0,102	0,038	0,032	0,046	0,003	0,007	0,007
50	20	0,098	0,101	0,122	0,052	0,051	0,064	0,014	0,012	0,013
	50	0,120	0,100	0,108	0,061	0,061	0,052	0,006	0,013	0,012
	100	0,097	0,108	0,095	0,043	0,055	0,050	0,004	0,005	0,011
100	20	0,125	0,112	0,096	0,060	0,056	0,055	0,011	0,009	0,012
	50	0,099	0,088	0,090	0,047	0,038	0,053	0,007	0,009	0,013
	100	0,079	0,100	0,109	0,043	0,045	0,059	0,011	0,011	0,014

Tabela 3.14: Erros tipo I estimados para os tempos de vida com distribuição para mínimos

### 3.4.3 Parâmetro *Penultimate* vs Parâmetro *Ultimate*

Depois de sabermos que para os valores de  $n$  e  $l_n$  considerados, a distribuição  $H_n(\cdot)$  em (3.23), está no domínio de atracção de uma  $G_\theta$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , estamos agora interessados em determinar se, quando estimamos o parâmetro  $\theta$ , as suas estimativas estão mais próximas do parâmetro *penultimate*, que tomaremos como

$$\theta_n = -(\gamma + 1) / \ln n, \tag{3.29}$$

ou do parâmetro *ultimate*  $\theta = 0$ .

Neste estudo de simulação, utilizámos as mesmas amostras aleatórias de dimensão  $r = 500$  da *v.a.*  $X$ , onde o procedimento foi replicado  $1000 = R$  vezes. Note-se que na escolha dos valores de  $\gamma$  e de  $n$  considerados em todos os estudos de simulação apresentados neste trabalho, teve-se em conta o facto do parâmetro *penultimate*,  $\theta_n$ , ter que tomar valores superiores a  $-0.5$ , para se poder usar o estimador da máxima verosimilhança.

Na estimação do parâmetro  $\theta$  foi utilizada a função *gevfit* do package Matlab, que considera o estimador da máxima verosimilhança no caso da distribuição GEV. Por outro lado, para analisar os resultados obtidos na estimação do parâmetro  $\theta$ , optámos por utilizar o erro quadrático médio

definido por,

$$\text{EQM}_k = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - \theta_k)^2, \quad k = 1, 2$$

e o viés definido por,

$$\text{Viés}_k = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \hat{\theta}_i - \theta_k, \quad k = 1, 2,$$

onde,  $\hat{\theta}_i$  é a  $i$ -ésima estimativa do parâmetro  $\theta$ ,  $i = 1, \dots, R$ ,  $R$  é o número de réplicas,  $\theta_1 = \theta_n$  e  $\theta_2 = 0$ . Antes de passarmos à análise dos resultados obtidos, é conveniente observar como o valor do parâmetro *penultimate*  $\theta_n$ , é afectado quer pela variação do parâmetro  $\gamma$  associado à função de distribuição de  $\min X_{ij}$ , quer pelo aumento do número  $n$  de subsistemas em paralelo. A tabela seguinte contém os valores de  $\theta_n$  para os valores de  $\gamma$  e  $n$  utilizados neste estudo.

		$\gamma$						
$n$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	
10	0,3338	0,1669	0	0,1669	-0,3338	-0,5007	-0,6676	
50	0,2556	0,1278	0	-0,1278	-0,2556	-0,3834	-0,5112	
100	0,2171	0,1086	0	-0,1086	-0,2171	-0,3257	-0,4343	

Tabela 3.15: Valores calculados para o parâmetro *penultimate*

Nas tabelas 3.16 a 3.23 são apresentados os valores do erro quadrático médio e do viés obtidos para as estimativas de  $\hat{\theta}$  relativamente aos parâmetros *penultimate*  $\theta_n$  e *ultimate* 0, enquadrados no modelo  $\text{GEV}^{\min}$  (tabelas de 3.16 a 3.19) e no modelo  $\text{GPD}^{\min}$  (tabelas de 3.20 a 3.23). Da observação dos resultados obtidos retiramos as seguintes ilações:

1. Para tempos de vida das componentes com função de distribuição GEV de mínimos:
  - Constata-se que o  $\text{EQM}_1$  e o  $\text{Viés}_1$  são significativamente menores do que o  $\text{EQM}_2$  e o  $\text{Viés}_2$ , para quase todos os valores de gama considerados, confirmando-se a existência de modelos Weibull e modelos Fréchet como uma boa escolha na modelização da distribuição do tempo total de vida dos sistemas em causa.



- A exceção ao ponto anterior surge quando  $\gamma = -1$ , já que neste caso, pela própria expressão de  $\theta_n$  em (3.29) utilizada neste estudo, resulta que  $\theta_n = \theta = 0$ , pelo que só faz sentido tomar os valores do EQM<sub>2</sub> e do Viés<sub>2</sub>. Como seria de esperar, obtiveram-se os menores valores para o EQM<sub>2</sub> e o Viés<sub>2</sub> comparativamente a outros valores do parâmetro  $\gamma$ , confirmando-se assim, tal como já tínhamos verificado por ocasião do teste de ajustamento à distribuição de Gumbel realizado no capítulo 2, a opção da distribuição de Gumbel para a modelização da distribuição do tempo total de vida neste caso em particular;
  - Pela análise das tabelas contata-se ainda que os valores do EQM<sub>1</sub>, Viés<sub>1</sub>, EQM<sub>2</sub> e Viés<sub>2</sub> dependem sobretudo da forma como  $n$  varia, diminuindo à medida que  $n$  aumenta, não sendo afectados pela variação de  $l_n$ ;
2. Para tempos de vida das componentes com função de distribuição GPD de mínimos:
- De uma forma geral, verifica-se que o EQM<sub>1</sub> e o Viés<sub>1</sub> são menores do que o EQM<sub>2</sub> e o Viés<sub>2</sub>, para quase todos os valores de gama considerados, embora essa diferença ocorra quando o número de componentes em série,  $l_n$ , é maior ou igual a 20 nos casos em que  $\gamma$  toma os seguintes valores:  $-2$  e  $-1.5$ . Os resultados obtidos parecem assim confirmar mais uma vez, a existência de modelos Weibull e modelos Fréchet como uma boa aproximação à distribuição do tempo total de vida dos sistemas considerados.
  - Para  $\gamma = -1$ , foram obtidos os menores valores do EQM<sub>2</sub> e do Viés<sub>2</sub> comparativamente a outros valores do parâmetro  $\gamma$ , mas também apenas para valores de  $l_n$  superiores a 20, evidenciando-se mais uma vez o modelo Gumbel como a melhor aproximação para a distribuição do tempo total de vida nesta situação em particular;
  - Pela análise das tabelas contata-se que para  $\gamma = -2$  e  $\gamma = -1.5$ , os valores quer do EQM<sub>1</sub> e Viés<sub>1</sub>, quer do EQM<sub>2</sub> e Viés<sub>2</sub>, melhoram muito com o aumento do número  $l_n$  de componentes em série, enquanto que para os restantes valores de  $\gamma$  e de uma forma geral, os resultados obtidos melhoram (diminuem) à medida que  $n$  aumenta.

**Conclusão 3.4** Dos resultados apresentados neste estudo de simulação sobressai uma clara melhoria, excepto para o caso  $\gamma \neq -1$ , quando se passa do parâmetro *ultimate* para o parâmetro *penultimate*, o que adicionalmente ao estudo de simulação realizado na secção 3.4.1, aquando do teste à condição de valores extremos, se consolida o resultado teórico estabelecido no teorema 3.2. Sem surpresas, mais uma vez se constata, que a adequação de modelos Weibull e modelos Fréchet para a distribuição do tempo total de vida nos sistemas paralelo-série, simulados em contexto GEV para mínimos, não depende do número de componentes em série,  $l_n$ , contrariamente ao que se passa em contexto GPD para mínimos, pois recorde-se que para o primeiro caso, têm-se as próprias distribuições GEV para mínimos na parte em série sendo que estas pertencem ao seu domínio de atracção. Para  $\gamma = -1$ , estes dois estudos de simulação estão em consonância com o estudo de simulação elaborado para o mesmo caso no capítulo anterior, reflectindo no modelo Gumbel a escolha apropriada para a modelação da distribuição do tempo de vida em sistemas tipo série-paralelo.

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-2$				$\gamma=-1.5$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.0024	-0.0299	0.0939	0.3039	0.0014	-0.0108	0.0256	0.1561
	50	0.0020	-0.0256	0.0542	0.2300	0.0013	-0.0129	0.0144	0.1149
	100	0.0018	-0.0230	0.0390	0.1942	0.0013	-0.0127	0.0104	0.0959
10	20	0.0024	-0.0304	0.0936	0.3034	0.0013	-0.0105	0.0257	0.1564
	50	0.0019	-0.0266	0.0537	0.2290	0.0013	-0.0108	0.0149	0.1171
	100	0.0018	-0.0207	0.0399	0.1964	0.0012	-0.0104	0.0107	0.0982
20	20	0.0024	-0.0306	0.0934	0.3032	0.0013	-0.0097	0.0259	0.1572
	50	0.0019	-0.0248	0.0546	0.2308	0.0012	-0.0103	0.0149	0.1175
	100	0.0017	-0.0195	0.0404	0.1976	0.0012	-0.0114	0.0105	0.0971
50	20	0.0023	-0.0285	0.0947	0.3053	0.0012	-0.0095	0.0259	0.1574
	50	0.0019	-0.0253	0.0544	0.2303	0.0013	-0.0129	0.0144	0.1149
	100	0.0018	-0.0241	0.0385	0.1931	0.0012	-0.0107	0.0107	0.0979
100	20	0.0026	-0.0328	0.0921	0.3010	0.0014	-0.0094	0.0261	0.1575
	50	0.0021	-0.0272	0.0535	0.2284	0.0014	-0.0115	0.0148	0.1163
	100	0.0019	-0.0239	0.0386	0.1933	0.0012	-0.0093	0.0109	0.0993

Tabela 3.16: Erro quadrático médio e Viés das estimativas de teta, para os parâmetros *penultimate* e *ultimate*

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-1$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.0013	0.0165	0.0013	0.0165
	50	0.0011	0.0068	0.0011	0.0068
	100	0.0010	0.0011	0.0010	0.0011
10	20	0.0013	0.0183	0.0013	0.0183
	50	0.0010	0.0064	0.0010	0.0064
	100	0.0010	0.0026	0.0010	0.0026
20	20	0.0013	0.0184	0.0013	0.0184
	50	0.0010	0.0069	0.0010	0.0069
	100	0.0010	0.0035	0.0010	0.0035
50	20	0.0013	0.0172	0.0013	0.0172
	50	0.0011	0.0065	0.0011	0.0065
	100	0.0011	0.0024	0.0011	0.0024
100	20	0.0013	0.0180	0.0013	0.0180
	50	0.0011	0.0070	0.0011	0.0070
	100	0.0011	0.0032	0.0011	0.0032

Tabela 3.17: Valores do erro quadrático médio e do viés

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=-0.5$				$\gamma=0$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.0036	0.0519	0.0141	-0.1150	0.0097	0.0939	0.0584	-0.2399
	50	0.0017	0.0285	0.0108	-0.0993	0.0038	0.0538	0.0416	-0.2018
	100	0.0013	0.0186	0.0090	-0.0900	0.0023	0.0386	0.0327	-0.1785
10	20	0.0036	0.0519	0.0141	-0.1150	0.0096	0.0930	0.0589	-0.2409
	50	0.0017	0.0270	0.0112	-0.1008	0.0039	0.0550	0.0411	-0.2006
	100	0.0013	0.0191	0.0090	-0.0894	0.0023	0.0386	0.0327	-0.1786
20	20	0.0036	0.0530	0.0138	-0.1139	0.0098	0.0947	0.0580	-0.2391
	50	0.0018	0.0297	0.0105	-0.0981	0.0038	0.0548	0.0412	-0.2008
	100	0.0013	0.0190	0.0090	-0.0896	0.0024	0.0391	0.0325	-0.1780
50	20	0.0036	0.0518	0.0141	-0.1151	0.0097	0.0934	0.0588	-0.2405
	50	0.0018	0.0287	0.0108	-0.0992	0.0039	0.0544	0.0414	-0.2012
	100	0.0014	0.0193	0.0089	-0.0892	0.0024	0.0392	0.0326	-0.1780
100	20	0.0034	0.0507	0.0144	-0.1162	0.0098	0.0946	0.0581	-0.2392
	50	0.0017	0.0275	0.0110	-0.1003	0.0038	0.0542	0.0415	-0.2015
	100	0.0013	0.0203	0.0087	-0.0883	0.0022	0.0381	0.0328	-0.1790

Tabela 3.18: Valores do erro quadrático médio e do viés

GEV <sup>min</sup>		$\gamma=0.5$				$\gamma=1$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.0214	0.1428	0.1291	-0.3579	0.0355	0.1855	0.2336	-0.4822
	50	0.0076	0.0821	0.0917	-0.3013	0.0145	0.1166	0.1567	-0.3946
	100	0.0044	0.0593	0.0718	-0.2664	0.0077	0.0825	0.1247	-0.3518
10	20	0.0211	0.1419	0.1297	-0.3588	0.0359	0.1864	0.2328	-0.4812
	50	0.0078	0.0833	0.0909	-0.3001	0.0141	0.1141	0.1589	-0.3972
	100	0.0044	0.0590	0.0721	-0.2667	0.0077	0.0824	0.1247	-0.3519
20	20	0.0210	0.1411	0.1304	-0.3596	0.0363	0.1877	0.2314	-0.4799
	50	0.0079	0.0836	0.0909	-0.2999	0.0142	0.1148	0.1581	-0.3964
	100	0.0045	0.0601	0.0715	-0.2656	0.0081	0.0843	0.1234	-0.3500
50	20	0.0208	0.1405	0.1308	-0.3602	0.0366	0.1883	0.2309	-0.4793
	50	0.0081	0.0847	0.0901	-0.2987	0.0141	0.1147	0.1582	-0.3966
	100	0.0047	0.0625	0.0701	-0.2632	0.0080	0.0841	0.1236	-0.3502
100	20	0.0217	0.1436	0.1286	-0.3571	0.0360	0.1868	0.2323	-0.4809
	50	0.0081	0.0846	0.0902	-0.2988	0.0140	0.1142	0.1586	-0.3970
	100	0.0045	0.0603	0.0713	-0.2654	0.0078	0.0827	0.1246	-0.3516

Tabela 3.19: Valores do erro quadrático médio e do viés

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-2$				$\gamma=-1.5$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.5314	-0.7285	0.1565	-0.3947	0.3719	-0.6093	0.1963	-0.4424
	50	0.4940	-0.7024	0.2003	-0.4468	0.3597	-0.5992	0.2228	-0.4714
	100	0.4696	-0.6848	0.2193	-0.4677	0.3522	-0.5929	0.2352	-0.4843
10	20	0.0343	-0.1819	0.0243	0.1519	0.0198	-0.1371	0.0019	0.0298
	50	0.0324	-0.1772	0.0072	0.0784	0.0199	-0.1378	0.0011	-0.0100
	100	0.0303	-0.1711	0.0031	0.0460	0.0191	-0.1348	0.0016	-0.0262
20	20	0.0128	-0.1075	0.0524	0.2263	0.0063	-0.0717	0.0102	0.0952
	50	0.0111	-0.0999	0.0254	0.1557	0.0068	-0.0755	0.0038	0.0523
	100	0.0103	-0.0955	0.0160	0.1216	0.0065	-0.0742	0.0022	0.0344
50	20	0.0056	-0.0643	0.0741	0.2695	0.0023	-0.0347	0.0186	0.1322
	50	0.0044	-0.0560	0.0411	0.1996	0.0024	-0.0364	0.0094	0.0914
	100	0.0039	-0.0533	0.0279	0.1638	0.0025	-0.0369	0.0063	0.0716
100	20	0.0035	-0.0448	0.0851	0.2890	0.0017	-0.0229	0.0219	0.1440
	50	0.0031	-0.0425	0.0467	0.2131	0.0017	-0.0249	0.0117	0.1029
	100	0.0026	-0.0363	0.0340	0.1809	0.0016	-0.0243	0.0081	0.0843

Tabela 3.20: Valores do erro quadrático médio e do viés

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-1$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.2365	-0.4857	0.2365	-0.4857
	50	0.2470	-0.4964	0.2470	-0.4964
	100	0.2520	-0.5014	0.2520	-0.5014
10	20	0.0079	-0.0833	0.0079	-0.0833
	50	0.0099	-0.0951	0.0099	-0.0951
	100	0.0108	-0.0994	0.0108	-0.0994
20	20	0.0020	-0.0336	0.0020	-0.0336
	50	0.0028	-0.0430	0.0028	-0.0430
	100	0.0033	-0.0485	0.0033	-0.0485
50	20	0.0010	-0.0049	0.0010	-0.0049
	50	0.0012	-0.0145	0.0012	-0.0145
	100	0.0014	-0.0173	0.0014	-0.0173
100	20	0.0011	0.0077	0.0011	0.0077
	50	0.0009	-0.0044	0.0009	-0.0044
	100	0.0010	-0.0072	0.0010	-0.0072

Tabela 3.21: Valores do erro quadrático médio e do viés

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=-0.5$				$\gamma=0$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.1304	-0.3602	0.2784	-0.5271	0.0565	-0.2363	0.3257	-0.5701
	50	0.1577	-0.3963	0.2753	-0.5241	0.0852	-0.2908	0.2992	-0.5464
	100	0.1697	-0.4112	0.2708	-0.5198	0.1031	-0.3200	0.2892	-0.5372
10	20	0.0014	-0.0245	0.0374	-0.1914	0.0026	0.0414	0.0863	-0.2924
	50	0.0031	-0.0478	0.0317	-0.1756	0.0009	0.0012	0.0656	-0.2544
	100	0.0042	-0.0578	0.0285	-0.1664	0.0012	-0.0171	0.0557	-0.2342
20	20	0.0011	0.0141	0.0243	-0.1528	0.0058	0.0701	0.0705	-0.2637
	50	0.0009	-0.0080	0.0193	-0.1358	0.0016	0.0280	0.0526	-0.2276
	100	0.0012	-0.0188	0.0171	-0.1273	0.0010	0.0121	0.0429	-0.2051
50	20	0.0022	0.0367	0.0178	-0.1302	0.0079	0.0837	0.0634	-0.2501
	50	0.0011	0.0123	0.0143	-0.1156	0.0029	0.0448	0.0453	-0.2108
	100	0.0009	0.0035	0.0119	-0.1051	0.0017	0.0280	0.0367	-0.1892
100	20	0.0029	0.0448	0.0158	-0.1221	0.0087	0.0882	0.0612	-0.2456
	50	0.0013	0.0202	0.0125	-0.1076	0.0034	0.0504	0.0430	-0.2052
	100	0.0011	0.0121	0.0103	-0.0965	0.0019	0.0331	0.0346	-0.1840

Tabela 3.22: Valores do erro quadrático médio e do viés

GPD <sup>min</sup>		$\gamma=0.5$				$\gamma=1$			
$l_n$	$n$	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>	EQM <sub>1</sub>	Viés <sub>1</sub>	EQM <sub>2</sub>	Viés <sub>2</sub>
2	20	0.0131	-0.1107	0.3747	-0.6114	0.0011	0.0132	0.4292	-0.6544
	50	0.0372	-0.1909	0.3306	-0.5743	0.0082	-0.0866	0.3581	-0.5978
	100	0.0530	-0.2287	0.3080	-0.5544	0.0190	-0.1353	0.3251	-0.5696
10	20	0.0134	0.1111	0.1528	-0.3896	0.0332	0.1788	0.2401	-0.4888
	50	0.0037	0.0530	0.1101	-0.3304	0.0121	0.1056	0.1655	-0.4056
	100	0.0016	0.0276	0.0897	-0.2982	0.0063	0.0737	0.1309	-0.3606
20	20	0.0177	0.1292	0.1391	-0.3715	0.0358	0.1859	0.2332	-0.4817
	50	0.0057	0.0687	0.1000	-0.3147	0.0135	0.1118	0.1606	-0.3995
	100	0.0031	0.0475	0.0783	-0.2783	0.0074	0.0803	0.1262	-0.3540
50	20	0.0192	0.1349	0.1348	-0.3658	0.0372	0.1898	0.2294	-0.4778
	50	0.0069	0.0777	0.0944	-0.3058	0.0144	0.1157	0.1575	-0.3956
	100	0.0039	0.0548	0.0743	-0.2709	0.0077	0.0822	0.1249	-0.3521
100	20	0.0207	0.1404	0.1308	-0.3603	0.0369	0.1887	0.2307	-0.4790
	50	0.0077	0.0823	0.0915	-0.3011	0.0143	0.1151	0.1579	-0.3961
	100	0.0043	0.0581	0.0726	-0.2677	0.0077	0.0827	0.1245	-0.3516

Tabela 3.23: Valores do erro quadrático médio e do viés

## Capítulo 4

# Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série e Série-Paralelo, Regulares, Não-Homogéneos

Nos capítulos anteriores, analisámos o comportamento assintótico (*ultimate*) e pré-assintótico (*penultimate*) da função de fiabilidade, convenientemente normalizada, em sistemas regulares e homogéneos, com estrutura paralelo-série e série-paralelo, sob a hipótese do número de subsistemas  $n$  e do número de componentes  $l_n$ , verificarem uma determinada condição assintótica. É nosso objectivo, no presente capítulo, modelar a fiabilidade, novamente para sistemas regulares tipo paralelo-série e série-paralelo, abandonando o pressuposto da homogeneidade, i.e., assumindo-se que as distribuições dos tempos de vida das componentes não têm necessariamente a mesma distribuição. Para esse efeito, iremos começar por tomar um sistema regular  $S$ ,  $(n \times l_n)$  dimensional, organizado por diferentes  $m$  sistemas regulares de estrutura paralelo-série, dispostos em paralelo e constituídos por sua vez por  $n_k$  subsistemas em paralelo de  $l_n$  componentes em série. Consideraremos ainda  $E_{ij}^{(k)}$  as componentes de  $S$  e  $X_{ij}^{(k)}$  as *v.a.'s* independentes com função de distribuição comum  $F^{(k)}$ , como sendo os tempos de vida dessas componentes, ou seja,  $X_{ij}^{(k)}$  representa o tempo de vida da  $j$ -ésima componente do  $i$ -ésimo subsistema no  $k$ -ésimo sistema paralelo-série, para  $k = 1, \dots, m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_k$ ,  $j = 1, 2, \dots, l_n$ ,  $n_k, n, m, l_n \in \mathbb{N}$  e  $m$  fixo. Assuma-se ainda que

$$\sum_{k=1}^m n_k = n, \quad \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_k > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^m p_k = 1,$$

para todo  $k = 1, \dots, m$ , tal que  $p_k$  representa a  $k$ -ésima frequência relativa associada ao  $k$ -ésimo sistema paralelo-série. Então o tempo de vida de todo o sistema  $S$  é a *v.a.*

$$X = \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n_k} \left( \min_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij}^{(k)} \right) \right\}, \quad n_k, n, m \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

cuja função de distribuição é dada por,

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^m F_{n_k}^{(k)}(x) = \prod_{k=1}^m \left[ 1 - (1 - F^{(k)}(x))^{l_n} \right]^{n_k}, \quad x \in \mathbb{R}, n_k \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

e a função de fiabilidade associada se define por,

$$R_n(x) = 1 - \prod_{k=1}^m \left[ 1 - (R^{(k)}(x))^{l_n} \right]^{n_k}, \quad x \in \mathbb{R}, n_k \in \mathbb{N},$$

onde, para cada  $k = 1, \dots, m$ ,  $F_{n_k}^{(k)}(x)$  representa a função de distribuição do tempo de vida do  $k$ -ésimo sistema e  $R^{(k)}(x) = 1 - F^{(k)}(x)$ . O nosso propósito é agora, averiguar que condições asseguram a convergência do produto de distribuições  $F_n$  (ou de  $R_n$ ) para uma lei de extremos (ou fiabilidade) não degenerada. O estudo dos domínios de atracção para produtos finitos de *f.d.* tem sido desde há algum tempo, alvo de interesse por parte de diferentes autores. Salientamos, em particular o trabalho desenvolvido por Resnick [37], no qual são analisadas exaustivamente condições suficientes que incidem sobre o comportamento assintótico da cauda direita do produto finito de distribuições, para os diferentes domínios de atracção Fréchet, Weibull e Gumbel, enquadradas em três classes intrinsecamente relacionadas de funções de distribuição: as  $A$ -equivalentes<sup>1</sup>, as funções de von Mises<sup>2</sup> e as já nossas conhecidas funções de caudas equivalentes. No referido artigo, é apresentado

<sup>1</sup>Duas *f.d.*  $H_1(\cdot)$  e  $H_2(\cdot)$  dizem-se  $A$ -equivalentes sse têm o mesmo limite superior do suporte  $x^H \leq \infty$  e se  $A_{H_1} \sim A_{H_2}$ , onde a  $A$ -função de  $H_i, i = 1, 2$ , define-se por

$$A_{H_i}(z) = \frac{\int_z^{x^H} (1 - H_i(t)) dt}{z(1 - H_i(z))}.$$

<sup>2</sup>Uma *f.d.*  $F(x)$  com limite superior do suporte  $x^F < \infty$  e função densidade positiva e diferenciável à esquerda de  $x^F$ ,  $f(x)$ , é uma função de von Mises, se

$$\lim_{x \rightarrow x^F} \frac{d}{dx} \left( \frac{1 - F(x)}{f(x)} \right) = 0$$



um exemplo em que se mostra que o produto de duas distribuições pode ser atraído para a lei de Gumbel sem que nenhum dos factores do produto sejam distribuições no domínio da Gumbel. Também no mesmo artigo, é citado um exemplo da autoria de De Haan, com o qual se prova que apesar de duas distribuições  $H_1$  e  $H_2$ , pertencerem ao domínio da Gumbel, i.e., verificarem  $H_1 \in \mathcal{D}(G_0)$  e  $H_2 \in \mathcal{D}(G_0)$ , não se tem necessariamente  $H_1.H_2 \in \mathcal{D}(G_0)$ . Esta situação, sugere peremptoriamente a necessidade de se tratar com algum cuidado os domínios de atracção para produtos de distribuições. É claro que, intuitivamente e pelo historial de resultados que temos vindo a desenvolver ao longo deste trabalho, tudo parece apontar para que a lei limite do produto  $F_n$  em (4.2), seja efectivamente uma lei tipo Gumbel, pois à partida, se admitirmos que cada distribuição  $F^{(k)}$  pertence ao domínio de atracção de uma lei estável para mínimos,  $H_{\gamma_k}$ , e se forem satisfeitas todas as condições do teorema (2.1) para cada  $k$ -ésimo sistema, com  $k = 1, \dots, m$ , então existirão pares de constantes normalizadoras,  $(\alpha_{n_k}^{(k)}, \beta_{n_k}^{(k)})$ , com  $\alpha_{n_k}^{(k)} > 0$  e  $\beta_{n_k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ , para  $k = 1, \dots, m$ , tais que

$$\left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_{n_k}^{(k)} x + \beta_{n_k}^{(k)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x),$$

pelo que a lei limite para a distribuição do tempo de vida de todo o sistema virá

$$\prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_{n_k}^{(k)} x + \beta_{n_k}^{(k)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} [G_0(x)]^m,$$

onde  $[G_0(x)]^m = G_0(x - \ln m)$ . Acontece porém, que o modelo limite encontrado nestes moldes é pouco útil e interessante, enquanto modelo probabilístico, já que o número excessivo de constantes normalizadoras intervenientes na expressão analítica de  $F_n$  poderá causar dificuldades acrescidas no processo de estimação das mesmas. Por conseguinte, seria de todo conveniente, a utilização de um mesmo par de constantes normalizadoras, para todos os  $k$ -ésimos sistemas paralelo-série, de modo a garantir-se a convergência de  $F_n$  para a lei de Gumbel. Este assunto não é totalmente novo e já aqui o abordámos por ocasião do estudo das propriedades dos domínios de atracção, expondo um resultado desenvolvido precisamente por Resnick [36] e [38], no qual se estabelece o uso das mesmas constantes de atracção para distribuições com caudas equivalentes e por tal, atraídas para leis de extremos do mesmo tipo (veja-se a proposição 1.4). O resultado que nos interessa reter, também da autoria de Resnick [37], foi desenvolvido para produtos finitos de distribuições, no qual se estabelece como condição suficiente para que um  $m$ -produto seja atraído para uma lei de extremos  $G(x)$ , a existência de uma

distribuição, entre as  $m$  funções de distribuição, que seja simultaneamente dominante e atraída para essa lei limite  $G(x)$ , mediante uma normalização conveniente. Nesse caso o autor prova que, quer o  $m$ -produto quer a distribuição dominante têm caudas equivalentes, pertencendo assim ao mesmo domínio de atracção e podendo partilhar o mesmo par de constantes normalizadoras na convergência para a lei limite comum. O conceito de dominância é retrado por meio de um rácio assintoticamente nulo entre a cauda da distribuição do produto formado pelas distribuições ditas dominadas e a cauda da distribuição dominante. Será pois este último resultado que nos levará à obtenção de um possível modelo limite para  $F_n$  a que nos propomos e de que em breve passaremos a apresentar. Convém enfatizar mais uma vez a ideia de que, para cada  $k$ -ésimo sistema, o comportamento limite da cauda direita da distribuição  $1 - (1 - F^{(k)}(x))^{l_n}$  em (4.2), depende do comportamento assintótico da cauda direita de cada estável para mínimos,  $H_{\gamma_k}$ , uma vez que se assume  $F^{(k)} \in \mathcal{D}(H_{\gamma_k})$ , para  $k = 1, \dots, m$ . Como cada  $H_{\gamma_k}$  pertence ao domínio de atracção da Gumbel  $G_0$ , torna-se assim imprescindível, averiguar em primeiro lugar de que modo o produto de  $m$  leis estáveis para mínimos,  $\prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}(x)$ , convenientemente normalizado, pode também ser atraído para a Gumbel  $G_0$ .

## 4.1 Análise do Comportamento Assintótico da Cauda Direita do Produto de Leis Estáveis para Mínimos

**Proposição 4.1 (Corolário 2, Resnick S. [37])** *Sejam  $H_1(\cdot), \dots, H_m(\cdot)$  f.d. não degeneradas, com o mesmo limite superior do suporte  $x^H \leq +\infty$  e  $G(x)$  uma lei de extremos. Suponha-se que*

$$\lim_{x \rightarrow x^H} \frac{1 - \prod_{i=2}^m H_i(x)}{1 - H_1(x)} = 0,$$

*então as distribuições  $\prod_{i=1}^m H_i(x)$  e  $H_1(x)$  têm caudas equivalentes e quando  $n \rightarrow +\infty$ ,*

$$H_1^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x) \quad \text{sse} \quad \prod_{i=1}^m H_i^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x).$$

Note-se que por convenção assume-se que todas as distribuições  $H_i(\cdot)$  têm o mesmo limite superior do suporte  $x^H$ , o que significa em termos

práticos, que mesmo havendo distribuições com limites superiores do suporte distintos, a escolha deve sempre recair no maior deles. Esta escolha é fundamentada no seguinte: sendo  $x^{H_i}$  o limite superior do suporte de  $H_i(\cdot)$ , suponha-se que  $x^{H_1} \leq x^{H_2} \leq \dots \leq x^{H_m}$ . Se o produto  $\prod_{i=1}^m H_i(x) \in \mathcal{D}(G)$ , então  $\prod_{i=1}^m H_i^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x)$  para constantes apropriadas  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$ , tais que  $a_n x + b_n \rightarrow x^{H_m}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e para cada  $x$ , com  $0 < G(x) < 1$ . Se existir um  $j$  tal que  $x^{H_j} < x^{H_m}$  então  $\prod_{i=1}^j H_i^n(a_n x + b_n) \rightarrow 1$ , para todo  $x$  tal que,  $G(x) > 0$  e por conseguinte as distribuições  $H_1(\cdot), \dots, H_j(\cdot)$  não têm qualquer efeito ou peso sobre convergência do produto  $\prod_{i=1}^m H_i^n(a_n x + b_n)$ .

**Proposição 4.2** Dadas  $H_{\gamma_1}(\cdot), \dots, H_{\gamma_m}(\cdot)$  leis estáveis para mínimos, com limite superior do suporte comum  $x^{H_\gamma} \leq +\infty$ , tais que

$$\lim_{x \rightarrow x^{H_\gamma}} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} = 0, \quad (4.3)$$

então  $\prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}(x)$  e  $H_{\gamma_1}(x)$  têm caudas equivalentes e ,

$$H_{\gamma_1}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x),$$

sse

$$\prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0(x).$$

**Dem.** Seja  $m$  natural e fixo tal que  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < 0$ ,  $x^{H_\gamma} = +\infty$  e  $H_\gamma(x)$  a estável de mínimos definida em (2.1). Por indução finita em  $m$ , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - H_{\gamma_2}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp\{-(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2}\}}{\exp\{-(1 - \gamma_1 x)^{-1/\gamma_1}\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ - (1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \left( 1 - \frac{(1 - \gamma_1 x)^{-1/\gamma_1}}{(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2}} \right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ - (1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \left( 1 - (x^{1/\gamma_2 - 1/\gamma_1}) \frac{(x^{-1 - \gamma_1})^{-1/\gamma_1}}{(x^{-1 - \gamma_2})^{-1/\gamma_2}} \right) \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - H_{\gamma_2}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left\{ -(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \right\}}{\exp \left\{ -(1 - \gamma_1 x)^{-1/\gamma_1} \right\}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ -(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \left( 1 - \frac{(1 - \gamma_1 x)^{-1/\gamma_1}}{(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2}} \right) \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ -(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \left( 1 - (x^{1/\gamma_2 - 1/\gamma_1}) \frac{(x^{-1} - \gamma_1)^{-1/\gamma_1}}{(x^{-1} - \gamma_2)^{-1/\gamma_2}} \right) \right\} \\
&= 0, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

uma vez que, sendo  $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$ , vem que  $0 < -1/\gamma_1 < -1/\gamma_2$ , donde  $x^{1/\gamma_2 - 1/\gamma_1} \rightarrow 0$ ,  $(x^{-1} - \gamma_1)^{-1/\gamma_1} / (x^{-1} - \gamma_2)^{-1/\gamma_2} \rightarrow (-\gamma_1)^{-1/\gamma_1} / (-\gamma_2)^{-1/\gamma_2}$  e  $-(1 - \gamma_2 x)^{-1/\gamma_2} \rightarrow -\infty$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ . Considere-se por hipótese de indução o limite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} = 0,$$

então para  $m + 1$ , ter-se-á

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \prod_{k=2}^{m+1} H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} + \frac{\prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) - \prod_{k=2}^{m+1} H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) \frac{1 - H_{\gamma_{m+1}}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois, quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) \rightarrow 1$  e similarmente a (4.4) deduz-se que  $\frac{1 - H_{\gamma_{m+1}}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} \rightarrow 0$ .

Suponhamos agora que  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m = 0$ , com  $x^{H_{\gamma}} = +\infty$ . Observe-se que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - \prod_{k=2}^{m-1} H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} + \prod_{k=2}^{m-1} H_{\gamma_k}(x) \frac{1 - H_0(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} \right). \tag{4.5}$$

O limite da primeira parcela recai na situação que analisámos anteriormente sendo por conseguinte nulo. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - H_0(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp\{-\exp(x)\}}{\exp\left\{-\left(1 - \gamma_1 x\right)^{-1/\gamma_1}\right\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left\{-\exp(x) \left(1 - \underbrace{\frac{\left(1 - \gamma_1 x\right)^{-1/\gamma_1}}{\exp(x)}}_{\downarrow 0}\right)\right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e como  $\prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) \rightarrow 1$ , conclui-se que o limite em (4.5) também é nulo.

Assuma-se agora que  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$ . Ora neste caso,  $x^{H_\gamma} = 1/\gamma_1$  pois  $1/\gamma_1 > 1/\gamma_2 > \dots > 1/\gamma_m$ , para  $H_\gamma(x)$  definida em (2.3). Então como  $H_{\gamma_k}(x) = 1$ , para  $x > 1/\gamma_k$  e  $k = 2, \dots, m$ , vem que  $\prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) = 1$ , resultando de imediato,

$$\lim_{x \rightarrow 1/\gamma_1} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_{\gamma_1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 1/\gamma_1} \frac{1 - 1}{1 - H_{\gamma_1}(x)} = 0.$$

Se  $0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$ , então  $x^{H_\gamma} = +\infty$  e a situação é muito semelhante à anterior, pois novamente  $\prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x) = 1$ , para  $x > 1/\gamma_k$  e  $k = 2, \dots, m$ , pelo que a distribuição dominante continua a ser  $H_{\gamma_1}(x)$ , i.e.,  $H_0(x)$ , e por conseguinte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \prod_{k=2}^m H_{\gamma_k}(x)}{1 - H_0(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1}{\exp\{-\exp(x)\}} = 0.$$

Finalmente, admitindo que  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{i-1} < 0 < \gamma_{i+1} < \dots < \gamma_m$ , facilmente se reconhece, atendendo aos cálculos acima deduzidos, que  $H_{\gamma_1}(x)$  continua a ser a lei dominante, pelo que (4.3) é satisfeito.

O estudo destes diferentes casos analisados leva-nos a concluir, por aplicação da proposição (4.1), que para  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$ , o produto de  $m$  leis min-estáveis  $\prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}(x)$  e a distribuição de mínimos  $H_{\gamma_1}(x)$  têm caudas direitas equivalentes. Além disso, existem constantes normalizadoras  $\alpha_n^{*(1)} > 0$  e  $\beta_n^{*(1)} \in \mathbb{R}$ , para as quais

$$H_{\gamma_1}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \rightarrow G_0(x) \quad \text{sse} \quad \prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \rightarrow G_0(x),$$

provando-se assim o resultado pretendido. ■

## 4.2 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Paralelo-Série, Regulares e não Homogéneos

Encontrada a lei limite para o produto de  $m$  leis estáveis para mínimos, para a mesma normalização da min-estável dominante, estamos em condições de estabelecer o modelo limite para a fiabilidade do produto de  $m$  sistemas paralelo-série, convenientemente normalizada, onde os tempos de vida das componentes nos diferentes  $k$ -sistemas são independentes mas não identicamente distribuídos. O resultado é formulado no próximo teorema, apenas para o caso  $\gamma_k \neq 0$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ .

**Teorema 4.1** *Considerem-se para cada  $k = 1, 2, \dots, m$ , com  $m$  natural e fixo, f.d.  $F^{(k)}$ , pertencentes ao domínio de atracção para mínimos de leis  $H_{\gamma_k}(x)$ ,  $\gamma_k \neq 0$ , i.e., existem sucessões  $a_{n_k}^{(k)} > 0$  e  $b_{n_k}^{(k)} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$1 - (1 - F^{(k)}(a_{n_k}^{(k)}x + b_{n_k}^{(k)}))^{n_k} = H_{\gamma_k}(x) + \varepsilon_{n_k}(x), \quad (4.6)$$

onde  $\varepsilon_{n_k}(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n_k \rightarrow +\infty$ . Assuma-se ainda que

$$\sum_{k=1}^m n_k = n, \quad \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_k > 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^m p_k = 1. \quad (4.7)$$

Dada uma sucessão de inteiros positivos  $l_n$ , tal que

$$\frac{l_n}{n_k} n_k^{\frac{n_k}{l_n}} e_{n_k} = o(1), \quad (4.8)$$

onde  $e_{n_k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_{n_k}(x)|$ , e que satisfaça ainda as condições:

1.  $l_n \sim n^\alpha, \alpha > 0$  e  $x_{F^{(1)}} \geq x_{F^{(k)}}$ , com  $k = 1, \dots, m$ , ou  $l_n = o(L(n))$ , para uma certa função de variação lenta  $L(n)$ , caso  $\gamma_1 < \dots < \gamma_m < 0$ ;
2.  $(-B_k)^{-1} l_n = o(n)$ , com  $B_k \in \mathbb{R}^-$  e  $k = 2, \dots, m$ , se  $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m$ ;
3.  $(-B_k)^{-1} l_n = o(n)$ , com  $B_k \in \mathbb{R}^-$  e  $k = 2, \dots, m$ , caso  $\gamma_1 < \dots < \gamma_m$ , onde existe pelo menos um  $k$ , tal que  $\gamma_1 < 0 < \gamma_k$ .

então existem sucessões  $\alpha_n^{(1)} > 0$  e  $\beta_n^{(1)} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que, para um sistema regular e não-homogéneo, organizado por  $m$  sistemas paralelo-série (dispostos em paralelo), cada um dos quais constituído por  $n_k$  subsistemas em

paralelo de  $l_n$  componentes em série, as sequências de funções de distribuição e de funções de fiabilidade, convenientemente normalizadas, satisfazem

$$F_n \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) = \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0^{p_1}(x),$$

e,

$$R_n \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) = 1 - \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0^{p_1}(x),$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e onde  $G_0^{p_1}(x) = G_0(x - \ln p_1)$ . Além disso, podemos tomar  $\alpha_n^{(1)}$ ,  $\beta_n^{(1)}$ ,  $a_n^{*(1)}$  e  $b_n^{*(1)}$  definidos como em (2.10), (2.11) e (2.12) respectivamente.

**Dem.** Para cada um dos  $k$ -ésimos sistemas paralelo-série, com  $k = 1, \dots, m$ ,  $m$  fixo, considerem-se as sucessões  $a_{n_k}^{*(k)} > 0$  e  $b_{n_k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ , para as quais (4.6) é válida. Dada a sucessão de termos positivos,  $\{l_n\}$  satisfazendo (4.8), a proposição (2.1) e o teorema (2.1) asseguram a existência de constantes normalizadoras,  $\alpha_{n_k}^{*(k)}$ ,  $\alpha_{n_k}^{(k)} > 0$  e  $\beta_{n_k}^{*(k)}$ ,  $\beta_{n_k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ , para as quais as leis estáveis para mínimos  $H_{\gamma_k}(\cdot)$  e a sequência de funções de distribuição,  $F_{n_k}^{(k)}(\cdot)$ , verificam para cada  $k$ -ésimo sistema,

$$H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_{n_k}^{*(k)} x + \beta_{n_k}^{*(k)} \right) \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} G_0(x),$$

e

$$F_{n_k}^{(k)} \left( \alpha_{n_k}^{(k)} x + \beta_{n_k}^{(k)} \right) \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} G_0(x),$$

com  $\alpha_{n_k}^{*(k)}$ ,  $\beta_{n_k}^{*(k)}$  e  $\alpha_{n_k}^{(k)}$ ,  $\beta_{n_k}^{(k)}$ , sucessões definidas como em (2.10) e (1.20) respectivamente. Assumindo (4.7), o teorema de Kintchine (veja-se a proposição 1.1), garante igualmente a existência de sucessões  $\alpha_n^{*(k)}$ ,  $\alpha_n^{(k)} > 0$  e  $\beta_n^{*(k)}$ ,  $\beta_n^{(k)} \in \mathbb{R}$  tais que, quando  $n, n_k \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\alpha_n^{*(k)}}{\alpha_{n_k}^{*(k)}} \rightarrow \alpha^*(k) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\beta_n^{*(k)} - \beta_{n_k}^{*(k)}}{\alpha_{n_k}^{*(k)}} \rightarrow \beta^*(k) \in \mathbb{R},$$

e também,

$$\frac{\alpha_n^{(k)}}{\alpha_{n_k}^{(k)}} \rightarrow \alpha(k) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\beta_n^{(k)} - \beta_{n_k}^{(k)}}{\alpha_{n_k}^{(k)}} \rightarrow \beta(k) \in \mathbb{R},$$

de modo que,

$$H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} x + \beta_n^{*(k)} \right) = \left[ H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(k)} x + \beta_n^{*(k)} \right) \right]^{\frac{n_k}{n}} \rightarrow G_0^{p_k}(x), \quad (4.9)$$

e,

$$F_{n_k}^{(k)} \left( \alpha_n^{(k)} x + \beta_n^{(k)} \right) \rightarrow G_0(\alpha(k)x + \beta(k)),$$

com

$$G_0(\alpha^*(k)x + \beta^*(k)) = G_0(\alpha(k)x + \beta(k)) = G_0^{p_k}(x).$$

Como para qualquer real  $\gamma_1$ , a lei  $H_{\gamma_1}(x)$  domina as restantes estáveis de mínimos,  $H_{\gamma_2}(x), \dots, H_{\gamma_m}(x)$ , i.e., satisfaz (4.3) e uma vez verificada (4.9), sabemos pela proposição (4.2), que o par de constantes de atracção  $(\alpha_n^{*(1)}, \beta_n^{*(1)})$  é também adequado para garantir a convergência do produto  $\prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}^n$  para a lei de Gumbel. Por conseguinte, interessa-nos analisar o comportamento assintótico do tempo de vida de todo o sistema,  $F_n(\cdot)$ , tomando como sucessões normalizadoras  $\alpha_n^{(1)}$  e  $\beta_n^{(1)}$ , precisamente as constantes associadas ao 1º sistema paralelo-série. Ora, seguindo de perto a demonstração do teorema 2.1, tem-se

$$\begin{aligned} F_n \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) &= \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \\ &= \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_n^{(k)} \left( \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(k)}} x + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}} \right) + \beta_n^{(k)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \\ &= \prod_{k=1}^m \left[ H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right) \times U_{n_k}(x) \right] \\ &= \prod_{k=1}^m H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \prod_{k=1}^m V_{n_k}(x) \prod_{k=1}^m U_{n_k}(x) \\ &= \prod_{k=1}^m \left[ H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \right]^{\frac{n_1}{n}} \prod_{k=1}^m V_{n_k}(x) \prod_{k=1}^m U_{n_k}(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde,

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(k)}} x + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}}, \quad (4.11)$$

$$V_{n_k}(x) = \frac{H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right)}{H_{\gamma_k}^{n_1} \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right)}, \quad (4.12)$$



e ainda,

$$U_{n_k}(x) = 1 - \frac{n_k \rho_{n_k} \left( u_n^{(k)}(x) \right)}{H_{\gamma_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right)} + o \left( \frac{n_k \rho_{n_k} \left( u_n^{(k)}(x) \right)}{H_{\gamma_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right)} \right). \quad (4.13)$$

Observando (4.10) constata-se que a dominância de  $H_{\gamma_1}(\cdot)$  assegura que o primeiro  $\prod$ -produto converge para  $G_0^{p_1}(x)$  e portanto para se obter o resultado pretendido, resta averiguar que condições garantem a convergência dos restantes produtos para um. Atendendo a (4.12), podemos observar que para o segundo  $\prod$ -produto, essa convergência é verificada desde que  $u_n^{(k)}(x) \rightarrow +\infty$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e para cada  $k = 2, \dots, m$ . Ora, assumindo que  $\gamma_1 < \gamma_k < 0$ ,  $k = 2, \dots, m$ , recorde-se que as constantes de atracção da Weibull para mínimos são assintoticamente definidas por (veja-se a observação 1.11),

$$a_n^{(k)} \sim A_k n^{\gamma_k} L_k(n) \quad \text{e} \quad b_n^{(k)} \sim B_k n^{\gamma_k} L_k(n) + x_{F^{(k)}}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4.14)$$

onde  $A_k > 0$ ,  $x_{F^{(k)}}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}$  e  $L_k(\cdot)$  é uma função de variação lenta, para cada  $k = 1, \dots, m$ . Por outro lado, as constantes de atracção  $\alpha_n^{*(k)} > 0$  e  $\beta_n^{*(k)} \in \mathbb{R}$ , para a lei de Gumbel para máximos, são assintoticamente dadas por (veja-se em (2.17) do teorema 2.1),

$$\alpha_n^{*(k)} \sim \frac{1}{(\ln n)^{\gamma_k + 1}} \quad \text{e} \quad \beta_n^{*(k)} \sim \frac{1 - (\ln n)^{-\gamma_k}}{\gamma_k}. \quad (4.15)$$

Atendendo às propriedades das funções de variação lenta e ao facto das potências positivas e negativas da função logaritmo, serem igualmente funções de variação lenta, obtemos para  $\left( \alpha_n^{(1)} / \alpha_n^{(k)} \right) x$ , em (4.11),

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(k)}} x &= \frac{a_n^{(1)} a_n^{*(1)}}{a_n^{(k)} a_n^{*(k)}} = \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(k)}} \left( \frac{l_n}{n} \right)^{\gamma_1 - \gamma_k} \frac{\alpha_n^{*(1)}}{\alpha_n^{*(k)}} \\ &\sim \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(k)}} \left( \frac{l_n}{n} \right)^{\gamma_1 - \gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k - \gamma_1} x \\ &\sim \frac{n^{\gamma_1} L_1(n)}{n^{\gamma_k} L_k(n)} \left( \frac{l_n}{n} \right)^{\gamma_1 - \gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k - \gamma_1} x \\ &\sim \frac{L_1(n)}{L_k(n)} (\ln n)^{\gamma_k - \gamma_1} (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x \\ &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x, \end{aligned} \quad (4.16)$$

com  $L^*(n)$  função de variação lenta. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}} &= \frac{a_n^{(1)} b_n^{*(1)} + b_n^{(1)} - a_n^{(k)} b_n^{*(k)} - b_n^{(k)}}{a_n^{(k)} \alpha_n^{*(k)}} \\ &= \frac{a_n^{(1)} b_n^{*(1)} - a_n^{(k)} b_n^{*(k)}}{a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} \alpha_n^{*(k)}} + \frac{b_n^{(1)} - b_n^{(k)}}{a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} \alpha_n^{*(k)}} \\ &= s_n + v_n, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde,

$$s_n = \frac{a_n^{(1)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_1} \left(\beta_n^{*(1)} - \frac{1}{\gamma_1}\right) - a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} \left(\beta_n^{*(k)} - \frac{1}{\gamma_k}\right)}{a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} \alpha_n^{*(k)}} \quad (4.18)$$

e,

$$v_n = \frac{\frac{1}{\gamma_1} a_n^{(1)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_k} a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} + \left(b_n^{(1)} - b_n^{(k)}\right)}{a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k} \alpha_n^{*(k)}}. \quad (4.19)$$

Atendendo a (4.14) e (4.15), a sucessão  $s_n$  é assintoticamente dada por

$$\begin{aligned} s_n &\sim \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(k)}} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_1 - \gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} \left(-\frac{(\ln n)^{-\gamma_1}}{\gamma_1}\right) + (\ln n)^{\gamma_k + 1} \frac{(\ln n)^{-\gamma_k}}{\gamma_k} \\ &\sim \frac{n^{\gamma_1} L_1(n)}{n^{\gamma_k} L_k(n)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_1 - \gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} \left(-\frac{(\ln n)^{-\gamma_1}}{\gamma_1}\right) + \frac{\ln n}{\gamma_k} \\ &\sim -\frac{1}{\gamma_1} \frac{L_1(n)}{L_k(n)} \left(\frac{\ln n}{l_n}\right)^{\gamma_k - \gamma_1} \ln n + \frac{\ln n}{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Por sua vez,  $b_n^{(k)} \sim B_k n^{\gamma_k} L_k(n) + x_{F^{(k)}} \sim x_{F^{(k)}}$ , pois  $\gamma_k < 0$ , donde para a sucessão  $v_n$  se obtém,

$$\begin{aligned} v_n &\sim \frac{1}{\gamma_1} \frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(k)}} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_1 - \gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} - \frac{1}{\gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} + \frac{(x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}})}{a_n^{(k)} \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k}} (\ln n)^{\gamma_k + 1} \\ &\sim \frac{1}{\gamma_1} \frac{L_1(n)}{L_k(n)} \left(\frac{\ln n}{l_n}\right)^{\gamma_k - \gamma_1} \ln n - \frac{1}{\gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} + \frac{(x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}})}{n^{\gamma_k} L_k(n) \left(\frac{l_n}{n}\right)^{\gamma_k}} (\ln n)^{\gamma_k + 1} \\ &\sim \frac{1}{\gamma_1} \frac{L_1(n)}{L_k(n)} \left(\frac{\ln n}{l_n}\right)^{\gamma_k - \gamma_1} \ln n - \frac{1}{\gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k + 1} + \frac{(x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}})}{L_k(n)} \left(\frac{\ln n}{l_n}\right)^{\gamma_k} \ln n \end{aligned}$$

Somando  $s_n$  com  $v_n$ , deduz-se a seguinte expressão assintótica em (4.17),

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(k)}}{\alpha_n^{(k)}} &\sim \frac{\ln n}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_k} (\ln n)^{\gamma_k+1} + \frac{(x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}})}{L_k(n)} \left( \frac{\ln n}{l_n} \right)^{\gamma_k} \ln n \\ &\sim -\frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) + (x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}}) \frac{(\ln n)^{\gamma_k+1}}{L_k(n)} l_n^{-\gamma_k} \\ &\sim -\frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) + (x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}}) L^{**}(n) l_n^{-\gamma_k}, \end{aligned}$$

com  $L^{**}(n)$  função de variação lenta, pelo que

$$u_n^{(k)}(x) \sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) + (x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}}) L^{**}(n) l_n^{-\gamma_k}. \quad (4.20)$$

Analisando a expressão anterior, constatamos que se  $l_n \sim n^\alpha$ , com  $\alpha > 0$ , tal que  $x_{F^{(1)}} \geq x_{F^{(k)}}$ , obtém-se por um lado  $L^*(n) l_n^{\gamma_1 - \gamma_k} \rightarrow 0$  e por outro  $(x_{F^{(1)}} - x_{F^{(k)}}) L^{**}(n) (l_n)^{-\gamma_k} \rightarrow +\infty$ , uma vez que se tem  $\gamma_1 - \gamma_k < 0$  e  $(-\gamma_k) > 0$ . Além disso como,

$$-\gamma_k^{-1} \ln n (\ln n - 1) \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4.21)$$

resulta que  $u_n^{(k)}(x) \rightarrow +\infty$ . Por sua vez, se  $x_{F^{(1)}} < x_{F^{(k)}}$ , a forma de garantirmos que o limite de  $u_n^{(k)}(x)$  continua a ser infinito, tendo-se sempre (4.21), é exigirmos que a sucessão  $L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k}$  seja de ordem superior à sucessão  $L^{**}(n) (l_n)^{-\gamma_k}$ , e portanto,

$$\frac{L^{**}(n) (l_n)^{-\gamma_k}}{L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k}} = \frac{L^{**}(n) / L(n)}{(l_n)^{\gamma_1}} \rightarrow 0,$$

ou seja  $L^{**}(n) / L^*(n) = o((l_n)^{\gamma_1})$ , o que implica  $l_n = o\left((L^{**}(n) / L^*(n))^{1/\gamma_1}\right)$ , i.e.,  $l_n = o(L(n))$ , para uma certa função de variação lenta  $L(n)$ . Suponhamos agora que  $0 < \gamma_1 < \gamma_k$ ,  $k = 2, \dots, m$ . Neste caso as nossas leis  $H_{\gamma_k}$  são distribuições de Fréchet para mínimos, pelo que neste caso podemos tomar como constantes de atracção para mínimos (veja-se a observação 1.9),

$$a_n^{(k)} \sim A_k n^{\gamma_k} L_k(n) \quad \text{e} \quad b_n^{(k)} \sim B_k n^{\gamma_k} L_k(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4.22)$$

onde  $A_k > 0$ ,  $B_k \in \mathbb{R}$  e  $L_k(\cdot)$  é função de variação lenta, para cada  $k = 1, \dots, m$ . Considerando (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) e, uma vez que  $\gamma_1 < \gamma_k$  e  $n^{\gamma_1}$  é de ordem inferior a  $n^{\gamma_k}$ , podemos deduzir de forma

similar a seguinte expressão assintótica para  $u_n^{(k)}(x)$ :

$$\begin{aligned} u_n^{(k)}(x) &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) - B_k n^{\gamma_k} L_k(n) L^{**}(n) (l_n)^{-\gamma_k} \\ &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) - B_k \left(\frac{n}{l_n}\right)^{\gamma_k} L(n), \end{aligned}$$

com  $L^*(n)$  e  $L(n)$  funções de variação lenta. Logo, para  $B_k < 0$  tal que  $l_n = o(n)$ , ou seja  $(-B_k)^{-1} l_n = o(n)$ , com  $k = 2, \dots, m$ , temos a garantia que

$$-B_k \left(\frac{n}{l_n}\right)^{\gamma_k} L(n) \rightarrow +\infty,$$

o que por si só é suficiente para que se tenha  $u_n^{(k)}(x) \rightarrow +\infty$ . Finalmente consideremos o caso em que existe algum  $\gamma_k$ , tal que  $\gamma_1 < 0 < \gamma_k$ . Pelos cálculos anteriores e usando novamente as expressões assintóticas das constantes de atracção para máximos em (4.15) e para mínimos em (4.14) e (4.22), deduz-se

$$\begin{aligned} u_n^{(k)}(x) &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) + \frac{(x_{F(1)} - B_k n^{\gamma_k} L_k(n)) L^{**}(n)}{l_n^{\gamma_k}} \\ &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) - B_k n^{\gamma_k} L_k(n) L^{**}(n) l_n^{-\gamma_k} \\ &\sim L^*(n) (l_n)^{\gamma_1 - \gamma_k} x - \frac{\ln n}{\gamma_k} (\ln n - 1) - B_k \left(\frac{n}{l_n}\right)^{\gamma_k} L(n), \end{aligned}$$

onde  $L^*(n)$  e  $L(n)$  são funções de variação lenta, pelo que, tal como no caso anterior, se  $l_n = o(n)$  e  $B_k < 0$ , para cada  $k = 2, \dots, m$ , resulta que  $u_n^{(k)}(x)$  tende para  $+\infty$ .

Estabelecidas condições suficientes para que  $u_n^{(k)}(x)$  seja um infinitamente grande positivo, observemos que as leis estáveis dominadas, no numerador da sucessão  $V_{n_k}(x)$  definida em (4.12), satisfazem, para  $k = 2, \dots, m$  e quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} (u_n^{(k)}(x)) + \beta_n^{*(k)} \right) &= \left[ H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(k)} (u_n^{(k)}(x)) + \beta_n^{*(k)} \right) \right]^{\frac{n_k}{n}} \\ &\rightarrow G_0^{p_k} (+\infty) = 1. \end{aligned}$$

Por sua vez, as leis dominadas, no denominador verificam, também para  $k = 2, \dots, m$ ,

$$H_{\gamma_k}^{n_1} \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) = \left[ H_{\gamma_k}^n \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right) \right]^{\frac{n_1}{n}} \rightarrow 1^{p_1} = 1,$$

pelo que se obtém a seguinte convergência para o segundo  $\prod$  - produto em (4.2),

$$\prod_{k=1}^m \frac{H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right)}{H_{\gamma_k}^{n_1} \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right)} = 1 \times \prod_{k=2}^m \frac{H_{\gamma_k}^{n_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right)}{H_{\gamma_k}^{n_1} \left( \alpha_n^{*(1)} x + \beta_n^{*(1)} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Finalmente, para provar que  $U_{n_k}(x)$  em (4.13) converge para um, comecemos por observar que, para cada  $k$ -ésimo sistema, se  $l_n$  verificar (4.8) então também verifica

$$\frac{l_n}{p_k n} (p_k n)^{\frac{p_k n}{l_n}} e_{[p_k n]} = o(1),$$

onde  $n_k \sim p_k n$ ,  $[p_k n]$  é a parte inteira de  $(p_k n)$  e  $e_{[p_k n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_{[p_k n]}(x)| \rightarrow 0$ .

Por outro lado, relembre-se pelo teorema (2.1), que  $\rho_{n_k}(x)$  é tal que

$$\begin{aligned} n_k \rho_{n_k}(x) &\sim n_k \frac{l_n}{n_k^2} \varepsilon_{n_k} \left( a_{n_k}^* x + b_{n_k}^* \right) n_k^{\frac{n_k}{l_n}} + o(\xi_{n_k}) \\ &\sim p_k^{-2} \cdot \frac{l_n}{n} \varepsilon_{[p_k n]} \left( a_{[p_k n]}^* x + b_{[p_k n]}^* \right) (p_k n)^{p_k \frac{n}{l_n}} + o(\xi_{[p_k n]}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

com  $\xi_{[p_k n]}$  definida como em (2.20). A convergência uniforme para zero de  $\varepsilon_{[p_k n]}(\cdot)$ , no suporte das leis estáveis para mínimos  $H_{\gamma_k}$ , garantem que  $n_k \rho_{n_k} \left( u_n^{(k)}(x) \right) \rightarrow 0$ , para a sucessão  $u_n^{(k)}(x)$  definida em (4.11). Como por sua vez, se tem

$$H_{\gamma_k} \left( \alpha_n^{*(k)} \left( u_n^{(k)}(x) \right) + \beta_n^{*(k)} \right) \rightarrow 1,$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , resulta que  $U_{n_k}(x) \rightarrow 1$ , pelo que é válido o limite

$$F_n \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) = \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( 1 - F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G_0^{p_1}(x),$$

ou seja,

$$R_n \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - G_0^{p_1}(x),$$

como pretendíamos demonstrar. ■

### 4.3 Modelo Limite para a Fiabilidade de Sistemas Série-Paralelo, Regulares e não Homogéneos

Mais uma vez a relação entre o máximo e o mínimo permite adaptar com facilidade o resultado anterior para um sistema constituído por  $m$  sistemas série-paralelo, dispostos em série, onde os tempos de vida das componentes nos diferentes  $k$ -sistemas, com  $k = 1, \dots, m$ , são independentes mas não identicamente distribuídos e o tempo total de vida do sistema se define agora por

$$X = \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n_k} \left( \max_{1 \leq j \leq l_i} X_{ij}^{(k)} \right) \right\}, \quad n_k, n, m \in \mathbb{N}.$$

O resultado é formulado no próximo teorema, também apenas para o caso  $\gamma_k \neq 0$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ .

**Teorema 4.2** *Considerem-se para cada  $k = 1, 2, \dots, m$ , com  $m$  natural e fixo, f.d.  $F^{(k)}$ , pertencentes ao domínio de atracção para máximos de leis  $G_{\gamma_k}(x)$ ,  $\gamma_k \neq 0$ , i.e., existem sucessões  $a_{n_k}^{(k)} > 0$  e  $b_{n_k}^{(k)} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que*

$$\left[ F^{(k)} \left( a_{n_k}^{(k)} x + b_{n_k}^{(k)} \right) \right]^{n_k} = G_{\gamma_k}(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$

onde  $\varepsilon_{n_k}(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , quando  $n_k \rightarrow +\infty$  e  $G_{\gamma_k}(x)$  definida por (1.5). Assuma-se ainda que

$$\sum_{k=1}^m n_k = n, \quad \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_k > 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^m p_k = 1.$$

Dada uma sucessão de inteiros positivos  $l_n$ , tal que

$$\frac{l_n}{n_k} n_k^{\frac{n_k}{l_n}} e_{n_k} = o(1),$$

onde  $e_{n_k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon_{n_k}(x)|$  e que satisfaça ainda as condições:

1.  $l_n \sim n^\alpha, \alpha > 0$  e  $x^{F^{(1)}} \geq x^{F^{(k)}}$ , com  $k = 1, \dots, m$ , ou  $l_n = o(L(n))$ , para uma certa função de variação lenta  $L(n)$ , caso  $\gamma_1 < \dots < \gamma_m < 0$ ;
2.  $(-B_k)^{-1} l_n = o(n)$ , com  $B_k \in \mathbb{R}^-$  e  $k = 2, \dots, m$ , se  $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m$ ;
3.  $(-B_k)^{-1} l_n = o(n)$ , com  $B_k \in \mathbb{R}^-$  e  $k = 2, \dots, m$ , caso  $\gamma_1 < \dots < \gamma_m$ , onde existe pelo menos um  $k$ , tal que  $\gamma_1 < 0 < \gamma_k$ ,

então existem sucessões  $\alpha_n^{(1)} > 0$  e  $\beta_n^{(1)} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ , tais que, para um sistema regular e não-homogéneo, organizado por  $m$  sistemas série-paralelo (dispostos em série), cada um dos quais constituído por  $n_k$  subsistemas em série de  $l_n$  componentes em paralelo, as sequências de funções de distribuição e de funções de fiabilidade, convenientemente normalizadas, satisfazem

$$F_n^* \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) = 1 - \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H_0^{p_1}(x),$$

e,

$$R_n^* \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) = \prod_{k=1}^m \left[ 1 - \left( F^{(k)} \left( \alpha_n^{(1)} x + \beta_n^{(1)} \right) \right)^{l_n} \right]^{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - H_0^{p_1}(x),$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e onde  $H_0^{p_1}(x) = H_0(x - \ln p_1)$ . Além disso, podemos tomar  $\alpha_n^{(1)}, \beta_n^{(1)}, a_n^{*(1)}$  e  $b_n^{*(1)}$  definidos como em (2.10), (2.11) e (2.12) respectivamente.





# Bibliografia

- [1] Anderson, C.W. (1971). *Contributions to the Asymptotic Theory of Extreme Values*, Ph.D. Thesis, University of London.
- [2] Anderson, C.W. (1976). “Extreme value theory and its approximations”, *Proc. Symp. Reliability Technology*, U.K., Atomic Energy Authority, Bradford.
- [3] Balkema, A.A. and de Haan, L. (1972). “On R. von Mises condition for the domain of attraction of  $\exp(-e^{-x})$ ”, *Annals Math. Statist.*, **43**, 1352-1354.
- [4] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Probability Models. Holt Rinehart and Winston, Inc., New York.
- [5] Canto e Castro, L. (1986). *Velocidade de Convergência em Teoria de Valores Extremos*, Dissertação de Mestrado, Fac. Ciências, Lisboa.
- [6] Canto e Castro, L. (1992). *Sobre a Teoria Assintótica de Extremos*, Dissertação de Doutorado, Fac. Ciências, Lisboa.
- [7] Chernoff, H. and Teicher, H. (1965). “Limit distributions of the minimax of independent identically distributed random variables”, *Proc. Americ. Math. Soc.*, **116**, 474-491.
- [8] Cohen, J.P. (1982a). “The penultimate form of approximation to normal extremes”, *Adv. Appl. Prob.*, **14**, 324-339.
- [9] Cohen, J.P. (1982b). “Convergence rates for the ultimate and penultimate approximations in extreme value theory”, *Adv. Appl. Probab.*, **14**, 833-854.
- [10] Darling, D. A. (1955), “The Cramer-Smirnov test in the parametric case”, *Ann. Math. Stat.*, **26**, 1 – 20.

- [11] Davis, R.A. (1982b). “The rate of convergence in distribution of the maxima”, *Statistica Neerlandica*, **36**, 31-35.
- [12] De Haan, L. (1970). *On regular Variation and its applications to the weak convergence of sample extremes*, Math Centre Tract 32, Amsterdam.
- [13] De Haan, L. (1984). “Slow variation and characterization of domains of attraction”, em J. Tiago de Oliveira (ed.), *Statistical Extremes and Applications*, Reidel Publishing, Dordrecht, 31–48.
- [14] De Haan, L. and Resnick, S. I. (1996). “Second order regular variation and rates of convergence in extreme theory”, *Ann. of Probab.*, **24**, 97-104.
- [15] De Haan, L. e Stadtmüller, U. (1996). “Generalized regular variation of second order”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **61**, 381–395.
- [16] Dekkers, A. L. M., De Haan, L. e Einmahl, J. H. J. (1989). “A moment estimator for the index of an extreme-value distribution”, *Ann. Statist.*, **17**, 4, 1833–1855.
- [17] Dietrich, D., De Haan, L. e Husler, J. (2002). “Testing extreme value conditions”, *Extremes*, **5**, 71–85.
- [18] Draisma, G., De Haan, L., Peng, L. e Pereira, T. T. (1999). “A bootstrap-based method to achieve optimality in estimating the extreme-value index”, *Extremes*, **2**, 367–404.
- [19] Drees, H., De Haan, L., Li, D. e Pereira, T. T. (2006). “Approximations to the tail empirical distribution function with applications to testing extreme value conditions”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3498–3538.
- [20] Durbin, J. (1973), “Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated”, *Ann. Stat.*, **1**, 2, 279–290.
- [21] Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928). “Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **24**, 180-190.
- [22] Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. New-York: Willey, 2nd edition.

- [23] Goldie, C.M. and Resnick, S. I. (1988). “Distributions that are both subexponential and in the domain of attraction of an extreme value distribution”, *Adv. Appl. Prob.*, **20**, 706-718.
- [24] Gomes, M.I. (1984). “Penultimate limiting forms in extreme value theory”, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, 71-85.
- [25] Gomes, M.I. e Pestana, D. (1987). “Nonstandard domains of attraction and rates of convergence”, In L. Puri et al. (eds), *New perspectives in theoretical and applied statistics*, Wiley, 467-477.
- [26] Gomes, M.I. and Haan, L. de, (1999). “Approximation by Penultimate Extreme Value Distributions”, *Extremes*, **2**, 71-85.
- [27] Gnedenko, B. W. (1943). “Sur la distribution limite du terme maximum d’une serie aleatoire”, *Ann. of Math.*, **44**, 432-453.
- [28] Hall P. (1979). “On the rate of convergence of normal extremes”, *J. Appl. Probab.*, **16**, 436-439.
- [29] Hüsler, J. e Li, D. (2006). “On testing extreme value conditions”, *Extremes*, **9**, 69–86.
- [30] Kaufmann, E. (2000). “Penultimate Approximations in Extreme Value Theory”, *Extremes*, **3**, 39-55.
- [31] Kolowrocki, K. (1993). *On a Class of Limit Reliability Functions for Series-Parallel and Parallel-Series Systems*. Monograph. Maritime University Press, Gdynia.
- [32] Kolowrocki, K. (2004). *Reliability of Large Systems*. Elsevier, Amsterdam - Boston - Heidelberg - London - New York - Oxford - Paris - San Diego - San Francisco - Singapore - Sydney - Tokyo.
- [33] Laio, F. (2004). “Cramer-von Mises and Anderson-Darling goodness of fit tests for extreme value distributions with unknown parameters”, *Water Resources Research*, **40**, W09308, doi:10.1029/2004WR003204.
- [34] Mises, R. von (1936). “La distribution de la plus grande de n valeurs”, *Rev. Math. Union Interbalkanique*, **1**, 141-160.
- [35] Reis, P. and Canto e Castro, L. (2009). “Limit Model for the Reliability of Regular and Homogeneous Series-Parallel Systems”, *Revstat*, **7**, 3, 227-243.

- [36] Resnick, S.I. (1971). "Tail equivalence and its applications", *J. Appl. Prob.*, **8**, 135-156.
- [37] Resnick, S.I. (1971). "Products of distribution functions attracted to extreme value laws", *J. Appl. Prob.*, **8**, 781-793.
- [38] Resnick, S.I. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer-Verlag, New-York.
- [39] S eneta, E. (1976). *Regularly Varying Functions*. Lecture Notes in Mathematics, 508, Springer, Berlin.
- [40] Smirnow, N. W. (1949). *Predielnyje Zakony Raspredielenija dla Czlienow Wariacjonnogo Riada*. Trudy Matem. Inst. Im. W. A. Stieklowa, 25.
- [41] Smith R. L. (1982). "The asymptotic distribution of the strength of a series-parallel system with equal load-sharing", *Ann. Prob.*, **10**, 1, 137-171.
- [42] Smith R. L. (1982). "Uniform rates of convergence in extreme value theory", *Adv. Appl. Prob.*, **13**, 533-547.
- [43] Smith R. L. (1983). "Limit theorems and approximations for the reliability of load-sharing systems", *Adv. Appl. Prob.*, **15**, 304-330.
- [44] Smith R. L. (1987). *Approximations in extreme value theory*, Technical Report n<sup>o</sup> 205, Center for Stochastic Processes, University of North Carolina.
- [45] Uzg oren N.T. (1954). "The asymptotic development of the distribution of the extreme values of sample", *Studies in Mathematics and Mechanics Presented to R.von Mises*, academic press, 346-353.