UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO 10.º ANO, USANDO A CALCULADORA GRÁFICA

Carlos Agostinho Antunes da Silva

Mestrado em Educação
Área de Especialização em Didáctica da Matemática
2009

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

FUNÇÕES QUADRÁTICAS NO 10.º ANO, USANDO A CALCULADORA GRÁFICA

Carlos Agostinho Antunes da Silva

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Mestrado em Educação

Área de Especialização em Didáctica da Matemática

2009

Resumo

Esta investigação visa analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora da gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas dos alunos. A metodologia insere-se no paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa, baseada em estudos de caso. Foram seleccionados, de uma escola secundária, uma turma do 10.º ano de escolaridade (científico-humanístico) e dois alunos desta turma. A recolha de dados recorreu a duas entrevistas clínicas realizadas individualmente a dois alunos, uma antes e outra depois da unidade de ensino "Funções quadráticas", complementada por observação de aulas, registos áudio, resoluções de tarefas de investigação e relatórios escritos produzidos pelos alunos.

Os resultados obtidos mostram que os alunos revelam diversas dificuldades na compreensão do conceito de função em diferentes representações e essas dificuldades não foram superadas após a realização da unidade de ensino. Também permitem concluir que os alunos sabem identificar as propriedades da função nas representações gráfica e algébrica revelando, portanto, que reificaram algumas propriedades da função afim e da função quadrática. A realização de tarefas de investigação, por parte dos alunos, possibilitou a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. No entanto, na resolução de problemas, alguns utilizaram principalmente processos algébricos e usaram processos gráficos apenas quando a natureza da tarefa proporciona. Outros usaram também processos gráficos com a ajuda da calculadora. Os processos matemáticos utilizados durante o trabalho investigativo foram influenciados pela natureza da tarefa, conhecimento adquirido, experiência prévia e competência em usar a calculadora gráfica.

Palavras-chave: Aprendizagem das funções, resolução de problemas, tarefas de exploração e investigação e calculadora gráfica.

Abstract

This study aims at analyzing how the resolution of exploratory and research tasks using the graphic calculator contributes to the understanding and learning of quadratic functions by students. The methodology is based on the interpretative paradigm and follows a qualitative approach on case studies. A grade-ten class (science and humanities course) from a secondary school and two students from this class were selected. The collecting of data involved two clinical interviews to two students separately: one before the teaching unit “Quadratic functions”, the other afterwards. Class observation, audio recordings, resolution of research tasks and written reports by the students also contributed to the data collection.

The results show that the students revealed several difficulties in what regards understanding the concept of function in different representations. Those difficulties were not overcome after the study unit was taught. They also indicate that students were able to identify the properties of the function in the graphic and algebraic representations and thus understood some of the properties of the linear and quadratic functions. When students carried out research tasks, they used several distinctive mathematical processes. However, when solving problems, some used mainly algebraic processes and only when the nature of the task allowed it, did they use graphic processes. Others also used graphic processes with the help of the graphic calculator. The mathematical processes used during research were influenced by the nature of the task, the previous practice and ability to use the graphic calculator.

Key words: Function learning, problem solving, exploratory and research tasks, and graphic calculator.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte pela forma disponível, rigorosa e interessada com que orientou este trabalho, e especialmente pelas sugestões e comentários tecidos ao longo das várias fases.

Aos alunos por colaborarem, e particularmente pelo tempo que investiram nas entrevistas.

Ao Conselho Executivo da Escola pela disponibilidade.

Ao meu pai, a quem tive de dedicar menos tempo e atenção, pela sua compreensão.

À minha mulher Graça pelo incentivo e apoio em todos os momentos.

Às minhas filhas, Margarida e Catarina, pela alegria, força e inspiração que me deram para a concretização do estudo.

Índice

Índice de anexos

Índice de figuras

Capítulo 1

Introdução

Este primeiro capítulo apresenta as razões que motivaram a realização desta investigação centrada no ensino das Funções, e descreve o problema, os objectivos e as questões a que pretendo responder. Refere, também, as orientações curriculares actuais para o ensino deste tópico e apresenta, no final, a organização do presente trabalho.

1.1. Motivação e pertinência da investigação

O tema das funções é um dos mais importantes da Matemática do ensino secundário. Os conhecimentos sobre funções são, como refere o programa de Matemática A, "indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos" (Ministério da Educação, 2001, p. 26). O programa apela ao estudo deste tema numa perspectiva de trabalho intuitivo com "funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia e de outras disciplinas" (Idem, p. 26). Segundo este mesmo programa, o desenvolvimento do tópico das funções tem de ser suportado em tarefas, propostas individualmente ou em grupo, "que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros" (Idem, p. 2).

Os diversos tipos de representação, incluindo as representações gráficas, têm vindo a ocupar uma importância crescente nas actividades matemáticas na sala de aula. Como refere o NCTM (2007), "O termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Uma função admite várias representações, pois pode ser representada por uma frase escrita, por uma fórmula algébrica, por uma tabela com valores de entrada e de saída ou por um gráfico. Cada uma destas representações dá informações específicas sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função. É indispensável que os alunos trabalhem com cada uma das representações e que também traduzam informação de umas para outras, uma vez que se complementam. Para coordenar as várias representações é necessário que os alunos desenvolvam um trabalho intenso com funções no qual irão enfrentar muitos obstáculos (Duval, 2002). E, igualmente, à medida que trabalham com representações múltiplas de funções que os alunos poderão desenvolver uma melhor compreensão sobre funções (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990).

As funções encontram-se com frequência ao longo do currículo, designadamente em Aritmética, Álgebra, Geometria e Probabilidades. Apesar da sua importância, os alunos, de um modo geral, apresentam muitas dificuldades ao trabalharem com elas. Em parte, essas dificuldades relacionam-se com a necessidade de utilizar múltiplas representações. Para maior esclarecimento sobre a origem destes problemas e para a realização de uma prática profissional mais informada, é fundamental reflectir sobre o porquê das dificuldades que os alunos evidenciam ao trabalhar com funções e verificar a forma como eles lidam com as diferentes representações de funções e com a tradução entre elas, bem como identificar algumas dificuldades na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora gráfica. Surgiu-me, então, interesse, enquanto professor, desenvolver uma investigação sobre a aprendizagem das funções quadráticas do 10.º ano de escolaridade. Com esta investigação espero contribuir para o meu próprio desenvolvimento pessoal e profissional e também suscitar reflexões e interrogações por parte de outros investigadores e professores.

1.2. Problema, objectivos e questões da investigação

Tenho vindo a constatar ao longo da minha actividade profissional que, depois do estudo de algumas funções e as suas representações gráficas, os alunos têm alguma tendência em considerar função qualquer representação num referencial (por exemplo rectas verticais e circunferências). Tenho, também, verificado que, de um modo geral, os alunos que se envolvem em manipulações repetitivas de símbolos antes de desenvolverem uma base sólida, são muitas vezes incapazes de evoluir e compreender os novos conceitos. Constato, ainda, que muitos alunos sentem dificuldades em compreender o significado dos símbolos, a linguagem formal própria das funções e todas as regras e procedimentos que lhe estão associados. Igualmente, vários alunos, revelam dificuldades na tradução da representação de uma função noutra representação e, com alguma frequência, não são capazes interpretar correctamente os resultados obtidos num contexto específico, como por exemplo o valor $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ da função *f*, num contexto de semi-realidade. Ao mesmo tempo reconheço que os resultados dos alunos não têm sido bons, como é do conhecimento público, e que esta situação parece ser para todos nós uma fatalidade. Estou em crer que é possível, com professores mais bem preparados, proporcionar aos alunos uma aprendizagem com compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Para lidar com as dificuldades apresentadas, aliadas à dimensão e à heterogeneidade das turmas, é preciso elaborar estratégias que conduzam a uma maior motivação e interesse, por parte dos alunos, para a Matemática.

De modo a compreender melhor as dificuldades de aprendizagem das funções dos alunos decidi considerar, para o estudo da investigação, o tópico Funções quadráticas, nos contextos de "Matemática pura" e de "semi-realidade", usando a calculadora gráfica. Decidi, assim, formular o seguinte problema e nele identificar três questões de investigação:

Problema. Analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade.

Questões de investigação:

1. Que compreensão mostram os alunos do conceito de função, em diferentes representações (algébrica, gráfica e numérica)?
2. Como interpretam os alunos, antes e depois de uma unidade de ensino sobre funções quadráticas, propriedades das funções em diferentes representações? Em particular como traduzem informação de uma representação para outra?
3. No fim da unidade de ensino, que representações e processos utilizam os alunos na resolução de problemas com funções quadráticas, no contexto de (a) "Matemática pura"? e (b) "semi-realidade"?

Esta investigação centra-se na realização de uma unidade de ensino e compreende um conjunto de experiências de aprendizagem diversas. É usada uma sequência de tarefas de carácter investigativo e exploratório, de modo que o aluno aplique e reveja processos já aprendidos, desenvolva desembaraço nos processos e compreenda os conceitos, conseguindo assim uma aprendizagem mais sólida.

Pretendo utilizar como actividade matemática o processo de resolução de problemas e investigações matemáticas no contexto de semi-realidade e "Matemática pura". As tarefas a propor de resolução de problemas, com funções quadráticas, no contexto de semi-realidade envolvem problemas concretos ligados a várias Ciências e a situações reais. As tarefas de "Matemática pura" relacionam-se com o estudo de funções, de condições e de transformações, por processos algébricos, gráficos ou numéricos. Cada tarefa é proposta numa aula e no final os alunos, individualmente ou em grupo, elaboram um relatório com os resultados obtidos e as conclusões a que chegaram. Segue-se depois a apresentação e a discussão dos resultados a todos os alunos da turma e ao professor. Salienta-se que o programa de Matemática A faz referência explícita à realização de actividades de investigação matemática pelos alunos (Ministério da Educação, 2001). Nestas actividades o aluno é chamado a agir, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e respostas, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2006).

1.3. Organização da investigação

Esta investigação está organizada em sete capítulos. Neste primeiro capítulo é referida a pertinência do estudo, tendo por base uma reflexão sobre as minhas motivações enquanto professor e a importância da realização de investigação nesta área da Matemática e é indicado o objectivo do estudo. O segundo capítulo aborda várias teorias cognitivas relativas à aprendizagem dos conceitos matemáticos, com especial relevo para a aprendizagem das funções. No terceiro capítulo apresento a planificação da unidade de ensino e descrevo os objectivos principais de cada tarefa. O capítulo quatro explicita as opções metodológicas, as principais características dos participantes do estudo e as razões para a sua escolha. São referidos, também, os procedimentos adoptados relativamente à recolha e análise dos dados. Os capítulos cinco e seis descrevem os resultados obtidos de cada um dos alunos estudados, antes e depois da unidade de ensino, e a evolução das suas aprendizagens. Por fim, no capítulo sete, são apresentados os principais resultados do estudo e algumas recomendações que resultam do trabalho realizado. Este capítulo termina com uma reflexão pessoal sobre a concretização do estudo e os seus contributos para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Capítulo 2

Aprendizagem dos conceitos matemáticos

Este capítulo é dedicado à explicitação de algumas teorias cognitivas relativas à aprendizagem dos conceitos matemáticos, com especial relevo para a aprendizagem das funções. Começa por debruçar-se sobre a dupla natureza dos conceitos matemáticos e a teoria da reificação de Sfard. Em seguida, aborda a importância do simbolismo e uma concepção *proceptual* da Matemática, proposta por Gray e Tall, e, uma perspectiva alternativa para a aprendizagem das funções, desenvolvida por Slavit. Por último, apresenta a análise cognitiva das dificuldades de compreensão da Matemática, segundo Duval. Este capítulo pretende responder parcialmente ao problema do estudo, uma vez que integra o contributo de várias teorias sobre a aprendizagem das funções.

2.1. A natureza dual de concepções matemáticas e a teoria da reificação

Ideias gerais. Sfard (1991) apresenta um quadro teórico que considera ser possível conceber a maioria dos conceitos matemáticos de duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objectos, e operacionalmente, como processos. Defende que estas duas abordagens, embora aparentemente incompatíveis, são na realidade complementares. É possível mostrar que os processos de aprendizagem e ou resolução de problemas consistem numa complexa inter-relação entre as concepções operacional e estrutural das noções matemáticas. Através de exemplos históricos e à luz de teorias cognitivas, sugere que a concepção operacional é o primeiro passo na aquisição de noções matemáticas. Com base na análise dos estádios de formação dos conceitos, conclui que a transição de operações computacionais para objectos abstractos é um processo longo e difícil, realizável em três passos:

interiorização, condensação e reificação.

As preocupações de natureza educacional que se prendem com a tomada de consciência das dificuldades dos estudantes na construção dos conceitos matemáticos, conduziram ao desenvolvimento desta perspectiva. Segundo Sfard, durante as últimas décadas foram investidos muitos recursos para a melhoria do ensino da Matemática, mas os resultados estão, ainda, longe do satisfatório devido às dificuldades por vezes insuperáveis dos estudantes e à constante falta de sucesso no ensino. Refere também que a Matemática, pela sua inacessibilidade, parece ultrapassar todas as outras disciplinas científicas, pelo que tem que haver algo realmente especial e único no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático. De modo a compreender esta situação, a autora considera que há uma questão que deve ser colocada: "Como é que a abstracção matemática difere de outros tipos de abstracções na sua natureza, do modo de desenvolvimento e nas suas funções e aplicações?" (Sfard, 1991, p. 2). Para responder a esta questão, aponta a necessidade de uma teoria unificada que envolva simultaneamente a Filosofia e Psicologia da Matemática, e que dê a mesma atenção à *mathematical thinking*, como processo, e ao *mathematical thought*, como produto. Para isso, procura "um *insight* filosófico sobre a natureza dos conceitos matemáticos, para compreender os processos psicológicos no seio dos quais tais conceitos emergem"(Sfard, 1991, p. 2).

Sfard menciona que são usadas palavras diferentes para designar os constructos matemáticos, conforme a perpectiva assumida num determinado momento. Assim, usa a palavra conceito (por vezes substituída por noção) sempre que uma ideia matemática expresse a sua forma "oficial" – como um constructo teórico dentro do universo formal de conhecimento ideal. Peloseu lado, a palavra concepção representa o grupo completo de representações internas e associações evocadas pelo conceito – duplicado do conceito no universo interno e subjectivo do conhecimento humano.

Na sua perspectiva, o mundo da Matemática expressa-se por descrições formais e representações, e está provido de certos objectos com determinadas características que, por sua vez, estão sujeitos a certos processos orientados por leis bem definidas. O matemático descreve propriedades de conjuntos e números do mesmo modo que o cientista apresenta a estrutura das moléculas ou dos cristais, por isso se pode dizer que são mais as semelhanças do que as diferenças entre a Matemática e as outras ciências. Porém, os constructos matemáticos avançados são totalmente inacessíveis aos nossos sentidos – só podem ser vistos com o olhos da nossa mente. Efectivamente, quando desenhamos uma função ou escrevemos um número, estamos a enfatizar que o signo no papel não é mais do que uma das muitas representações possíveis de uma entidade abstracta que por si só nem pode ser vista nem pode ser tocada. Sfard refere que "o ser capaz de ver estes objectos invisíveis parece ser uma componente essencial da capacidade matemática e a falta desta capacidade pode ser uma das principais razões para que a Matemática surja praticamente impermeável a tantas mentes bem-formadas" (1991, p. 3). O tipo de concepção que a autora designa de estrutural prevalece na Matemática moderna, onde são aceites definições matemáticas que revelam uma abordagem bastante diferente. Por exemplo, simetria pode ser concebida como uma propriedade estática de uma figura geométrica (concepção estrutural), mas também como um tipo de transformação que se refere a processos, algoritmos e acções em vez de objectos (e reflecte uma concepção operacional da noção).

Para Sfard, a capacidade de ver uma entidade matemática como um objecto significa ser capaz de o referir como se ele fosse uma coisa real – uma estrutura estática que existe algures no espaço e no tempo; também significa ser capaz de reconhecer a ideia "à primeira vista" e de a manipular como um todo, sem entrar em detalhes. Comparativamente, interpretar uma noção como um processo implica considerá-la como uma entidade potencial que se manifesta através de uma sequência de acções. Assim, a concepção estrutural é estática, instantânea e integrativa e a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada. Estas concepções, apesar de terem características diferente são, na realidade, complementares e indispensáveis para compreender a Matemática.

A figura 2.1 apresenta alguns exemplos de noções matemáticas, onde se evidencia a dualidade de concepções (processo-objecto). Por exemplo, a função $y = 3x^4$, da figura 2.2, pode ter três representações distintas com diferentes abordagens. O programa de computador, por um lado, parece corresponder a uma concepção operacional, pois apresenta a função como um processo computational e não como uma entidade unificada. Por outro lado, na representação gráfica, as infinitas componentes da função são combinadas numa linha contínua, podendo ser interpretadas como um todo integrado; então, o gráfico interpreta uma concepção estrutural. Por sua vez, a representação algébrica pode ser interpretada facilmente de ambos os modos: pode ser explicada operacionalmente, como uma descrição concisa de alguma computação, ou estruturalmente, como uma relação estática entre duas grandezas.

	Concepção estrutural	Concepção operacional
Função	Conjunto de pares ordenados (Bourbaki, 1934)	Processo computacional ou um método bem definido de obter um sistema a partir de um outro (Skemp, 1971)
Simetria	Propriedades de uma figura geométrica	Transformação de uma figura geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita	0 ou qualquer número que resulte da adição de um com um número natural (contar)
Número racional	Par de inteiros (um elemento de um conjunto de pares especialmente definido)	Divisão de inteiros
Circunferência	O conjunto de todos os pontos equidistantes de um dado ponto	Rotação de um compasso em torno de um ponto fixo

Figura 2.1 - Noções matemáticas do tipo estrutural e operacional (Sfard, 1991, p. 5)

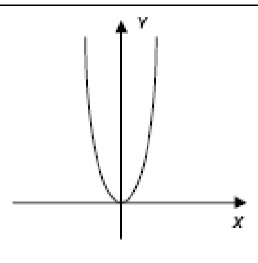
Gráfico	Expressão algébrica	Programa de computador
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y*X 50 NEXT I 60 Y = 3*Y

Figura 2.2 - Diferentes representações de uma função (Sfard, 1991, p. 6)

Segundo Sfard (1991), na literatura matemática, psicológica e filosófica há uma vasta referência a diversas dicotomias do universo matemático. Por exemplo, para alguns investigadores, a Matemática pode ser dividida em abstrata e algorítmica (Halmos) ou em declarativa e processual (Anderson), ou ainda em dialética e algorítmica (Henrici). Esta última categorização tem, talvez, mais em comum com a dualidade processo-objecto do que as outras. Assim, enquanto a Matemática algorítmica trata principalmente de todo o tipo de processos computationais, a Matemática dialéctica é uma ciência lógica rigorosa onde as afirmações ou são verdadeiras ou falsas, e ou se contesta as propriedades especificadas ou não. Duas concepções diferentes do pensamento matemático foram evidenciadas por Piaget (1970): o figurativo, que se refere a visualizar ”estados momentâneo e estático”, correspondendo assim à concepção estrutural; e o operativo que ”negocia... com transformações...”, o que tem muito a ver com a abordagem operacional. A autora refere que a dualidade de concepções operacional e estrutural parece não ser muito diferente das dicotomias acima referidas. Contudo, esta dualidade tem duas características fundamentais, que a distingue dessas dicotomias, designadamente: a sua natureza ontológica-psicológica combinada; e a sua complementaridade. Assim considera que estamos a lidar com uma dualidade, e não com uma dicotomia, uma vez que estas abordagens, operacional e estrutural, são muito diferentes mas inseparáveis, como facetas da mesma coisa.

Perspectiva histórica. As concepções operacionais precedem as estruturais no seu processo de formação e a concepção estrutural parece ser mais abstracta, pelo que deve ser considerada como o estádio mais avançado do desenvolvimento do conceito. Sfard (1991), ao fazer uma análise histórica, constata que a maioria das ideias da Matemática computational originou processos e não objectos. Por exemplo, as noções de número ou de função foram operacionalmente concebidas antes das definições estruturais e representações.

Durante muito tempo, o significado de número, que origina um processo de contar, restingiu-se ao de “número natural” e surgiu principalmente no contexto da medição de processos. Foi assinalado pelos investigadores, designadamente Piaget, que uma criança aprende quando conta. Por exemplo, para responder à pergunta “Quantos objectos existem?”, ela constroi algo, um-a-um, com as palavras “um”, “dois”, “três”,… e com os objectos de um determinado conjunto como resposta a essa pergunta, mas sem referir o último número, usado neste processo, como sendo o resultado. Sempre que se faz esta pergunta, a criança repete o mesmo procedimento de contar, pois o que tem significado é o processo de contar e não o resultado abstracto, o que evidencia claramente as raízes operacionais dos números naturais. O significado do termo “número” foi generalizado várias vezes no decurso dos últimos três mil anos, pois períodos longos permitiram aos matemáticos realizar algumas manipulações especiais com tipos de números já reconhecidos, antes de serem capazes de separar um resultado abstracto de novos processos e reconhecer as entidades resultantes como um novo género de objectos matemáticos. Por exemplo, a razão de dois inteiros foi inicialmente considerada como uma descrição para medir um processo em vez de um número. A propósito, alguns indícios de abordagem puramente operacional de números racionais foram assinalados pelos investigadores, nomeadamente Carpenter (1980).

A descoberta pitagórica da impossibilidade de representar o comprimento da diagonal de certos quadrados em termos de números inteiros e suas razões foi celebrada com surpresa e confusão. Muito tempo decorreu até os matemáticos conseguirem separar a noção de número como processo de medir e reconhecer que o comprimento de qualquer segmento representa um número, mesmo que esse número não possa ser determinado de forma “habitual”. Eventualmente, o conjunto dos números foi novamente alargado, incluindo os números irracionais positivos, inteiros e fraccionários, surgindo novos tipos de processos computacionais para novos números. O termo “número negativo” e o símbolo $\sqrt{-1}$ foram inicialmente considerados abreviaturas e operações numéricas “sem sentido”, só depois é que os matemáticos se foram acostumando a estes elementos estranhos mas úteis no cálculo.

A evolução histórica da noção de número é um processo cíclico, em que a mesma sucessão de eventos pode ser observada repetidas vezes e sempre que um novo tipo de número surja. Estas repetições estão representadas esquematicamente na figura 2.3, e cada segmento periódico representa um prolongado processo, que se desenvolve em três fases (Sfard, 1991): (i) um estádio pré-conceptual onde os matemáticos estão a usar certas operações sobre os números já conhecidos e onde as manipulações rotineiras são apenas tratadas como processos; (ii) um longo período com uma abordagem predominantemente operacional, durante a qual um novo tipo de número começa a emergir fora dos processos familiares (neste estádio é introduzido um nome para o novo número, que não passa de um nome fictício para realizar certas operações em vez de ter o significado de um objecto “real”); e (iii) a fase estrutural, quando o número em questão é eventualmente aceite como um objecto matemático legítimo.

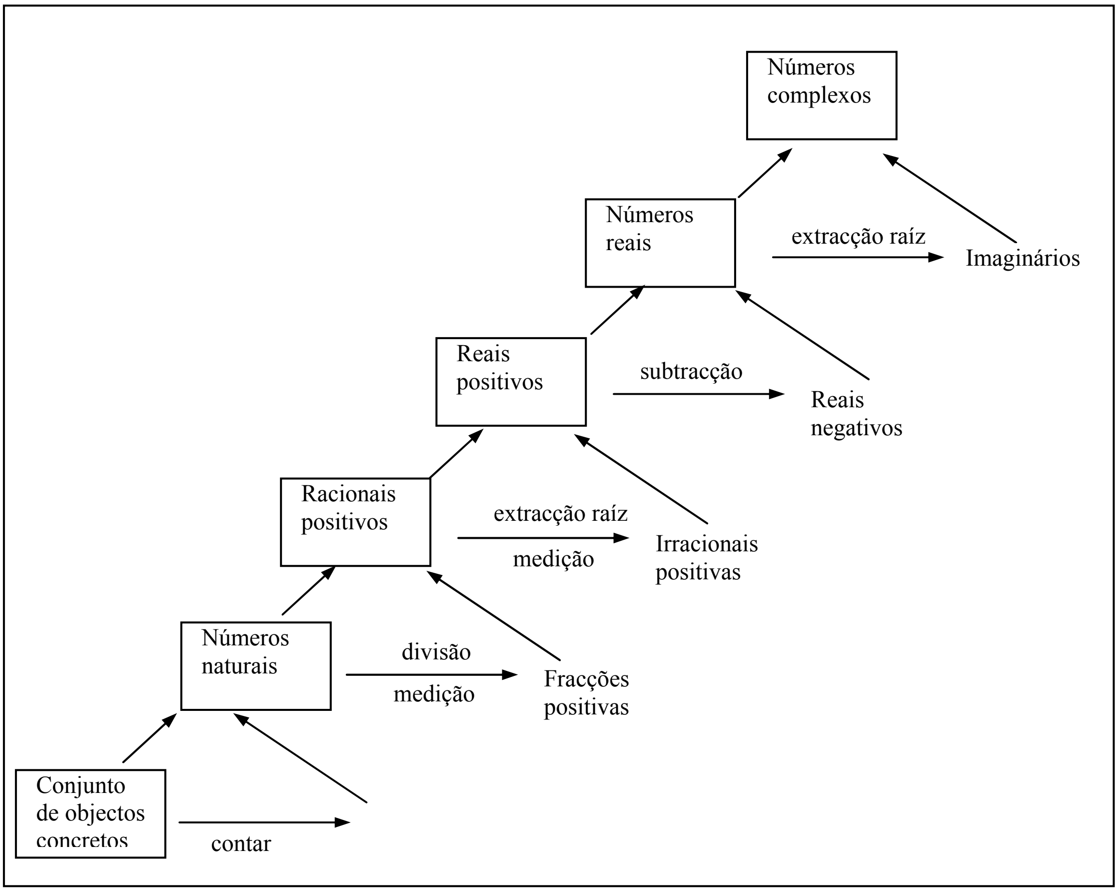


Figura 2.3 - Desenvolvimento do conceito de número (Sfard, 1991, p. 13)

A história dos números é uma longa cadeia de transições de concepções operacionais para estruturais, em que os processos foram repetidas vezes elaborados e aceites como objectos abstractos, que posteriormente foram convertidos – compactados ou reificados, tornando-se novos construtos estáticos auto-suficientes.

Para Sfard, este modelo pode ser generalizado e adequado a outras ideias matemáticas, como, por exemplo, a de função. Quando o termo ”função” apareceu pela primeira vez de uma forma explícita (num trabalho de Leibniz, em 1692), o simbolismo algébrico inventado ganhou popularidade e foi gradualmente aceite na comunidade matemática. A noção de função foi relacionada inicialmente a processos algébricos e o novo termo foi usado para denotar “uma quantidade composta de [uma] variável e constantes” (por Jean Bernoulli em 1718), ou “expressão analítica” (por Euler em 1747). Assim, de certo modo, o conceito de função resumia-se às manipulações algébricas de variáveis, portanto, algo entre o resultado e o próprio processo. O problema principal da não reificação das definições de função residiu, exactamente, no facto de estas se basearem na noção de variável, que era bastante vaga. Mais tarde, em 1755, Euler sugeriu outra definição, de modo a evitar a noção de variável: "uma quantidade só deverá ser chamada função se depender de outra quantidade de tal modo que se o posterior é alterado o anterior sofre modificação" (Sfard, 1991, p. 15).

O conceito de variável foi atravessando diversas interpretações sem que nenhuma lhe tenha permitido atingir a posição de objecto matemático legítimo. Usando a terminologia da autora, o conceito acabaria por ser rejeitado por ser inerentemente dependente do tempo e, por isso, não reificável, como se verifica, por exemplo, na seguinte observação de Frege:

> Recentemente a palavra 'variável' é predominante nas definições [de função]. Por conseguinte, a Análise teria que lidar com um processo no tempo, desde que tome em conta as variáveis. Mas de facto não tem nada a ver com o tempo; a sua aplicabilidade para ocorrências no tempo é irrelevante… Assim, quando tentamos fazer menção a uma variável, descobrimos alguma coisa que varia no tempo e, deste modo, não pertence à Análise pura. E ainda deve ser possível apontar a uma variável que não envolve algo estranho à Aritmética, se as variáveis são todas objecto de Análise. (Frege, 1970, pág. 107, citado em Sfard, 1991, p. 15)

Falhadas as numerosas tentativas a traduzir a intuição operacional na definição estrutural, procurava-se ainda uma solução. Esta solução foi iniciada pela ideia de correspondência arbitrária de Dirichlet. Finalmente, o conceito de função chega à sua fase puramente estrutural, pelo grupo Bourbaki, com a definição de conjunto de pares ordenados.

Resumindo, o conceito de função foi evoluindo gradualmente ao longo dos últimos três séculos, de uma concepção operacional para outra estrutural. Sfard refere que esta evolução é uma longa luta pela reificação: os vários processos são convertidos em entidades estáticas compactas para se tornarem unidades básicas de uma nova teoria, num nível mais elevado. A abordagem estrutural será a fase mais avançada do desenvolvimento conceptual.

Perspectiva psicológica. Nas palavras de Sfard, a formação de uma concepção estrutural é um processo, prolongado e bastante difícil, pelo que devem ser analisadas as fontes destas dificuldades, tendo em conta o ponto de vista psicológico Para descrever os processos de aprendizagem, defende um modelo de formação conceptual semelhante ao que foi possível construir com base em exemplos históricos.

Esta abordagem pode levantar algumas objecções. A primeira prende-se com o facto de, com base na perpectiva histórica, parece haver um curso natural de acontecimentos nos processos que dificilmente são considerados espontâneos. Certamente, a aprendizagem matemática, especialmente a um nível mais avançado, não terá lugar sem a intervenção externa (do professor, do livro), e pode ser dependente de um estímulo (método pedagógico) que tenha sido usado. A precedência das concepções operacionais sobre as estruturais é apresentada como uma característica invariante do processo de aprendizagem individual, que parece ser bastante imune à mudança externa de estímulos. A segunda objecção está relacionada com o modelo de aquisição de conceitos poder ser visto como resultado de uma projecção automática da história sobre a psicologia. Mas, vários autores, como Piaget (1970), defendem as origens operacionais das noções matemáticas sem qualquer referência da história. Porém, recentes estudos ajustaram as ideias originais de Piaget e introduziram novos conteúdos. Considerando que a aproximação estrutural é mais abstracta que a operacional e, se do ponto de vista filosófico os números e funções são basicamente processos ou se fazer coisas é o único modo para "contactar" (*get in touch*) com construtos abstractos, então devemos esperar que para chegar a uma concepção estrutural é necessário previamente haver uma compreensão operacional.

Segundo Sfard, a aprendizagem não se processa de igual modo em todos os indivíduos, mas parece ser possível identificar nos diferentes processos de aprendizagem algo que lhes é comum. Assim, o processo de formação de conceitos, e de acordo com a perspectiva de desenvolvimento histórico, surge com três estádios que correspondem a três fases de estruturação: interiorização, condensação e reificação.

Na fase de interiorização, um estudante familiariza-se com os processos que eventualmente originam um novo conceito. Por exemplo, o processo de contar conduz aos números naturais, a subtracção leva aos números negativos, ou as manipulações algébricas transformam-se em funções. Estes processos e operações são realizados em objectos matemáticos de nível inferior e, gradualmente, o estudante vai aprendendo a executá-los. No caso de números negativos, a interiorização é a fase em que um estudante fica apto ao executar subtrações e, no caso de funções, é quando a noção de variável é aprendida e se adquire a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente.

Na fase de condensação, os processos anteriores são compactados, dando origem a entidades autónomas e facilmente manipuláveis. Nesta fase, um estudante fica mais capaz de pensar como um todo sobre um determinado processo, sem sentir necessidade de entrar em detalhes. O estudante desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo, em termos de entradas e saídas, sem necessidade de atender ao que medeia estes dois estados. Este é o ponto em que se dá o nascimento 'oficial' de um novo conceito. Nesta fase, considera-se que há evolução quando se verifica que o estudante é capaz de combinar facilmente um processo com outros já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações de um conceito. No caso dos números negativos, a condensação pode ser manifestada pela capacidade do estudante executar manipulações de aritmética, como por exemplo adicionar ou multiplicar números negativos e positivos. No caso das funções, quanto mais o estudante for capaz de trabalhar com uma função como um todo, mais avançado está no processo de condensação, sendo capaz de "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar a função inversa de uma dada função.

A fase de condensação dura enquanto a nova entidade permanecer firmemente ligada a um certo processo. Só quando um estudante for capaz de conceber a noção como um objecto acabado é que podemos dizer que o conceito foi reificado. Então, a reificação é definida como uma súbita capacidade para ver algo familiar de uma forma totalmente nova. Assim, enquanto que a interiorização e a condensação são mudanças graduais e quantitativas, em vez de qualitativas, a reificação é um salto instantâneo: o processo solidifica num objecto, numa estrutura estática. A nova entidade é logo destacada do processo que a produziu e começa a adquirir o seu significado pelo facto de pertencer a uma nova categoria. A fase da reificação é o ponto onde começa a interiorização de conceitos de nível superior. No caso de números negativos, a reificação dá-se quando o estudante for capaz de os tratar como um subconjunto do anel dos inteiros (sem necessariamente estar atento à definição formal de anel). No caso das funções, o conceito é reificado pelo estudante quando este consegue compreender as diversas representações que uma função pode assumir (passando facilmente de uma representação a outra), quando é capaz de resolver equações funcionais (onde as 'incógnitas' são funções), quando revela "capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e finalmente pelo reconhecimento que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções.

O esquema, da figura 2.4, apresenta de uma forma resumida o modelo de desenvolvimento conceptual – teoria da reificação de Sfard. Como evidencia o esquema, cada um dos patamares não pode ser alcançado sem que o anterior tenha sido ultrapassado. Quando o estudante evolui nas fases de *interiorização, condensação* e *reificação,* aprende a ver um objecto matemático como tal e não apenas como processo, deixando de confundir um objecto matemático com a sua representação.

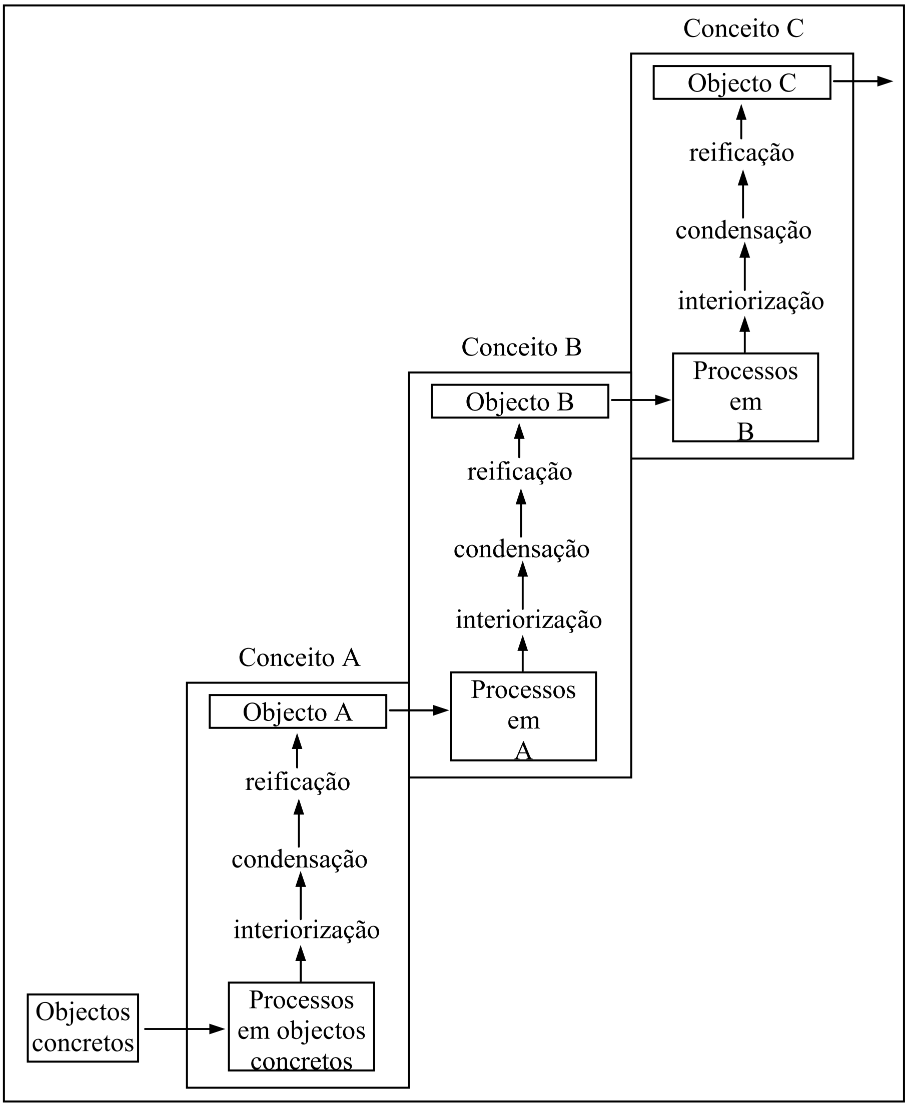
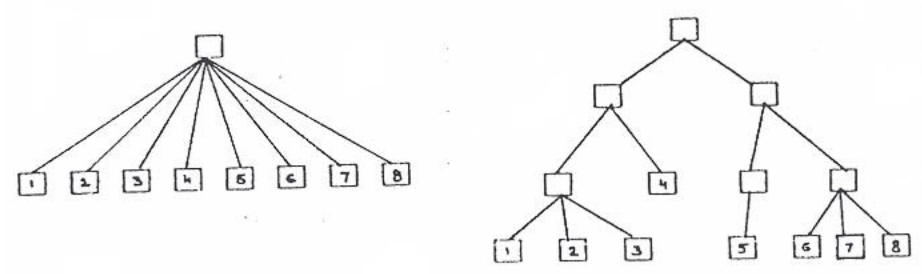


Figura 2.4 - Modelo geral da formação do conceito (Sfard, 1991, p. 22)

O papel das concepções operacional e estrutural no processo cognitivo. O modelo de formação de conceitos aponta que certas noções matemáticas devem ser consideradas como completamente desenvolvidas se forem apenas concebidas operacional e estruturalmente. Contudo, Sfard coloca a questão se o que é entendido com recurso quer operacional quer estruturalmente, pode ser obtido apenas através de uma das abordagens.

Teoricamente seria possível fazer quase toda a Matemática de uma forma puramente operacional, isto é, poderíamos seguir de processos elementares para processos ao mais alto nível e, até mesmo, para processos mais complexos sem se referir a qualquer género de objectos abstractos. Ao analisar a história verifica-se que durante muito tempo a Matemática era trabalhada quase deste modo, mas os processos computacionais ao serem apresentados de modo puramente operacional não eram susceptíveis de serem tratados como objectos. Como referem Davis e Hersh "a Matemática do Egipto, da Babilónia e do antigo Oriente era do tipo algorítmico… Só nos tempos modernos é que encontramos a Matemática com pouco ou nenhum conteúdo algorítmico e que podemos chamar puramente dialéctica ou existencial" (Davis e Hersh,1983, p. 182, citado em Sfard, 1991, p. 23).

A Matemática do século XX parece então ser, verdadeiramente, atravessada pela perspectiva estrutural. Para uma melhor compreensão do modelo de formação de conceitos, Sfard aborda a teoria dos esquemas cognitivos. Para a autora, a representação estática do objecto estreita a informação operacional num todo compacto e torna o esquema cognitivo numa estrutura mais favorável. A formação de uma concepção estrutural significa a reorganização dos esquemas cognitivos através da acumulação de novas camadas – transformando agregados sequenciais em estruturas hierárquicas. Considerando os esquemas da figura 2.5, o A é sequencial, nivelado e não pode ser acrescentado novos itens, contrariamente o B pode ser reorganizado numa estrutura mais prolongada e estreita. Assim, os objectos matemáticos, representados pelos "nós" superiores do esquema hierárquico são o resultado da reificação. Cada um deles serve como um único item no catálogo da nossa mente, e funciona como simples imagem ou símbolo, que pode ser tomado à primeira vista e, talvez, usado em certas fases da resolução de problemas. No esquema B há mais espaço disponível para inserir nova informação e como resultado, a aprendizagem é mais efectiva e mais significante e, também, os processos de recuperação são mais rápidos.



Esquema A Esquema B

Figura 2.5 - Diferente organização do esquema hierárquico (Sfard, 1991, p. 27)

Nas palavras de Sfard, parece que toda a actividade mental seria mais difícil sem os objectos abstractos. Como não somos super-computadores, temos limitações de funcionamento da nossa memória. Por isso, os processos mais complexos são facilitados se os partirmos em partes pequenas e comprimirmos cada parte num todo mais manejável. Estas entidades cognitivas compactas protegem efectivamente o funcionamento da memória contra o transbordo e servem como um tipo de caminho-estação nas nossas viagens intelectuais. Por seu lado, em certas fases da formação do conhecimento, a ausência de uma concepção estrutural pode impedir o desenvolvimento adicional, isto é, se a informação aumenta, o esquema hierárquico pode ficar saturado e, praticamente, impedido de qualquer enriquecimento. A figura 2.6 resume as características principais das duas abordagens.

	Concepção operacional	Concepção estrutural
Características gerais	A entidade matemática é concebida como um produto de certo processo ou é identificada com o próprio processo	A entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objecto real
Representações internas	É apoiada por representações verbais	É apoiada por imagem visual
O seu lugar no desenvolvimento de conceitos	Desenvolve-se na primeira fase da formação do conceito	Desenvolve-se a partir da concepção operacional
O seu papel nos processos cognitivos	É necessária mas não suficiente para uma eficaz aprendizagem e resolução de problemas	Facilita todos os processos cognitivos (aprendizagem, resolução de problemas, etc.)

Figura 2.6 - As concepções operacional e estrutural – resumo (Sfard, 1991, p. 33)

A dificuldade inerente da reificação. De acordo com o modelo apresentado, a reificação de um determinado processo acontece simultaneamente com a interiorização dos processos de nível superior. Por exemplo, no caso de números negativos, a reificação torna-se provável quando as operações algébricas neste tipo de números são, pelo menos parcialmente, interiorizadas. Analogamente para ver uma função como um objecto é necessário tentar manipulá-la como um todo: não há razão para transformar um processo em objecto a não ser que tenhamos alguns processos de nível superior realizados sobre este processo mais simples. Mas há aqui um círculo vicioso: por um lado, sem uma tentativa de interiorização de nível superior, não haverá reificação; por outro lado, a existência de objectos sobre os quais são realizados processos de nível superior, parece indispensável para a interiorização - sem tais objectos os processos deixam de ter sentido. Por outras palavras: "a reificação de nível inferior e a interiorização de nível superior são pré-requisitados uma da outra" (Sfard, 1991, p. 31).

A reificação, que traz uma compreensão relacional, é difícil atingir e requer muito esforço, e pode surgir quando menos se espera, às vezes num súbito *flash*. Na procura de uma melhoria na educação da Matemática, a reificação deve ser estimulada junto dos estudantes. Para Sfard (1991), tendo em conta o modelo de formação conceptual apresentado, os novos conceitos não devem ser introduzidos aos estudantes em termos estruturais e a concepção estrutural não deve ser exigida enquanto não se tornar indispensável para os estudantes.

2.2. A importância do simbolismo e uma concepção *proceptual* da Matemática

Gray e Tall (1994) analisam as estratégias usadas pelos alunos e a sua forma de pensar na resolução de problemas de aritmética elementar. Neste estudo, uma das preocupações principais é, também, examinar a importância do simbolismo na Matemática.

Para explicar o desempenho dos alunos nos processos matemáticos, os autores assumem uma concepção da natureza das actividades matemáticas relacionando estreitamente as ideias de procedimento e processo. Assim, usam o termo processo num sentido geral para designar a representação cognitiva de uma operação matemática, como é o caso num *processo de adição*. Pelo seu lado, usam procedimento para exprimir uma sequência de passos que conduzem a outro passo, ou seja, um algoritmo específico para implementar um processo. Por exemplo *contar todos* (refere-se à contagem de dois conjuntos de objectos) pode ser visto como um procedimento para executar o processo de adição.

Gray e Tall (1994) recordam que as *Normas* do NCTM (1991) reflectem a necessidade de compreender melhor o desempenho dos alunos. Recordam, também, que os currículos nacionais de vários países passaram a fazer a distinção entre procedimentos que os alunos precisam de adquirir para fazerem determinadas coisas e os conceitos que devem conhecer para operarem com os procedimentos. Parece haver uma dicotomia entre as coisas "para fazer" e as coisas "para saber", mas Gray e Tall advogam que esta dicotomia deve ser vista de uma perspectiva diferente, uma vez que os procedimentos matemáticos centram-se na manipulação rotineira de objectos, que são representados por materiais concretos, símbolos escritos ou imagens mentais. Isto é relativamente fácil de avaliar se estes procedimentos estão a ser executados de forma adequada e o desempenho em tarefas semelhantes serve como medida do conhecimento destas habilidades.

Para Gray e Tall (1994), os símbolos têm um papel fundamental no desenvolvimento conceptual, pois permitem lidar com quantidades para calcular, resolver problemas e fazer prognósticos. O símbolo é percepcionado pelos sentidos e pode ser escrito, falado, visto ou ouvido. Mas, do ponto de vista teórico, o que é importante na representação física é a forma como ele é interpretado pelos diferentes indivíduos ou pelo mesmo indivíduo em momentos diferentes. Para os autores, o mesmo símbolo pode ser concebido como representando um processo ou um objecto. Então os símbolos são usados de uma forma ambígua, como por exemplo:

1. O símbolo 5 + 4 pode representar o processo de adição, por exemplo contar todos, e o conceito de soma (5 + 4 são 9);
2. A representação $f(x) = x^2 - 3$ serve ao mesmo tempo para calcular o valor da função para valores específicos, evocando o processo, e a função como um todo, apresentando assim o objecto.

Apesar dos matemáticos raramente falarem sobre esta questão, Gray e Tall consideram que "a ambiguidade na interpretação do simbolismo de um modo flexível está na raiz do pensamento matemático com sucesso" (1994, p. 120). Colocam a hipótese de a falta de reconhecimento desta ambiguidade conduzir à utilização, de forma absurda, de procedimentos que precisam ser recordados com mnemónicas separadas do seu próprio contexto, como por exemplo fazer a multiplicação antes da adição ou o produto de dois negativos é um positivo ou ainda trocar de membros e mudar de sinal. Admitem como conjectura que a utilização dual da notação como processo e conceito habilita o mais capaz "a dominar os processos de Matemática numa relação de sujeição aos conceitos” (1994, p. 121). Mencionam, ainda, que os matemáticos, em vez de lidarem conscientemente com a dualidade de conceito e processo, usam esta forma ambígua do simbolismo para os processos e os produtos.

Gray e Tall (1994) consideram que a ambiguidade do simbolismo expressa na dualidade flexível entre processo e conceito não é completamente utilizada se a distinção entre ambos se mantiver sempre presente e por isso entendem que é necessário que haja uma combinação cognitiva de processo e conceito. Para tal, usam o termo *procept* para se referirem ao conjunto de processo e conceito representados pelo mesmo símbolo. E “um *procept elementar* é uma amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático e um *símbolo* que é utilizado para representar simultaneamente o processo e o objecto” (p. 121).

Para mostrar esta crescente flexibilidade de uma dada noção e a versatilidade dos processos de pensamento, Gray e Tall apresentam uma extensão da definição: um *procept* consiste numa colecção de *procepts* elementares que têm o mesmo objecto. Referem, por exemplo, que o *procept* 6 inclui o processo de contar 6 e uma colecção de outras representações tais como 3 + 3, 4 + 2, 2 + 4, 2 × 3, 8 - 2, etc. Todos estes símbolos são usados para representar o mesmo objecto e indicam também a forma flexível de como o 6 pode ser decomposto e reorganizado usando diferentes processos. E consideram os *procepts* como a raiz da capacidade humana para manipular ideias matemáticas em aritmética, álgebra e outras teorias que envolvam a manipulação de símbolos (Tall et al, 2001).

Os investigadores sublinham que se pensarmos num símbolo, por exemplo “3”, verificamos que ele enriquece o seu significado através da ligação a aspectos relativos a procedimentos (contar) e a aspectos conceptuais onde o mesmo objecto é representado por diferentes símbolos (1 + 1+ 1, 2 + 1 ou 4 - 1) e que fazem parte do *procept* 3. E os autores designam estas diferentes formas de combinar e dar riqueza à estrutura conceptual do símbolo 3, através da combinação dos pensamentos conceptual e processual, por pensamento *proceptual.* Assim, o pensamento *proceptual* é caracterizado pela capacidade de comprimir fases na manipulação de símbolos de modo a que estes sejam vistos como objectos que podem ser decompostos e reorganizados de forma flexível (Gray & Tall, 1994).

O estudo empírico realizado seguiu uma abordagem quantitativa e nele participaram 72 alunos com idades compreendidas entre os 7 e os 12 anos, de duas escolas inglesas. Como instrumento de recolha de dados foram usadas entrevistas, seis meses após o início do ano lectivo e durante um período de 2 meses. No seu decurso foram propostas várias tarefas com três categorias de problemas de adição e de subtracção, para estudar as estratégias usadas e observar a forma de pensar dos alunos na resolução desses problemas de aritmética elementar.

Nos seus resultados, Gray e Tall (1994) observaram que há diferenças nas estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de aritmética. Verificaram que os alunos com melhor desempenho usavam estratégias flexíveis para produzir novos factos a partir de factos já conhecidos (pensamento conceptual), os menos capazes tinham apenas um procedimento de contagem que crescia, cada vez mais lentamente, à medida que os problemas se tornavam mais complexos (pensamento processual) e entre estes extremos os menos capaz, que tentavam produzir novos factos a partir de um conjunto de factos conhecidos, podem acabar por seguir um caminho inventivo, mas sinuoso que só tem sucesso com um grande esforço. O alto de risco que os alunos correm neste processo pode conduzi-los de novo aos procedimentos de contagem. Consideram que "aquilo que podia ser um espectro contínuo de realização tende a ser uma dicotomia em que os que começam por falhar acabam por permanecer no pensamento processual" (p. 132). E referem que "esta bifurcação de estratégia - entre o uso flexível do número como objecto ou processo e a fixação na contagem processual - é considerada um dos factores mais significantes na diferença entre sucesso e fracasso" (p. 132), a qual designaram por *divisão proceptual*.

Segundo Gray e Tall (1994), esta divisão *proceptual* tem um efeito cumulativo e o encapsular *proceptual*, que corresponde à transformação de um processo num conceito, ocorre em várias fases construindo assim uma complexa hierarquia de relações. Esta situação é reflectida no exemplo da figura 2.7, onde o processo de *contar* torna-se no conceito de número, o processo de *contar sobre* (refere-se à contagem de dois conjuntos em que se considera o primeiro um *procept* e depois a contagem do segundo como um procedimento) torna-se no conceito de soma, o processo de adição repetida torna-se no conceito produto, e assim sucessivamente. Os autores observam que os alunos com menor desempenho, que utilizam os processos, podem apenas resolver problemas no nível superior através da coordenação sequencial de processos, o que constitui para eles um processo extremamente difícil, enquanto que os alunos com melhor desempenho, que usam o pensamento *proceptual*, têm a tarefa mais facilitada.

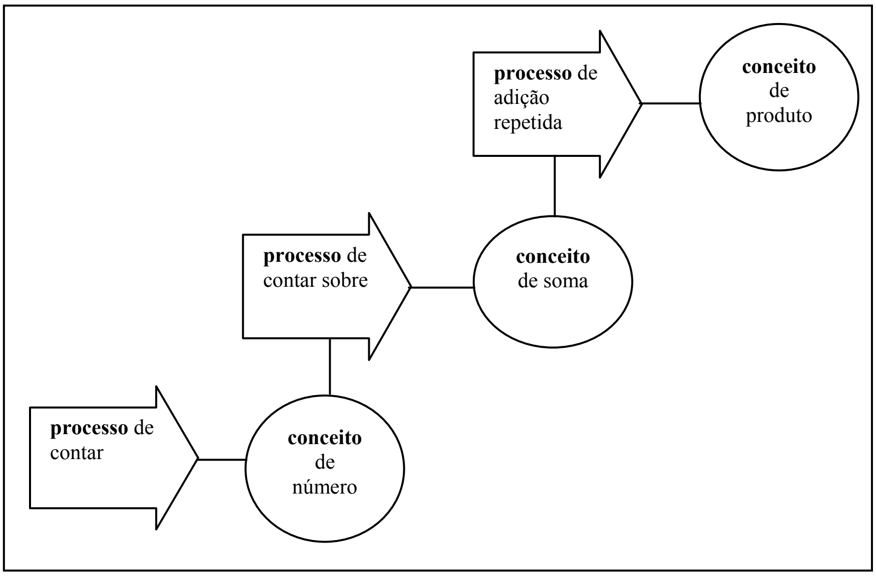


Figura 2.7 - Encapsular de ordem superior (Gray & Tall, 1994, p. 136)

Os símbolos para soma e produto representam novamente números. Assim contar, adicionar e multiplicar operam no mesmo *procept*, que pode ser decomposto em processos de cálculo quando necessário. Por isso, na opinião dos investigadores, uma concepção *proceptual*, que é uma amálgama de processo e de conceito através do uso da mesma notação, suscita o colapso da hierarquia para um único nível, no qual as operações aritméticas (processos) operam com os números (*procepts*) (fig. 2.8).

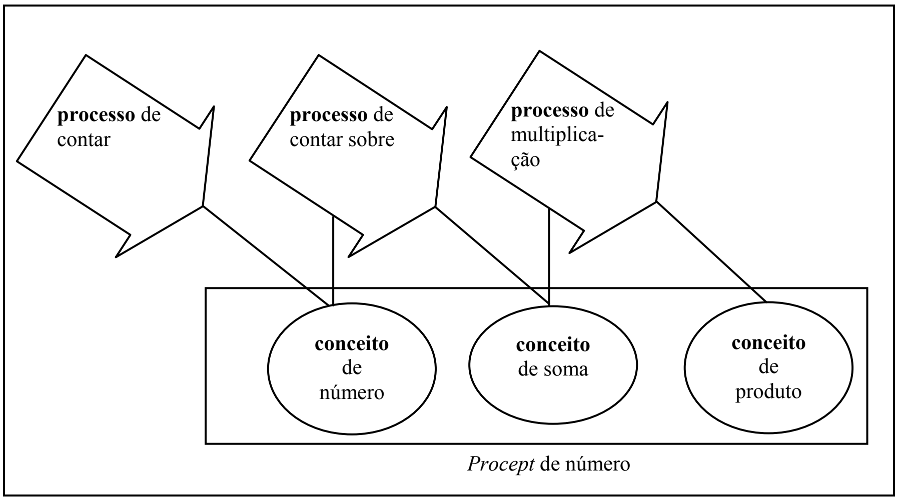


Figura 2.8 - Colapso da hierarquia nas operações com números (Gray & Tall, 1994, p. 136).

Gray e Tall (1994) consideram que esta é a forma como os alunos com melhor desempenho desenvolvem uma compreensão relacional flexível da Matemática, isto é, estabelecem uma relação significante entre noções no mesmo nível, enquanto que os alunos com pior desempenho enfrentam uma hierarquia de níveis que é mais difícil ultrapassar.

Em síntese, a teoria da dualidade entre processo e conceito, a que Gray e Tall (1994) chamam de *procept*, apoia-se em três componentes: processo, objecto matemático (ou conceito) e símbolo. Estes investigadores realçam o facto de que a representação de uma função, por exemplo $f(x) = 2x + 3$ (símbolo), diz-nos duas coisas ao mesmo tempo, nomeadamente: como calcular o valor da função para valores específicos, evocando o processo; e a função como um todo, apresentando assim o objecto. E concluem que os alunos com melhor desempenho usam o pensamento *proceptual* por mostrarem mais flexibilidade nos métodos e processos, incluindo a selecção mais apropriada de procedimentos, e os alunos com pior desempenho usam o pensamento processual por confiarem em métodos processuais de contagem, que são menos flexíveis.

2.3. Uma perspectiva alternativa para a reificação de função

Slavit (1997) apresenta e justifica uma teoria para a aprendizagem das funções que se apoia na perspectiva acção/processo/objecto de Sfard. O autor descreve uma perspectiva das funções orientada para as propriedades baseada em aspectos visuais de crescimento funcional, incluindo a visão de covariância e a visão de correspondência. Esta abordagem incide sobre funções e suas representações gráficas, com utilização ou não das calculadoras gráficas.

Slavit (1997) apoia-se na perspectiva de Sfard, segundo a qual os estudantes adquirem inicialmente uma visão orientada para a acção ou seja, centram-se nos aspectos computacionais das funções, que vêm como um processo de cálculo de uma quantidade para um valor numérico atribuído através da associação de uma determinada regra ou algoritmo. Mais tarde, a reificação desta visão conduz o aluno a uma visão orientada para um *objecto*.

Nas palavras de Slavit, as propriedades do conceito de função são todas as características associadas à definição de função e classificam-se em propriedades funcionais comuns que, por sua vez, se dividem em propriedades globais – envolvendo uma análise de toda a função – e propriedades locais – relacionadas com pares ordenados individuais. As propriedades funcionais globais incluem, por exemplo, a simetria e a periodicidade, e as propriedades locais compreendem as intersecções (zeros) e os pontos de inflexão. Contudo, segundo Slavit, há propriedades que ultrapassam esta classificação, como por exemplo a continuidade de uma função. Esta classificação sugere que as propriedades funcionais lidam mais com os aspectos de crescimento e de covariância do que com os aspectos relacionais de função.

A perspectiva das funções orientada para as propriedades trabalha com a progressiva consciencialização das propriedades específicas funcionais de crescimento, de natureza local e global, e com a capacidade de reconhecer e analisar funções. Para Slavit, esta perspectiva desenvolve-se segundo duas vertentes. Em primeiro lugar, envolve uma habilidade para perceber a equivalência de procedimentos que se realizam nos diferentes sistemas notacionais (representações gráfica, numérica e algébrica). Em segundo lugar, os estudantes desenvolvem a capacidade de generalizar procedimentos análogos nas diferentes classes e tipos de funções. Por isso, uma perspectiva das funções orientada para as propriedades evolui através da percepção das propriedades específicas funcionais de crescimento, bem como da compreensão de tipos específicos de funções que possuem essas propriedades.

As diferentes perspectivas teóricas sobre as concepções de função dos estudantes, na opinião de Slavit, não devem ser interpretadas como compartimentadas. Para o investigador, cada uma dessas perspectivas tem vertentes que se interrelacionam e a perspectiva orientada para as propriedades é apresentada neste estudo para enriquecer e ampliar essas perspectivas teóricas e não para as substituir (fig. 2.9).

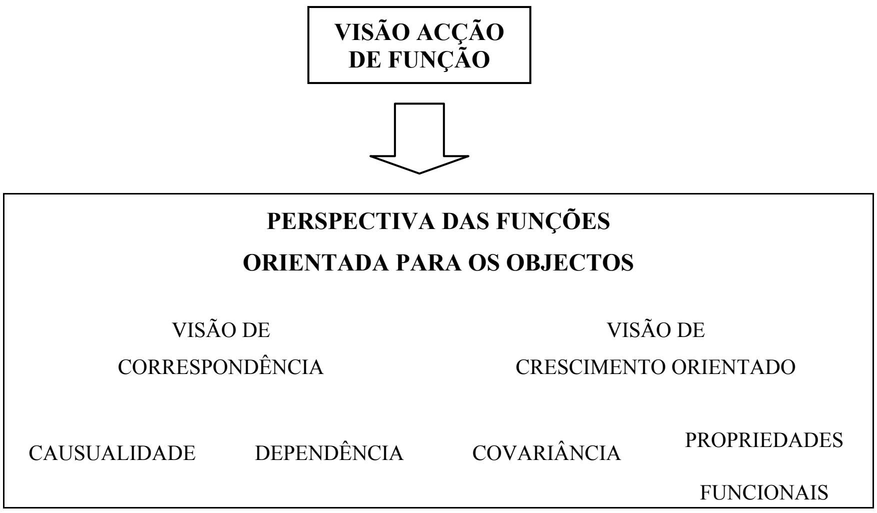


Figura 2.9 - Componentes de uma perspectiva das funções orientada para os objectos (Slavit, 1997, p. 269)

A perspectiva das funções orientada para as propriedades usa a noção de covariância para identificar as propriedades funcionais de crescimento (periodicidade, simetria, etc.) e permite definir a natureza da função em estudo. Usando essa perspectiva, o desenvolvimento de função, como um objecto abstracto, dá-se através do reconhecimento das propriedades da função ou através de uma situação familiarizada (experiência vivida anteriormente) pelo estudante. A visão de correspondência de função também pode ser discutida sob o ponto de vista de propriedades funcionais, no entanto, essas propriedades têm mais a ver com as relações entre as entradas e saídas de pares ordenados do que com crescimento funcional e covariância. Nesse caso, as propriedades de funções como inversibilidade e domínio são classificadas como relações de correspondência e as propriedades de simetria, intersecções e extremos são consideradas de comportamento de crescimento de função. Então, a covariância e a visão correspondência de função, na perspectiva orientada para as propriedades, não devem ser consideradas contrastantes ou como sendo pontos de vista distintos, mas sim como formas complementares de pensar sobre o conceito de função, como objecto matemático que possui diversas propriedades.

Este estudo seguiu uma abordagem qualitativa e assumiu uma modalidade de estudo de caso, a três participantes de uma disciplina de *Álgebra II* para alunos de muito bom desempenho de uma escola secundária. A recolha de dados decorreu ao longo de um ano, e recorreu a entrevistas, questionários, notas de campo e tarefas investigativas. Aos três participantes foram dadas tarefas, que consistiram em 44 conjuntos de quatro ou cinco cartões com representações de gráficos, equações e tabelas de funções (figs. 2.10 e 2.11, como exemplos).

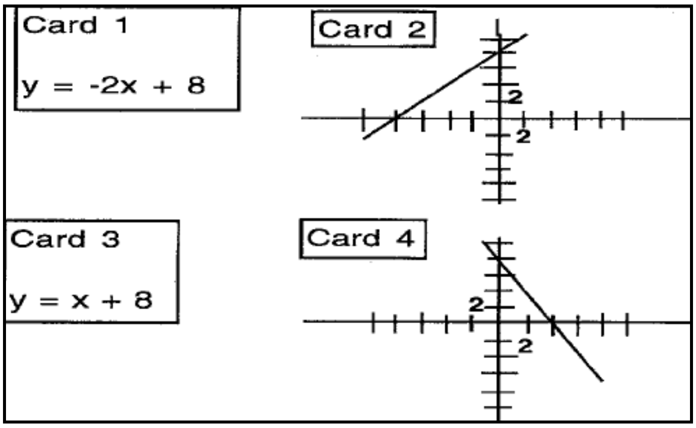


Figura 2.10 - Tarefa tradução (Slavit, 1997, p. 272)

Nuns cartões consta a mesma função, mas com representações diferentes, noutros são representadas a mesma classe de funções, noutros ainda figuram representações de funções que compartilham propriedades funcionais (como a mesma intersecção com eixo dos *yy* ou simetria), e alguns têm correspondências que não são funções.

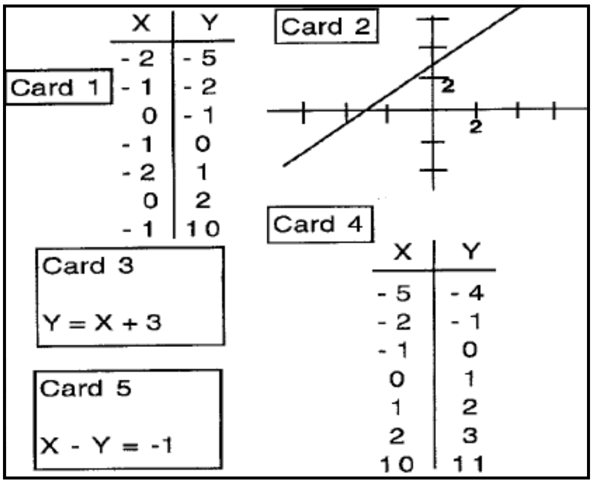


Figura 2.11. Tarefa tradução (Slavit, 1997, p. 273)

Slavit recorreu também da análise das notas de campo e do vídeo-gravador para obter dados acrescidos acerca do tipo de funções estudadas e sobre a reificação ou não do conceito de função. Durante o estudo os estudantes usaram calculadoras gráficas como ferramenta de apoio.

Na resolução das tarefas os participantes foram desafiados a discutir as eventuais semelhanças ou diferenças observadas nos cartões, com base nas estratégias de comparação local, global ou ambas. De um modo geral, os participantes utilizaram mais a estratégia local quando relacionavam o par notacional equação-numérico, e as propriedades globais quando comparavam o par gráfico-equação. Verificou-se também que ocorreram poucas mudanças de estratégia na resolução das tarefas, antes e depois das unidades de ensino das funções lineares, polinomiais e exponenciais e, segundo Slavit, parece que os sistemas notacionais serviram mais para determinar a estratégia a utilizar do que para definir a que classe de funções pertence a função em estudo.

As entrevistas permitiram ilustrar como é que os participantes reificaram o conceito de linearidade, em termos de propriedades funcionais. Por exemplo, durante uma entrevista realizada antes da unidade de ensino funções lineares, um participante foi confrontado com uma tarefa (fig. 2.10) que envolve as representações gráfica e algébrica das funções $y = x + 8$ e $y = - 2x + 8$, e constatou-se que a sua análise assentou basicamente em estratégias de verificação. Após a conclusão da unidade de ensino funções lineares, o mesmo participante foi confrontado com a tarefa da figura 2.11 (os cartões 2 e 3 são as representação gráfica e algébrica da função da função $y = x + 3$, e os cartões 4 e 5 as representações numérica e a algébrica da função $x - y = - 1$) e constatou-se que utilizou a propriedade declive, fazendo conexões entre as duas representações, para verificar o ponto de coordenadas (-3 ; 0), e não como uma propriedade da função. Nesta tarefa, as propriedades funcionais foram utilizadas nos pares de cartões que incluem um gráfico, enquanto que para pontos de propriedades locais foram utilizadas estratégias relacionando o par numérico-equação. Mais tarde, antes de iniciar a unidade de ensino funções polinomiais, foi atribuída uma nova tarefa com os cartões 3 e 4, que incluem a representação gráfica e a equação da função $y = -2x + 4$. O mesmo estudante, na sua resolução, evidenciou que reificou as propriedades funcionais da função linear, pois identificou o declive e a intersecção com o eixo dos *yy*. Consequentemente, constatou-se que alcançou uma perspectiva das funções orientada para as propriedades e construiu a noção de linearidade como combinação específica de propriedades funcionais. Relativamente aos outros participantes estudados, obtiveram resultados semelhantes em relação às funções lineares e quadráticas.

Segundo Slavit, a análise das notas de campo e do vídeo-gravador revelaram que as funções utilizadas pelos estudantes nas tarefas são elementares e com um número de propriedades limitado, restringindo assim a sua capacidade para reificação de função. Por seu lado, os dados da entrevista, obtidos depois da realização da unidade de ensino dos polinómios, revelaram também o efeito limitador das tarefas propostas e do processo de ensino ministrado. Nesta entrevista foram dadas tarefas, aos alunos estudados que consistem em 12 cartões que descrevem exemplos de funções e correspondências que não são funções, em cada uma das representações numérica, gráfica e algébrica (fig. 2.12). Foi solicitado a identificação dos exemplos de funções e de correspondências que não são funções. O autor constatou que os participantes não tiveram dificuldade na identificação das funções dadas nas representações numérica e algébrica. Contudo a compreensão dos exemplos de funções na representação gráfica foi menos clara, dado que estes exemplos têm comportamentos e propriedades que as funções elementares estudadas não têm.

Esses resultados mostram que alguns estudantes reificaram determinado tipo de funções usando a perspectiva orientada para as propriedades, mas não foi encontrada nenhuma evidência indicando que os estudantes reificaram o conceito geral de função como um objecto capaz de possuir uma grande variedade de propriedades, além das exibidas pelos funções polinomiais.

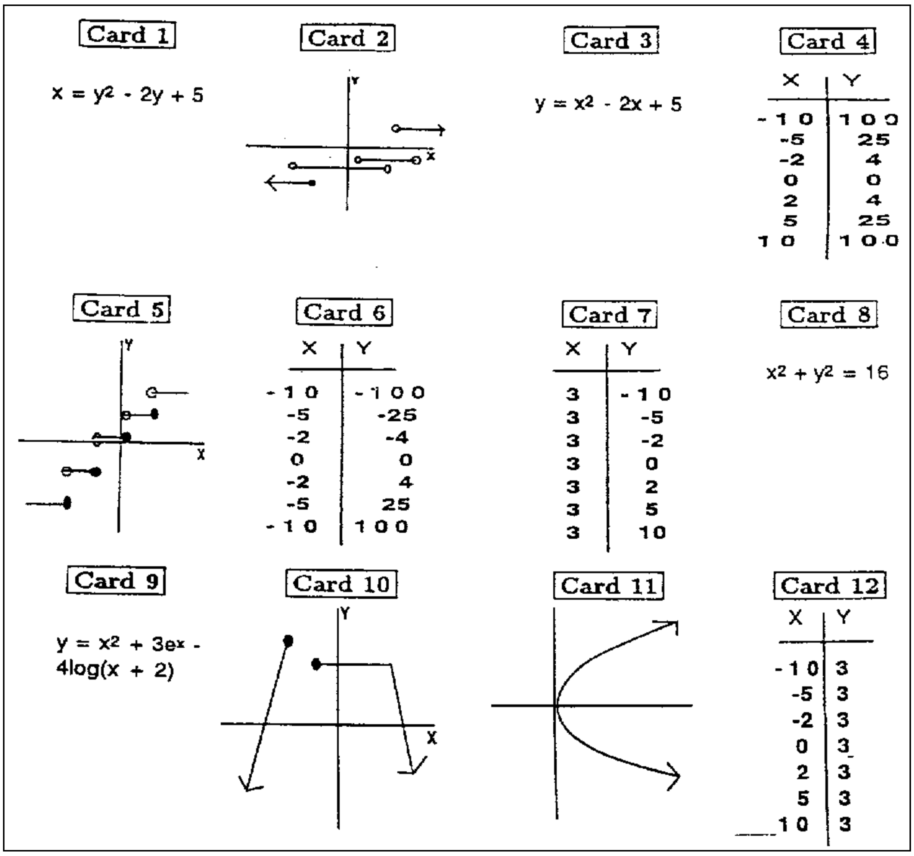


Figura 2.12 - Exemplos de correspondências que são ou não funções (Slavit, 1997, p. 276)

Segundo Slavit, noutros estudos os estudantes que utilizam as calculadoras gráficas revelaram-se mais aptos para descrever uma representação gráfica e a sua concretização depende muito do conhecimento que têm das propriedades funcionais. Por sua vez, esta investigação revela que os estudantes obtêm uma perspectiva das funções orientada para as propriedades, especialmente quando se expõem a situações que fazem uso de gráficos e tecnologias gráficas.

Os resultados deste estudo permitem concluir que o desenvolvimento de uma perspectiva das funções orientada para as propriedades é lento, uma vez que está dependente do conhecimento de diversas propriedades funcionais, dos sistemas notacionais (representações gráfica, algébrica e numérica) e das classes de funções. Conclui-se também, desta investigação, que os estudantes que estudam apenas as funções lineares e quadráticas obtêm reduzidos conhecimentos das propriedades funcionais e para eles, as funções são certamente consideradas sempre contínuas ou com comportamentos de crescimento simples (monotonia e variação de sinal) ou ainda com um ou dois zeros. Se estudam funções polinomiais, de quarto ou quinto grau, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras, então os seus conhecimentos sobre as propriedades funcionais aumentam e fortalecem uma perspectiva das funções orientada para as propriedades.

A perspectiva das funções orientada para as propriedades, descrita nesta investigação, e as outras também evidenciadas neste estudo devem, na opinião de Slavit, ser consideradas um suporte teórico para o desenvolvimento do currículo. Esta situação sugere que os tipos de funções, estudados actualmente na Matemática, sejam reexaminados de modo a permitir aos estudantes o acesso a uma ampla variedade de propriedades funcionais. Consequentemente, parece que os professores e os fomentadores de currículo devem ter em atenção a forma como os estudantes devem investigar e resolver problemas usando as propriedades funcionais específicas. Segundo Slavit, o currículo dá a ênfase às propriedades funcionais no processo de ensino e de aprendizagem e desenvolve os conhecimentos que levam os estudantes a resolver tarefas algébricas abstractas com sucesso.

2.4. A análise cognitiva das dificuldades de compreensão na aprendizagem da Matemática

Duval (2002) considera que é necessário fazer uma análise cognitiva, dando atenção à diversidade de processos matemáticos, para se compreender as dificuldades dos estudantes (muitas vezes insuperáveis), na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Na perspectiva do autor, o ensino da Matemática não tem por finalidade treinar os futuros matemáticos nem proporcionar aos estudantes ferramentas que só serão úteis anos mais tarde, mas sim contribuir para o desenvolvimento das suas capacidades de argumentar, conjecturar, analisar e visualizar. Duval, apresenta neste artigo dados que permitem discutir a natureza dos sistemas cognitivos específicos dos processos matemáticos e analisar as causas das dificuldades que os estudantes têm na aprendizagem da Matemática.

Este estudo seguiu uma abordagem quantitativa e nele participaram vários estudantes franceses de diversos níveis de ensino. Como instrumento de recolha de dados foram utilizadas várias tarefas, designadamente de tradução, reconhecimento de expressões de representações gráficas de funções e figuras geométricas, para a resolução de problemas ou demonstrações.

Duval começa por referir que a diferença entre a actividade cognitiva requerida em Matemática e noutros domínios do conhecimento não se encontra nos conceitos, mas na importância e na diversidade das representações semióticas. Sublinha ainda, que basta olhar para a história do desenvolvimento da Matemática para se constatar que a evolução das representações semióticas é uma condição essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Além dos sistemas de números, o autor considera também como representações semióticas as figuras geométricas, as notações algébricas e formais, as representações gráficas e a linguagem corrente e designa por "registos" os processos diferentes destas representações. Contudo, o aspecto mais relevante consiste na classificação dos registos em quatro tipos diferentes (fig. 2.13).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTOS MULTIFUNCIONAIS: Não podem ser usados processos algorítmicos	Linguagem natural *Associação verbal (conceptual)* *Argumentação:* *- argumentos de observação, convicções…* *- deduções válidas de definições ou teoremas*	Plano ou perspectiva geométrica de figuras (configurações de 0, 1, 2, e 3 dimensões) *Operativo e não apenas apreensão perceptiva* *Construções com régua e compasso*
REGISTOS MONOFUNCIONAIS: Os processos, na sua maioria, são algorítmicos	Sistemas de notação - numérico (binário, decimal, fraccionário…) - algébrico - simbólico (linguagens formais)	Gráficos cartesianos *Mudança de sistemas de coordenadas interpolação e extrapolação*

Figura 2.13 - Classificação de diferentes registos que são mobilizados nos processos matemáticos (Duval, 2002, p. 3)

Duval refere que, por exemplo, na resolução de problemas um registo pode dominar explicitamente o processo de resolução, porém deve haver sempre a possibilidade de passar de um registo para outro. Como característica relevante na actividade matemática, destaca a mobilização simultânea de pelo menos dois registos de representação ou a possibilidade de mudar de um registo para outro, em qualquer momento.

O autor considera dois tipos de transformações de representações semióticas diferentes: (i) tratamentos - transformações de representações que ocorrem dentro do mesmo registo, como por exemplo, resolver uma equação ou um sistema de equações; e (ii) conversões - transformações de representações que consistem na mudança de um registo sem alterar o objecto designado, por exemplo, passar da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica.

Os tratamentos dependem do sistema de representação semiótica usado. Por exemplo, os procedimentos para realizar uma operação numérica dependem do sistema de representação dos números, ou seja, os algoritmos são diferentes quando se usa uma notação decimal ou uma notação fraccionária, para os mesmos números (por exemplo: 0,20 + 0,25 =… e 1/5 + 1/4 =…). E, as conversões de representações não se reduzem apenas a tratamentos. Encontra-se muitos exemplos onde a mudança de registo é uma actividade de tradução simples (fig. 2.14) ou uma actividade mais complexa como o reconhecimento de expressões algébricas relativamente à representação gráfica correspondente de uma função (fig. 2.15).

Conjunto de pontos em que a ordenada	é maior que	a sua abcissa
y	$>$	x

Figura 2.14 - Tradução termo a termo (Duval, 2002, p. 5)

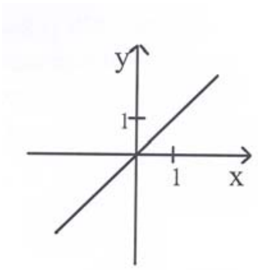
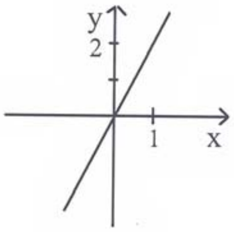
			Sucesso dos estudantes de 15 e 16 anos, depois de uma aula de funções lineares
	Reconhecimento →	$y = x$	60%
	→	$y = 2x$	25%

Figura 2.15 - A tarefa proposta é de reconhecimento simples, e não era solicitado escolher, entre muitas possíveis, as expressões que corresponde ao gráfico (por exemplo $y = x$, $y = - x$, $y = x + 1$) (Duval, 2002, p. 6)

A reduzida capacidade do aluno para distinguir o objecto da sua representação leva-o muitas vezes a pensar que duas representações do mesmo objecto são dois objectos matemáticos distintos. Isto conduz, na sua perspectiva, ao fenómeno da "compartimentalização": as representações permanecem compartimentadas e o pensamento matemático é fragmentário e monoregistal. Por seu lado, os objectos matemáticos nunca são acessíveis através da percepção ou através de instrumentos (por exemplo microscópios, telescópios, aparelhos de medida,…) e o acesso a esses objectos passa pela via das representações semióticas, o que explica que o desenvolvimento do conhecimento matemático conduz ao desenvolvimento e à diversificação de representações de registos.

Duval observa que o insucesso e as dificuldades dos estudantes aumentam quando a resolução das tarefas ou das actividades matemáticas requerem que o tratamento seja efectuado num registo multifuncional – argumentar com recurso à linguagem corrente, utilizar figuras geométricas, para a resolução de problemas ou demonstrações – ou quando as representações são convertidas noutros registos e surge o fenómeno da não congruência. Na sua perspectiva, todavia, o ensino tende a marginalizar o recurso a registos multifuncionais, ficando apenas pelos monofuncionais (fig. 2.13), onde os processos, na sua maioria, são algorítmicos. Além disso, as dificuldades de conversão não são encaradas como um sinal de reduzida compreensão conceptual.

Para o autor, a complexidade e especificidade dos tratamentos num registo multifuncional levam muitas vezes os estudantes à incompreensão dos conceitos matemáticos. Por exemplo, as figuras geométricas que surgem num registo de representação multifuncional e o seu carácter não natural para a maioria dos estudantes mostram a dificuldade de utilização dessas figuras na resolução de problemas (figs. 2.16 e 2.17).

Na figura esboçada (a unidade de medida é o cm) está representado um rectângulo [ABCD] e um círculo com centro em A, passando por D.

Determine o comprimento de segmento [EB]

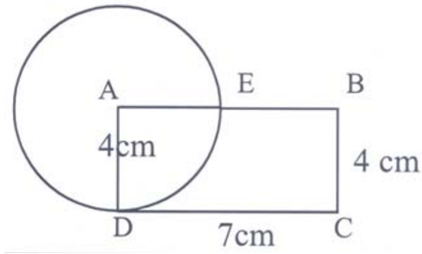


Figura 2.16 - Problema apresentado a alunos com 12 e 13 anos (Duval, 2002, p. 9)

Setembro de 1997	Um exemplo de 2604 estudantes	Setembro de 1998	2590 estudantes
Respostas matemáticas ([AE] é o raio com 4 cm)	9%	Respostas matemáticas ([AE] é o raio com 4 cm)	22, 2%
Respostas dadas através da medida do segmento de recta (cerca de 2 cm, no segmento de recta dado)	16%	Respostas dadas através da medida do segmento de recta (cerca de 2 cm, no segmento de recta dado)	39,6%
Respostas dadas através da estimação visual (E está ao meio de [AB], cerca de 3,5 cm)	26%		
Outras respostas	30%	Outras respostas	24,4%
Não responderam	16%		

Figura 2.17 - Respostas dadas pelos alunos da resolução do problema da figura 2.16 (Duval, 2002, p. 9)

Duval (2002) refere que, para os estudantes encontrarem a resposta matemática correcta, tiveram que ver na figura dada duas subfiguras de B (fig. 2.18) e não as duas subfiguras de A, porque só nas subfiguras de B é que se vê os dois raios como um lado e uma parte do outro lado do rectângulo. Contudo, as subfiguras de A sobressaem mais, mas tendem a esconder as subfiguras de B.

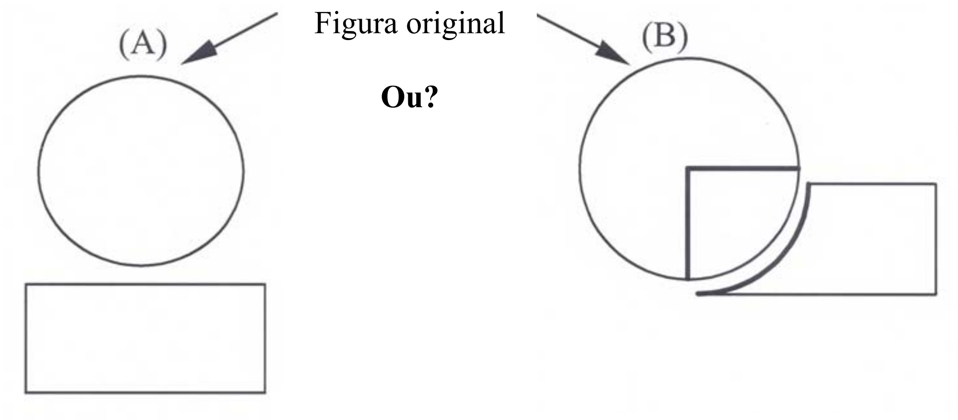


Figura 2.18 - O que vê na figura original na explicação do problema (fig. 2.16)? (Duval, 2002, p. 10)

Na mudança de registo, as dificuldades de compreensão dependem de dois factores. Por um lado, da variabilidade do carácter congruente (fig. 2.14) ou não congruente da conversão entre duas representações do mesmo objecto e por outro lado, do sentido da conversão (fig. 2.15).

Para Duval (2002), uma das características fundamentais da actividade matemática é a diversidade de registos semióticos de representações. Para coordenar as várias representações, como por exemplo, equações, gráficos e tabelas, é necessário que os alunos desenvolvam um trabalho intenso com funções no qual irão enfrentar muitos obstáculos ao tentar entendê-las. Refere que o funcionamento cognitivo da mente humana é inseparável de uma variedade de registos semióticos de representações. Por isso, considera ser impossível aprender as noções matemáticas sem recorrer às representações. Considera, ainda, que uma das maiores dificuldades da aprendizagem da Matemática é a passagem de informação de uma forma de representação para outra, e esta é provocada pela heterogeneidade semiótica.

O autor considera ainda que o processo de ensino-aprendizagem deve dar ênfase ao estudo das conversões entre representações, permitindo assim a descompartimentação de registos, que constitui uma das condições para acesso à compreensão dos conceitos matemáticos. Assim, a conversão entre as diferentes representações tem um papel determinante na compreensão e interpretação de um conceito.

A pluralidade dos registos semióticos de representações do mesmo objecto matemático é essencial. Para que os estudantes compreendam um conceito matemático, ele deve ser trabalhado através das suas diferentes representações e deve ser dada ênfase ao estudo das conversões entre representações, evitando assim o fenómeno da compartimentação que constitui um dos grandes obstáculos à compreensão global de um conceito. Para além disso, a qualidade das tarefas, o ensino e o ambiente de aprendizagem em geral são factores que também contribuem para a superação das dificuldades dos estudantes.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Este capítulo apresenta os princípios gerais que presidiram à elaboração da unidade de ensino que serve de base a este estudo, bem como a planificação realizada, as tarefas propostas, as formas de avaliação e o acompanhamento e a organização dos alunos na sala de aula.

3.1. Princípios gerais

Esta investigação centra-se na realização da unidade de ensino "Funções quadráticas" do 10.º ano de escolaridade, visando estudar como os alunos pensam e aprendem sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações, quando utilizam a calculadora gráfica. Esta tem um papel importante na realização das tarefas a propor, não sendo entendida apenas como simples instrumento de cálculo mas sim, principalmente, como meio de pesquisa. Deste modo, a calculadora gráfica é integrada numa abordagem das funções em que se dá ênfase às múltiplas representações deste conceito (tabelas, gráfico e expressão algébrica) e à sua interpretação em problemas e se valorizam as estratégias de exploração e pesquisa por parte dos alunos.

Representações. Os *princípios e normas para Matemática escolar* (NCTM, 2007), incluem normas que remetem para as representações e acentuam a importância da utilização de múltiplas representações na aprendizagem da Matemática. É referido que "a representação é predominante na Álgebra. Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto que as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas" (NCTM, 2007, p. 422).

A compreensão de um objecto matemático como uma função requer uma diversidade de representações semióticas. É a diversidade das representações que dá significado a um objecto matemático, desde que cada representação diferente represente e descreva diferentes aspectos do objecto (Duval, 2002). De modo a poderem ultrapassar as várias dificuldades, é fundamental que os alunos trabalhem com diversas representações de funções, pois estas complementam-se e, no seu conjunto, contribuem para uma plena compreensão – reificação – do conceito de função.

Uma representação gráfica tanto pode ser um esboço no papel ou no quadro, como uma figura mais rigorosa em papel milimétrico, no ecrã de uma calculadora gráfica ou computador ou numa impressão. O método de traçar um gráfico de forma precisa envolve a determinação de um certo número de pontos do gráfico e a sua união por linhas. Este método não assegura, só por si, que o gráfico obtido reproduza todos os principais comportamentos da função, uma vez que apenas se utiliza um número finito de pontos. Uma forma de conhecer o comportamento global da função é obter representações gráficas adequadas, utilizando as potencialidades da calculadora gráfica ou fazer o seu estudo analítico, determinando domínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos relativos, pontos de inflexão, assímptotas, etc.

Recursos. Ao contrário do que acontecia no passado, em que os recursos didácticos utilizados no processo do ensino-aprendizagem da Matemática eram essencialmente o quadro, o lápis, a borracha e o papel, actualmente há outros recursos que se tornaram frequentes e até, em situações específicas, imprescindíveis na sala de aula – designadamente as calculadoras e os computadores. Deste modo, a Matemática passou a ser mais experimental e visual, na medida em que se tornou mais acessível o trabalho com representações gráficas.

As calculadoras gráficas e os computadores, usados de uma forma adequada e eficaz, podem modificar aquilo que os alunos aprendem, a forma como aprendem e como são ensinados. Além disso, nos actuais programas de Matemática do ensino secundário, o uso das calculadoras gráficas é obrigatório. O programa de Matemática A indica que as calculadoras gráficas permitem a "condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática" (Ministério da Educação, 2001, p. 16). Estudos realizados demonstram que quando a tecnologia é bem utilizada, o aluno aprende Matemática de forma mais significativa. É claro que isto só é possível se o professor tiver consciência das limitações da tecnologia e um conhecimento sólido das razões que estão por detrás de determinados resultados “enganadores”. E, pelo seu lado, os alunos devem ter oportunidade de compreenderem que aquilo que a calculadora apresenta no ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade (Ministério da Educação, 2001).

Tarefas. Nesta unidade de ensino são usados diversos tipos de tarefa. Um papel importante é atribuído à resolução de problemas e às tarefas de investigação. A resolução de problemas deve ser um processo que envolva activamente os alunos na formulação de conjecturas, na investigação e exploração de ideias que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes (NCTM, 1991).

Pólya (1977) acredita que a capacidade de descobrir e a capacidade de inventar podem ser desenvolvidas através de um ensino habilidoso que desperte os alunos para os princípios da descoberta e que lhes dê uma oportunidade de praticarem este princípios. Assim, considera que o ensino da resolução de problemas deve proporcionar uma larga experiência com a sua resolução e uma análise dos processos que conduzem à sua solução. Para este autor, os alunos deviam adquirir hábitos de pensamento elaborado e por isso descreveu um plano global de como resolver problemas (*how to solve it*) com quatro fases: 1.ª Compreensão do problema; 2ª Estabelecimento de um plano; 3ª Realização do plano; 4ª Examinar a solução obtida. Na sua perspectiva, é útil ensinar aos alunos estratégias gerais (heurísticas) de resolução de problemas, ou seja, um conjunto de perguntas que o aluno deve colocar a si próprio em cada fase de resolução de um problema e que se destinam a organizar o seu pensamento de uma forma sistemática e eficaz.

Schoenfeld (1985), que retomou as ideias de Pólya, considera que a resolução de problemas em Matemática envolve quatro aspectos diferentes: conhecimentos de factos, de algoritmos e de Matemática em geral que um indivíduo possui; conhecimento de estratégias de resolução de problemas (identificadas como estratégias heurísticas); conhecimento de estratégias de verificação (ou de controlo); concepções que se relacionam com a visão que cada um tem de si próprio, da Matemática, dos problemas e do mundo em geral. Ainda segundo Schoenfeld (1996), os problemas devem ter quatro propriedades: serem relativamente acessíveis; permitirem diferentes caminhos de resolução; servirem como introduções para importantes ideias; constituírem “boas” explorações matemáticas.

No programa de Matemática A, a resolução de problemas constitui um método fundamental. É considerada não só como indicação metodológica mas também como tema, e surge ainda como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita. No ponto das sugestões metodológicas gerais, pode ler-se: "destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação" (Ministério da Educação, 2001, p. 10). Deste modo, o programa actual do ensino secundário faz referências significativas à resolução de problemas e à realização de actividades de investigação pelos alunos.

A unidade de ensino compreende um conjunto de experiências de aprendizagem diversas. É usada uma sequência de cinco tarefas de carácter investigativo e exploratório, que se encontram em anexo, na expectativa que o aluno mobilize os seus recursos cognitivos e afectivos, conseguindo assim uma aprendizagem mais sólida. São também realizadas aulas com tarefas do manual (exercícios e problemas) com o objectivo de diversificar o processo de ensino-aprendizagem, assumindo que cada tipo de tarefa contribui para certos aspectos da aprendizagem do aluno e para o desenvolvimento do seu raciocínio. Assim, assume-se que as tarefas de natureza mais fechada ajudam o aluno a esclarecer as suas dúvidas, possibilitam a aplicação dos conhecimentos adquiridos e podem ajudar a desenvolver a sua auto-estima, permitindo-lhe mostrar as suas habilidades e saberes. Da unidade de ensino consta, ainda, um momento de avaliação, realizado individualmente no seu final, cuja tarefa se encontra também em anexo.

A resolução de problemas e investigações matemáticas decorrem nos contextos de semi-realidade e "Matemática pura". As tarefas propostas de resolução de problemas, com funções quadráticas, no contexto de semi-realidade envolvem problemas concretos ligados a situações do mundo real, como por exemplo, tarifários, colónias de bactérias, custos, temperatura, áreas… As tarefas de "Matemática pura" relacionam-se com o estudo de funções, resolução de condições e transformações de funções, quer através do uso de métodos algébricos quer de métodos gráficos. Como exemplo de tarefa, solicita-se aos alunos que investiguem e explicitem os efeitos dos parâmetros a e h relativamente à representação gráfica da função $f(x) = a(x+h)^2$.

Segundo Skovsmose (2000) uma boa parte da educação matemática situa-se entre a resolução de exercícios com referências à "Matemática pura" e a resolução de exercícios com referências à semi-realidade. Este autor acrescenta, ainda, que muitos estudos em educação matemática têm revelado um quadro preocupante sobre o que acontece na sala de aula tradicional (baseada em exercícios), e por isso sustenta que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes, que resultem da combinação entre três tipos de referências – "Matemática pura", semi-realidade e realidade – e entre dois paradigmas de práticas de sala de aula – exercício e cenário para a investigação.

Para esta investigação é proposto um trabalho alternativo às práticas de sala de aula baseadas em exercícios, pelo que foram escolhidos, para os problemas e actividades investigativas a desenvolver na unidade de ensino, os contextos de "Matemática pura" e de semi-realidade. Pretende-se, desta forma, que uma parte significativa do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento seja realizada pelos alunos.

Momentos de discussão. Cada tarefa é proposta numa aula de 90 minutos (um bloco) e no final os alunos, individualmente, em pares ou pequenos grupos, produzem um relatório em que explicam o trabalho realizado e justificam as conclusões. A apresentação e discussão das conclusões dos resultados são efectuadas na aula, em grupo alargado. O balanço do trabalho realizado, após a resolução da tarefa, constitui uma importante oportunidade de partilha de conhecimentos, pois os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, os processos de resolução, as conjecturas e as justificações. Na apresentação desses resultados à turma, cabe ao professor estabelecer as condições que propiciem a discussão. Por um lado, o professor deve estimular os alunos a falar e contribuir com suas ideias e resultados obtidos e, por outro lado, os alunos necessitam de desenvolver confiança na sua participação de modo a contribuírem neste processo de aprendizagem. Através das trocas de ideias, "cada um fica a conhecer melhor os referentes do outro e as suas ligações com o conhecimento matemático" (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes , 1997, p. 88). A fase de discussão e reflexão, sobre tarefas anteriormente realizadas tem um papel importante para que os alunos desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de reflectir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação (Ponte et al., 2006). Ponte (2005) refere, ainda, que "os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (p. 16).

3.2. Planificação

A unidade de ensino decorreu durante onze blocos, de 90 minutos cada. Teve início a 11 de Fevereiro de 2009 e prolongou-se por quatro semanas, até ao dia 12 de Março. A figura 3.1. apresenta uma planificação da distribuição das tarefas que integram a unidade de ensino e o modo de trabalho em cada aula.

<table>
<tr><th>Aula</th><th>Tarefas</th><th>Modo de trabalho</th><th>Conteúdos programáticos</th></tr>
<tr><td>1.ª
(11/02/2009)</td><td>Tarefa 1; relatório e discussão geral</td><td>Em grupo - 4 alunos cada</td><td rowspan="7">Funções quadráticas. Gráficos de funções quadráticas.
Propriedades.
As funções quadráticas na modelação.
A parábola.
Transformações de funções.
Simetrias. Função módulo.</td></tr>
<tr><td>2.ª
(12/02/2009)</td><td>Tarefa 2; relatório</td><td>Em grupo - 4 alunos cada</td></tr>
<tr><td>3.ª
(17/02/2009)</td><td>Discussão geral da tarefa 2
Realização de tarefas do manual escolar (exercícios e problemas).</td><td>Em grupo - 4 alunos cada;
Individual e em pares</td></tr>
<tr><td>4.ª
(18/02/2009)</td><td>Equação y = $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$; zeros de uma função quadrática; o efeito do coeficiente do termo do 2.º grau.
Realização de tarefas do manual escolar (exercícios e problemas).</td><td>Individual e em pares</td></tr>
<tr><td>5.ª
(19/02/2009)</td><td>Tarefa 3; relatório e discussão geral</td><td>Em pares</td></tr>
<tr><td>6.ª
(03/03/2009)</td><td>Inequações do 2.º grau.
Realização de tarefas do manual escolar (exercícios e problemas)</td><td>Individual e em pares</td></tr>
<tr><td>7.ª
(04/03/2009)</td><td>Tarefa 4; relatório e discussão geral</td><td>Em pares</td></tr>
</table>

8.ª (05/03/2009	Transformações de funções e interpretação gráfica: translações; simetrias; gráficos de $af(x)$ e $f(ax)$, com $a \neq 0$. Realização de tarefas do manual escolar (exercícios e problemas)	Individual e em pares	
9.ª (10/03/2009)	Função módulo. Função módulo definida por troços. Propriedades. Realização de tarefas do manual escolar (exercícios e problemas)	Individual e em pares	
10.ª (11/03/2009)	Tarefa 5; relatório e discussão geral	Em pares	
11.ª (12/03/2009)	Tarefa de avaliação	Individual	Avaliação

Figura 3.1 - Planificação da unidade de ensino

3.3. Tarefas

O estudo das funções quadráticas pode seguir diferentes abordagens, pois existem diversos caminhos para a sua concretização. Nesta investigação, a abordagem ao estudo das funções quadráticas tem por base a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa e a resolução de problemas no contexto de “Matemática pura” e de semi-realidade, com o uso da calculadora gráfica. Estas tarefas têm o objectivo de contribuir para a compreensão e aprendizagem dos alunos, do conceito de função quadrática. Cada tarefa foi aplicada numa aula de 90 minutos (um bloco), excepto a tarefa 2. que teve mais 45 minutos (bloco e meio), para os alunos terminarem os seus resultados. Foi reservado na parte final da aula, um período de tempo de cerca de vinte minutos para a discussão, conforme tinha sido planeado.

A tarefa 1 (Anexo 1), que se intitula “Quadrados inscritos num quadrado”, é constituída por um problema base de Geometria e por cinco questões, relativas a esse problema. Os objectivos desta tarefa são: esboçar o gráfico da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento; identificar uma representação algébrica da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento, usando a regressão quadrática com a calculadora gráfica; determinar a expressão algébrica da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento por processos analíticos. Os alunos, em grupos de quatro elementos cada, resolvem a tarefa, registam e justificam os resultados e no final da aula apresentam esses resultados para discussão com a turma. As questões 1. e 2. apelam à observação dos alunos, quanto à relação entre o deslocamento de um ponto, variável independente, e a área do quadrado, variável dependente. Nas questões 3. e 4., podem utilizar a calculadora no modo *STAT* colocando numa lista vários valores para x e noutra as áreas dos quadrados correspondentes. A utilização da calculadora permite obter, usando a regressão quadrática, a expressão algébrica da área. Por fim, a determinação das áreas, pelos alunos, em vários casos particulares, sugere, para a questão 5., a representação algébrica da função área, que é equivalente à obtida através da calculadora gráfica.

A tarefa 2 (Anexo 2), denominada “Funções quadráticas”, é constituída por oito questões. O seu objectivo é estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e identificar o significado dos parâmetros a, h e k. Os alunos resolvem a tarefa, em grupos de quatro elementos cada, e no final, os resultados de cada grupo são divulgados à turma para discussão alargada. As questões 1. e 2., com a utilização da calculadora gráfica, possibilitam o estudo das propriedades de funções quadráticas. Na questão 3., para a função quadrática cuja representação algébrica é do tipo $y = ax^2$, os alunos devem explicitar o efeito do parâmetro a no gráfico da função, identificar as suas propriedades e efectuar generalizações. Nas questões 4., 5. e 6., os alunos voltam a recorrer à calculadora gráfica para esboçar os gráficos de funções quadráticas definidas, por exemplo por $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$ e $y = (x - 2)^2$. Nestas questões identificam as propriedades das funções e explicam como podem obter cada um deles à custa do gráfico das funções $y = x^2$ e $y = 2x^2$. Na questão 7. e para as funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$ os alunos devem explicitar os efeitos dos parâmetros a, h e k, relativamente aos gráficos das funções, e identificar as coordenadas do vértice da parábola, bem como a equação do eixo de simetria. Após este estudo devem reconhecer, na questão 8., que podem obter, por exemplo, o gráfico de $y = 2(x - 5)^2 + 0{,}6$ a partir do gráfico de $y = 2x^2$ efectuando sobre este uma translação associada ao vector (5 ; 0,6).

A tarefa 3 (Anexo 3), designada por “Mais funções quadráticas”, tem por objectivos: estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β na equação $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ e analisar as informações imediatas que cada um fornece; traduzir uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica. Nesta tarefa, o modo de trabalho é em grupos de dois alunos cada. Na parte final da aula é promovida a discussão geral, a qual deve envolver todos os alunos, procurando analisar as conclusões a que cada grupo chegou. A tarefa é constituída por seis questões. Para as quatro primeiras questões, e recorrendo à calculadora gráfica quando necessário, os alunos devem estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β, quando a função é dada na forma $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, e discutir as informações que cada um deles fornece. A questão 5. é relativa à tradução da representação gráfica de uma função para a representação algébrica. Nesta questão os alunos podem apresentar várias soluções possíveis se existirem dúvidas sobre a ordenada do ponto onde a função intersecta o eixo dos *yy*. Na questão 6., que corresponde ao caso da função quadrática que não tem zeros, os alunos devem concluir que esta não pode ser definida como produto de polinómios do 1.º grau (estes admitem sempre um zero). Uma resposta possível pode ser $y = x^2 + 1$ ou qualquer outro polinómio do 2.º grau com $\Delta < 0$.

A tarefa 4 (Anexo 4) é constituída por dois problemas em contexto de semi-realidade. No problema n.º 1. os alunos podem começar por representar a função graficamente, através da calculadora gráfica, e devem procurar uma janela de visualização que se adeqúe à sua representação gráfica. O manuseamento da calculadora gráfica permite encontrar resultados, cujo significado deve ser interpretado pelos alunos. Mas estes também podem usar outras representações (numérica ou algébrica) para chegarem aos mesmos resultados. O problema n.º 2. relaciona variáveis do domínio da Geometria e corresponde à tradução da área, em m^2, de um canteiro de relva numa representação algébrica. Para obter a maior área pode recorrer-se, por exemplo, ao máximo da função através da calculadora gráfica ou às coordenadas do vértice da parábola por processos algébricos. Esta tarefa é realizada em grupos de dois alunos cada, e no final da aula os vários grupos partilham e discutem os resultados obtidos com toda a turma.

A tarefa 5 (Anexo 5) é constituída por três questões que envolvem transformações de funções. Pretende-se que os alunos esbocem o gráfico de funções do tipo $y = -f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(x + a)$, $af(x)$ e $f(ax)$ e $y = |f(x)|$, com $a \neq 0$ e identifiquem as suas propriedades, dada a função f. Os alunos podem começar por fazer experiências com a sua calculadora gráfica e com funções que lhes são mais familiares, e só depois representar numa folha de papel os gráficos das funções apresentadas, para descobrirem as suas propriedades. Este trabalho é realizado em pequenos grupos, em pares, e é muito importante elaborarem pequenos relatórios sobre a forma como foram abordando as várias questões. Assim, devem resolver, justificar e registar os gráficos elaborados e os pontos relevantes obtidos (com ou sem a calculadora gráfica), bem como todas os cálculos efectuados. No final da aula, as conclusões são apresentadas à turma e discutidas em grupo mais alargado. O mais importante que a apresentação dos cálculos, são os processos pelos quais os alunos optam na resolução de uma questão e a respectiva justificação.

Para além das tarefas apresentadas, os alunos realizaram, em quatro blocos e meio, exercícios e problemas do manual escolar relacionados com os assuntos abordados nas tarefas ou com os conteúdos programáticos trabalhados nestas aulas. Deste modo, os alunos não perdem o contacto com o seu manual e este constituiu, também, um instrumento no qual podem apoiar a sua aprendizagem. Algumas tarefas do manual foram realizadas individualmente, e outras, por ser mais enriquecedor, os alunos trabalharam em pares. Foi, ainda, proposta a realização de alguns exercícios e problemas do manual como trabalho de casa.

3.4. Avaliação

É consensual que avaliação deve fazer parte integrante do processo de ensino-aprendizagem. No programa de Matemática A é indicado que avaliação não deve apenas avaliar o produto final, mas também o processo de aprendizagem do aluno, levando-o a ser um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem (Ministério da Educação, 2001). Assim, a avaliação "deve ser uma interacção entre professor e os alunos, com o professor continuamente a procurar compreender o que um aluno pode fazer e como é capaz de fazê-lo e a usar esta informação para orientar o seu ensino" (Matos & Serrazina, 1996, p. 219). Mais recentemente, nos *princípios e normas para Matemática escolar*, o NCTM propõe, como grande princípio da avaliação, que esta "deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos" (2007, p. 23). Salienta, entre outros, aspectos que a avaliação não deve ser meramente feita aos alunos, mas pelo contrário, ela deve ser feita para os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem. Neste sentido, o professor deve diversificar as formas de avaliação, propondo ao aluno um conjunto variado de tarefas, sendo algumas realizadas individualmente e outras em grupo, de modo que reflictam as finalidades do currículo.

Na avaliação dos alunos nesta unidade de ensino, é tida em conta a sua participação na resolução das tarefas, individual e em grupo, e na respectiva discussão. No decorrer de cada aula é possível observar o empenho de cada aluno na realização do trabalho proposto e a sua participação nas discussões dentro do grupo. Também se observa e avalia as suas conclusões ou as do grupo de trabalho quando são apresentadas à turma. Neste momento de aula, em que se pretende promover a participação da turma, os alunos devem procurar compreender as resoluções dos seus colegas e confrontá-las com as suas.

Para a avaliação contribuem também os resultados da tarefa de avaliação (Anexo 6) que se realizou no final da unidade de ensino, de modo individual, sem consulta e durante uma aula de 90 minutos. Nesta tarefa é avaliado o desempenho dos alunos em relação a: (i) identificar as propriedades de uma função quadrática; (ii) resolver condições do 2.º grau, algébrica e graficamente; (iii) identificar uma representação de uma função e as suas propriedades conhecida outra função, através das transformações de funções; (iv) traduzir a representação de uma função quadrática ou afim noutra representação; e (v) aplicar os conhecimentos sobre as funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi-realidade ou que relacionam variáveis da Geometria, com uso da calculadora gráfica.

Esta tarefa é constituída por seis questões. Na questão 1. aparece a representação algébrica de uma restrição de uma função quadrática e é solicitado ao aluno que identifique o seu contradomínio e apresente a sua justificação. Na questão 2. surge a representação gráfica de uma função quadrática e com base nesta representação e nas propriedades das transformações de funções é solicitado ao aluno que determine o conjunto solução de condições. A questão 3. corresponde a um problema em contexto de semi-realidade – colónia de bactérias – que envolve a função quadrática. Pretende-se com esta questão identificar os processos de resolução que o aluno usa e verificar se interpreta correctamente os resultados no contexto do problema. A calculadora gráfica é um recurso que facilita a sua resolução, contudo deixa-se ao critério do aluno o seu uso. A questão 4. compreende a tradução da representação gráfica de uma função quadrática ou afim, na sua representação algébrica. Esta questão tem o intuito de verificar a compreensão que o aluno tem na identificação de dados relevantes no gráfico de uma função para usar na tradução de representações dessa função. Na questão 5. surge um problema que relaciona variáveis do domínio da Geometria e pretende-se verificar se o aluno usa a linguagem algébrica correcta e se manifesta compreensão na tradução da função numa representação algébrica, relativa à área do rectângulo. Pretende-se, também, averiguar a proficiência do aluno na resolução de uma condição por processos algébricos, portanto, sem recurso à calculadora gráfica. A questão 6. envolve a identificação e esboço do gráfico de uma função módulo com recurso à calculadora gráfica. O aluno deve ser capaz de encontrar uma janela de visualização adequada à sua representação gráfica e, em seguida, transcrever para a folha de respostas o gráfico obtido, tendo em conta os elementos relevantes, como por exemplo o domínio, o contradomínio, os pontos de intersecção com os eixos coordenados e os extremos relativos. É também solicitado ao aluno a definição da função módulo apresentada por troços. Esta questão é uma boa oportunidade para o aluno relacionar a representação gráfica com a representação algébrica da função que está a estudar.

3.5. A sala de aula

Ao longo da unidade de ensino a constituição da turma não sofreu grande alteração, apenas um ou outro aluno faltou pontualmente por razões pessoais ou por doença, e, por isso, a turma manteve-se estável durante a concretização da unidade de ensino. Frequentaram estas aulas, com regularidade os 27 alunos da turma. Para a realização das tarefas 1. e 2. foram formados sete grupos de trabalho, seis com quatro elementos cada e um com três, para as restantes tarefas (3., 4. e 5.) foram constituídos doze grupos, com dois alunos cada e um outro grupo com três. E para a realização das tarefas do manual escolar os alunos trabalharem em pares ou individualmente.

Aos alunos foram apresentadas as tarefas em suporte papel e estes fizeram as suas resoluções numa folha de respostas, também foram dadas tarefas do manual escolar, na sua maioria exercícios e problemas, cujas resoluções foram registadas no caderno diário de cada aluno. Durante a resolução das tarefas, o meu trabalho consistiu em acompanhar e orientar os alunos, esclarecendo as suas dúvidas e ajudando a ultrapassar as suas dificuldades. Em cada tarefa fui chamando a atenção de cada grupo que era importante que estes explicassem as suas estratégias e processos de resolução e justificassem as suas conclusões. Também coloquei questões no sentido de estes clarificarem as suas respostas e argumentarem em favor das suas posições. Quando manifestaram dificuldades procurei colocar novas questões que conduzissem a uma nova reflexão e que os ajudasse a esclarecer os seus raciocínios. Algumas vezes, vários grupos colocaram dúvidas e revelaram dificuldades idênticas e, quando tal aconteceu, estas foram alargadas a toda a turma para que todos os alunos pudessem reflectir sobre elas. Após a resolução da tarefa e na parte final da aula foi feita uma discussão envolvendo toda a turma.

Estes momentos propiciaram aos alunos a partilha das suas estratégias com os seus colegas e, ainda, o confronto de vários pontos de vista. Foram, também, colocadas dúvidas e questionados alguns processos de resolução apresentados. As principais conclusões surgiram a partir da discussão e do contributo de todos.

Capítulo 4

Metodologia de investigação

Este capítulo descreve a metodologia de investigação adoptada neste estudo, que se insere no paradigma interpretativo, numa abordagem qualitativa e na modalidade de estudo de caso. É feita uma caracterização dos participantes que foram seleccionados para esta investigação, indica-se as fases do estudo, e, por último, os instrumentos de recolha de dados e os processos de análise de dados.

4.1. Opções metodológicas

O principal objectivo deste estudo é analisar o modo como a resolução de problemas e a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribuem para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade. Diversos autores (como Patton, 1980; Reichardt & Cook, 1979) defendem que as características do objecto de estudo determinam a escolha do paradigma de investigação e, por isso, deve haver coerência entre o paradigma e o problema do estudo. O paradigma interpretativo dá valor aos comportamentos observáveis, embora relacionados com as interpretações que os actores realizam e com os significados que elaboram. Tem uma perspectiva relativista da realidade, isto é, vê o mundo real vivido como uma construção de actores sociais que, em cada momento e lugar, constroem o significado social dos acontecimentos e fenómenos do presente e reinterpretam o passado. Opondo-se a uma perspectiva positivista, que reconhece que só o mundo dos factos é cientificamente aceitável, através da explicação e a predição, o paradigma interpretativo valoriza a compreensão e a explicação para desenvolver e aprofundar o conhecimento de uma dada situação num dado contexto (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994).

De acordo com Bodgan e Biklen (1994) na investigação qualitativa as questões a serem investigadas são estabelecidas com o intuito de estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no contexto natural, não sendo, portanto, construídas por operacionalização de variáveis. Não são formuladas hipóteses que se pretendam testar mas antes questões que orientam o estudo. Estes autores indicam cinco características neste tipo de investigação: (i) os dados são recolhidos no ambiente natural e o investigador é o principal instrumento na sua recolha; (ii) os dados recolhidos são de natureza descritiva; (iii) os processos são mais importantes que os resultados ou produtos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (v) e o significado que os participantes dão às situações tem importância crucial. Estas características mostram-se adequadas ao objectivo do presente estudo:

1. A fonte directa dos dados é uma turma em contexto escolar, sendo o investigador o instrumento principal. Com efeito, os dados recolhidos em ambiente natural são importantes para este estudo uma vez que é perante a actividade de investigação que o aluno desenvolve um mecanismo de interacção crítica consigo próprio, com os seus colegas e com o professor, que o leva a construir ou reconstruir o seu percurso de aprendizagem. O investigador é o principal instrumento de recolha de dados sobre o objecto de estudo, e analisa o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa contribui para a compreensão e aprendizagem dos alunos sobre funções quadráticas. Apesar de também se recorrer a instrumentos de áudio não é dispensável o ambiente natural como fonte de dados, pois a recolha directa de informação em aula contribuiu para que as acções sejam melhor compreendidas quando confrontadas com as visões e perspectivas dos seus intervenientes.

2. Os dados recolhidos neste estudo dizem respeito aos processos de aprendizagem dos alunos, observados em situações diferentes. Para a compreensão do significado dos dados obtidos, estes são recolhidos na forma de palavras e não de números dando origem a uma investigação com resultados escritos, contendo citações com base nos dados para ilustrar a construção de uma visão sobre a problemática investigada. Deste modo, emerge uma apresentação dos resultados com pormenores descritivos.

3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Neste estudo, é mais importante conhecer o

tipo de processos que o aluno desenvolve nas tarefas matemáticas, os recursos que utiliza no processo de aprendizagem e como os usa, e a reflexão sobre o processo desenvolvido, do que conhecer os erros, os obstáculos surgidos e os resultados finais de aprendizagem dos alunos. Privilegia-se desta forma o processo em detrimento dos produtos ou resultados.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não se recolhe dados com o objectivo de confirmar hipóteses construídas previamente, mas são construídas abstracções à medida que os dados, que são recolhidos, se vão agrupando. Assim, nesta investigação não se pretende estudar uma hipótese previamente estabelecida, mas sim o processo de construção de novo conhecimento e analisar a forma como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa desenvolve a competência dos alunos, com uso da calculadora gráfica.

5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. É dada especial importância ao ponto de vista dos participantes, pois o investigador procura que os dados recolhidos dêem conta do que cada aluno diz e faz, fornecendo os elementos que permitem ilustrar e estruturar a apresentação dos resultados.

Esta investigação contempla as características referidas anteriormente, uma vez que os participantes são alunos, os dados são recolhidos pelo investigador no contexto escolar, os registos documentais (produzidos pelos alunos ou através da observação) e audiogravados (depois de transcritos) são, também, analisados pelo investigador e a sua interpretação constitui o instrumento primordial de análise. Neste sentido, a metodologia adoptada, no desenvolvimento deste estudo e tendo em conta o problema enunciado, insere-se no paradigma interpretativo, numa abordagem qualitativa e na modalidade de estudo de caso.

Ponte (2006) refere que "um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social" (p. 2). Por um lado, como indica Yin (2005), o estudo de caso, como modalidade de investigação, é sobretudo adequado "quando se colocam questões do tipo como e porquê, quando o pesquisador tem pouco controle sobre os acontecimentos e quando o foco se encontra em fenómenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real" (p. 19). Por outro lado, como refere Merriam (1988), o estudo de caso foca-se numa situação ou acontecimento particular, pelo que produz sempre um conhecimento do tipo particularístico, em que se estuda o caso, enquanto caso único e singular. Igualmente, um estudo de caso toma a entidade ou fenómeno em análise como uma totalidade complexa e procura estudá-la como tal, o que apresenta, deste modo, uma visão holística da situação (globalidade do caso). É uma modalidade de investigação apropriada quando se quer compreender, em profundidade, uma situação num propósito exploratório, mas também descritivo e analítico, e se pretende evidenciar os aspectos singulares mais relevantes, que a caracterizam.

Nesta investigação pretende-se analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas por parte dos alunos. É uma investigação de natureza empírica que se baseia fortemente no trabalho de campo e em análise documental e, ainda, que se pretende que assuma um cunho descritivo e interpretativo. Tratando-se de uma experiência de ensino, é relativamente escasso o controlo que se tem sobre os acontecimentos. Por isso, o estudo de caso constitui uma modalidade adequada a esta investigação e daí o recurso ao estudo de caso de dois alunos, com características diversas.

Esta investigação incide sobre a própria prática do investigador. Na perspectiva de Alarcão (2001), uma investigação tem de produzir conhecimentos novos, ser rigorosa na sua metodologia e tornar-se pública. Como refere Ponte (2002), a investigação sobre a prática pode ter como objectivos: (i) alterar algum aspecto da prática profissional do professor, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança; e (ii) compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à sua resolução, numa fase posterior. Ao investigar sobre a própria prática é necessário criar condições que permitam um distanciamento entre o investigador e o objecto de investigação, visto que este lhe é à partida próximo pelo facto da mesma pessoa ser ao mesmo tempo o professor e o investigador da turma. Neste estudo procura-se, por um lado, focar a atenção no processo de ensino-aprendizagem e, por outro lado, estudar, reflectir e compreender como é que os alunos pensam e aprendem sobre as funções. Por isso, considera-se possível ser, simultaneamente, o professor da turma e o investigador do estudo.

4.2. Participantes

Esta investigação desenvolve-se numa escola secundária com 3.º ciclo, do distrito de Lisboa, onde sou professor desde 1 de Setembro de 1986. É uma escola que se situa numa cidade de um concelho da região Oeste, onde a actividade económica é muito diversificada nos sectores da agricultura, da indústria e do comércio e o tecido empresarial é constituído essencialmente por micro e pequenas empresas e, ainda, algumas médias empresas. A escola tem 54 turmas do ensino diurno, desde o 7.º ao 12.º anos de escolaridade (incluindo cursos profissionais), e 8 turmas do ensino nocturno, totalizando cerca de 1500 alunos matriculados. A grande maioria dos alunos reside na cidade e no concelho onde se situa a escola. Ao nível socioeconómico, as famílias caracterizam-se, principalmente, por pertencerem à classe média. Frequentam, também, esta escola diversos alunos estrangeiros provenientes da Europa de Leste e do Brasil.

Como pretendo analisar o modo como a resolução de problemas e de tarefas de natureza exploratória e investigativa contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas, escolhi como participantes alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade de um curso Científico-Humanístico. A turma é constituída por 28 alunos e no início do ano lectivo todos estavam matriculados a todas as disciplinas do curso. Mas, no início do mês de Fevereiro (2.º período), um aluno anulou a matrícula às disciplinas de Matemática, Biologia/Geologia e Física e Química, com o conhecimento e permissão do encarregado de educação, e informou o director de turma que no próximo ano lectivo pretende mudar de curso. A turma passou, deste modo, a ter, na disciplina de Matemática, 27 alunos matriculados, 17 raparigas e 10 rapazes.

No início do ano lectivo, os alunos preencheram a ficha informativa adoptada na escola, que solicita dados biográficos, dados do encarregado de educação e informações sobre composição do agregado familiar, e formula questões gerais relativamente às disciplinas, às profissões pretendidas, à ocupação de tempos livres e ao percurso escolar. Cinco alunos referiram a disciplina de Matemática como disciplina preferida e oito indicaram-na como a disciplina que menos gostam. Os alunos referem que pensam estudar até ao ensino superior, à excepção de dois que indicam que não pretendem ir para além do 12.º ano de escolaridade, o que justifica a escolha num curso de prosseguimento de estudos. Quanto à vida profissional futura, indicam como profissões desejadas: enfermeiro(a), farmacêutico(a), médico(a), informático(a), professor(a) de educação física, psicólogo(a) e técnico(a) de saúde.

As habilitações dos pais dos alunos da turma situam-se entre o 4.º ano (antiga 4.ª classe) e o ensino superior. A maioria dos pais possuem pelo menos o 9.º ano de escolaridade e metade das mães têm o 12.º ano ou mais como se pode observar nos gráficos da figura 4.1.

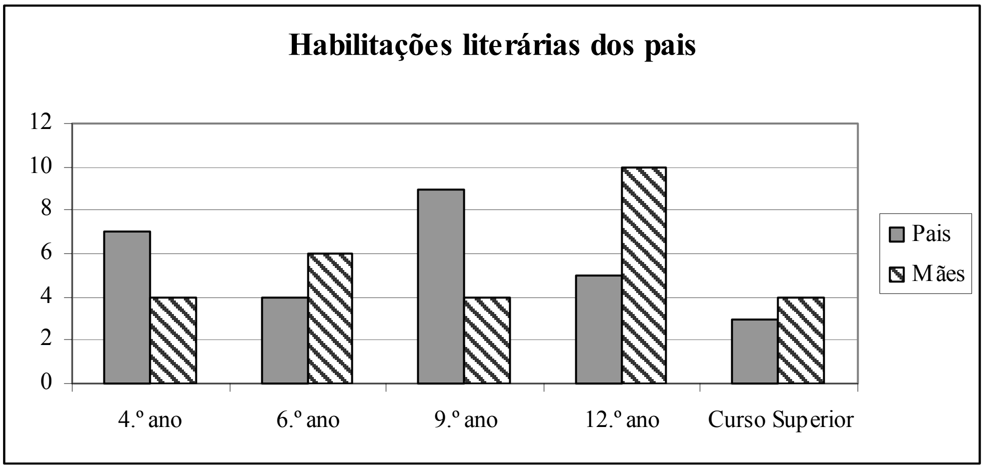


Figura 4.1 - Habilitações literárias dos pais dos alunos da turma do estudo.

Uma elevada percentagem de encarregados de educação costuma participar nas reuniões convocadas pelo director de turma e, normalmente, os que são convocados na hora de atendimento também comparecem. Outros porém, por iniciativa pessoal, contactam o director de turma. São, portanto, encarregados de educação preocupados e costumam acompanhar os seus educandos no processo educativo.

No início do ano lectivo as idades dos alunos estavam compreendidas entre os 14 e os 15 anos, como indica a figura 4.2. Relativamente ao seu passado escolar, apenas dois alunos têm retenções e são referentes ao 10.º ano de escolaridade, pelo que a idade dos alunos corresponde à idade habitual de frequência deste ano de escolaridade.

Idades	N.º de alunos
14	6
15	22
Total	28

Figura 4.2 - Idade dos alunos no início do ano lectivo

Os alunos têm um aproveitamento razoável na generalidade das disciplinas, pois a turma é muito grande e dificulta a gestão curricular na aula. Alguns alunos são pouco trabalhadores e têm uma postura inadequada na sala prejudicando o seu aproveitamento e o dos seus colegas. Na figura 4.3. apresenta-se as classificações dos alunos relativas ao primeiro e segundo períodos, na disciplina de Matemática.

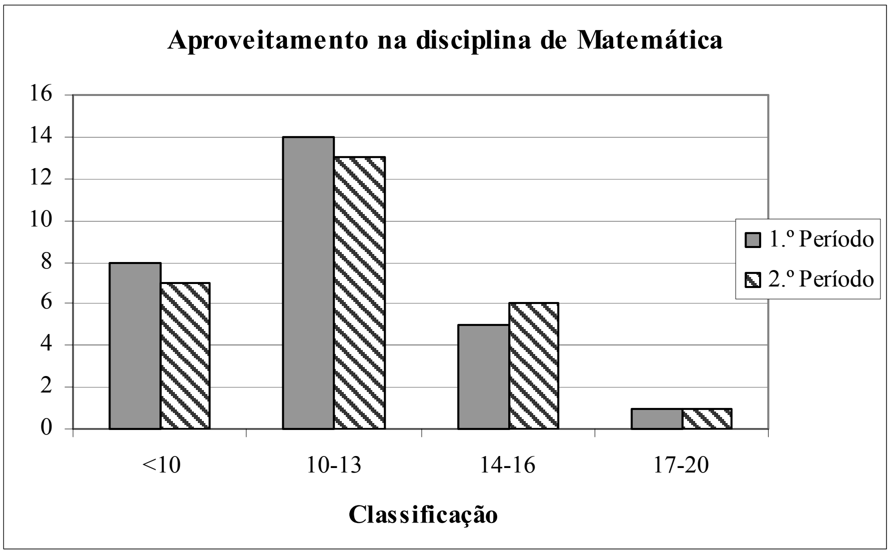


Figura 4.3 - Aproveitamento no 1.º e 2.º períodos, na disciplina de Matemática

No início do 2.º período dei a conhecer ao conselho executivo, com mais pormenor, os objectivos da investigação e solicitei autorização para a sua concretização, designadamente a realização de entrevistas e a recolha de dados dos alunos da turma (Anexo 11). Após a autorização concedida apresentei à turma os objectivos da investigação, solicitando a aprovação e a colaboração dos alunos. Estes foram receptivos e manifestaram disponibilidade para colaborar. Pelo facto de serem menores de idade também dei a conhecer o projecto aos seus encarregados de educação e estes autorizaram a participação dos seus educandos (Anexos 9 e 10).

Dois alunos desta turma são objecto de estudos de caso. Para a sua selecção considerei o interesse em relação à participação nas entrevistas e, depois, defini três critérios: (i) a assiduidade; (ii) o desempenho nas aulas; e (iii) o aproveitamento no final do 1.º período. Vários alunos mostraram vontade participar nas entrevistas, mas tendo em conta todos os factores seleccionei dois com desempenhos distintos. Esses alunos são Nuno e Teresa. A atitude destes dois alunos na sala de aula é diferente, bem como os seus desempenhos. Nuno é introvertido e não assume protagonismo no seio da turma, mas quando é questionado intervém. É um aluno atento, interessado e trabalhador, bem comportado e, para além das tarefas da aula, resolve os trabalhos de casa propostos. No final do 1.º período obteve 14 valores. Teresa participa com empenho na sala de aula, intervém e assume o papel de líder quando trabalha em grupo. É interessada e tem um desempenho razoável, mas não resolve sempre os trabalhos de casa nem estuda com regularidade. Esta aluna teve 12 valores no final do 1.º período.

4.3. Fases do estudo

Este estudo decorre entre Setembro de 2008 e Julho de 2009 e passa por três fases. Na primeira fase é realizada uma revisão de literatura dos temas a aprofundar de natureza teórica e empírica e da metodologia de investigação a adoptar. Neste período foram elaboradas as tarefas da unidade didáctica e preparados os instrumentos para a recolha de dados. A segunda fase, relativa à recolha de dados (realização das tarefas, primeira análise de dados, diário de bordo e entrevista) decorre no período compreendido entre Fevereiro e Março de 2009. A terceira e última fase, de Março a Julho de 2009, é destinada à análise detalhada de todos os dados, à realização de leituras de modo a complementar as anteriormente feitas e à produção por escrito dos resultados e conclusões da investigação.

4.4. Instrumentos de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados a utilizar são, principalmente, as resoluções de tarefas investigativas, os relatórios escritos produzidos pelos alunos, a observação (diário de bordo) e duas entrevistas clínicas individuais aos dois alunos.

4.4.1. Instrumentos e seus objectivos

A recolha de dados é realizada em três momentos: antes, durante e após a realização da unidade de ensino "Funções quadráticas". Num primeiro momento realiza-se a primeira entrevista clínica, com uma duração aproximada de 45 minutos. O seu objectivo é conhecer, antes da unidade de ensino, a forma como os alunos usam as diferentes representações, identificam as propriedades das funções e resolvem problemas utilizando as funções afim, linear e constante. Num segundo momento decorre a experiência de ensino, durante onze blocos de aulas consecutivos. Nesta fase, a recolha de dados tem em conta o diário de bordo (a construir antes e depois de cada aula) e os documentos (as resoluções de tarefas de investigação e os relatórios escritos produzidos pelos alunos). Pretende-se que estes documentos forneçam elementos relativos aos processos utilizados pelos alunos que não se encontrem evidenciados nas entrevistas nem nas resoluções das tarefas efectuadas durante as entrevistas. Após a conclusão da unidade de ensino surge o terceiro momento de recolha de dados, com a realização da segunda entrevista, mais longa que a primeira, com uma duração de 90 minutos, e cujo objectivo é recolher dados que possam contribuir para responder às questões de investigação.

4.4.2. Diário de bordo

O diário de bordo é fundamental na observação participante e é um suplemento importante a outros métodos de recolha de dados de natureza qualitativa (observação, entrevista e análise de documentos). O diário de bordo é o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Segundo Bogdan e Biklen (1994) este instrumento consiste em dois tipos de materiais – descritivos e reflexivos. Na parte descritiva são registados de uma forma objectiva os detalhes do que ocorreu no campo e englobam as seguintes áreas: (i) retratos dos alunos; (ii) reconstruções de diálogos; (iii) descrição do espaço físico; (iv) relatos de acontecimentos particulares; (v) descrição de actividade; e (vi) o comportamento do observador. A parte reflexiva contém registos de carácter pessoal, designadamente: (i) reflexões sobre a análise; (ii) reflexões sobre o método; (iii) reflexões sobre conflitos e dilemas éticos; e (iv) reflexões sobre o ponto de vista do observador.

O diário de bordo é usado no decurso da unidade de ensino. Por isso, elaborei um guião (Anexo 12) que é utilizado durante as aulas e que me orienta na recolha dos dados, com a seguinte estrutura: (i) *identificação da aula*, com o número da aula, o número da tarefa, tempo e data; (ii) *antes da aula*, as expectativas do professor em relação à tarefa; (iii) *durante a aula*, salientar a forma como é apresentada a tarefa aos alunos, o desenvolvimento da tarefa (tipo de questões colocadas, comentários dos alunos, tipo de dificuldades) e discussão geral (objectivos, gestão feita pelo professor, intervenções dos alunos, o que surgiu de novo); (iv) *após a aula*, reconstrução de diálogos entre os alunos ou entre o professor e os alunos (que não é possível registar no instante por ser simultaneamente professor e investigador) e reflexão sobre os momentos da aula; e (v) *observações*. O diário de bordo fornece dados, mostrando o trabalho desenvolvido por cada grupo de alunos e por toda a turma no momento da discussão geral. Para ficar com um registo mais preciso dos diálogos existentes, são gravadas em áudio algumas interacções, particularmente as que ocorrem durante a discussão geral de cada tarefa.

4.4.3. Entrevistas

A entrevista é uma fonte de informação acerca de aspectos não observáveis, que permite obter um conhecimento mais profundo de uma dada situação. As entrevistas qualitativas podem variar quanto aos graus de estruturação, considerando-se como situações extremas as entrevistas estruturada e a não estruturada. O problema em estudo e o objectivo da entrevista definem o tipo de entrevista. Pode-se utilizar uma entrevista mais livre e exploratória no início do projecto e pode ser necessário recorrer a uma entrevista mais estruturada quando se pretende obter dados sobre aspectos mais particulares (Bodgan & Biklen, 1994). O maior ou menor sucesso das entrevistas depende da sua preparação, da qualidade do entrevistador e do carácter do entrevistado. A entrevista constituiu uma fonte de dados que permite compreender melhor os processos e raciocínios efectuados pelos alunos. Segundo Bogdan e Biklen (1994) este instrumento é utilizado "para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (p. 134).

A entrevista clínica é um tipo de entrevista que contribui para entender e melhorar o processo de ensino e aprendizagem. É um método usado para conhecer melhor as aprendizagens dos alunos, e daí o professor adaptar as estratégias inicialmente definidas, ou para dar elementos complementares para a avaliação dos alunos ou, ainda, como referem Zazkis e Hazzan (1998), para proporcionar conhecimentos relevantes sobre a aprendizagem e compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos. Segundo Long e Ben-Hur (1991), a entrevista clínica "permite que o professor entenda os significados que os alunos encontram em problemas matemáticos; e fornece ao professor informações sobre os pré-requisitos dos alunos e estilos de aprendizagem" (p. 1). Neste estudo é usada a entrevista clínica, uma vez que possibilita ao investigador obter informações dos alunos sobre o modo como eles pensam e aprendem.

Para além das tarefas que integram a unidade de ensino são também aplicadas tarefas nas entrevistas individuais e que se encontram em anexo. A primeira entrevista realiza-se a dois alunos e pretende dar a conhecer, antes da unidade de ensino, aspectos do raciocínio dos alunos. No momento desta entrevista a turma já trabalhou a generalidade de funções e gráficos e as funções afins. Após a conclusão da unidade de ensino é aplicada na segunda entrevista outra tarefa aos dois alunos que participaram na primeira. Tem como propósito recolher dados que possam contribuir para analisar como os alunos trabalham com as diferentes representações e que representações e processos utilizam na resolução de problemas com funções quadráticas. Salienta-se que a realização de cada entrevista tem por base um guião e no seu decurso são propostas tarefas ao aluno (problemas), que as deve resolver por escrito. As entrevistas são audiogravadas e, posteriormente, transcritas na íntegra.

A tarefa da primeira entrevista (Anexo 7) contém cinco questões. A questão 1. apresenta um conjunto de cinco representações e solicita ao aluno que reconheça as que são funções, pedindo, em simultâneo, que justifique as respostas dadas. Procura saber-se se o aluno é capaz de identificar uma função qualquer que seja a sua representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica). A questão 2. refere-se a um problema em contexto de semi-realidade, sobre o tarifário de um parque de estacionamento. É dada a representação gráfica da função, definida por troços, e através da sua análise o aluno pode relacionar o preço/tempo do estacionamento de uma viatura nesse parque. Nesta questão, é possível verificar que há preços constantes em intervalos de tempo de 15 minutos (funções constantes) e que, a partir dos 45 minutos de estacionamento, o preço cresce à medida que o tempo decorre (função afim). Por fim, o preço do estacionamento durante duas horas pode ser obtido através da leitura do gráfico e com a ajuda de processos numéricos ou de processos algébricos. A questão 3. é referente, também, a um problema em contexto de semi-realidade, relativo à produção de camisas, cuja tradução é uma função afim. A resolução pode passar, em primeiro lugar, pela representação de uma tabela onde figuram, para o número de camisas produzidas, os custos médios diários. Depois, através dos dados obtidos o aluno pode efectuar um esboço gráfico e, ainda, traduzir o problema por uma expressão algébrica. A questão 4. é relativa à tradução da representação gráfica de uma função afim numa representação algébrica. A questão 5. é relativa a um problema matemático com funções afins e é solicitado ao aluno que resolva a equação do 1.º grau. O aluno pode optar por processos algébricos ou por processos gráficos, com utilização da calculadora gráfica, na determinação da solução.

A tarefa da segunda entrevista (Anexo 8) possui cinco questões. A questão 1. é constituída por um conjunto de cinco representações e pede-se ao aluno que reconheça e justifique as que são funções. Procura-se saber se o aluno, no final da unidade de ensino, identifica uma função qualquer que seja a sua representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica). Na questão 2. é considerada uma representação algébrica de uma função definida por troços. É solicitado ao aluno que traduza esta representação numa representação gráfica com o recurso à calculadora gráfica e que identifique as propriedades relevantes da função. O aluno deve escolher, na calculadora gráfica, um janela de visualização que se adeqúe à representação gráfica da função. Na questão 3. surge a representação gráfica de uma função quadrática e, com base nesta representação e nas propriedades das transformações de funções, deve identificar o gráfico e algumas propriedades de uma nova função para determinar o conjunto solução de uma condição. É, ainda, solicitado a tradução da representação gráfica para a representação algébrica de uma função. A questão 4. corresponde a um problema em contexto de semi-realidade – festival rock. Os alunos podem começar por fazer a representação gráfica da função, através da calculadora gráfica, e devem procurar uma janela de visualização que se adeqúe. O manuseamento da calculadora gráfica permite encontrar resultados cujo significado deve ser interpretado pelos alunos. Mas estes também podem usar outras representações (numérica ou algébrica) para chegarem aos mesmos resultados. Este problema permite identificar os processos de resolução dos alunos. A questão 5. compreende um problema que relaciona variáveis do domínio da Geometria e corresponde à tradução da função área do quadrilátero numa representação algébrica. Ainda nesta questão é solicitada a resolução de uma inequação do segundo grau, com recurso ou não à calculadora gráfica.

4.4.4. Documentos

Foram analisadas as fichas com os dados biográficos dos alunos (preenchidas no início do ano lectivo), bem como, a assiduidade, a avaliação do final de cada período e as actas do conselho de turma, com o desígnio de obter informação que permite caracterizar o objecto de estudo. Para além da resolução das tarefas apresentada pelos dois alunos entrevistados foram, também, recolhidas e analisadas as resoluções das tarefas da unidade de ensino, realizadas pelos alunos da turma. Os dados obtidos destes documentos complementaram os dados recolhidos pelo diário de bordo. Aquando da resolução das tarefas os alunos registaram na sua folha de respostas a estratégia seguida, evidenciando a sua compreensão, as suas dúvidas e dificuldades da tarefa. Este tipo de documentos permite analisar os diferentes processos de resolução usados pelos alunos, reconhecendo o tipo de estratégias que seguem e os conhecimentos que dominam.

4.5. Análise de Dados

A análise incidiu sobre as respostas dadas pelos alunos nas tarefas propostas, nas discussões proporcionadas no final de cada tarefa, no teste escrito e sobre o conteúdo das transcrições das entrevistas realizadas. Com vista a efectuar uma sistematização dos dados, comecei por organizar as respostas dadas por todos os alunos a cada uma das questões das tarefas, bem como a cada uma das questões do teste, para ficar com uma visão global do material obtido. Relativamente às entrevistas, efectuei a sua transcrição. Depois, teve início um processo de identificação e classificação dos diferentes tipos de dados tendo em conta os objectivos do estudo e, portanto, as questões de investigação a que pretendo responder.

Segundo Vala (1986), a construção de um sistema de categorias pode ser feita *a priori* (tendo em conta as questões de investigação), ou *a posteriori* (tendo em conta os dados recolhidos durante a investigação), ou ainda através da combinação destes dois processos. A análise dos dados foi, então, estruturada segundo as categorias de análise que emergiram do problema de investigação: dificuldades na tradução de uma representação noutra representação e processos usados na resolução de problemas antes e depois da unidade de ensino. A revisão de literatura, os estudos empíricos que realizei e os dados recolhidos permitiram a ramificação destas categorias nas seguintes subcategorias: reconhecimento do conceito de função; desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora; tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica; tradução de uma representação numérica numa representação algébrica; opção por processos algébricos na resolução de problemas. Tendo por base as categorias e subcategorias definidas e as questões do estudo procede-se à análise dos dados, que assume um carácter descritivo e interpretativo.

Capítulo 5

Nuno

Nuno tem 15 anos e vive com os pais e os dois irmãos mais novos. Para além das actividades que desenvolve na escola (curriculares e extracurriculares), pratica ténis de mesa na associação da sua aldeia. Concluiu o 9.º ano com nível cinco a cinco disciplinas e nível quatro a seis disciplinas. Refere que a Matemática e o Inglês são as suas disciplinas preferidas e que não tem nenhuma de que goste menos. Neste ano lectivo, revela um bom desempenho as todas as disciplinas e, em particular, a Matemática obteve, no 1.º e 2.º períodos, a classificação de 14 valores. Pretende continuar a estudar no ensino superior, uma vez que quer ser farmacêutico. Na sala de aula, participa de um modo muito empenhado em todas as tarefas e, quando é solicitado, participa na discussão dos resultados e expõe, com facilidade, as suas opiniões. É um aluno introvertido e não assume protagonismo no seio da turma, mas quando é questionado intervêm. É um aluno atento, interessado e trabalhador, bem comportado e, para além das tarefas da aula, resolve os trabalhos de casa propostos. Nas aulas, prefere realizar tarefas de pesquisa e considera que o professor deve ser simpático, compreensivo e bom explicador.

5.1. Representações e processos antes da unidade de ensino

5.1.1. Reconhecimento do conceito de função

Questão 1. Na 1.ª entrevista, Nuno define correctamente o conceito de função, mas não reconhece em todas as situações apresentadas as representações que são funções. O aluno refere que a representação na tabela não é uma função, uma vez que constata que ao objecto 8 correspondem duas imagens, -50 e 50. Na representação algébrica, reconhece que $x^2 + y^2 = 9$ é a equação de uma circunferência, escreve que "um objecto dessa circunferência tem duas imagens" e conclui que não é função. No entanto, quando surge uma representação gráfica nem sempre identifica se é ou não uma função. Por exemplo, na alínea 1.3., dá a seguinte resposta (fig. 5.1):

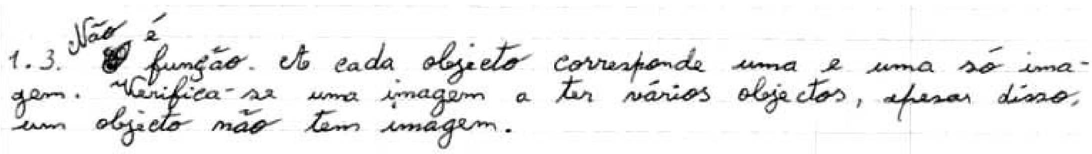

1.3. Não é função. A cada objecto corresponde uma e uma só imagem. Verifica-se uma imagem a ter vários objectos, apesar disso, um objecto não tem imagem.

Figura 5.1 - Resolução da alínea 1.3. (tarefa da 1.ª entrevista).

Quando questionado, na entrevista, sobre esta afirmação, Nuno reconhece que a resposta dada está incorrecta:

Professor: Qual é o objecto que não tem imagem?
Nuno: É onde está a "bola" aberta.
Professor: Escreveste: "Verifica-se uma imagem a ter vários objectos, …" Será que corresponde à definição de função?
Nuno: Não.
Professor: A tua resposta está correcta?
Nuno: Não.
Professor: Então, é ou não função?
Nuno: É.
Professor: Justifica.
Nuno: Porque a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.
Professor: Então, porque respondeste que não é função?
Nuno: Por causa da "bola" aberta.

A "bola" aberta parece ter induzido o aluno a tirar conclusões erradas, mas quando confrontado com a definição de função, conclui que, afinal, o gráfico representa uma função.

Deste modo, Nuno revela que reconhece uma função quando é dada na sua representação algébrica ou em tabela, mas nem sempre identifica correctamente as funções quando são apresentadas graficamente.

Questão 2.2. Nesta questão, que envolve três alíneas, o aluno comenta correctamente as afirmações correspondentes às 2.2.1. e 2.2.3., mas responde de forma errada à afirmação da alínea 2.2.2. (fig. 5.2).

2.2.1. A afirmação é falsa. Um condutor que estacione a viatura por mais de 60 minutos, terá que pagar mais de 1 €. No gráfico é possível observar que a recta é infinita, porque não tem nenhuma "bola marcada".

2.2.2. A afirmação é falsa. Se o tempo for 15 minutos e 45 minutos, o custo será diferente.

2.2.3. A afirmação é falsa. Se o custo ~~variar~~ for 0,20 € e 0,40 €, o tempo de estacionamento será diferente.

Figura 5.2 - Resolução da questão 2.2. (tarefa da 1.ª entrevista).

Parece que Nuno não associa a afirmação da alínea 2.2.2. à definição de função. Na questão 1. já tinha evidenciado que conhece a definição do conceito de função, mas na resolução deste problema em contexto da semi-realidade não foi capaz de a usar. O aluno revela nesta questão um razoável desempenho, contudo não é capaz de associar a variável independente tempo ao objecto e a variável dependente custo à imagem.

5.1.2. Tradução da representação gráfica para a representação algébrica

Questão 4. Ainda na 1.ª entrevista, Nuno escreve a equação (fig. 5.3) como representação algébrica da função *h*, mas não apresenta qualquer justificação. Verifica-se que esta equação não representa a função *h* e que a resposta dada pelo aluno é reveladora de um fraco desempenho.

$$h(x) = \frac{1}{2}(x+2)+1$$

Figura 5.3 - Resolução da questão 4. (tarefa da 1.ª entrevista).

Para perceber melhor os processos que utiliza e que não evidencia na folha de respostas, o aluno foi questionado, na entrevista, a fim de explicar como é que chegou à representação algébrica da função:

Professor: O que representa o valor $\frac{1}{2}$?
Nuno: É o declive da recta.
Professor: Como é que o determinaste?

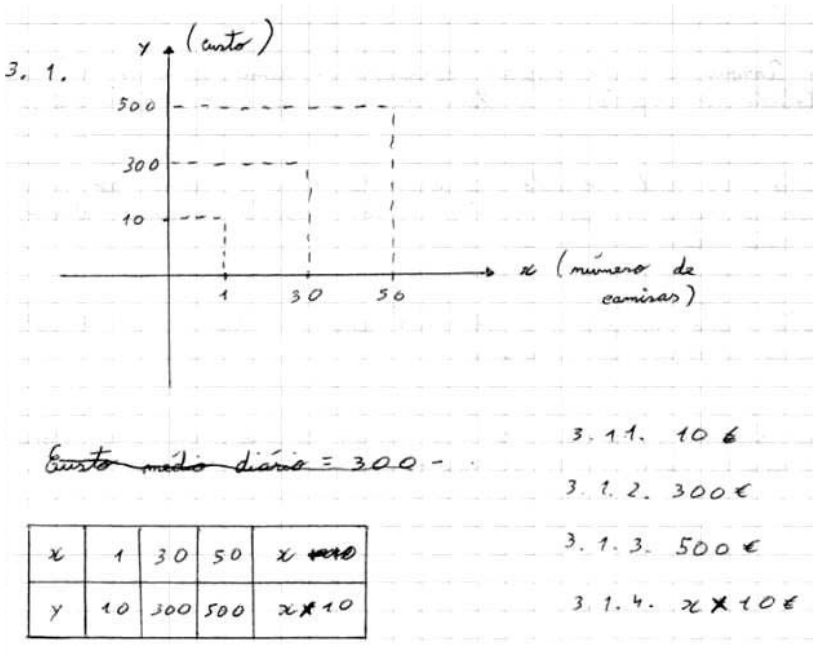
Nuno: Primeiro fui ver o vector [director] (2, 1) e para calcular o declive da recta dividi 1 [segunda coordenada do vector] por 2 [primeira coordenada do vector].
Professor: Sim. E os valores 2 e 1?
Nuno: O 2 representa duas unidades para a esquerda e 1 uma unidade para cima.
Professor: Consideraste uma função inicial e aplicaste uma translação?
Nuno: Sim, foi $y = x$.

Constata-se que Nuno identifica e determina correctamente o declive da recta, através das coordenadas do vector director, mas evidencia algumas dificuldades, por um lado, quando refere que o gráfico da função *h* sofre uma translação associada ao vector (2, 1) a partir da função $y = x$ e, por outro lado, por não associar o parâmetro *b* da equação $y = mx + b$ à ordenada do ponto onde a função afim intersecta o eixo dos *yy*. Estas dificuldades mostram que o aluno não reificou ainda algumas das propriedades da função afim e, consequentemente, também não reificou o conceito de função afim.

5.1.3. Tradução da representação numérica para outra representação

Questão 3.1. Na 1.ª entrevista é solicitada, ao aluno, a tradução do problema numa representação algébrica, numa representação gráfica e, também, numa tabela. Constata-se que Nuno não resolve correctamente a questão (fig. 5.4) uma vez que não considera o custo fixo diário afecto à produção de camisas. O aluno foi questionado, no decurso da entrevista, para se compreender a motivo que o levou a não considerar os custos fixos na resolução do problema:

Professor: Escreveste que o custo médio de uma camisa é 10 €. Achas correcto?
Nuno: Não… Quanto mais camisas fabricarem mais caro fica cada uma porque se gasta mais luz.
Professor: O que aconteceu aos 300 € dos custo fixos?
Nuno: Acho que é …



x	1	30	50	x
y	10	300	500	x × 10

Figura 5.4 - Resolução da questão 3.1. (tarefa da 1.ª entrevista).

Neste problema Nuno considera que os custos fixos vão aumentando com o crescimento da produção de camisas e parece que não sabe o significado do valor de 300 € nem é capaz de o contemplar nas representações da função que evidencia. Nesta fase o aluno não reificou ainda o conceito de função afim porque não é capaz associar o custo fixo ao coeficiente linear da função.

5.1.4. Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Questão 2.3. Ainda na 1.ª entrevista, Nuno usa a regra de três simples para calcular o preço a pagar por um estacionamento durante duas horas. Não compreende que o troço da função para $t \geq 45$ corresponde a uma função afim e não a uma função linear. Revela fraco desempenho na resolução deste problema (fig. 5.5).

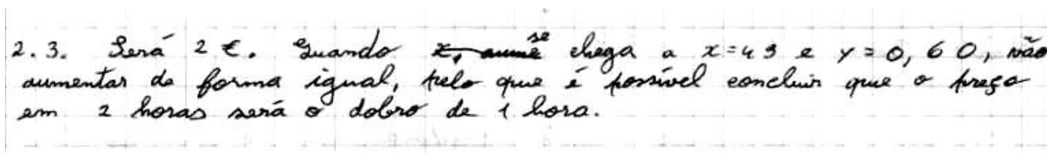

2.3. Será 2 €. Quando se chega a x=45 e y=0,60, não aumentar de forma igual, pelo que é possível concluir que o preço em 2 horas será o dobro de 1 hora.

Figura 5.5 - Resolução da questão 2.3. (tarefa da 1.ª entrevista).

Questão 3.2. Nuno, apesar de não equacionar o problema correctamente, escreve uma equação do 1.º grau coerente com a representação algébrica identificada na questão anterior. Opta por processos algébricos na resolução da equação de 1.º grau que considera (fig. 5.6).

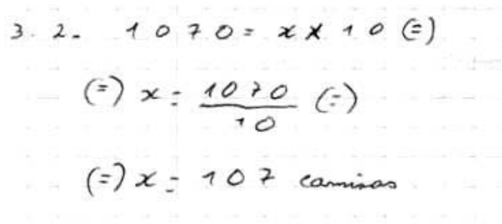


Figura 5.6 - Resolução da questão 3.2. (tarefa da 1.ª entrevista)

Questão 5. Na 1.ª entrevista Nuno substitui *f(x)* e *g*(*x*) pelas expressões equivalentes, iguala as duas expressões, resolve a equação por processos algébricos e determina correctamente a solução do problema matemático (fig. 5.7).

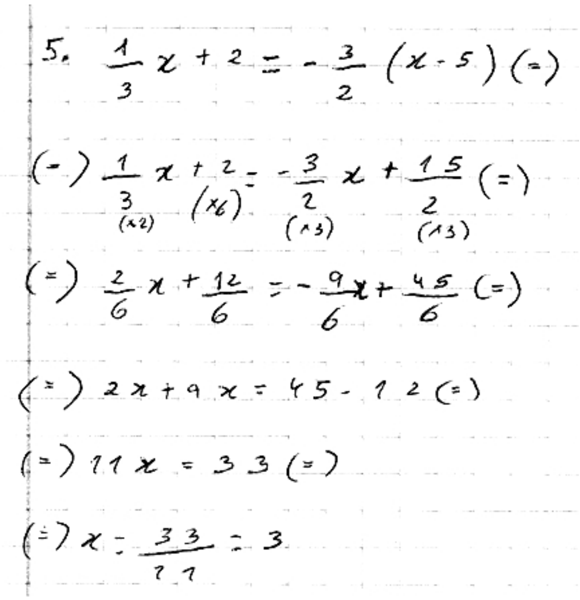


Figura 5.7 - Resolução da questão 5. (tarefa da 1.ª entrevista)

5.1.5. Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações. Na 1.ª entrevista, questão 1., constata-se que Nuno sabe a definição do conceito de função e reconhece as funções quando são definidas na representação algébrica ou em tabela, mas nem sempre as identifica quando surgem na representação gráfica. Por exemplo, na questão 1.3. a “bola” aberta no desenho do gráfico parece ter induzido o aluno a uma análise errada.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações. Na 1.ª entrevista, o aluno evidencia dificuldades na conversão da representação gráfica de uma função afim para a representação algébrica. Por exemplo, na questão 4. Nuno identifica e determina correctamente o declive da recta, através das coordenadas do vector director, mas revela que não sabe associar o parâmetro b da equação $y = mx + b$ à ordenada do ponto onde a função afim intersecta o eixo dos *yy*. Esta dificuldade mostra que o aluno não reificou ainda algumas das propriedades da função afim.

3. (a) Representações e processos usados em problemas matemáticos. Nuno utiliza processos algébricos na resolução de problemas matemáticos e usa representações algébricas. Por exemplo, o problema da questão 5. da 1.ª entrevista pode ser resolvido por processos algébricos ou por processos gráficos com a utilização da calculadora, mas Nuno opta por processos algébricos na determinação da solução da equação $f(x) = g(x)$.

3. (b) Representações e processos usados em problemas da semi-realidade. No contexto do problema da semi-realidade Nuno traduz com dificuldade a representação numérica da função afim para outra representação (algébrica, gráfica e em tabela). Por exemplo, na questão 3.1. da 1.ª entrevista não converte correctamente a função noutra representação porque não compreende o significado do custo fixo e, por isso, não o associa ao coeficiente linear b da equação $y = m\mathrm{x} + b$. Quanto aos processos usados em problemas da semi-realidade Nuno opta pelos algébricos, apesar de manifestar algumas dificuldades na compreensão dos problemas. Por exemplo, na questão 2.3. da 1.ª entrevista usa a regra de três simples, mas não compreende que o troço da função para $t \geq 45$ corresponde a uma função afim e não a uma função linear. Na questão 3.2. escreve uma equação do 1.º grau coerente com a representação algébrica identificada na questão anterior e resolve-a por processos algébricos. Constata-se que nesta fase o aluno não reificou o conceito de função afim.

5.2. Representações e processos depois da unidade de ensino

5.2.1. Reconhecimento do conceito de função

Questão 1. Na 2.ª entrevista, Nuno define o conceito de função, mas não identifica correctamente algumas representações que são funções nem outras que não o são. Das representações gráficas apresentadas reconhece com sucesso que uma é função e que outra não é, e indica uma justificação correcta. Também reconhece que a equação $3x + y = 5$, da questão 1.5. é uma função, por representar uma recta. No caso da equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$, responde o seguinte (fig. 5.8):

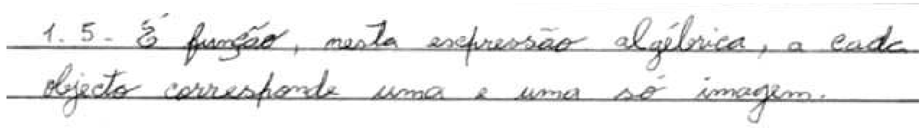

1.5. É função, nesta expressão algébrica, a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.

Figura 5.8 - Resolução da questão 1.5. (tarefa da 2.ª entrevista).

Para perceber o raciocínio do aluno e a razão que o levou a responder desta forma, foi-lhe solicitada uma explicação:

Professor: É uma função, porquê?
Nuno: Porque é uma parábola.
Professor: Tens a certeza?
Nuno: Tenho.
Professor: A equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$ representa uma parábola?
Nuno: [Pausa] Acho que sim.
Professor: Não. Representa… Uma circunferência.
Nuno: Ah, então não é uma função.
Professor: Porquê?
Nuno: Porque na circunferência há objectos com duas imagens.

Nuno não reconhece que a condição $x^2 - 2x + y^2 = 8$ é uma equação cartesiana da circunferência no plano. Por isso, esta equação, do 2.º grau, induz o aluno a considerar que é a equação de uma função quadrática e cuja representação gráfica é uma parábola. Quando se apercebe, na entrevista, que a condição corresponde à equação de uma circunferência, responde claramente que essa representação algébrica não é uma função, uma vez que há objectos com duas imagens.

Em relação à representação tabela, questão 1.1., o aluno não responde correctamente (fig. 5.9):

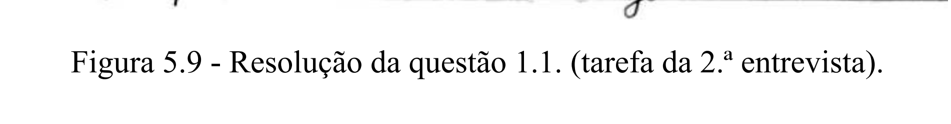

1.1. É função, como mostra a tabela, a cada objecto, só corresponde uma e uma só imagem.

Figura 5.9 - Resolução da questão 1.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

Na entrevista, Nuno foi questionado sobre a sua resposta em relação à representação tabela e reconhece que afinal está errada:

Professor: O que escreveste está correcto?
Nuno: Sim, porque a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.
Professor: Observa com mais atenção a tabela.
Nuno: [Pausa] Há aqui o objecto -6 que tem a imagem -15 e a imagem 15.
Professor: Então, é função?
Nuno: Não é, porque há um objecto com duas imagens.
Professor: Não respondeste correctamente, porquê?
Nuno: Porque não vi.

O seu desempenho nesta questão é satisfatório porque identifica as funções na sua representação gráfica. No entanto, revela dificuldades na identificação de funções representadas na forma algébrica (por não distinguir a equação geral de uma circunferência) e também na forma de tabela (por não identificar um objecto com duas imagens).

Deste modo, Nuno escreve correctamente a definição de função, mas por vezes não distingue as representações, algébrica, gráfica ou tabela, que são funções. Estas dificuldades foram detectadas na 1.ª entrevista, antes da unidade de ensino, e continuam a verificar-se depois da realização desta unidade.

5.2.2. Desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora

Questão 2. Na 2.ª entrevista, Nuno apresenta uma representação gráfica da função g definida por troços, sendo um dos troços uma restrição da função afim e o outro uma restrição da função quadrática. Considera algumas propriedades importantes, como o domínio, o contradomínio e os zeros da função, mas não representa no gráfico a "bola" aberta, para $x < 0$, e a bola "fechada", para $x \geq 0$ (fig. 5.10) e, por consequência, não identifica correctamente os extremos relativos, nem a intersecção com o eixo dos *yy*. Igualmente, não é muito rigoroso na representação gráfica da semi-recta por não respeitar o seu declive.

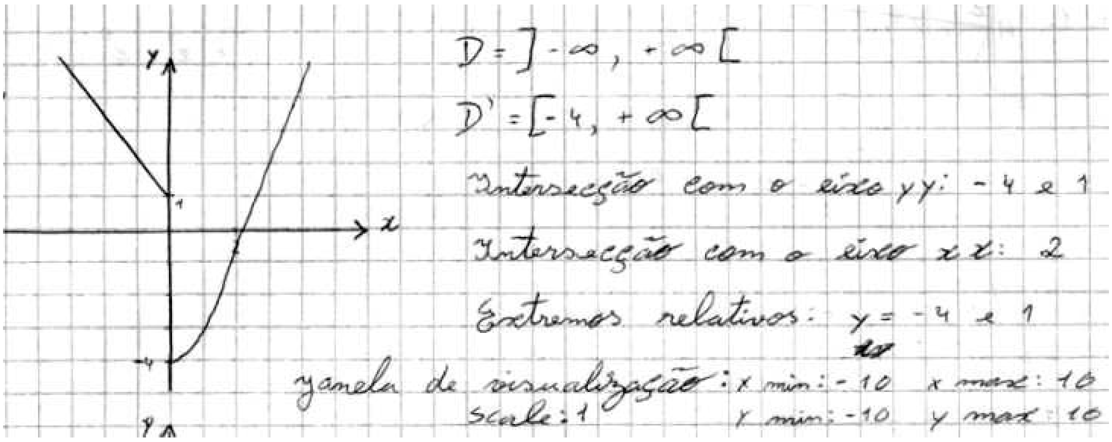


Figura 5.10 - Resolução da questão 2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Quando questionado sobre não ter desenhado as "bolas" abertas ou fechadas na representação gráfica da função, o aluno responde:

> **Professor:** Achas que o gráfico está bem representado?
> **Nuno:** [Pausa] Ah! Falta pôr a bola aberta.
> **Professor:** Onde?
> **Nuno:** Aqui é bola aberta [no troço para $x < 0$] e aqui é bola fechada por causa do $x \geq 0$.

A entrevista permite perceber que Nuno conhece as propriedades da função definida por troços, sendo um dos troços uma restrição de uma função afim e o outro troço uma restrição de uma função quadrática. Constata-se, então, que o aluno transcreve a representação gráfica do ecrã da calculadora para a folha de respostas, mas não tem em conta algumas propriedades da função, como é o caso dos pontos com "bola" aberta e "bola" fechada que a calculadora não evidencia e o declive da semi-recta. Todavia, revela que conhece e que é capaz identificar as propriedades de uma função através do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora.

5.2.3. Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica

Questão 3.2. Nesta questão da 2.ª entrevista, o aluno responde correctamente, mas não apresenta cálculos para justificar a sua resposta, como é solicitado na tarefa. Escreve apenas a seguinte equação (fig. 5.11):

$$f(x) = (x-1)^2$$

Figura 5.11 - Resolução da questão 3.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Aquando da entrevista, foi-lhe pedido que explicasse como é que obteve a expressão algébrica da função *f*:

Professor: Como é que chegaste a este resultado?
Nuno: Sei que esta função é a transformação da função x^2. Ela anda uma casa para a direita, porque *h* é 1, então fica $(x-1)^2$.

Nuno usa, nesta questão, transformações de funções. Na equação da parábola, somar uma constante a *x* ou à expressão *y* origina uma translação horizontal ou vertical; multiplicar por -1 origina uma simetria em relação ao eixo dos *xx* ou em relação ao eixo dos *yy*; e multiplicar por uma constante diferente de 1 ou de zero causa um alongamento ou uma compressão ao gráfico no sentido vertical ou horizontal. Neste caso, o aluno identifica que a função *f* é o resultado da translação horizontal, de comprimento 1, para a direita da função de equação $y = x^2$.

Questão 4. (função g). Na tarefa de avaliação, Nuno resolve a questão relativa à função *g*, atribuindo aos parâmetros *h* e *k,* da equação $y = a(x - h)^2 + k$, o valor das coordenadas do vértice da parábola. Não determina o parâmetro *a*, que poderia ser suportada pela consideração de um ponto possível do gráfico. Apenas considera o valor -1, talvez por ter em conta que a função tem a concavidade voltada para baixo (fig. 5.12).

$$g(x) = -(x+1)^2 + 2$$

Figura 5.12 - Resolução da questão 4., função *g* (tarefa de avaliação).

Deste modo, Nuno atribui correctamente os parâmetros *h* e *k*, mas não é capaz determinar o parâmetro *a* sustentado pela consideração de um ponto possível do gráfico *g*. Mostra, portanto, dificuldades em usar informação acessível através do gráfico da função.

Questão 4. (função p). Nuno identifica e determina correctamente o declive da recta, através das coordenadas do vector director. A determinação do parâmetro *b*, da equação $y = mx + b$, foi suportada pela consideração de um ponto possível do gráfico da função (fig. 5.13):

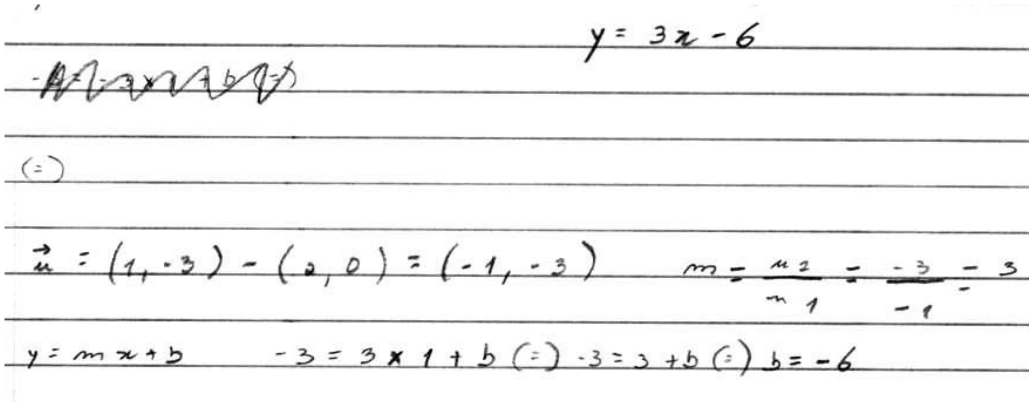


Figura 5.13 - Resolução da questão 4., função *p* (tarefa de avaliação).

A sua resposta revela uma boa compreensão dos processos de resolução desta questão. Na 1.ª entrevista evidencia dificuldades, principalmente em associar o parâmetro *b*, da equação $y = mx + b$, à ordenada do ponto onde a função intersecta o eixo dos *yy*. Após a unidade de ensino mostra um excelente desempenho na tradução de uma representação gráfica numa algébrica, pelo que parece ter reificado algumas das propriedades da função afim.

Constata-se que Nuno apresenta uma equação algébrica da função quadrática correcta, ao recorrer à transformação de funções, mas revela dificuldades na determinação do parâmetro *a* quando tem que considerar as coordenadas do vértice e as coordenadas de um outro ponto devidamente identificado na resolução da equação.

5.2.4. Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

Questão 5.1. Na 2.ª entrevista, Nuno determina correctamente a medida do comprimento da hipotenusa de cada um dos triângulos rectângulos da figura, $\overline{EH}$ e $\overline{EF}$, mas mostra dificuldades no cálculo da área do quadrilátero inscrito $[EFGH]$ (fig. 5.14).

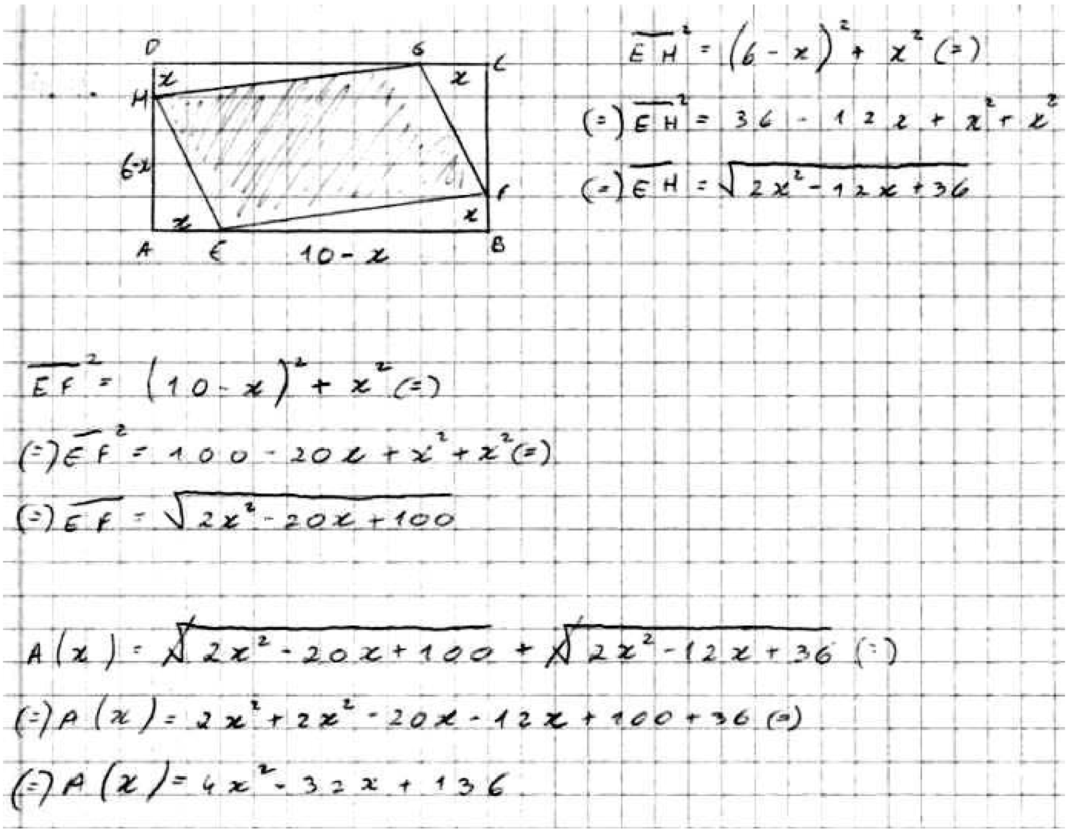


Figura 5.14 - Resolução da questão 5.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

No decorrer da entrevista, ao ser questionado, o aluno vai tomando consciência do erro que cometeu e percebe que o processo que usou não o conduz à expressão da área do quadrilátero $[EFGH]$:

Professor: Que figura vês dentro do rectângulo?
Nuno: [Pausa] Um paralelogramo.
Professor: Como se determina a área de um paralelogramo?
Nuno: Eu achava que era igual à do rectângulo.
Professor: Sabes como se determina?
Nuno: Não me lembro.
Professor: É igual ao comprimento de um lado vezes a altura. Mas, neste caso devemos usar outro processo. A área deste paralelogramo é igual à área do rectângulo menos …?
Nuno: Menos a área destes 4 triângulos [rectângulos].
Professor: Exacto.

O aluno não compreende que a área do quadrilátero $[EFGH]$ é igual à diferença das áreas do quadrado $[ABCD]$e dos triângulos rectângulos. Evidencia dificuldades na compreensão deste problema e, consequentemente na tradução de uma representação numérica numa representação algébrica.

5.2.5. Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Questão 4.1. Nesta questão da 2.ª entrevista, Nuno adopta uma resolução algébrica. Interpreta correctamente o valor a atribuir à variável tempo t, ao considerar que às 17 horas esse valor é igual a -1. Calcula correctamente o valor de $N(-1)$ e não se esquece de apresentar a resposta em milhares (fig. 5.15).

17 h – $t = -1$

$N(-1) = -2 \times (-1)^2 + 8 \times (-1) + 24 = 14$ milhares de pessoas

Figura 5.15 - Resolução da questão 4.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

Questão 4.2. Também nesta questão, o aluno calcula por processos algébricos os valores de $N(1)$ e $N(2)$, efectua a diferença entre estes dois valores e interpreta correctamente o resultado obtido no contexto do problema (fig. 5.16).

$N(1) = -2 \times 1^2 + 8 \times 1 + 24 = 30$ milhares de pessoas

$N(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 + 24 = 32$ milhares de pessoas

$N(2) - N(1) = 32 - 30 = 2$ milhares de pessoas.

Das 19 horas para as 20 horas é possível verificar um aumento de milhares de pessoas.

Figura 5.16 - Resolução da questão 4.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Questão 4.3. Nesta questão Nuno usa a resolução algébrica, mas não apresenta todos os processos, designadamente a identificação da variação do sinal da função quadrática (fig. 5.17).

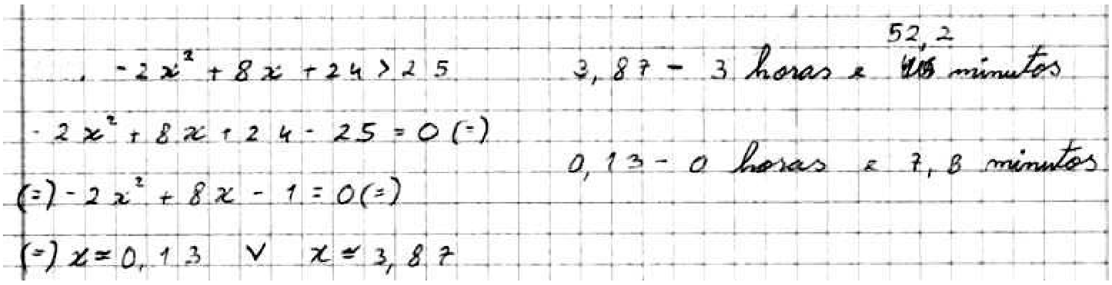


Figura 5.17 - Resolução da questão 4.3. (tarefa da 2.ª entrevista).

Na entrevista, o aluno explica os processos que utiliza e o modo como considerou o gráfico em relação ao eixo horizontal e como identificou o sinal da função quadrática, na resolução da inequação:

> **Nuno:** Na máquina de calcular determinei os zeros [0,13 e 3,87]. Depois 0,13 corresponde a 0 horas e 7,8 minutos e 3,87 corresponde a 3 horas 52,2 minutos.
> **Professor:** Como é que obtiveste 7,8 minutos?
> **Nuno:** Multipliquei 0,13 por 60.
> **Professor:** E os 52,2 minutos?
> **Nuno:** Fiz 0,87 vezes 60.
> **Professor:** Então, entre que horas o número de pessoas ultrapassou as 25000?
> **Nuno:** Foi entre as 18 horas e 7,8 minutos e as 21 horas e 52,2 minutos.
> **Professor:** Porquê?
> **Nuno:** A parábola está voltada para baixo.
> **Professor:** E.
> **Nuno:** E, os valores que interessam são os que ficam acima do eixo dos *xx*, que são aqueles, 0,13 e 3,87.
> **Professor:** Mas não explicaste nem escreveste esse resultado?
> **Nuno:** Não.

Questão 5.2. Nuno determina correctamente as raízes da equação $2x^2 - 16x + 14 = 0$, situa o gráfico em relação ao eixo dos *xx* e identifica correctamente a variação do sinal da função. Do ponto de vista formal utiliza incorrectamente o símbolo de equivalência entre as expressões da inequação e da equação (fig. 5.18).

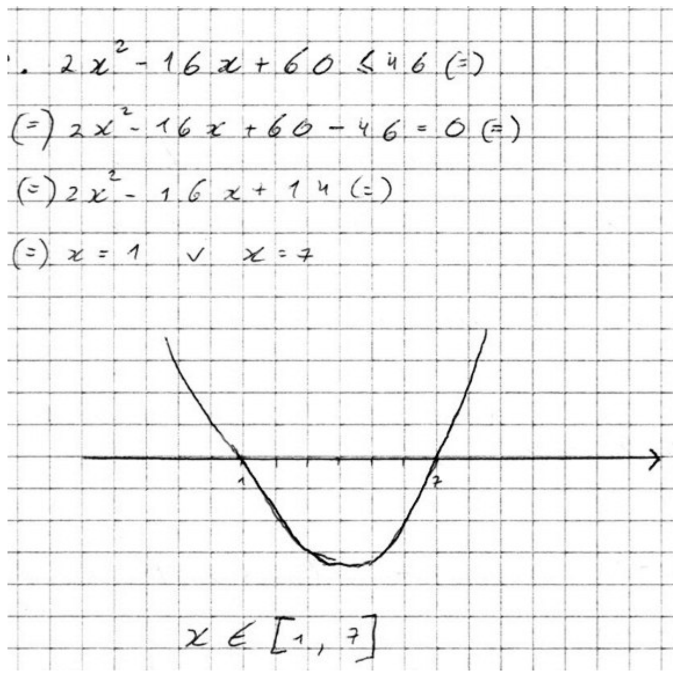


Figura 5.18 - Resolução da questão 5.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Nuno revela um bom desempenho nos processos algébricos utilizados na resolução de inequações do 2.º grau. Todavia, na questão 4.3., não identifica a variação do sinal da função e, na questão 5.2., utiliza simbologia incorrecta do ponto de vista formal, quando escreve o sinal de equivalência entre a inequação e a equação do 2.º grau.

Quando questionado sobre a opção pela resolução algébrica, assume a seguinte posição:

> **Nuno:** Eu prefiro resolver algebricamente, mas se não conseguir tento recorrer à calculadora, até mesmo para confirmar resultados.

Deste modo, mostra ter preferência pela resolução algébrica e recorre à calculadora para confirmar resultados ou quando não consegue resolver uma questão algebricamente. O aluno revela um bom desempenho ao nível do cálculo de expressões e de resolução de inequações do 2.º grau.

5.2.6. Uso de processos gráficos na resolução de condições

Questão 3.1. Na 2.ª entrevista, Nuno opta pela resolução gráfica do conjunto solução da inequação, que implica a representação gráfica da função g e a interpretação correcta da variação do sinal dessa função (fig. 5.19). Obtém a representação gráfica da função *g* através da transformação de funções. A função -*f*(*x*) tem o gráfico simétrico do de *f*(*x*), em relação ao eixo dos *xx*, e passa-se do gráfico de *y* = -*f*(*x*) ao gráfico *g*(*x*) = *f*(*x*) + 1, por meio de uma translação vertical de uma unidade para cima.

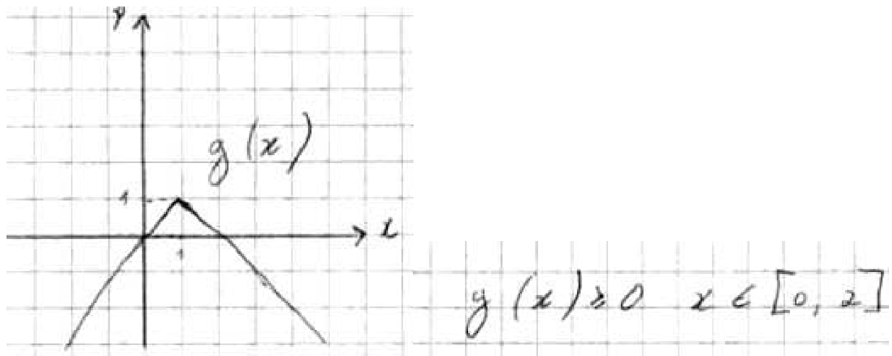


Figura 5.19 - Resolução da questão 3.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

A entrevista permite perceber como é que Nuno encontra a representação gráfica da função *g* e o conjunto solução da inequação g(x) ≥ 0:

> **Nuno:** A função *f* rodou em relação ao eixo do *xx* e andou uma casa para cima.
> **Professor:** Qual é o conjunto solução da inequação?
> **Nuno:** Como g(x) ≥ 0, então… [os valores de *x*] são os números de zero a dois.
> **Professor:** Porquê?
> **Nuno:** Porque entre zero e dois os valores [de *y*] estão acima do eixo dos *xx* e, também, estão sobre esse eixo.

Observa-se um bom desempenho de Nuno na determinação do conjunto solução da inequação ao recorrer à transformação de funções.

5.2.7. Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações. Na 1.ª entrevista, questão 1., constata-se que Nuno sabe a definição do conceito de função e reconhece as funções quando são definidas na representação algébrica ou em tabela, mas nem sempre as identifica quando surgem na representação gráfica. Por exemplo, na questão 1.3. a "bola" aberta no desenho do gráfico parece ter induzido o aluno a uma análise errada. Na 2.ª entrevista identifica as funções na sua representação gráfica, mas revela algumas dificuldades na identificação de funções representadas na forma algébrica e também na forma de tabela. Por exemplo, na questão 1.5. não reconhece que a condição $x^2 - 2x + y^2 = 8$ é uma equação cartesiana da circunferência e por isso considera que é uma representação algébrica de uma função; e associa a tabela da questão 1.1. à representação de uma função porque não identifica que há um objecto com duas imagens. Assim, Nuno escreve correctamente a definição de função, mas por vezes não distingue as representações algébrica, gráfica ou tabela, que são funções. Estas dificuldades na compreensão do conceito de função em diversas representações foram detectadas na 1.ª entrevista, antes da unidade de ensino, e continuam a verificar-se depois da realização desta unidade.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações. Na 1.ª entrevista, o aluno evidencia dificuldades na conversão da representação gráfica de uma função afim para a representação algébrica. Por exemplo, na questão 4. Nuno identifica e determina correctamente o declive da recta, através das coordenadas do vector director, mas revela que não sabe associar o parâmetro b da equação $y = mx + b$ à ordenada do ponto onde a função afim intersecta o eixo dos yy. Esta dificuldade mostra que o aluno não reificou ainda algumas das propriedades da função afim e, consequentemente, também não reificou o conceito de função afim.

No final da unidade de ensino constata-se que Nuno é capaz de converter correctamente uma representação gráfica de uma função afim numa representação algébrica. Por exemplo, na questão 4. (função p) da tarefa de avaliação identifica e determina correctamente o declive da recta através das coordenadas do vector director e calcula o valor do parâmetro b da equação $y = mx + b$, com base nas coordenadas de um ponto possível do gráfico da função. Assim, após a unidade de ensino Nuno revela que reificou algumas propriedades da função afim. Na tradução da representação gráfica de uma função quadrática para a representação algébrica apresenta uma equação correcta, do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, quando recorre à transformação de funções, mas revela dificuldades quando considera as coordenadas do vértice e as coordenadas de um outro ponto da função na determinação do parâmetro a. Por exemplo, na questão 3.2. da 2.ª entrevista escreve correctamente a equação da função f porque identifica que esta função é o resultado da translação horizontal, de comprimento 1 para a direita da função de equação $y = x^2$. Na questão 4. (função g) da tarefa de avaliação Nuno atribui as coordenadas do vértice da parábola aos parâmetros h e k da equação $y = a(x - h)^2 + k$, mas revela que não é capaz determinar o valor do parâmetro a.

No que diz respeito à interpretação dos dados do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora Nuno identifica a generalidade das propriedades da função definida por troços (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Por exemplo, na questão 2. da 2.ª entrevista considera uma janela de visualização adequada para o desenha do gráfico na calculadora e reconhece as propriedades da função, como o domínio, o contradomínio e os zeros. E, não é muito rigoroso na representação do esboço gráfico uma vez que não desenha as "bolas" aberta e fechada e não traça correctamente a semi-recta para $x < 0$. Todavia, revela que conhece e que é capaz identificar as propriedades de uma função através do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora.

Em suma, Nuno identifica as propriedades da função nas representações gráfica e algébrica. Revela, portanto, que reificou algumas propriedades da função afim e da função quadrática quando recorre especialmente à transformação de funções.

3. (a) Representações e processos usados em problemas matemáticos. Antes da realização da unidade de ensino Nuno utiliza processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, a solução do problema da questão 5. da 1.ª entrevista pode ser encontrada por diferentes processos, sendo o suporte gráfico fornecido pela calculadora um óptimo auxiliar para a interpretação global da situação, no entanto Nuno opta por processos algébricos.

Após a concretização da unidade de ensino Nuno continua a optar sobretudo por processos algébricos em problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5.2. da 2.ª entrevista resolve a inequação do 2.º grau através de processos algébricos e faz um esboço gráfico em relação ao eixo dos *xx* para identificar a variação do sinal da função e determinar o conjunto solução do problema. Quando a função é representada através do seu gráfico o aluno recorre à transformação de funções e usa, então, processos gráficos na resolução de inequações. Na questão 3.1. da 2.ª entrevista faz um esboço da representação gráfica da função g através da translação e simetria de funções e faz a interpreta da correctamente variação do sinal da função obtida para determinar o conjunto solução da inequação. Na tradução de uma representação numérica numa representação algébrica Nuno usa processos algébricos. Por exemplo, na questão 5.1. da 2.ª entrevista identifica correctamente as variáveis e resolve as equações, mas não usa uma estratégia adequada para obter o resultado pretendido.

Antes e depois da unidade de ensino Nuno parece eleger os processos algébricos em problemas matemáticos e recorre, apenas, aos processos gráficos quando os dados do problema conduzem à transformação de funções.

3. (b) Representações e processos usados em problemas da semi-realidade. Antes da unidade de ensino e no contexto do problema da semi-realidade Nuno traduz com dificuldades a representação numérica da função afim para outra representação (algébrica, gráfica e em tabela). Por exemplo, na questão 3.1. da 1.ª entrevista não converte correctamente a função noutra representação porque não compreende o significado do custo fixo e, por isso, não o associa ao coeficiente linear b da equação $y = m\text{x} + b$. Quanto aos processos usados em problemas da semi-realidade Nuno opta pelos algébricos, apesar de manifestar algumas dificuldades na compreensão dos problemas. Por exemplo, na questão 2.3. da 1.ª entrevista usa a regra de três simples, mas não compreende que o troço da função para $t \geq 45$ corresponde a uma função afim e não a uma função linear. Na questão 3.2. escreve uma equação do 1.º grau coerente com a representação algébrica identificada na questão anterior e resolve-a por processos algébricos. Constata-se que nesta fase o aluno não reificou o conceito de função afim.

Após a realização da unidade de ensino Nuno continua a escolher os processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade e revela um bom desempenho no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau. Por exemplo, nas questões 4.1. e 4.2. da 2.ª entrevista Nuno adopta uma resolução algébrica, calcula e interpreta correctamente o valor das expressões. Na resolução da inequação do 2.º grau, questão 4.3., usa também processos algébricos, mas não conclui o problema nem determina a solução pretendida. À semelhança dos problemas matemáticos, Nuno revela também preferência por processos analíticos na resolução de problemas da semi-realidade e refere que recorre à calculadora para confirmar resultados ou quando não consegue resolver uma questão algebricamente.

Capítulo 6

Teresa

Teresa tem 15 anos e vive com os pais e a irmã mais velha. Concluiu o 9.º ano com nível cinco a oito disciplinas e nível quatro a três disciplinas. Refere que a Educação Física e a Filosofia são as disciplinas de que gosta menos e que não tem nenhuma preferida. No 10.º ano, revela um bom desempenho nas disciplinas da componente geral e um desempenho razoável nas disciplinas específicas e, especialmente, a Matemática obteve, no 1.º e 2.º períodos, a classificação de 12 e 13 valores, respectivamente. Uma das razões que parece ter contribuído para um menor desempenho escolar neste ano lectivo prende-se com algumas dificuldades de adaptação à nova escola, tendo em conta que a escola anterior tem uma dimensão menor e situa-se na localidade onde reside, e que a sua integração na turma, ao nível do relacionamento com os colegas, não tem sido fácil. Deseja continuar a estudar no ensino superior, querendo ser psicóloga clínica. Na sala de aula, participa com empenho, intervêm com autonomia e assume o papel de líder quando trabalha em grupo. É interessada e colabora no trabalho da aula, com desempenho razoável, mas não resolve sempre os trabalhos de casa nem estuda com regularidade. O seu comportamento é bom. Considera o trabalho de grupo importante na evolução da sua aprendizagem, mas prefere aulas expositivas e considera, ainda, que o professor deve ser exigente, mas acessível aos alunos.

6.1. Representações e processos antes da unidade de ensino

6.1.1. Reconhecimento do conceito de função

Questão 1. Na 1.ª entrevista, Teresa define correctamente o conceito de função, contudo não reconhece sempre as representações que são funções. Refere correctamente que a representação na tabela "não é uma função porque ao objecto 8 corresponde a mais do que uma imagem, -50 e 50, e deste modo não é uma correspondência unívoca". Reconhece que a representação algébrica $y = 2x - 3$ é a equação cartesiana reduzida de uma recta e conclui que é função, mas no caso da equação $x^2 + y^2 = 9$ da alínea 1.5. responde incorrectamente e da seguinte forma (fig. 6.1):

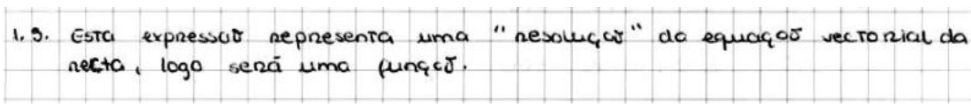

1.5. Esta expressão representa uma "resolução" da equação vectorial da recta, logo será uma função.

Figura 6.1 - Resolução da alínea 1.5. (tarefa da 1.ª entrevista).

Quando questionada, na entrevista, sobre esta afirmação, Teresa admite que a resposta dada não está correcta:

> **Professor:** Escreveste na resposta da [questão] 1.5. que é uma função. Porquê?
> **Teresa:** Não sei, eu acho que sim. [Ri-se]
> **Professor:** $x^2 + y^2 = 9$ é a equação …
> **Teresa:** [Pausa] Equação vectorial da recta.
> **Professor:** Tens a certeza?
> **Teresa:** Não.
> **Professor:** Então, o que é?
> **Teresa:** Não é [a equação de] uma circunferência?
> **Professor:** Sim.
> **Teresa:** Já me lembro. Este número [9] é o raio ao quadrado.
> **Professor:** Achas, então, que é função?
> **Teresa:** Não, não é.
> **Professor:** Porquê?
> **Teresa:** Porque não há objectos com duas imagens.

Inicialmente Teresa considera que $x^2 + y^2 = 9$ é uma equação vectorial da recta e, por isso, identifica-a como função. A sua dificuldade tem origem numa interpretação errada da equação. Quando percebe que é a equação de uma circunferência, reconhece de imediato que não representa uma função.

Relativamente à representação gráfica, nem sempre identifica correctamente se é ou não uma função. Por exemplo, na alínea 1.3., responde que não se trata de uma função (fig. 6.2):

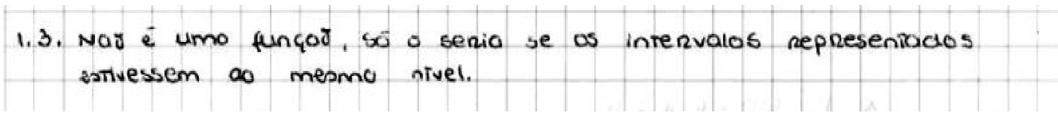

1.3. Naõ é uma funçaõ, só o seria se os intervalos representados estivessem ao mesmo nível.

Figura 6.2 – Resolução da alínea 1.3. (tarefa da 1.ª entrevista).

A aluna foi questionada, na entrevista, para se compreender a sua resposta:

Professor: Referes que não é função, porquê?
Teresa: Só seria [função] se este intervalo aqui estivesse um sobre o outro, pois não estão na mesma direcção.
Professor: Achas que, para ser função, as bolas aberta e fechada devem estar alinhadas na horizontal?
Teresa: Sim, é isso.
Professor: Qual é a definição de função?
Teresa: É uma correspondência unívoca.
Professor: O que entendes por "correspondência unívoca"?
Teresa: A cada objecto corresponde uma e uma só imagem.
Professor: Por exemplo, este objecto aqui tem quantas imagens?
Teresa: Uma [imagem].
Professor: E este [objecto] antes da "bola" aberta?
Teresa: Tem uma [imagem].
Professor: E qualquer outro [objecto]?
Teresa: Tem uma [imagem].
Professor: É função?
Teresa: Sim.
Professor: Porquê?
Teresa: Porque a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.

Parece que as "bolas" aberta e fechada e o intervalo de descontinuidade da função conduziram a aluna a apresentar uma justificação pouco coerente com a definição de função. Na entrevista, quando é confrontada com um determinado objecto, Teresa responde, correctamente, que esse objecto tem uma e uma só imagem e conclui que esta propriedade se verifica para os restantes objectos e, por isso, representa uma função por se tratar de uma correspondência unívoca. Deste modo, a aluna revela que reconhece uma função quando é dada na representação em tabela, mas não identifica sempre as funções quando são apresentadas na forma algébrica ou na forma gráfica.

Questão 2.2. Nesta questão a aluna comenta correctamente as três afirmações, apesar de haver uma incorrecção na alínea 2.2.1. (fig. 6.3):

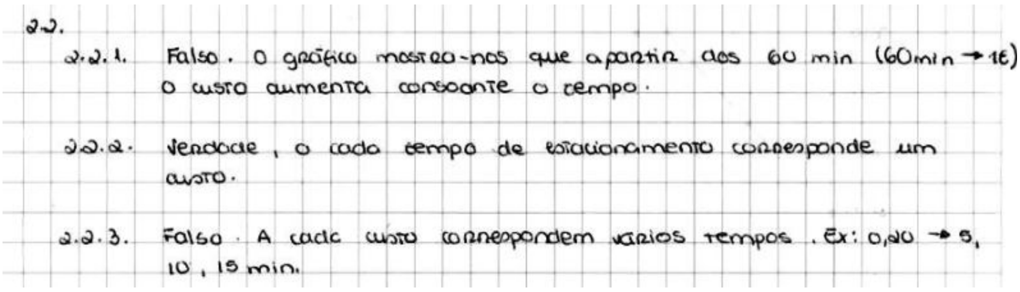

2.2.
2.2.1. Falso. O gráfico mostra-nos que a partir dos 60 min (60min → 1€) o custo aumenta consoante o tempo.
2.2.2. Verdade, a cada tempo de estacionamento corresponde um custo.
2.2.3. Falso. A cada custo correspondem vários tempos. Ex: 0,20 → 5, 10, 15 min.

Figura 6.3 - Resolução da questão 2.2. (tarefa da 1.ª entrevista).

Teresa refere, na alínea 2.2.1., que “a partir dos 60 min. o custo aumenta consoante o tempo” e, na verdade, esse aumento verifica-se algum tempo antes, a partir dos 45 minutos. Apesar desta incorrecção, provavelmente por falta de atenção e por estar relacionada com o valor de 1 € referido no enunciado, a sua resposta está correcta. Na resolução deste problema em contexto da semi-realidade, é capaz de usar a definição de função, de uma forma implícita, nos seus comentários em relação às afirmações do enunciado, o revela nesta questão um bom desempenho.

6.1.2. Tradução da representação gráfica para a representação algébrica

Questão 4. Na 1.ª entrevista, Teresa escreve a equação (fig. 6.4) como representação algébrica da função *h* e constata-se que esta equação não representa a função *h*:

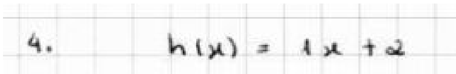

4. $h(x) = 1x + 2$

Figura 6.4 - Resolução da questão 4. (tarefa da 1.ª entrevista).

Para compreender os processos que utiliza e que não indica na folha de respostas, a aluna foi questionada, na entrevista, de modo a explicitar como é que obteve a representação algébrica da função:

Professor: Como é que chegaste a este resultado?
Teresa: O [valor] 2 é onde intersecta o eixo dos *xx*.

Professor: Tens a certeza?
Teresa: Não. [Pausa] Pois, é onde intersecta o eixo do *yy*. Então é 1 e não 2.
Professor: E o valor 1, que está a multiplicar por *x*?
Teresa: É onde intersecta o eixo dos *yy*.
Professor: Achas que está correcto?
Teresa: Julgo que não. [Pausa] Deve ser o declive. Pois troquei tudo.
Professor: Sim, é verdade. E como é que determinas o declive?
Teresa: Não sei.

Verifica-se que Teresa associa o parâmetro *b* da equação $y = mx + b$ ao zero da função, em lugar de o associar à ordenada do ponto onde intersecta o eixo dos *yy*. Em relação ao parâmetro *m* a aluna considera que é igual a 1 porque o faz corresponder à ordenada do ponto onde a recta intersecta o eixo dos *yy*. Assim, Teresa mostra que não sabe associar o parâmetro *b* ao gráfico da função e afirma, também, que não sabe determinar o declive da recta. Por isso, revela fraco desempenho na tradução da representação gráfica de uma função afim para a representação algébrica. Estas dificuldades evidenciam que a aluna não reificou ainda algumas das propriedades da função afim e, por conseguinte, também não reificou o conceito de função afim.

6.1.3. Tradução da representação numérica para outra representação

Questão 3.1. Na 1.ª entrevista é solicitada à aluna a tradução do problema numa representação algébrica, numa representação gráfica e numa representação em tabela. Verifica-se que Teresa resolve correctamente a questão (fig. 6.5), pois considera para o coeficiente linear da restrição da função afim o custo diário fixo de 300 € e para o declive o valor de 10 €, que corresponde ao custo dos materiais na produção de cada camisa. Na representação gráfica desenha os pontos e traça a recta correspondente à função afim que passa por esses pontos. No entanto, é excessivo, neste caso, unir por uma linha recta contínua os pontos cujas coordenadas são obtidas pela tabela, uma vez que a variável *x* pode tomar apenas valores naturais.

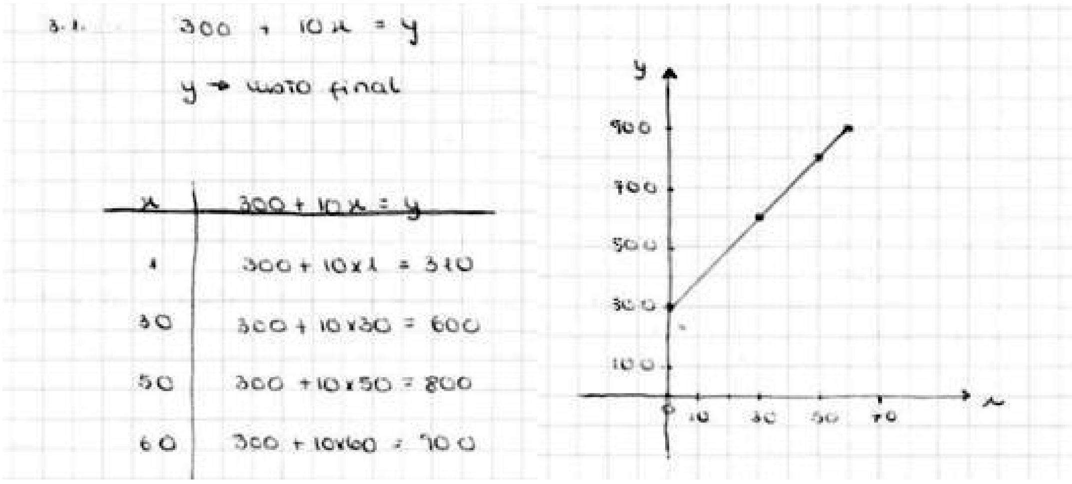


Figura 6.5 - Resolução da questão 3.1. (tarefa da 1.ª entrevista).

Teresa mostra um bom desempenho na interpretação de um problema da semi-realidade e na tradução da representação numérica de uma restrição da função afim para outra representação – algébrica, gráfica e em tabela.

6.1.4. Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Questão 2.3. Ainda na 1.ª entrevista, Teresa resolve este problema por processos algébricos e compreende que o troço da função para $t \geq 45$ corresponde a uma restrição da função afim (fig. 6.6).

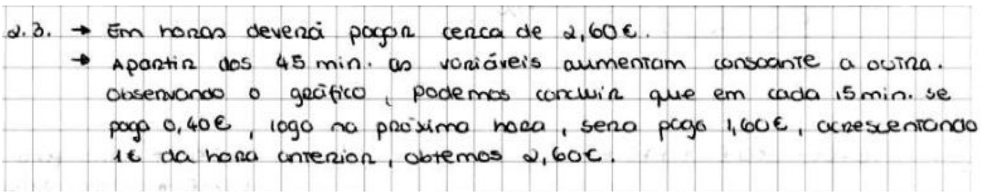


Figura 6.6 - Resolução da questão 2.3. (tarefa da 1.ª entrevista).

A aluna verifica que a partir dos primeiros 45 minutos o preço a pagar por cada quarto de hora é 40 cêntimos. Também constata que o valor a pagar na segunda hora é 1,60 € e que este valor é o resultado do produto de 4 por 40 cêntimos. Depois, através do gráfico observa que o preço, de estacionamento, na primeira hora é 1 €. E por fim conclui, correctamente, que o preço a pagar por um estacionamento de uma viatura durante 2 horas é 2,60 €. Teresa revela assim uma boa compreensão na interpretação e resolução deste problema.

Questão 3.2. Nesta questão, Teresa escolhe, também, uma resolução algébrica. Não equaciona o problema através de uma equação de 1.º grau, mas adopta uma estratégia de cunho aritmético. Assim, determina, em primeiro lugar, o custo dos materiais utilizados na produção das camisas, que corresponde ao valor de 770 € e calcula, depois, o número de camisas através do quociente entre o custo dos materiais utilizados nas camisas produzidas e o custo dos materiais utilizados numa camisa. A aluna revela, também, um bom desempenho na resolução deste problema (fig. 6.7).

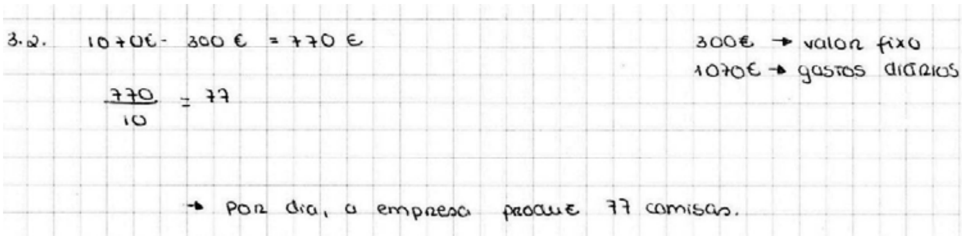


Figura 6.7 - Resolução da questão 3.2. (tarefa da 1.ª entrevista)

Questão 5. Nesta questão, Teresa trabalha com as representações algébricas de duas funções afins. Na resolução da equação $f(x) = g(x)$, do 1.º grau, usa os princípios de equivalência de equações, mas não utiliza correctamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção e, por isso, não obtém a solução correcta. A aluna escolhe processos algébricos para a resolução desta questão e, apesar do erro cometido, revela um bom desempenho (fig. 6.8).

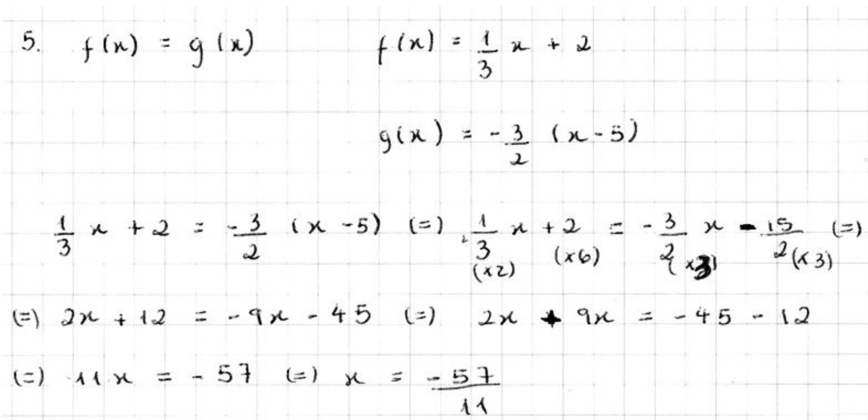


Figura 6.8 - Resolução da questão 5. (tarefa da 1.ª entrevista)

6.1.5. Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações. Na 1.ª entrevista, questão 1., Teresa define correctamente o conceito de função e reconhece várias representações que são função. No entanto, no caso da representação $x^2 + y^2 = 9$ considera que é uma equação vectorial da recta e, por isso, identifica-a como função. A sua dificuldade tem origem numa interpretação errada da equação. Na representação gráfica demonstra, também, alguma dificuldade quando há "bolas" abertas ou fechadas. Na questão 2.2., é capaz de usar a definição de função, de uma forma implícita, nos comentários que faz em relação às afirmações do problema em contexto da semi-realidade. A aluna revela que reconhece uma função quando é dada na representação em tabela, mas não identifica sempre as funções quando são apresentadas na forma algébrica ou na forma gráfica. No entanto, é capaz de usar a definição de função em problemas.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações. Teresa não reconhece as propriedades da equação $y = mx + b$ na tradução da representação gráfica para a representação algébrica de uma função afim. Constata-se, por exemplo na questão 4. da 1.ª entrevista, que a aluna não sabe associar os parâmetros m e b aos pontos relevantes do gráfico da função e por isso escreve uma expressão algébrica que não representa analiticamente a função afim. Estas dificuldades mostram que a aluna não reificou ainda algumas propriedades da função afim.

3. (a) Representações e processos usados em problemas matemáticos. Teresa opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5. da 1.ª entrevista utiliza as representações algébricas das funções afins e resolve a equação do 1.º grau, $f(x) = g(x)$, por processos algébricos. Usa os princípios de equivalência de equações na resolução da equação, mas não aplica correctamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica e, por isso, não determina a solução correcta.

3. (b) Representações e processos usados em problemas da semi-realidade. Teresa traduz a representação numérica de um problema da semi-realidade numa representação algébrica, gráfica e em tabela. Mostra que é capaz trabalhar com várias representações em problemas da semi-realidade que envolvem a função afim. Por exemplo, na questão 3.1. da 1.ª entrevista identifica o coeficiente linear da função afim (o custo diário fixo de 300 €) e o declive dessa função (o valor de 10 €), determina os custos diários fixos na produção de x camisas e apresenta a tabela e uma expressão algébrica da função. Na representação gráfica desenha os pontos e traça a recta correspondente à função afim que passa por esses pontos.

Na resolução de problemas da semi-realidade Teresa utiliza processos algébricos. Por exemplo, na questão 3.2. da 1.ª entrevista não equaciona o problema através de uma equação de 1.º grau, mas determina o número de camisas solicitado por processos algébricos. Na questão 2.3. da 1.ª entrevista usa também processos algébricos com a informação que obtém da leitura do gráfico, depois de compreender que o troço da função, na representação gráfica dada para $t \geq 45$, corresponde a uma restrição da função afim. Constata-se, portanto, que Teresa faz uma interpretação correcta dos problemas da semi-realidade, trabalha com várias representações da função e usa principalmente processos algébricos e com bom desempenho.

6.2. Representações e processos depois da unidade de ensino

6.2.1. Reconhecimento do conceito de função

Questão 1. Na 2.ª entrevista, Teresa identifica correctamente as representações que são funções, mas as justificações que apresenta não são muito explícitas, à excepção das alíneas 1.1. e 1.4.. A aluna refere de modo correcto que a representação na tabela "não é uma função porque o objecto -6 tem as imagens -15 e 15 e, por isso, não representa uma correspondência unívoca". Das representações gráficas apresentadas reconhece correctamente que uma é função e que outra não é, mas não fundamenta a resposta da alínea 1.3. e apresenta uma justificação pouco clara na resposta da alínea 1.2. (fig. 6.9):

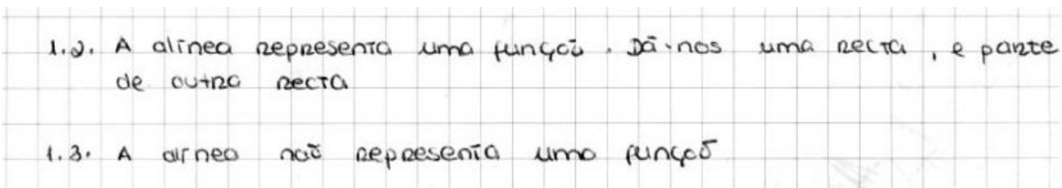


Figura 6.9 - Resolução das alíneas 1.2. e 1.3. (tarefa da 2.ª entrevista).

Teresa foi questionada sobre as suas afirmações em relação às representações gráficas. A aluna explica correctamente que a representação gráfica da alínea 1.2. é uma função, revela inicialmente dificuldades em justificar a resposta da questão 1.3., mas acaba por compreender a razão de não ser função:

> **Professor:** Achas que este troço [o da esquerda], da alínea 1.2., é uma recta?
> **Teresa:** Não. É uma semi-recta.
> **Professor:** E o outro troço?
> **Teresa:** Também é uma semi-recta.
> **Professor:** O que te leva a concluir que esta representação é uma função?
> **Teresa:** As rectas e semi-rectas são funções.
> **Professor:** Explica melhor. Dá exemplos.
> **Teresa:** Por exemplo, o objecto -1 tem uma imagem aqui [Aponta para o semieixo positivo dos *yy*]. E outro objecto [qualquer] tem só uma imagem. E sempre assim.
> **Professor:** Sim, e o que concluis?
> **Teresa:** [Pausa] Cada objecto tem uma e uma só imagem.
> (…)
> **Professor:** E a representação da alínea 1.3., é ou não função?
> **Teresa:** [Pausa] Este exercício é diferente do anterior, acho que há, aqui, objectos com duas imagens.
> **Professor:** Explica como estás a pensar.
> **Teresa:** Para ver se é função temos que … [Pausa] Não me lembro.
> **Professor:** Considera um objecto e verifica se corresponde a mais do que uma imagem.
> **Teresa:** Ah! Já estou a ver. Este objecto tem duas imagens.
> **Professor:** Sim. Se representares várias rectas verticais, verificas que algumas cortam o gráfico em mais do que um ponto.
> **Teresa:** Então, não é uma função porque não é correspondência unívoca.

Quanto à representação algébrica, a aluna reconhece que a equação $3x + y = 5$, da questão 1.4., é equivalente à equação $3x - 5 = y$, representa uma função afim e, por isso, é uma função. No caso da equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$, responde o seguinte (fig. 6.10):

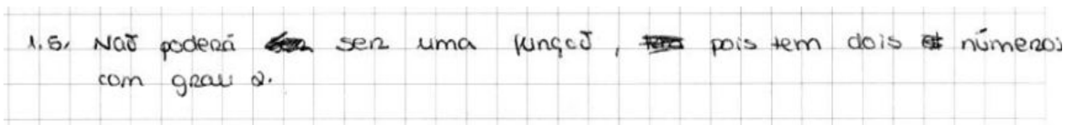


Figura 6.10 - Resolução da alínea 1.5. (tarefa da 2.ª entrevista).

Teresa foi questionada a fim de explicitar a razão que a leva a considerar que a representação algébrica $x^2 - 2x + y^2 = 8$ não é função:

Teresa: Acho que não é função porque tem duas letras [variáveis] ao quadrado.
Professor: O que representa graficamente a equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$?
Teresa: Supostamente… Podia ser uma função quadrática, mas… Tem dois quadrados.
Professor: Porquê que dizes que é supostamente uma função quadrática?
Teresa: Normalmente quando aparece um quadrado é uma função quadrática, mas [aqui] aparece dois quadrados.
Professor: Não te recordas de ter estudado uma equação como esta?
Teresa: É a fórmula resolvente?
Professor: Não será a equação cartesiana da circunferência?
Teresa: Sim, já me lembro.
Professor: É uma função?
Teresa: Não, não é.
Professor: Porquê?
Teresa: Porque os objectos têm duas imagens e, assim, não é uma correspondência unívoca.

A aluna tem a noção que a equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$ não representa uma função, por verificar que dois termos são do 2.º grau. Confunde esta representação com a equação de uma função quadrática e quando percebe que, afinal, representa uma circunferência não tem dúvidas em afirmar que não é função.

O desempenho nesta questão é razoável uma vez que Teresa mostra que sabe a definição de função e que distingue as representações que são funções na forma de tabela e algumas representações algébrica e gráfica. No entanto, revela dificuldades em caracterizar a equação geral de uma circunferência. Neste ponto, as dificuldades verificadas na 1.ª entrevista continuam a manifestar-se após a realização da unidade de ensino.

6.2.2. Desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora

Questão 2. Na 2.ª entrevista, Teresa esboça uma representação gráfica da função *g* definida por dois troços – uma restrição da função afim e uma restrição da função quadrática. A aluna reconhece e escreve correctamente o domínio da função, mas não representa no gráfico a "bola" aberta, para excluir o ponto (0 , 1) no gráfico (fig. 6.11). Identifica o mínimo, o zero da função e a ordenada onde intersecta o eixo dos *yy*. Não escreve o contradomínio da função:

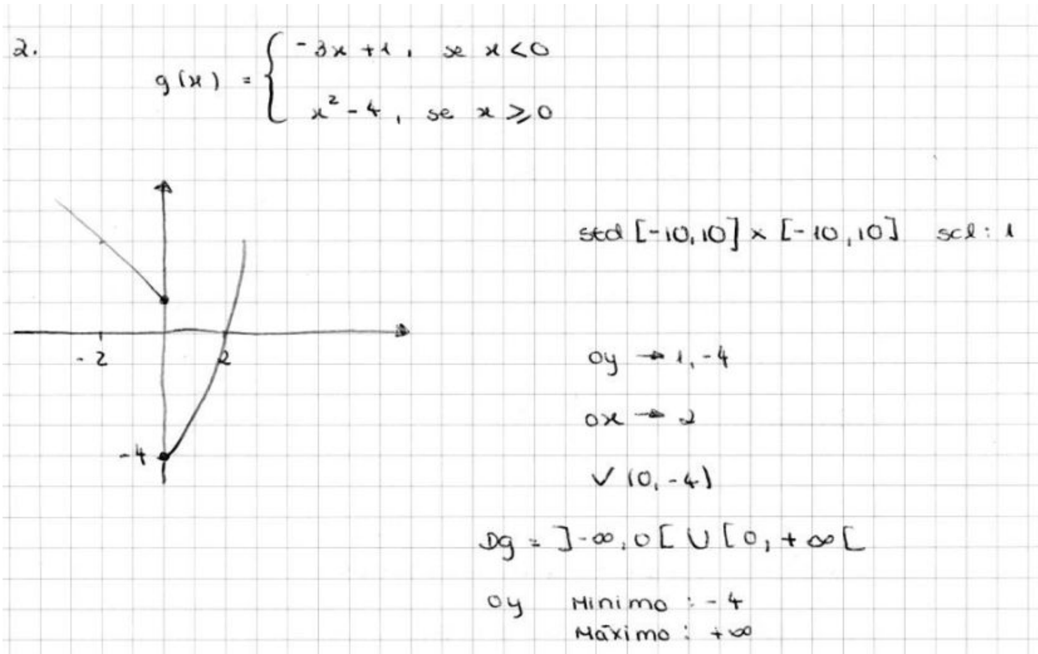


Figura 6.11 - Resolução da questão 2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Quando questionada, na entrevista, sobre o gráfico representado, a aluna responde:

> **Professor:** O gráfico da função *g* está correcto?
> **Teresa:** Acho que sim.
> **Professor:** Observa com mais atenção.
> **Teresa:** [A aluna usa a calculadora gráfica] O gráfico que está aqui [na calculadora] é igual ao que desenhei na folha.
> **Professor:** Sim, mas a calculadora não distingue alguns pormenores, como por exemplo as “bolas” abertas ou as “bolas” fechadas. Neste troço [para x < 0] deve figurar a “bola” é aberta porque o 0 não faz parte do seu domínio.

Teresa define uma janela de visualização adequada, transcreve do ecrã da calculadora para a folha de respostas a representação gráfica e demonstra que conhece algumas propriedades desta função definida por troços. Todavia, o gráfico não é uma representação correcta pois apresenta, para $x = 0$, duas imagens e o esboço da semi-recta parece ter um declive diferente por esta passar pelo ponto de coordenadas (-2 , 3) e não pelo ponto (-2 , 7). Apesar destas incoerências, revela um desempenho bastante razoável na resolução desta questão.

6.2.3. Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica

Questão 3.2. Nesta questão da 2.ª entrevista, a aluna escreve a equação na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e substitui os parâmetros h e k pelas coordenadas do vértice da parábola. Não determina o parâmetro a, que pode ser calculado através da resolução da equação $y = a(x - 1)^2$, após a substituição de um ponto do gráfico, diferente do vértice da parábola (fig. 6.12):

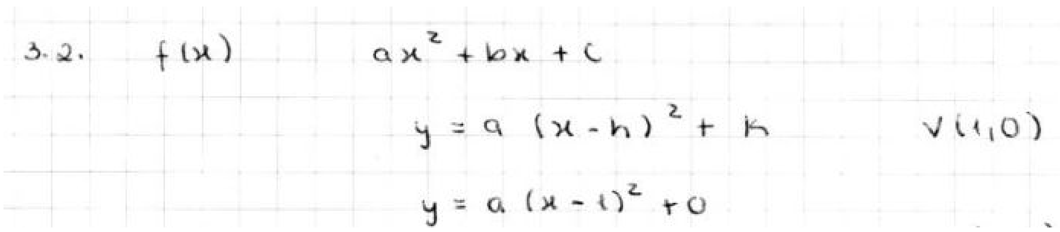


Figura 6.12 - Resolução da questão 3.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Aquando da entrevista, foi-lhe solicitado que explicasse o motivo de não ter concluído a resolução do exercício:

Professor: Não calculaste o [valor] de *a*, porquê?
Teresa: Stor, não me lembro.
Professor: Então não ficou bem aprendido?
Teresa: Se me der uma ajuda, consigo.

Teresa substitui correctamente os parâmetros h e k, mas não se mostra capaz determinar o valor de a por não se recordar dos processos de resolução que permitem encontrar a equação do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$. Evidencia, portanto, dificuldades em utilizar informação acessível através do gráfico da função, mas sente que se for orientada consegue resolver a questão.

Questão 4. (função g). Na tarefa de avaliação, Teresa tenta resolver a questão relativa à função g e atribui aos parâmetros α e β, da equação $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, os zeros da função quadrática. Também, neste exercício, a aluna não determina o parâmetro a, que pode ser sustentada pela contemplação de um ponto do gráfico com abcissa diferente de zero (fig. 6.13).

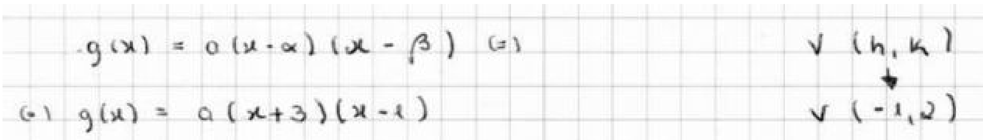


Figura 6.13 - Resolução da questão 4., função *g* (tarefa de avaliação).

Deste modo, Teresa atribui correctamente os parâmetros α e β, na equação do tipo $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, mas revela, mais uma vez, dificuldades na determinação do parâmetro *a* baseada na escolha de um ponto possível do gráfico *g*.

Questão 4. (função p). Na tarefa de avaliação, Teresa determina as coordenadas do vector director da recta (representação gráfica da função afim *p*) e escreve correctamente o seu declive ($m = 3$), que resulta do quociente entre a segunda e a primeira coordenadas desse vector. Mas, associa indevidamente o parâmetro *b* da equação $y = mx + b$ ao zero da função (fig. 6.14):

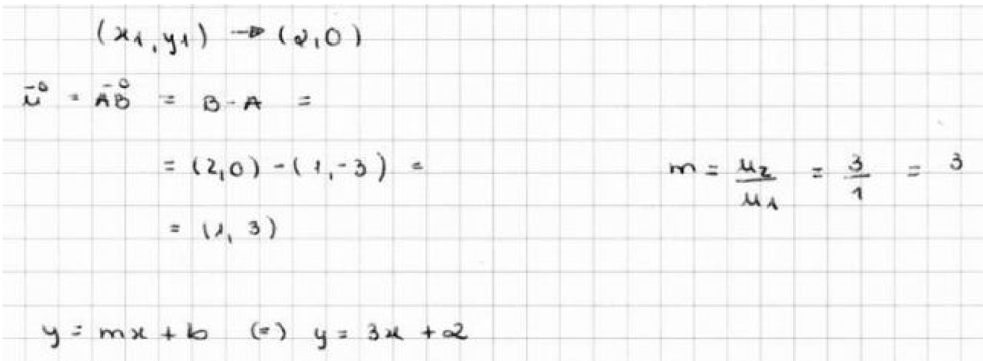


Figura 6.14 - Resolução da questão 4., função *p* (tarefa de avaliação).

A resposta dada revela que não compreende todos os processos de resolução desta questão. Note-se que na entrevista realizada antes da unidade de ensino, a aluna mostra que não é capaz identificar o parâmetro *b* nem calcular o declive da recta. No final da unidade verifica-se que sabe determinar o declive da recta, mas ainda não é capaz calcular a ordenada na origem. Há uma evolução positiva, no entanto Teresa evidencia que não está apta a traduzir a representação gráfica de uma função afim numa representação algébrica. Parece, então, que não reificou algumas propriedades desta função.

A situação afigura-se semelhante na tradução da representação gráfica numa representação algébrica de uma função quadrática. Teresa revela fraco desempenho, particularmente no cálculo do parâmetro a, quando quer converter para as equações na forma $y = a(x - h)^2 + k$ ou na forma $y = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$.

6.2.4. Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

Questão 5.1. Na 2.ª entrevista, Teresa calcula correctamente a área do rectângulo $[ABCD]$e a área dos triângulos rectângulos $[AHE]$e $[BEF]$. Depois compreende que a área do quadrilátero $[EFGH]$ é igual à diferença das áreas do quadrado e dos triângulos rectângulos (fig.6.15).

$$A_{\square ABCD} = 10 \times 6 = 60$$

$$A_{\triangle HAE} = \frac{(6-x)\times x}{2} = \frac{6x - x^2}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}$$

$$\triangle HAE = \triangle GCF \quad \therefore A_{\triangle GCF} = 3x - \frac{x^2}{2}$$

$$A_{\triangle EBF} = \frac{(10-x)\times x}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = 5x - \frac{x^2}{2}$$

$$\triangle EBF = \triangle HDG \quad \therefore A_{\triangle HDG} = 5x - \frac{x^2}{2}$$

$$\cancel{2}\cdot\left(3x - \frac{x^2}{\cancel{2}}\right) = 6x - x^2$$

$$\cancel{2}\cdot\left(5x - \frac{x^2}{\cancel{2}}\right) = 10x - x^2$$

$$10x - x^2 + 6x - x^2 = 10x + 6x - x^2 - x^2 =$$

$$= 16x - 2x^2$$

$$\cancel{A = 60 - (16x - 2x}$$

$$A = 60 - (16x - 2x^2) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad A = 60 - 16x + 2x^2 = 2x^2 - 16x + 60$$

Figura 6.15 - Resolução da questão 5.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

A aluna foi questionada no sentido de explicar a sua interpretação do enunciado e da figura e a estratégia que adopta na realização do problema geométrico:

Professor: Quando analiso a tua resposta fico com a sensação que foi fácil resolveres o problema. É verdade?
Teresa: [Pausa] Não, não foi fácil.
Professor: Explica como tentaste fazer, inicialmente.
Teresa: Quando olhei para a figura pareceu-me que o quadrilátero do meio [inscrito] era um rectângulo.
Professor: E, então?
Teresa: Determinei o [comprimento do] lado através do teorema de Pitágoras.
Professor: Mas, não seguiste este processo, porquê?
Teresa: Porque obtive expressões complicadas com raízes.
Professor: E?
Teresa: Depois … voltei ao princípio e tentei resolver de outra maneira. Demorei, ainda, algum tempo, mas fui capaz fazer.
Professor: Correcto.

Constata-se que Teresa compreende que a área do quadrilátero $[EFGH]$ é igual à diferença das áreas do quadrado $[ABCD]$ e dos triângulos rectângulos. Faz uma interpretação correcta do problema e converte-o numa representação algébrica.

6.2.5. Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Questão 4.1. Na resolução desta questão da 2.ª entrevista, Teresa opta por processos algébricos. Concretiza correctamente a variável tempo *t* com valor -1, calcula com êxito o valor de *N*(-1) e apresenta a resposta em milhares (fig. 6.16).

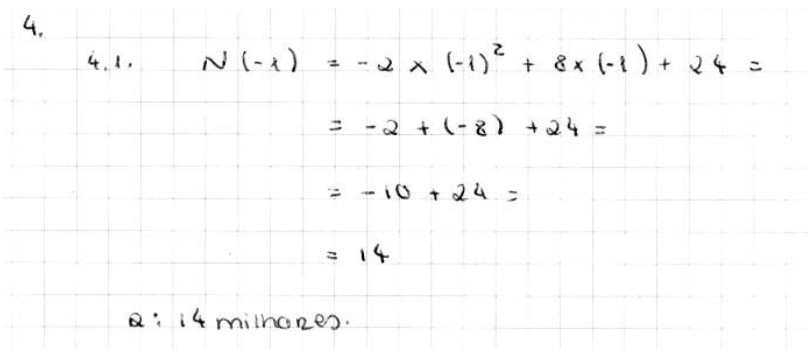


Figura 6.16 - Resolução da questão 4.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

Questão 4.2. Nesta questão, a aluna também utiliza processos algébricos, mas com incorrecções do ponto de vista formal e erros que revela algum desconhecimento de regras ou de propriedades. Transpõe para a folha de respostas os dados do enunciado e iguala incorrectamente as expressões equivalentes a *N*(1) e a *N*(2) e simplifica-as. No final, interpreta o resultado obtido sem especificar o período do dia que teve o aumento de 2000 pessoas no recinto (fig. 6.17).

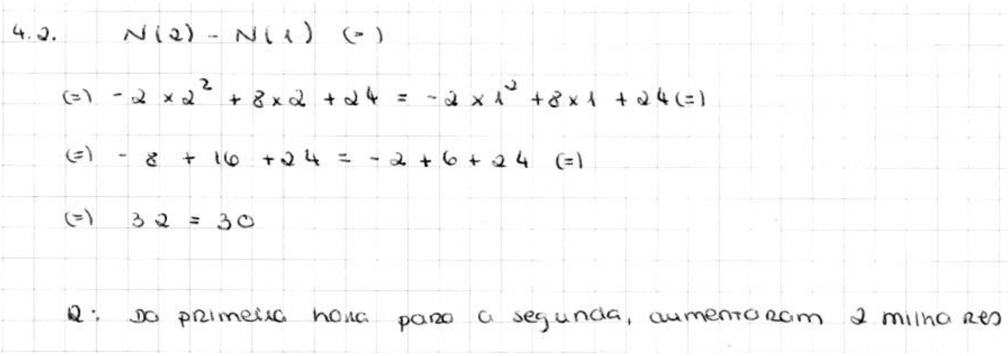


Figura 6.17 - Resolução da questão 4.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

Questão 5.2. Teresa traduz de forma explícita o problema por meio de uma inequação do 2.º grau. Para resolver esta condição calcula os zeros da função $A(x)$ - 46 e o conhecimento dos zeros e o sentido da concavidade permite, então, esboçar o gráfico em relação ao eixo dos *xx*. Através deste esboço identifica a variação do sinal da função e representa o conjunto solução que compreende o conjunto das abcissas dos pontos de ordenada menor ou igual a zero (fig. 6.18).

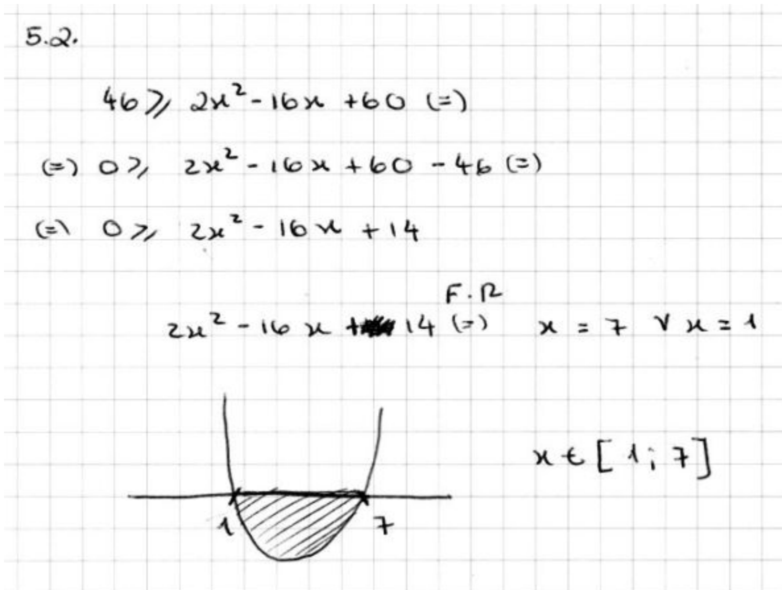


Figura 6.18 - Resolução da questão 5.2. (tarefa da 2.ª entrevista).

A aluna faz uma interpretação correcta dos problemas e mostra um bom desempenho na resolução de inequações do 2.º grau e no cálculo de expressões algébricas. Apesar de apresentar alguns erros na questão 4.2., quando passa de uma diferença para a igualdade de duas expressões, compreende o problema e faz uma interpretação razoável da solução que determina.

6.2.6. Uso de processos gráficos na resolução de condições

Questão 3.1. Na 2.ª entrevista, Teresa resolve a inequação pelo método gráfico e este método exige conhecer uma representação gráfica da função *g* e interpretar correctamente a variação do sinal da função (fig.6.19). O gráfico da função *g* é obtido pelo simétrico do gráfico de *f* relativamente ao eixo dos *xx* e seguido de um deslocamento na vertical, de uma unidade para cima.

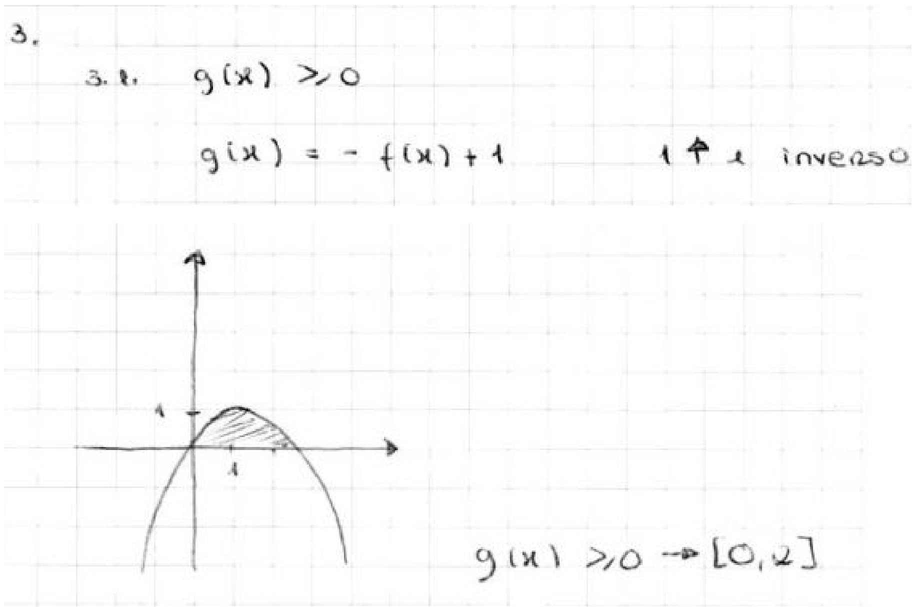


Figura 6.19 - Resolução da questão 3.1. (tarefa da 2.ª entrevista).

Para perceber melhor como é que representa o gráfico da função *g* e como determina o conjunto solução da inequação g(x) $\geq$ 0, Teresa é questionada na entrevista:

> **Professor:** Escreveste na folha de respostas "*1* ↑ *e inverso*". Qual o seu significado?
> **Teresa:** Quer dizer que fiz o gráfico inverso da função *f* em relação ao eixo do *xx* e depois desloquei-o uma unidade para cima.
> **Professor:** Disseste inverso. Não será simétrico?
> **Teresa:** Sim, talvez.
> **Professor:** Explica como é que obténs o conjunto solução?

Teresa: É o intervalo fechado de 0 a 2 porque é [a função g]$\geq$ 0 e, assim, é a parte da função que fica acima do eixo dos *xx*, a que está a sombreado.

A aluna utiliza uma expressão incorrecta do ponto de vista formal quando escreve $g(x) \geq 0 \rightarrow [0,2]$ no lugar de escrever $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,2]$. Apesar desta incorrecção revela um bom desempenho na determinação do conjunto solução da inequação ao recorrer a transformações de funções com apoio gráfico.

Questão 4.3. Não traduz de forma explícita esta situação por meio de uma inequação, mas Teresa recorre às capacidades gráficas da sua calculadora. Reproduz, na folha de respostas, o gráfico da função *N*, a recta de equação $y = 25$ e o referencial visualizados na calculadora. Assinala os pontos de intersecção da recta com a função, o ponto de intersecção da função com o eixo dos *yy* e escreve as suas coordenadas. Não conclui a resposta e considera erradamente 0,13 horas equivalente a 13 minutos (fig. 6.20).

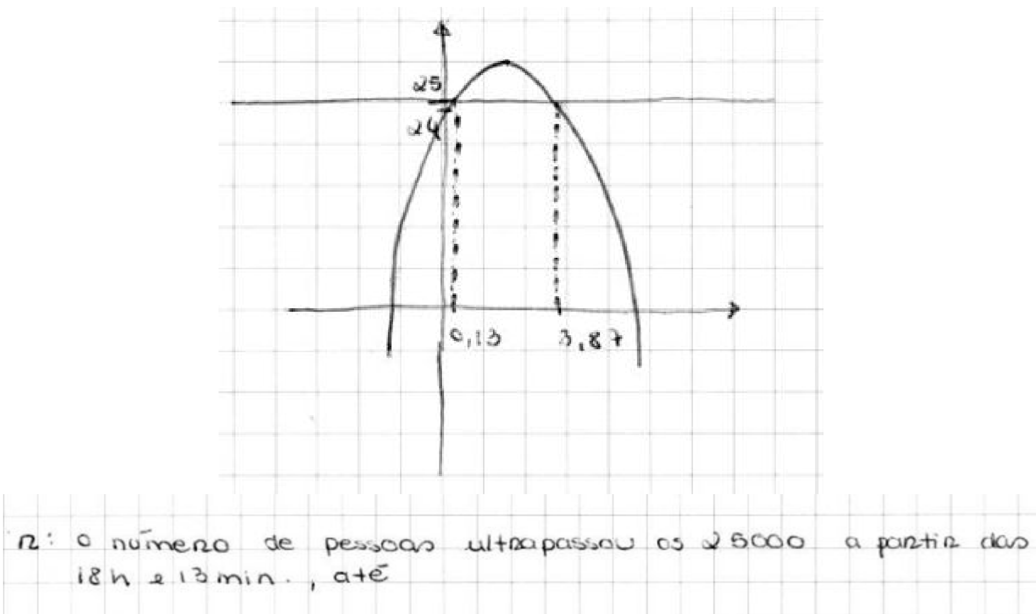


Figura 6.20 - Resolução da questão 4.3. (tarefa da 2.ª entrevista).

Na entrevista, a aluna explica os processos que utiliza na calculadora gráfica e o modo como obteve os pontos de intersecção da função com a recta:

Professor: Explica como resolves.
Teresa: Na calculadora obtenho os gráficos da função *N* e da recta $y = 25$.
Professor: Representas a recta $y = 25$, porquê?
Teresa: Tenho que ver quando é que ultrapassa as 25000 [pessoas].

Professor: Falas em 25000 e depois trabalhas com a recta $y = 25$. Explica melhor.
Teresa: É 25 porque o número [de pessoas] é em milhares.
Professor: Correcto. Continua.
Teresa: Agora vou à procura dos pontos onde a recta e a função se intersectam.
Professor: Então, que valores é que obtiveste?
Teresa: Zero.
Professor: Tens zero [na calculadora]?
Teresa: Não, [tenho] 0,129… Então é às… 18 [horas] vírgula 13 minutos.
Professor: 13 minutos?
Teresa: Eu acho que sim.
(…)
Professor: Vai até que horas?
Teresa: Até …[Usa a calculadora para determinar o outro ponto de intersecção]. É… 3,87. Então é 21 horas e 87 minutos. (Pausa) Não pode ser.
Professor: Não pode ser, o quê?
Teresa: Não pode ser 87 minutos.
Professor: Pois não, 0,13 e 0,87 são centésimas da hora, por isso tens que converter em minutos.
Teresa: Já sei, vou pela regra de três simples.

Faz uma interpretação correcta do problema e adopta uma estratégia adequada e que envolve processos gráficos na resolução da inequação. E, não apresenta uma solução completa porque evidencia dificuldades na interpretação dos valores 0,13 e 0,87 e na tradução em minutos.

6.2.7. Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações. Na 1.ª entrevista, questão 1., Teresa define correctamente o conceito de função e reconhece várias correspondências que são funções. No entanto, nem sempre identifica as representações gráficas e as algébricas. Na questão 2.2. usa a definição de função, de uma forma implícita, nos comentários que faz em relação às afirmações do problema em contexto da semi-realidade.

Na 2.ª entrevista distingue correctamente as representações que são funções. Das representações gráficas, apesar de reconhecer que uma é função e que outra não, apresenta uma justificação pouco clara na resposta da 1.2. e não justifica a questão 1.3.. Na representação algébrica, a aluna tem a noção que a equação $x^2 - 2x + y^2 = 8$ não representa uma função, no entanto, confunde esta representação com a equação de uma função quadrática e quando percebe que, afinal, representa uma circunferência não tem dúvidas em afirmar que não é função. O seu desempenho nesta questão é razoável uma vez que identifica algumas funções na sua representação gráfica, algébrica e na forma de tabela, mas algumas vezes não justifica correctamente. Neste ponto, as dificuldades verificadas na 1.ª entrevista continuam a manifestar-se após a realização da unidade de ensino.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações. Antes da realização da unidade de ensino Teresa não reconhece as propriedades da equação $y = mx + b$ na tradução da representação gráfica para a representação algébrica de uma função afim. Constata-se, por exemplo na questão 4. da 1.ª entrevista, que a aluna não sabe associar os parâmetros m e b aos pontos relevantes do gráfico da função e por isso escreve uma expressão algébrica que não representa analiticamente a função afim.

No final da unidade de ensino verifica-se uma evolução na aprendizagem de algumas propriedades, mas constata-se que continua a não estar apta a traduzir a representação gráfica de uma função afim numa representação algébrica, uma vez que não reconhece a relação entre alguns parâmetros da expressão algébrica e a informação relevante do gráfico. Teresa mostra que sabe calcular o declive da recta, mas não é capaz determinar a ordenada na origem, como se reconhece na questão 4. (função p) da tarefa de avaliação. Apesar de se verificar uma evolução positiva parece, porém, não ter reificado ainda algumas propriedades da função afim.

Relativamente à tradução de uma representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica Teresa mostra dificuldades em utilizar informação acessível através do gráfico da função. Na representação gráfica de uma função quadrática a aluna por um lado, por exemplo na questão 3.2. da 2.ª entrevista, identifica o valor das coordenadas do vértice da parábola e associa-o correctamente aos parâmetros h e k da equação do tipo $y = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$. Por outro lado, na questão 4. (função g) da tarefa de avaliação, considera para os parâmetros α e β da equação do tipo $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, $a \neq 0$ os zeros da função quadrática e manifesta identificar a relação entre função quadrática e funções afins, ou seja, reconhece que uma representação algébrica de uma função quadrática se obtém pela multiplicação de duas funções afins (não constantes). No entanto, não é capaz reconhecer o valor do parâmetro a nem a sua influência no gráfico das funções quadráticas apresentadas, ou seja, não associa o sentido da concavidade da parábola ao parâmetro a nem determina o seu valor baseado na escolha de um ponto possível do gráfico. Teresa não reificou, portanto, as propriedades da função quadrática que lhe permitem traduzir uma representação gráfica numa representação algébrica.

Quanto ao desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora, Teresa demonstra que identifica algumas propriedades da função definida por troços, constituída por uma restrição da função afim e uma restrição da função quadrática. Também mostra que sabe definir uma janela de visualização adequada e que é capaz de transcrever do ecrã da calculadora para a folha de respostas a representação gráfica da função definida por troços, embora com algumas incorrecções. Por exemplo, o gráfico da questão 2. da 2.ª entrevista não é uma representação correcta, pois apresenta para $x = 0$ duas imagens e o esboço da semi-recta não está bem representado, contudo escreve correctamente o mínimo, o zero, a ordenada onde intersecta o eixo dos *yy* e, na forma de intervalos, o domínio da função. Também não indica o contradomínio da função embora do gráfico obtido respeita esta propriedade. A aluna revela que, apesar de manifestar algumas incoerências, conhece várias propriedades da função definida por troços na representação algébrica e na representação gráfica com a utilização da calculadora.

3. (a) Representações e processos usados em problemas matemáticos. Antes da realização da unidade de ensino Teresa opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5. da 1.ª entrevista trabalha com representações algébricas e resolve a equação $f(x) = g(x)$, do 1.º grau, por processos algébricos. Neste exemplo usa os princípios de equivalência de equações na resolução da equação, mas não aplica correctamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção e, só por isso, não obtém a solução correcta.

Depois da concretização da unidade de ensino verifica-se que Teresa usa processos gráficos ou processos algébricos na resolução de condições e parece que a escolha dos processos não é indiscriminada. A aluna recorre a processos gráficos e a transformação de funções quando, no problema, são apresentadas uma condição e uma representação gráfica de uma função. Por exemplo, na questão 3.1. da 2.ª entrevista usa processos gráficos na resolução da inequação do 2.º grau. Esboça o gráfico da função *g*, que resulta da transformação da representação gráfica da função *f*, e interpreta correctamente a variação do sinal dessa função; e escreve correctamente o conjunto solução da condição, apesar de usar simbologia incorrecta do ponto de vista formal. Mas, Teresa também usa processos algébricos na resolução de condições quando é considerada a representação analítica da condição. Por exemplo, na resolução da inequação do 2.º grau da questão 5.2. utiliza processos algébricos seguido de um processo gráfico. Escreve, portanto, a inequação na forma canónica e determina os zeros da função $A(x) - 46$. Considera os zeros da função e o sinal do coeficiente de x^2 e esboça o gráfico. Através deste esboço identifica a variação do sinal da função e escreve a solução na forma de intervalos.

Relativamente à tradução da representação numérica de um problema matemático numa representação algébrica a aluna usa processos algébricos e revela que é capaz interpretar os dados e converter o problema numa representação algébrica. Por exemplo, na questão 5.1. traduz a representação numérica numa representação algébrica por processos algébricos. Determina as expressões analíticas que representam a área do rectângulo [*ABCD*] e a área dos triângulos rectângulos [*AHE*] e [*BEF*]. Obtém a expressão analítica da área do quadrilátero [*EFGH*] através da diferença entre a área do rectângulo e as áreas dos triângulos rectângulos da figura.

Na resolução de inequações do 2.º grau parece verificar-se que usa os processos em função dos dados do problema. Opta pelos processos algébricos e gráficos quando a condição é dada na forma analítica e opta por processos gráficos quando lhe é dada uma condição e um gráfico de uma função e recorre à transformação de funções. Quanto à tradução de um problema matemático numa representação algébrica verifica-se que utiliza processos algébricos.

3. (b) Representações e processos usados em problemas da semi-realidade. Antes da unidade de ensino Teresa traduz a representação numérica de um problema da semi-realidade numa representação algébrica, gráfica e em tabela. Mostra, portanto, que é capaz trabalhar com várias representações em problemas da semi-realidade que envolvem a função afim. Por exemplo, na questão 3.1. da 1.ª entrevista identifica o coeficiente linear (custo diário fixo) e o declive da função (custo dos materiais na produção da cada camisa), determina o custos médios diários na produção de x camisas e representa a tabela e a expressão algébrica que define a função. Na representação gráfica desenha os pontos e traça a recta correspondente à função afim que passa por esses pontos. Quanto aos processos de resolução de problemas da semi-realidade Teresa opta pelos algébricos. Por exemplo, na questão 3.2. da 1.ª entrevista não equaciona o problema através de uma equação de 1.º grau, mas determina o número de camisas solicitado por processos algébricos. Na questão 2.3. da 1.ª entrevista usa também processos algébricos com a informação que obtém da leitura do gráfico, depois de compreender que o troço da função, na representação gráfica dada para $t \geq 45$, corresponde a uma restrição da função afim. Constata-se, portanto, que na 1.ª entrevista Teresa faz uma interpretação correcta dos problemas da semi-realidade, trabalha com várias representações da função e usa principalmente processos algébricos e com bom desempenho.

Depois da realização da unidade de ensino verifica-se que Teresa usa processos algébricos na resolução de problemas e processos gráficos na resolução de condições. Na resolução de problemas da semi-realidade, por exemplo na questão 4. da 2.ª entrevista (alíneas 4.1 e 4.2.), utiliza a representação analítica dada e opta por processos algébricos. Assim, na alínea 4.1. concretiza a variável tempo t, efectua os cálculos e obtém uma solução correcta. Na alínea 4.2. transpõe para a folha de respostas a expressão $N(2) - N(1)$ e iguala incorrectamente as expressões equivalentes a $N(1)$ e $N(2)$ e simplifica-as. Nesta alínea a aluna apresenta erros que revela algum desconhecimento de propriedades, no entanto faz uma interpretação razoável da solução que determina. Na resolução de condições usa processos gráficos com a ajuda da calculadora gráfica. Por exemplo, na questão 4.3. recorre às capacidades gráficas da calculadora para resolver a inequação, que não traduz de forma explícita. Reproduz, na folha de respostas, o gráfico da função N, a recta de equação $y = 25$ e o referencial visualizados na calculadora. Assinala os pontos relevantes, mas não apresenta uma solução completa uma vez que não é capaz converter horas em minutos. Apesar destas dificuldades faz uma interpretação correcta do problema e adopta processos gráficos, com a calculadora gráfica, na resolução da condição.

No final da unidade de ensino constata-se que Teresa trabalha com representações algébrica e gráfica, que usa processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade e que recorre, também, a processos gráficos com a ajuda da calculadora. A aluna evidencia uma boa compreensão na interpretação dos problemas da semi-realidade e parece fazer uma boa opção na escolha dos processos de resolução de problemas.

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo procuro apresentar os resultados e conclusões mais relevantes para responder às questões da investigação. Começo por fazer uma breve síntese do estudo e, em seguida, apresento as principais conclusões decorrentes da unidade de ensino. Debruço-me, depois, sobre as implicações e recomendações para o ensino e aprendizagem das funções. No final, faço uma reflexão de carácter pessoal como professor e como investigador.

7.1. Síntese do estudo

O objectivo deste estudo é analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora da gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade. Este estudo centra-se na realização de uma unidade de ensino e compreende um conjunto de experiências de aprendizagem diversas. É usada uma sequência de tarefas de carácter investigativo e exploratório de modo que o aluno aplique e reveja processos já aprendidos, desenvolva destreza nos processos e compreenda os conceitos, conseguindo uma aprendizagem mais sólida. Cada tarefa foi realizada em pequenos grupos e, normalmente, em aulas de 90 minutos. Foi reservado um período de tempo no final de cada aula para apresentação e discussão dos resultados de cada grupo à turma.

A investigação tem uma natureza empírica e assume um cunho descritivo e interpretativo. Incide sobre a própria prática do investigador, de uma turma do 10.º ano, e envolve o estudo de caso de dois alunos, Nuno e Teresa. Para a recolha de dados deste estudo foram usadas duas entrevistas clínicas a estes alunos, uma antes e outra depois da unidade de ensino "Funções quadráticas". Também foram utilizados os dados decorrentes da observação das aulas registados no diário de bordo, das resoluções de tarefas de investigação e dos relatórios escritos produzidos pelos alunos.

7.2. Principais conclusões

As conclusões obtidas resultam, sobretudo, dos estudos de caso relativos aos alunos Nuno e Teresa. As entrevistas que lhes foram realizadas tinham por base tarefas individuais que envolvem problemas matemáticos e problemas da semi-realidade.

Compreensão do conceito de função em diversas representações. Antes da unidade de ensino verifica-se que Nuno sabe a definição do conceito de função e reconhece as funções quando são definidas na representação algébrica ou em tabela, mas nem sempre as identifica quando surgem na representação gráfica. Verifica-se, também, que Teresa define correctamente o conceito de função e reconhece várias correspondências que são funções, no entanto não é capaz identificar todas as representações gráficas e algébricas apresentadas.

Depois da conclusão da unidade de ensino constata-se que Nuno identifica as funções na sua representação gráfica, mas revela algumas dificuldades na identificação de funções representadas na forma algébrica e também na forma de tabela. Já Teresa parece saber distinguir correctamente as representações que são funções, mas normalmente não dá uma justificação correcta ou de forma clara.

Assim, de acordo com os resultados obtidos, conclui-se que Nuno e Teresa revelam diversas dificuldades na compreensão do conceito de função em diferentes representações e essas dificuldades não foram superadas após a realização da unidade de ensino "Funções quadráticas". Os alunos conhecem a definição formal de função, dado que descrevem função como correspondência unívoca entre dois conjuntos, mas quando lhes é pedido para identificarem as representações que são funções nem sempre são capazes, ou porque desconhecem o modo de representação da função ou não fazem uso da definição previamente dada, mostrando possuírem um conhecimento compartimentado relativamente ao conceito de função.

Estudo de propriedades de funções em diversas representações. Antes da unidade de ensino nota-se que Nuno tem algumas dificuldades na conversão da representação gráfica de uma função afim para a representação algébrica. O aluno identifica a ordenada na origem, mas não reconhece nem sabe determinar o declive da recta. As dificuldades são mais acentuadas em Teresa, pois não identifica as propriedades da equação $y = mx + b$ e, portanto, não é capaz converter uma representação noutra.

Após a conclusão da unidade de ensino, constata-se que Nuno desenvolveu a compreensão de algumas propriedades da função afim e mostra que sabe converter uma representação gráfica numa representação algébrica. Também mostra que é capaz converter a representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica quando recorre, sobretudo, à transformação de funções, e revela algumas dificuldades quando considera as coordenadas do vértice e as coordenadas de um outro ponto da função na determinação do parâmetro a. Teresa, pelo contrário, continua a evidenciar que ainda não está apta a converter a representação gráfica de uma função afim numa representação algébrica, uma vez que não reconhece a relação entre alguns parâmetros da expressão algébrica e a informação relevante do gráfico. Relativamente à tradução de uma função quadrática mostra, também, dificuldades em utilizar informação acessível através do gráfico da função pois, não é capaz identificar o valor do parâmetro a nem a sua influência no gráfico das funções quadráticas apresentadas, ou seja, não associa o sentido da concavidade da parábola ao parâmetro a nem determina o seu valor baseado na escolha de um ponto possível do gráfico.

Relativamente à interpretação dos dados do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora, Nuno e Teresa identificam a generalidade das propriedades da função definida por troços (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Não apresentam com muito rigor o respectivo esboço gráfico, todavia revelam que conhecem e que são capazes identificar as propriedades de uma função (domínio, zeros, contradomínio, extremos relativos, …) através do desenho do gráfico visualizado no ecrã da calculadora. Igualmente mostram que sabem definir uma janela de visualização adequada para a visualização do gráfico.

Conclui-se que Nuno sabe identificar as propriedades da função nas representações gráfica e algébrica e que, geralmente, é capaz converter uma representação gráfica numa representação algébrica. Nuno revela, portanto, que reificou algumas propriedades da função afim e da função quadrática quando recorre especialmente à transformação de funções. Teresa revela que, também, conhece algumas propriedades quando a função é definida pela sua representação gráfica. No entanto, quando é confrontada com a conversão de uma representação gráfica numa representação algébrica não consegue avançar na sua resolução, porque não reconhece diversas propriedades.

Representações e processos usados em problemas matemáticos e problemas da semi-realidade. Antes da realização da unidade de ensino, Nuno e Teresa usam representações algébricas e processos analíticos na resolução do problema matemático proposto, que compreende a função afim. Relativamente ao problema em contexto da semi-realidade apresentado, Nuno manifesta algumas dificuldades na sua interpretação e compreensão e não traduz correctamente a representação numérica da função afim numa outra representação (algébrica, gráfica e em tabela). Teresa, contrariamente, mostra uma boa compreensão do problema e não tem dificuldades na sua tradução. Verifica-se que, na resolução deste problema, ambos os alunos optam pelos processos algébricos, processos também adoptados no problema matemático.

Após a concretização da unidade de ensino nota-se que Nuno continua a optar, sobretudo, por processos algébricos em problemas matemáticos e em problemas da semi-realidade. Usa, então, processos algébricos na tradução de uma representação numérica numa representação algébrica e, só escolhe processos gráficos, por exemplo na resolução de inequações, quando a função é representada através do seu gráfico e recorre à transformação de funções. Por seu lado, o próprio aluno declara, na entrevista, que recorre à calculadora gráfica para confirmar resultados ou quando não consegue resolver uma questão algebricamente. Conclui-se que tem preferência usar processos analíticos na resolução de problemas, no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau.

Teresa trabalha com representações algébrica e gráfica, usa processos algébricos na resolução de problemas matemáticos e da semi-realidade e recorre, também, a processos gráficos com a ajuda da calculadora. Por exemplo, em relação à tradução da representação numérica de um problema matemático numa representação algébrica usa processos algébricos. Na resolução de condições, e quando é considerada a representação analítica da condição, usa processos algébricos ou processos gráficos com a ajuda da calculadora gráfica. Recorre, igualmente, a processos gráficos e a transformação de funções quando os dados do problema são o gráfico e a equação. Parece, então, que a natureza da tarefa tem influência nos processos que a aluna elege.

Em suma, a realização de tarefas de investigação, por parte dos alunos, possibilita a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. No entanto, de entre os processos matemáticos, constata-se que a sua presença não é igual em todas as tarefas propostas, nem a sua utilização é feita de igual modo pelos alunos. Na resolução de problemas, Nuno utiliza principalmente processos algébricos e usa processos gráficos apenas quando a natureza da tarefa proporciona. Teresa usa igualmente estes processos e utiliza, também, processos gráficos com a ajuda da calculadora. Os processos matemáticos utilizados durante o trabalho investigativo pelo Nuno e pela Teresa foram influenciados por vários factores. De entre estes factores destacam-se a natureza da tarefa, o conhecimento adquirido, a experiência prévia e a competência em usar a calculadora gráfica. A influência destes factores não foi uniforme ao longo do trabalho, no entanto, todos eles contribuíram de algum modo para a utilização ou não de determinados processos pelos alunos.

7.3. Principais aspectos decorrentes da unidade de ensino

No diário de bordo registei, particularmente, os aspectos mais relevantes referentes ao desenvolvimento de cada tarefa durante a realização da unidade de ensino e que passo a enumerar.

A aprendizagem dos conceitos matemáticos sobre funções, processou-se através da participação dos alunos, na resolução de tarefas, em práticas sociais, ou seja, a partir das interacções entre os alunos de cada grupo, entre grupos e entre os alunos e o professor. Estas interacções influenciaram positivamente o trabalho dos alunos. Por seu lado, o professor teve uma influência importante, mas discreta, pois o seu papel foi de procurar orientar os alunos no trabalho sem lhes reduzir a atitude investigativa.

A entrega dos enunciados das tarefas, no início de cada aula, foi acompanhada por breves indicações respeitantes ao modo de organização do trabalho, tempo previsto para a sua realização, material a utilizar e elaboração de relatórios com as resoluções e conclusões.

Na fase de desenvolvimento da tarefa começou por se notar a falta de hábito dos alunos em realizar trabalho de natureza investigativa na sala de aula, pois algumas das suas reacções iam no sentido de solicitar ao professor que se assumisse como agente centralizador do discurso. Numa primeira fase, às primeiras dificuldades, solicitavam o professor para que este lhes dissesse o que era para realizar, não fazendo muito esforço em tentar compreender a tarefa. Aqui, a influência do professor traduziu-se no apoio que deu na primeira tarefa, incentivando uma segunda leitura e dando algumas orientações através de questões, explicações e chamadas de atenção. Numa segunda fase, os alunos encaravam as tarefas de uma forma mais natural e no início de cada aula perguntavam se iam continuar a trabalhar em grupo com as "fichas" fornecidas pelo professor. Contudo, constatou-se que a dependência dos alunos em relação ao professor foi sempre notada ao longo da unidade de ensino, pois foi solicitado, com frequência, para esclarecer dúvidas, responder a questões ou confirmar conjecturas. No entanto, a autonomia foi aumentando pois o discurso do professor ia no sentido de procurar desenvolver nos alunos uma atitude investigativa, em que, eles próprios, fossem os agentes da sua aprendizagem e condutores do seu discurso. Assim, o professor foi circulando pela sala e, sempre atento ao desenrolar dos trabalhos, adoptou uma postura interrogativa que os levava a reflectir sobre as suas próprias dúvidas e questões. Esta postura contribuiu para a evolução dos alunos, acabando estes por se envolverem mais nas tarefas, tornando-se mais autónomos, passando a valorizar tanto as respostas como os processos utilizados e a considerar, em alguns problemas, várias hipóteses de resposta para uma questão.

No final de cada aula, os grupos apresentaram e explicaram os resultados obtidos e sobretudo, procuraram justificações e partilharam as conclusões de cada grupo à turma. No entanto, as opiniões relativamente a estes momentos de discussão não são idênticas. Por exemplo, Nuno declara que foram momentos importantes pois permitiram-lhe a realização de descobertas, a procura de justificações e o confronto de opiniões com os colegas, enquanto que Teresa considera que estas aulas são muito confusas e que são pouco propícias ao registo de apontamentos da matéria. Para cada tarefa os alunos produziram relatórios. Inicialmente, os relatórios, valorizavam, sobretudo, os produtos relativamente aos processos, mas depois da intervenção do professor passaram a apresentar outros aspectos, tais como a descrição do procedimento utilizado, justificações e uma apreciação da proposta.

7.4. Implicações e recomendações

Nota-se neste estudo que os alunos possuem conhecimentos sobre funções, conhecem algumas das suas representações, mas revelam um conhecimento compartimentado não conseguindo estabelecer a conexão entre as várias representações que consideram objectos matemáticos distintos.

De acordo com a revisão de literatura considero que os alunos entrevistados ainda não possuem o conceito de função totalmente desenvolvido, porque este não foi trabalhado por eles como um objecto matemático autónomo e com características próprias. Em particular, os alunos deveriam ter mostrado, na resolução das tarefas propostas, flexibilidade na passagem de um sistema de representação para outro. Este facto não é de estranhar pois, tal como se viu no capítulo 2, o conceito de função é um conceito complicado, quer devido à sua própria natureza dual (operacional e estrutural), quer devido à variedade de representações que admite e simbologia associada. Os alunos vão desenvolvendo este conceito à medida que vão estudando novas classes de funções e que vão resolvendo vários tipos de problemas.

É, pois, importante que o ensino seja pensado de modo a proporcionar aos alunos uma variedade de situações problemáticas baseado em tarefas de exploração e investigação e problemas, que incluam o recurso a uma diversidade de estratégias, nomeadamente o uso das potencialidades da calculadora gráfica ou de programas de computador de modo a ir desenvolvendo este conceito, com vista à sua reificação.

A tradução da representação de uma função para outra é fundamental para que os alunos tomem consciência de que existem várias representações que podem ser utilizadas na resolução de problemas. Ela é muitas vezes a estratégia "chave" para se alcançar a solução. Há representações que, por vezes, são mais eficazes do que outras, cabendo aos alunos a decisão da estratégia a seguir e, caso seja necessário, a flexibilidade em mudar de estratégia com vista a conseguir resolver o problema.

7.5. Reflexão

Os alunos aderiram muito bem às tarefas propostas na unidade de ensino. Todos participaram com interesse, tendo existindo, por vezes, um certo entusiasmo para ver quem era o primeiro grupo a concluir correctamente a tarefa. Também gostaram de ter trabalhado em grupo, pois, de acordo com as suas opiniões expressas por escrito, isso facilitou a sua própria aprendizagem. O interesse em entregar trabalhos que reflectissem o seu empenhamento em resolver as tarefas também contribuiu para o desenvolvimento das aulas. Constata-se, à semelhança de outros estudos, que o trabalho de grupo e as interacções sociais se revelam potenciadores de um bom desempenho dos alunos (César, 1998), em que a aquisição de conhecimentos se torna mais compreensiva e menos mecanizada.

A forma como os encarregados de educação aprovaram a minha investigação foi muito interessante. Isso foi perceptível nas autorizações que concederam por escrito e nas reuniões em que participei e onde divulguei a proposta e alguns resultados da experiência. De referir também a disponibilidade que o conselho executivo da escola evidenciou na aprovação da realização da investigação e a determinação do subdepartamento de Matemática na reorganização da planificação do 10.º ano de escolaridade. Para se proceder à recolha de dados nos meses de Fevereiro e Março foi necessário antecipar a planificação da unidade de ensino.

Esta investigação seguiu uma metodologia qualitativa e foi, na minha opinião, uma escolha adequada, pois todos os momentos das aulas, durante a unidade de ensino, envolveram muitas variáveis. Apesar dos resultados não serem generalizáveis, julgo que não deixa de ser uma descrição científica de uma experiência que ocorreu com alunos numa escola.

A investigação realizada mostra, também, a importância de uma cuidadosa preparação de tarefas. Na verdade, uma das principais preocupações foi preparar bem a unidade de ensino, "Funções quadráticas" do 10.º ano, de uma forma consistente e baseada em problemas e tarefas de exploração e investigação. Uma dificuldade que surgiu no decorrer do estudo foi gerir o tempo para resolver cada uma das tarefas. O tempo previsto foi insuficiente para a concretização de algumas tarefas, e os alunos sentiram necessidade de mais tempo para elaborar os relatórios. Apesar disso, enquanto professor, foi muito gratificante ter colocado em prática esta experiência, uma vez que fiz uma gestão diferente das aulas com utilização de tarefas realizadas em grupo. O facto de ser simultaneamente professor e investigador traduziu-se num momento importante de reflexão e de aprendizagem, pois planifiquei e ensinei, mas também analisei e reflecti sobre as minhas aulas.

Referências

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Ed.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

Bodgan, R., & Biklen, S (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

César, M. (1998). Investigação contextualizada, interacção entre pares e Matemática. *In Actas do VIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 7-33). Lisboa: APM.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1-16.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., e Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphings: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* 60, n.º1: 1-64.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Long, M., & Ben-Hur, M. (1991). Informing learning through the clinical interview. *Arithmetic Teacher*, *38* (6), 44-46.

Matos, J. M., Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass

Ministério da Educação (2001). *Matemática A – 10º ano*. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas. Lisboa.: ME – DES.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM (publicado originalmente em inglês em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM (publicado originalmente em inglês em 1991).

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Patton, M. (1980). Un nouveau paradigme de recherche en évaluation. In C. Paquette, G. Hein & M. Patton (Eds.), *Évaluation et pédagogie ouverte*. Victoriaville, Québec: NHP.

Polya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro. Editora Interciência.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. (pp. 11-23)

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. 1ª ed., 2ª reimp. - Belo Horizonte: Autêntica.

Reinchardt, C., & Cook, T. (1979). Beyong qualitative versus quantitative methods. In T. Cook & C. Reichardt (Eds.), *Qualitative and quantitative methods in evaluation research.* London: Sage.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem soving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução se problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91. (pp. 10-20)

Slavit, D. (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 259–281.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Vala, J. (1986). A análise de conteúdo. In A. S. Silva & J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das ciências sociais*. Porto: Afrontamento.

Yin, R. (2005). *Estudo de caso: Planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.

Anexos

Anexo 1

Tarefa 1 – Quadrados inscritos num quadrado

Objectivos

- Esboçar o gráfico da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento;
- Identificar uma representação algébrica da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento, usando a regressão quadrática com a calculadora gráfica;
- Determinar a expressão algébrica da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento por processos analíticos.

Organização

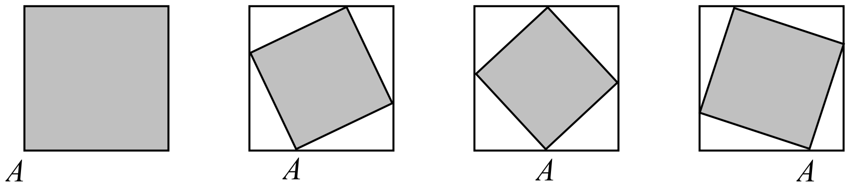
- Duração de 90 minutos.
- Trabalho em grupo – 4 alunos cada.
- Os alunos devem, em grupo, resolver a tarefa, registar e justificar os resultados e no final da aula apresentar esses resultados para discussão com a turma.

Concretização

Os alunos devem ser capazes de concluir que a área do quadrado é 36 cm^2, quando o deslocamento (x) é 0, vai diminuindo até $x = 3$, obtendo-se aí a área 18 cm^2, voltando depois a aumentar até atingir novamente a área 36 cm^2, quando $x = 6$ cm. A questão que se coloca é saber se a variação é ou não linear, devendo a resposta ser obtida na fase seguinte. Os alunos podem utilizar a calculadora no modo *STAT* colocando numa lista vários valores para x e noutra as áreas dos quadrados correspondentes. A representação gráfica torna claro que a variação é feita segundo uma parábola. A utilização da calculadora permite obter, usando a regressão quadrática, a expressão algébrica da área $A(x) = 2x^2 -12x + 36$. Por fim, a determinação das áreas que os alunos fazem, em vários casos particulares, sugere que a área é $A(x) = x^2 + (6 - x)^2$, que é equivalente à anterior.

Tarefa 1 – Quadrados inscritos num quadrado

Considera um quadrado de lado 6 cm e um ponto A que se desloca ao longo de um dos lados e que vai gerando quadrados inscritos no quadrado dado, como sugere a figura.



1. Entre que valores varia o deslocamento A?

2. Sem fazeres cálculos, apenas observando as figuras, faz um esboço gráfico da função que relaciona a área do quadrado com o deslocamento A.

3. Calcula a área de cada quadrado em função do deslocamento de A. Regista numa tabela os vários valores para o deslocamento e as áreas dos quadrados correspondentes.

4. Utiliza a calculadora para obteres uma representação gráfica da função e um modelo analítico que se ajuste à situação apresentada.

5. Por processos exclusivamente analíticos, determina a representação algébrica da função que relaciona a área do quadrado obtido com o deslocamento do ponto A e compara-a com a representação obtida pela calculadora.

Anexo 2

Tarefa 2 – Funções quadráticas

Objectivos

- Estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e identificar o significado dos parâmetros a, h e k.

Organização

- Duração de 135 minutos.
- Trabalho em grupo – 4 alunos cada.
- Os alunos devem, em grupo, estudar e sistematizar o comportamento das funções quadráticas. No final da tarefa os resultados de cada grupo são divulgados à turma para discussão alargada.

Concretização

Com recurso à calculadora gráfica os alunos obtêm e reproduzem numa folha de papel os gráficos das funções definidas pelas suas representações algébricas. Depois identificam, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade e o contradomínio da função. Para as funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$ os alunos devem explicitar os efeitos dos parâmetros a, h e k relativamente aos gráficos das funções e identificar as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria. Por fim, os alunos devem reconhecer que podem obter, por exemplo, o gráfico de $y = 2(x + 3)^2 + 1$ a partir do gráfico de $y = 2x^2$ efectuando sobre este uma translação associada ao vector (-3 , 1).

Tarefa 2 – Funções quadráticas

1. Considera as funções quadráticas seguintes:

   $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2{,}5\,x^2$ e $y = 0{,}5x^2$

   Com auxílio de uma calculadora gráfica esboça os respectivos gráficos. Identifica, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade e o contradomínio da função.

2. Esboça agora os gráficos das funções:

   $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -2{,}5\,x^2$ e $y = -0{,}5x^2$

   Relaciona-os com os anteriores.

3. No caso geral como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro a influencia o gráfico da função?

4. Esboça também os gráficos das funções definidas por:

   $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 3$

   Identifica, em cada caso, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola e explica como podes obter um deles à custa do gráfico da função $y = x^2$.

5. Repete os procedimentos do ponto 4 relativamente às funções:

   $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 2$ e $y = 2x^2 - 3$

   Relaciona os gráficos com o gráfico de $y = 2x^2$.

6. Esboça o gráfico das funções:

   $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 2)^2$ e $y = 2(x + 3)^2 + 1$.

   Identifica, em cada caso, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola.

7. Para as funções do tipo $y = ax^2 + k$, $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + k$ explicita os efeitos dos parâmetros a, h e k relativamente aos gráficos das funções e identifica as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria.

8. Tendo em conta o que aprendeste, descreve como podes obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico de $y = x^2$:

   $y = -5\,x^2$, $y = (x + 7)^2$ e $y = 2(x - 5)^2 + 0{,}6$

Anexo 3

Tarefa 3 – Mais funções quadráticas

Objectivos

- Estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β na equação $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ e analisar as informações imediatas que cada um fornece;
- Traduzir uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica.

Organização

- Duração de 90 minutos.
- Trabalho em pares.
- No final da aula os alunos devem entregar por escrito as respostas obtidas e as conclusões a que chegaram. A discussão geral deve envolver todos os alunos e deve procurar analisar as conclusões a que cada grupo chegou.

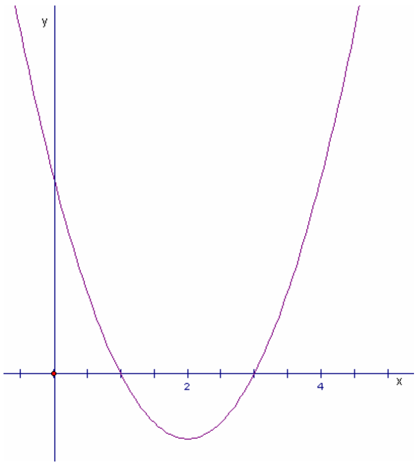
Concretização

Recorrendo à calculadora gráfica, os alunos devem estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β, quando a função é dada na forma $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, e discutir as informações que cada um deles fornece. Na tradução da representação gráfica para a representação algébrica os alunos podem apresentar várias soluções possíveis se existir dúvidas sobre a ordenada do ponto onde a função intersecta o eixo dos yy. No caso da função quadrática que não tem zeros, os alunos devem concluir que esta não pode ser definida como produto de polinómios do 1.º grau (estes admitem sempre um zero). Uma resposta possível pode ser $y = x^2 + 1$ ou qualquer outro polinómio do 2.º grau com $\Delta < 0$.

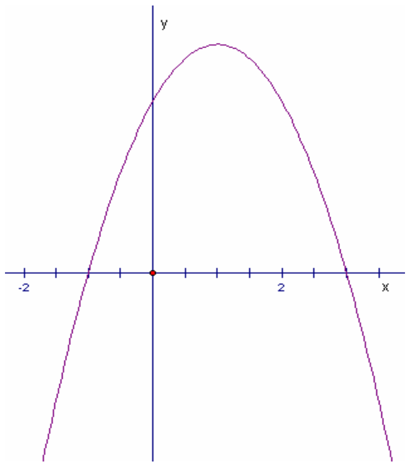
Tarefa 3 – Mais funções quadráticas

1. Representa graficamente a função $y = (x - 2)(x + 5)$.
2. Observa o gráfico. Qual o significado de 2 e -5 relativamente ao gráfico?
3. Investiga os gráficos das funções da família $y = (x - \alpha)(x - \beta)$. Atribui vários valores, positivos, negativos e zero a α e β; experimenta também o caso em que $\alpha = \beta$.
4. Qual é o significado de α e β relativamente ao gráfico?
5. Define, através das suas expressões algébricas, funções que correspondem aos seguintes gráficos. Verifica as expressões que encontraste com a calculadora gráfica.

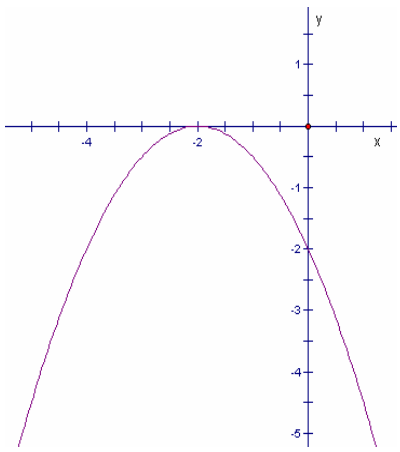
(A)



(B)



(C)



6. Define a representação algébrica de uma função quadrática que não tem zeros. Esboça o gráfico recorrendo à calculadora gráfica e confirma que não tem zeros.

Anexo 4

Tarefa 4 – Problemas em contexto de semi-realidade

Objectivos

- Aplicar os conhecimentos sobre as funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi-realidade com a calculadora gráfica.

Organização

- Duração de 90 minutos.
- Trabalho em pares.
- Os alunos devem, em pares, resolver, justificar e registar num relatório todas os cálculos efectuados, gráficos, pontos relevantes obtidos na calculadora gráfica e as conclusões. No final da aula as conclusões são partilhadas e discutidas com toda a turma.

Concretização

No problema 1., os alunos podem usar ou processos exclusivamente algébricos ou a calculadora gráfica. Para uma representação gráfica da função devem procurar na calculadora gráfica uma janela de visualização adequada. O manuseamento das potencialidades da calculadora gráfica permite encontrar resultados, cujo significado deve ser interpretado pelos alunos.

No problema 2. e questão 2.1. pretende-se que os alunos traduzam a área do canteiro de relva e que corresponde à expressão algébrica $A(x) = -2x^2 + 28x + 90$. Na questão 2.2., recorrendo à calculadora ou a processos algébricos, os alunos determinam as coordenadas do vértice da parábola, que corresponde ao par ordenado (7, 188). A área máxima do canteiro é então 188 m^2 (ordenada do vértice) e o valor de x, para o qual é máxima a área, é 7 m.

Tarefa 4 – Problemas em contexto de semi-realidade

1. O António está a faltar às aulas. Acordou às 5 horas e suspeitou que estava com febre, o que foi confirmado pela temperatura registada no termómetro.

   A temperatura evoluiu nas quatro horas seguintes de acordo com o modelo matemático $T(h) = -0,5\ h^2 + 2h + 38$ e só começou a baixar 20 minutos após a administração de um medicamento.

   T representa a temperatura observada após *h* horas: $0 \leq h \leq 4$.

   1.1. Qual a temperatura observada às 5 horas? Justifica a tua resposta.

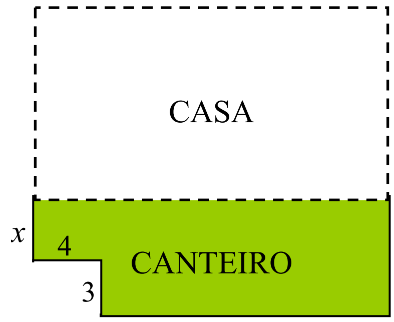
   1.2. Qual a temperatura máxima atingida, no período de observação? Justifica a tua resposta.

   1.3. A que horas foi administrado o medicamento? Justifica a tua resposta.

   1.4. Mostra que a temperatura, entre as 6 e as 8 horas, se manteve superior a 39,5 ºC.

   1.5. A Sónia, irmã do António, também se encontra doente. A sua temperatura evoluiu de acordo com o modelo $T_1(h) = T(h+2)$. Em que intervalo de tempo a temperatura da Sónia foi superior a 39,5 ºC? Justifica.

2. Para vedar um canteiro de relva encostado a uma casa, como mostra a figura, são necessários 40 metros de rede.



   2.1. Mostra que a área *A*, em m^2, do canteiro de relva é dada por $A(x) = -2x^2 + 28x + 90$, sendo *x* a medida, de um lado do canteiro.

   2.2. Determina o valor de *x* para o qual é máxima a área do canteiro e determina essa área máxima. Justifica a tua resposta.

Anexo 5

Tarefa 5 – Transformações de funções

Objectivos

- Esboçar o gráfico das funções definidas por $y = -f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = f(x + a)$, $af(x)$ e $f(ax)$ e $y = |f(x)|$, com $a \neq 0$ e identificar as suas propriedades, dada a função f;

Organização

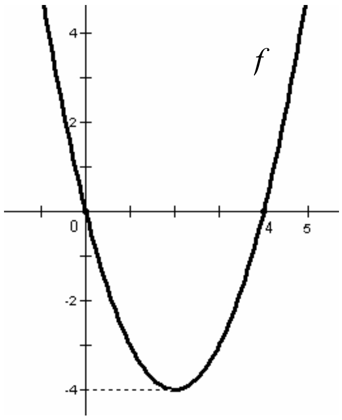
- Duração de 90 minutos.
- Trabalho em pares.
- Os alunos devem, em pares, resolver, justificar e registar num relatório os gráficos elaborados e os pontos relevantes obtidos (com ou sem a calculadora gráfica), bem como todas os cálculos efectuados. No final da aula são apresentadas as conclusões à turma e discutidas em conjunto.

Concretização

Os alunos devem representar os gráficos das funções numa folha de papel e se tiverem dificuldades podem começar por fazer experiências com a calculadora gráfica e com funções conhecidas.

Tarefa 5 - Transformações de funções

1. Considera a função f de domínio IR, representada graficamente por:



e as funções definidas por:

$g(x) = f(-x)$;

$h(x) = f(x + 2) + 1$;

$i(x) = -2f(x)$;

$t(x) = |f(x)|$

1.1. Esboça os gráficos das funções g, h, i e t.

Compara-os com a representação gráfica de f.

Indica:

1.2. Os zeros de g.

1.3. O conjunto solução de $h(x) < 0$.

1.4. O extremo de i.

1.5. Os intervalos de monotonia de t.

2. Encontra funções em que o gráfico de m seja igual ao da função definida por $m(-x)$. Justifica a tua resposta.

3. Considera a função p de domínio IR e de contradomínio $[a, b[$, com $a, b \in$ IR.

Indica, justificando, o contradomínio das seguintes funções

3.1. $p(x) - 3$

3.2. $|p(x)|$, sabendo que $a < 0$ e que $b < 0$

Anexo 6

Tarefa de avaliação

Objectivos

- Identificar o contradomínio de uma função quadrática definida pela sua representação algébrica;
- Resolver algébrica e graficamente inequações do 2.º grau;
- Identificar o gráfico e as propriedades de uma função, conhecido o gráfico de outra função, através das transformações de funções;
- Determinar a expressão algébrica de uma função definida pela sua representação gráfica;
- Aplicar os conhecimentos sobre as funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi-realidade ou que relacionam variáveis da Geometria, com uso da calculadora gráfica.

Organização

- Duração de 90 minutos.
- Trabalho individual.

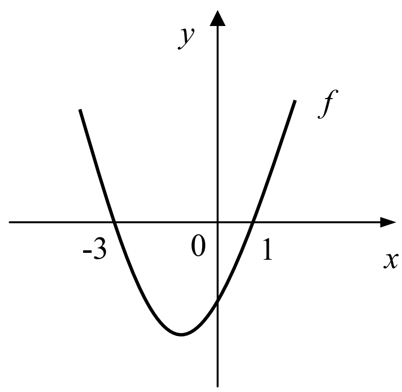
Concretização

Os alunos devem resolver esta tarefa individualmente numa folha de papel e no final da aula entregam para o professor/investigador corrigir e avaliar.

Tarefa de avaliação

1. Seja h a função de domínio [-2 , 3], definida por $h(x) = x^2 + 2$. Qual é o contradomínio de h? Justifica.

2. Considera f a função quadrática representada graficamente.



   2.1. Seja g a função definida por $g(\text{x}) = f(x - 2)$.
   Determina o conjunto solução da condição $g(x) \leq 0$.
   Justifica a tua resposta.

   2.2. Para que valores de $h \in \mathbb{R}$, a função $y = f(x + h)$ tem zeros exclusivamente positivos? Justifica a tua resposta.

3. Num laboratório, foi estudada uma colónia de bactérias. Às oito horas, foi feita a primeira contagem e as seguintes de hora a hora. Verificou-se que o número de N bactérias, em **milhares**, decorridas h **horas**, é dada por $N(h) = -h^2 + 4h + 9$.

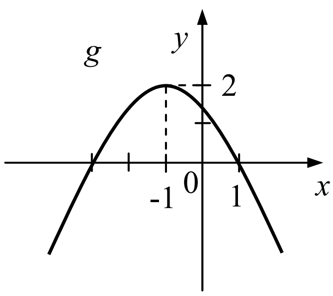
   3.1. Quantas bactérias havia às 8 horas?

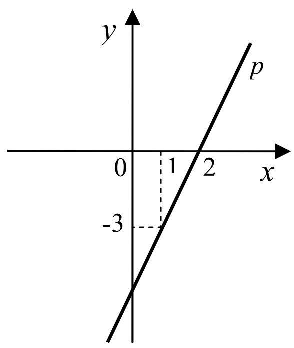
   3.2. Calcula $N(2) – N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

   3.3. Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000? Justifica a tua resposta.

   3.4. Descreve a evolução da colónia desde as 8 até às 13 horas.

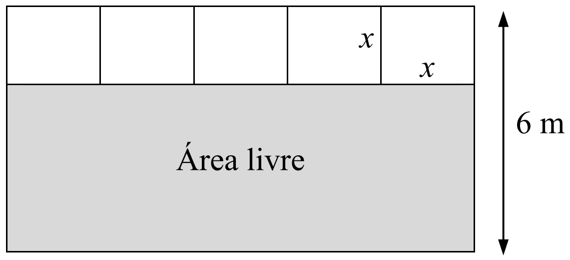
4. Escreve uma expressão algébrica que possa representar analiticamente cada uma das funções quadráticas g e p, representadas graficamente por:





Apresenta todos os cálculos que efectuares.

5. Nas traseiras de um prédio há um pátio rectangular com 6 m de largura e num dos topos vão ser marcados 5 espaços quadrados para a construção de lavandarias, como sugere a figura.



A área livre do pátio depende da medida x do lado do quadrado reservado a cada lavandaria.

5.1. Mostra que a área livre do pátio é dada pela expressão:

$$A(x) = -5x^2 + 30x$$

5.2. Por processos exclusivamente analíticos, determina as medidas do lado de cada quadrado para que a área livre do pátio seja superior a 40 m^2.

6. Seja a função $h(x) = |2x-1| - 4$

6.1. Com recurso à calculadora gráfica, procura uma janela de visualização que se adeqúe à sua representação gráfica e, em seguida, transcreve para a folha de resposta o gráfico obtido, tendo em conta os elementos mais relevantes (como por exemplo o domínio, contradomínio, os pontos de intersecção com os eixos coordenados, os extremos relativos, …).

6.2. Define por troços a função h.

Anexo 7

Guião da primeira entrevista

Identificação

Data da realização da entrevista.

1. Como te chamas?

Questões orientadoras

2. Já reprovaste alguma vez? (Se sim, em que ano(s)?)
3. Consideras a Matemática uma disciplina difícil?
4. Qual o tema da Matemática que mais gostas? E que menos gostas? Porquê?
5. Gostas de trabalhar com a calculadora gráfica? Porquê?
6. Achas que a calculadora gráfica te tem ajudado a compreender a Matemática? Justifica.
7. Das questões a que respondeste, qual é para ti a mais interessante? Porquê?

8- Em qual das questões sentiste mais dificuldade?

Nota: Outras questões serão formuladas aquando da observação dos alunos na resolução da tarefa e da análise das suas resoluções.

Aplicação

A primeira entrevista decorre num momento a combinar com os alunos seleccionados, é audiogravada para posterior transcrição dos elementos mais relevantes e tem uma duração de, aproximadamente, 45 minutos. Pretende-se com esta entrevista conhecer, antes da unidade de ensino, aspectos do raciocínio dos alunos.

Nesta entrevista é aplicada uma tarefa a dois alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade. Esta turma já trabalhou a generalidade de funções e gráficos e as funções afins e vai iniciar a unidade de ensino "Funções quadráticas" depois desta entrevista. Os alunos são seleccionados, para as entrevistas, entre os que evidenciem alguma compreensão e também algumas dificuldades. Estes dados são diagnosticados a partir do conhecimento que o professor/investigador tem da turma e do trabalho que os alunos desenvolveram desde o início do ano lectivo.

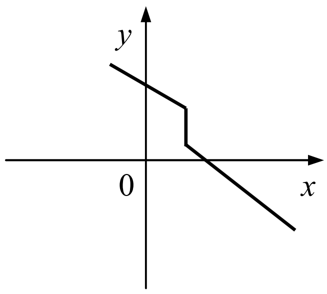
Objectivos

- Identificar uma função numa dada representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica);
- Resolver condições de forma gráfica ou algébrica;
- Converter uma representação de uma função afim numa outra representação;
- Resolver problemas em contexto de semi-realidade envolvendo a função afim, através da representação numérica, gráfica ou algébrica e com a utilização da calculadora gráfica.

Tarefa da primeira entrevista

1. Qual das seguintes representações é função? Justifica a tua resposta.

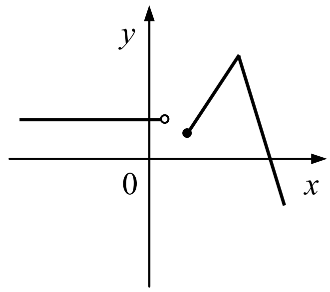
1.1.



1.2.

x	y
-8	-50
-5	-20
-2	0
0	10
-1	15
-5	20
-8	50

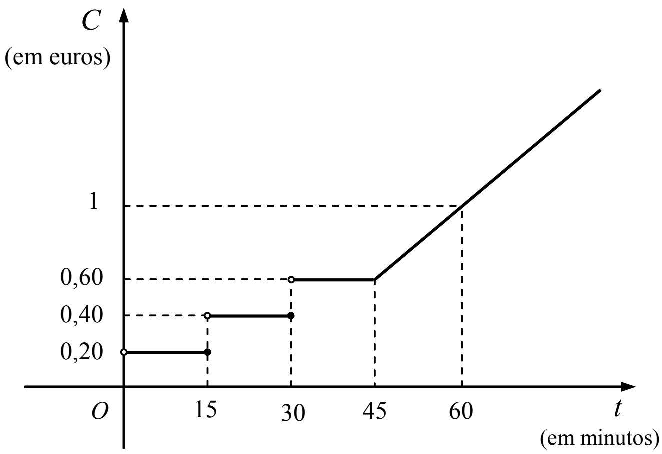
1.3.



1.4. $y = 2x - 3$

1.5. $x^2 + y^2 = 9$

2. O tarifário de um parque de estacionamento é apresentado através do gráfico da figura.



2.1. Qual é o preço a pagar por um condutor que estacione a viatura no parque durante:

2.1.1. 10 minutos?

2.1.2. 25 minutos?

2.1.3. 30 minutos?

2.2. Comenta as afirmações:

2.2.1. "O custo máximo do estacionamento é 1 €".

2.2.2. "A cada tempo de estacionamento corresponde um único custo".

2.2.3. "A cada custo corresponde um único tempo de estacionamento".

2.3. Qual deve ser o preço a pagar por um condutor que teve a viatura estacionada no parque durante 2 horas? Explica o teu raciocínio.

3. O pai do João tem uma pequena empresa que produz camisas. Por dia, os custos fixos (salários, luz, água,…) são 300 euros. Os materiais utilizados na produção de uma camisa, custam, em média, 10 euros.

3.1. Quais são os custos médios diários se, por dia, produzir:

3.1.1. 1 camisa?

3.1.2. 30 camisas?

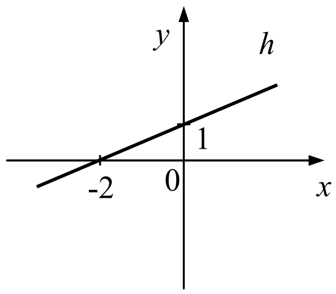
3.1.3. 50 camisas?

3.1.4. x camisas?

Dá a resposta através de uma **tabela** e de um **gráfico**.

3.2. Quantas camisas produz a empresa por dia se o custo médio diário é de 1070 euros? Justifica a tua resposta.

4. Escreve uma expressão algébrica que possa representar analiticamente a função afim h, representada graficamente por.



Apresenta todos os cálculos que efectuares.

5. Considera as funções afins f e g definidas por: $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ e $g(x) = -\frac{3}{2}(x - 5)$.

Determina o valor de x, em IR, de modo que $f(x) = g(x)$.

Anexo 8

Guião da segunda entrevista

Identificação

Data da realização da entrevista.

Relembra-me o teu nome.

Questões orientadoras

1. Das questões que acabaste de realizar de qual gostaste mais? Porquê?
2. Das questões a que respondeste, qual é para ti a mais interessante? Porquê?
3. Em qual das questões sentiste mais dificuldade?
4. Achas que a calculadora gráfica te ajudou a compreender a Matemática? Justifica.

Recorda as tarefas realizadas nas aulas:

5. De que gostaste mais? Porquê?
6. De que gostaste menos? Porquê?
7. Quais te pareceram mais fáceis? Porquê?
8. Quais te pareceram mais difíceis? Porquê?

Nota: Podem ser formuladas outras questões aquando da observação dos alunos na resolução da tarefa e da análise das suas resoluções.

Aplicação

Esta tarefa é aplicada, durante a segunda entrevista, aos dois alunos que participaram na primeira entrevista. A entrevista é realizada após a conclusão da unidade de ensino "Funções quadráticas" e com uma duração que se prevê de, aproximadamente, 90 minutos. Tem como propósito recolher dados que possam contribuir para analisar como os alunos trabalham com as diferentes representações e que representações e processos utilizam na resolução de problemas com funções quadráticas.

Objectivos

- Identificar uma função numa dada representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica);
- Identificar as propriedades relevantes das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, intersecção com os eixos coordenados, extremos relativos, …);
- Identificar o gráfico e as propriedades de uma função, conhecido o gráfico de outra função, através das transformações de funções;
- Resolver condições de forma gráfica ou algébrica;
- Converter uma representação de uma função quadrática numa outra representação;
- Resolver problemas em contexto de semi-realidade envolvendo a função quadrática e com a utilização da calculadora gráfica.

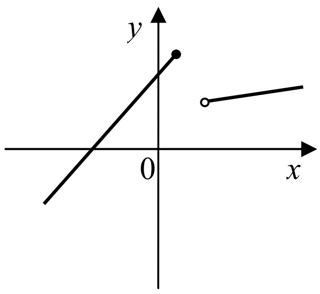
Tarefa da segunda entrevista

1. Qual das seguintes representações é função? Justifica a tua resposta.

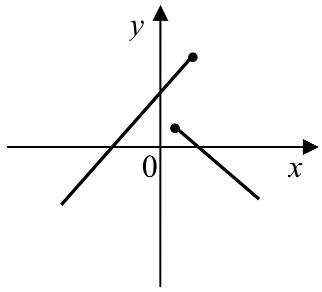
1.1.

x	y
-6	-15
-5	-10
-1	0
2	7
-6	15
4	11
-8	45

1.2.



1.3.



1.4. $3x + y = 5$

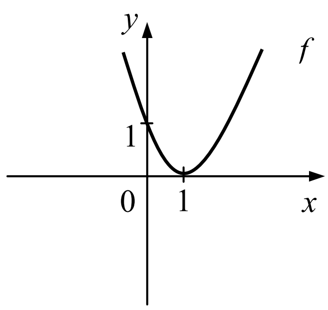
1.5. $x^2 - 2x + y^2 = 8$

2. Considera a função g, definida em $\mathbb{R}$ por $g(\text{x}) = \begin{cases} -3x+1 & se \quad x<0 \\ x^2-4 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

Com recurso à calculadora gráfica, procura uma janela de visualização que se adeqúe à sua representação gráfica e, em seguida, transcreve para a folha de resposta:

- o gráfico obtido, tendo em conta os elementos mais relevantes (como por exemplo o domínio, contradomínio, os pontos de intersecção com os eixos coordenados, os extremos relativos, …);
- a janela de visualização que corresponde ao gráfico apresentado.

3. Seja f a função quadrática representada graficamente na figura ao lado.



3.1. Determina o conjunto solução da condição $g(x) \geq 0$, sabendo que $g(x) = -f(x) + 1$. Justifica a tua resposta.

3.2. Escreve uma expressão algébrica que represente a função quadrática f. Apresenta todos os cálculos que efectuares.

4. O número de pessoas no recinto de um festival rock em Lisboa, entre as 16 e as 24 h, varia em função de t e pode ser dado aproximadamente por $N(t) = -2\,t^2 + 8\,t + 24$, sendo N o número de pessoas em **milhares** e t dado em **horas**, correspondendo $t = 0$ às 18 h.

4.1. Qual o número de pessoas às 17 h? Justifica a tua resposta.

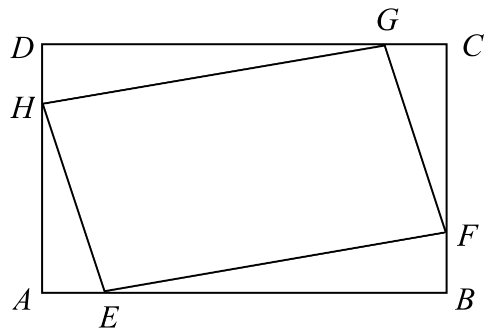
4.2. Calcula $N(2) - N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

4.3. Entre que horas o número de pessoas ultrapassou as 25000 pessoas? Explica o teu raciocínio. Dá o resultado aproximado ao minuto.

5. Na figura está representado um rectângulo [ABCD], tal que:

$\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{AD} = 6$ cm.

Sabe-se que: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$.



5.1. Mostra que a área A do quadrilátero [$EFGH$] é dada em função de x pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$.

5.2. Para que valores de x a área A é inferior ou igual a 46 cm^2? Justifica.

Anexo 9

Autorização do Encarregado de Educação - 1

Exmo. Encarregado de Educação
do(a) aluno(a):_________________________________, nº __ do 10.º ano, turma: ___

Vai ser desenvolvido com os alunos desta turma, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade.

Para tal, solicito a sua autorização para recolher alguns dados do seu educando, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, que permitem perceber a forma como ele viveu as aulas e o modo como pensa e aprende sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações. Informa-se que os dados recolhidos para a investigação não servirão para avaliar o seu educando, mas sim para tentar compreender a percepção que tive das aulas leccionadas e será preservado o anonimato do aluno.

Note-se que analisar o que os alunos têm a dizer sobre este tipo de aulas é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

_____________, 02 de Fevereiro de 2009

____

(Carlos Silva, o professor de Matemática)

✄---

Declaro que autorizo a recolha de dados, referente às tarefas realizadas pelo meu educando _______________________________________, nas aulas de Matemática, com o professor Carlos Silva, no âmbito de uma investigação sobre Funções quadráticas no contexto de "Matemática pura" e semi-realidade, usando a calculadora gráfica.

___ / 02 / 2009

______________________________ (Encarregado de Educação)

Anexo 10

Autorização do Encarregado de Educação - 2

Exmo. Encarregado de Educação
do(a) aluno(a):___________________________________, nº __ do 10.º ano, turma: ___

Vai ser desenvolvido com os alunos desta turma, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas de alunos do 10.º ano de escolaridade.

Para tal, solicito a sua autorização para entrevistar o seu educando, de modo a poder perceber a forma como ele viveu as aulas e o modo como pensa e aprende sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações. Informa-se que essa entrevista será gravada em áudio e, certamente, será preservado o anonimato do aluno. A entrevista não servirá para avaliar o seu educando, mas sim para tentar compreender a percepção que tive das aulas leccionadas.

Note-se que analisar o que os alunos têm a dizer sobre este tipo de aulas é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

_____________, 02 de Fevereiro de 2009

____

(Carlos Silva, o professor de Matemática)

✄---

Declaro que autorizo o meu educando _________________________ a realizar uma entrevista com o professor Carlos Silva no âmbito de uma investigação sobre Funções quadráticas no contexto de “Matemática pura” e semi-realidade, usando a calculadora gráfica nas aulas de Matemática.

___ / 02 / 2009

_______________________________ (Encarregado de Educação)

Anexo 11

Autorização do Conselho Executivo

Exma. Sra. Presidente do Conselho Executivo da Escola Secundária c/ 3º Ciclo de (…)
Profª. (…)

Informo que pretendo desenvolver com os alunos do 10.º ano, turma --, nas aulas de Matemática, uma investigação para analisar o modo como a resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, contribui para a compreensão e aprendizagem das funções quadráticas.

Neste sentido, solicito autorização a V. Exa. para entrevistar três alunos desta turma e recolher alguns dados dos alunos da turma, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, de modo a poder perceber a forma como eles viveram as aulas e o modo como pensam e aprendem sobre as funções quadráticas, nas suas diferentes representações.

Informo que esta investigação não interfere no normal funcionamento das actividades lectivas e os dados recolhidos não servirão para avaliar os alunos. Informo também que já obtive autorização dos encarregados de educação para a recolha dos dados.

Note-se que, para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática é fundamental analisar a forma como os alunos pensam e aprendem.

Com os melhores cumprimentos.

_______________, 02 de Fevereiro de 2009

____

(Carlos Silva, o professor de Matemática)

Anexo 12

Guião do diário de bordo

Aula n.º ____________

Tarefa n.º __________

Tempo: ____________

Data: ______________

1. Antes da aula

Expectativas do professor

2. Durante a aula

2.1. Introdução da tarefa

2.2. Desenvolvimento da tarefa

2.3. Discussão geral

3. Após a aula

3.1. Reconstrução de diálogos

3.2. Reflexão

4. Observações