UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ORDENAÇÃO E COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didáctica da Matemática

2010

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ORDENAÇÃO E COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação

Área de especialização em Didáctica da Matemática

2010

Resumo

Esta investigação tem como objectivo perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de número racional e equivalência de fracções, em alunos do 5.º ano, tendo por base uma unidade de ensino e uma abordagem de cunho exploratório. O quadro teórico evidencia a complexidade do conceito de número racional, constatando-se que os alunos têm muita dificuldade na aquisição da noção e do sentido do número racional. Assume-se que o ensino dos números racionais deve: (i) ter como base os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional; e (iii) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos, bem como as conversões dentro e entre as diferentes representações. Este estudo constitui uma investigação sobre a minha prática profissional que segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, com observação participante. A recolha de dados foi realizada numa turma do 5.º ano, sendo estudada a própria turma e, de forma mais aprofundada, uma aluna objecto de estudo de caso. A recolha de dados inclui dois testes, duas entrevistas, produções dos alunos e registos em diário de bordo.

Os resultados mostram que os alunos melhoraram a sua compreensão da representação fraccionária e da percentagem e até da representação decimal. Contudo, continuam a mostrar dificuldades na representação de fracções impróprias. Também melhoraram na sua compreensão da comparação e ordenação dos números racionais, utilizando, sobretudo, a representação decimal. Os alunos revelam compreender a equivalência de fracções, mas só a usam pontualmente como estratégia para comparar fracções. Isso, possivelmente, deve-se ao trabalho desenvolvido durante a unidade de ensino, dado que os alunos puderam utilizar as mais diversas representações. A hipótese de ensino-aprendizagem fica sustentada pela compreensão que os alunos revelam dos números racionais como números, mostrando compreender que um número racional pode ser representado de diversas formas e mostrando flexibilidade na escolha da representação mais adequada, ou onde se sentem mais à vontade e com a qual conseguem resolver as tarefas propostas.

Palavras-chave: Números racionais, Representações, Ordenação de racionais, Comparação de racionais, Equivalência de fracções.

Abstract

This research aims to understand how working with different representations of rational numbers in their different meanings may contribute to the understanding of the concept of rational number and of the concepts of order, comparison and equivalence of rational numbers among grade 5 students in the context of a teaching unit based on an exploratory approach. The theoretical framework underlines the complexity of the concept of rational number, which accounts for students' difficulty in developing the concept rational number given its different meanings. It is assumed that the teaching of rational numbers must: (i) be based on students' prior knowledge; (ii) emphasize the interrelationships between the various meanings of rational numbers; and (iii) strengthen the relationships between concepts and procedures, as well as conversions within and between different representations. This study is carried out within the professional practice of the researcher and adopts a qualitative methodology according to an interpretative paradigm through participant observation. The collection of data is carried out in a grade 5 class. The class itself was object of study as well as a student who provided a case study. Data collection included two tests, two interviews, and the students' productions and the researcher's records in a logbook.

The results show that students improved their understanding of the representation of a fraction, percentage and even a decimal number. However, they continue to show difficulties in representing improper fractions. They also improved their understanding of comparing and ordering rational numbers, using mainly the decimal representation. Students show that they understand the equivalence of fractions, but that they only use it occasionally as a strategy for comparing fractions. This may possibly be due to the work that was done during the teaching unit, since the students could use many different representations. The teaching and learning hypothesis is supported by the understanding that the students show of rational numbers as numbers and by their understanding that rational numbers can be represented in various ways, showing flexibility in choosing the most appropriate representation, or the representation where they feel more comfortable and with which they can solve the task.

Keywords: Rational numbers, Representations, Order of rational numbers, Comparison of rational numbers, Equivalence of fractions.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela forma como me acompanhou na realização deste trabalho, pela confiança, incentivo e exigência, e acima de tudo pela permanente disponibilidade e pelos seus ensinamentos.

À minha amiga Maria, companheira desta "aventura", pela companhia nas longas horas de trabalho, pela disponibilidade, pelo incentivo e acima de tudo, pela amizade.

Aos colegas do ano curricular, pelo apoio e incentivo, em especial à Sofia e à Margarida.

À Direcção e aos restantes colegas da escola onde se realizou este projecto, pela disponibilidade e pelo apoio que me deram na concretização deste estudo.

À Carla, à Patrocínia, à Sandra e à Susana, pela sua amizade, pelo apoio, pelo incentivo e pela paciência nas intermináveis conversas nos momentos mais difíceis.

A todos os alunos que participaram neste estudo pela sua disponibilidade, entusiasmo e colaboração, sem os quais não teria sido possível concretizar este trabalho.

Aos amigos pelo apoio e por compreenderem as longas ausências.

A todos aqueles, que directa ou indirectamente, estiveram a meu lado e contribuíram para a concretização deste trabalho.

E por fim, à minha família, pelo apoio, pelo carinho e pela confiança que foram fundamentais na concretização de mais uma etapa importante da minha vida. Em especial, aos meus pais e ao Ricardo, por tudo.

Índice Geral

Índice de Anexos

Índice de Quadros

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as razões que me conduziram à presente investigação sobre a aprendizagem do conceito de número racional pelos alunos do 2.º ciclo do ensino básico, no quadro de uma experiência de ensino, assim como o problema e as questões que me proponho estudar.

1.1. Motivação do estudo

O conceito de número racional, segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), é um dos mais importantes e complexos que os alunos aprendem nos primeiros anos de escolaridade. No entanto, no 2.º ciclo, constitui um conceito onde os alunos apresentam muitas dificuldades. Algumas dessas dificuldades prendem-se com a própria representação de número racional. Por exemplo, a maioria dos alunos aceita muito bem que $\frac{1}{2}$ é o mesmo que 0,5 e que ter um desconto de 50% num artigo significa comprá-lo por metade do preço original. E, no entanto, para muitos desses alunos, parece estranho dizer que $\frac{1}{5}$ é o mesmo que 0,2 ou 20% e que ter um desconto de 20% num artigo significa comprá-lo por 80% do preço original.

Na verdade, o número racional admite várias representações, nomeadamente, decimal, fracção, pictórica e percentagem. No 1.º ciclo é muito trabalhada a representação decimal, logo desde os anos iniciais. Muita atenção merece igualmente a representação pictórica ligada ao nosso sistema de numeração (10 e os seus múltiplos 100 e 1000). Contudo, geralmente não é feita uma ligação natural entre estas representações e as representações sob a forma de fracção e de percentagem.

Em resultado do trabalho feito no 1.º ciclo com o significado operador, a maior parte dos alunos sabem o que significa a "terça parte" mas não sabem muitas vezes que esta se pode representar por $\frac{1}{3}$. Ao mesmo tempo, os alunos associam a terça parte a uma divisão cujo divisor é o número 3, mas este 3 representa para eles 3 "unidades" e não a divisão de um todo em 3 partes iguais, o que sugere a existência de dificuldades em lidar com a relação parte-todo.

Outras dificuldades prendem-se com o conceito de fracções equivalentes, que não é bem compreendido pelos alunos. Da minha experiência, os alunos entendem como fracções equivalentes aquelas que obtêm "multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo número inteiro". Ouvem dizer que $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{4}{16}$, mas não entendem que a forma como o todo foi repartido se alterou e que o número de partes que se tomam do todo também aumentou, muito embora a parte desse todo continue a ser a mesma. Não compreenderam o conceito de fracção equivalente, nem o significado quociente, apenas aprenderam um processo mecânico de obter fracções equivalentes.

Sem dúvida, esta sobrevalorização das regras e da memorização tem dois perigos: primeiro, as regras não ajudam os alunos a pensar sobre o significado das operações e porque é que funcionam; segundo, o domínio dos procedimentos baseado na memorização e nas regras perde-se rapidamente. Por isso, como dizem Godino et al. (2004), o ensino dos números racionais deve basear-se no sentido do número e na resolução de problemas.

Apesar de o trabalho com números racionais durante o 1.º ciclo privilegiar a representação decimal, existem algumas dificuldades relativas a esta representação que persistem ao longo do tempo. Assim, frequentemente os alunos consideram que, por exemplo, 3,56 é maior do que 3,6, sem ter em conta que também a parte decimal deve ser interpretada posicionalmente. Nesta situação muitos alunos olham para a parte decimal, em bloco, como se fosse inteira e consideram que 56 é maior que 6. Um erro também frequente, mas desta vez na representação em fracção é, por exemplo, na comparação entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ onde os alunos consideram que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, porque 4 é maior do que 3 (Monteiro e Pinto, 2007).

Muitas vezes, os alunos só têm contacto com as fracções e percentagens no 2.º ciclo, onde surgem descontextualizadas, como um assunto novo e à parte dos restantes. Têm então de aprender rapidamente a operar com estas representações, que não chegam a ser devidamente trabalhadas. Isso implica que os alunos têm que, simultaneamente, compreender as novas representações dos números racionais e tornar-se capazes de operar e resolver problemas com eles. Ou seja, exigimos um grande número de destrezas e conhecimentos aos alunos num curto espaço de tempo, o que leva a que eles não aprendam com compreensão os números racionais e tenham muitas dificuldades na resolução de problemas que envolvam estes números.

O estudo das percentagens é pouco valorizado nos manuais escolares e na prática da sala de aula. Esta representação surge apenas no final do estudo dos números racionais, no 6.º ano do ensino básico, associada a questões do dia-a-dia, principalmente descontos e impostos. Os alunos, por vezes, nem relacionam as percentagens com os números racionais – com frequência, percebem-nas apenas como uma razão da proporção que utilizam para resolver problemas de percentagem, que usualmente só surgem associados ao estudo da proporcionalidade directa. Ainda por cima, as situações propostas são, por vezes, bastante limitadas, reduzindo-se a tarefas envolvendo ir às compras em época de saldos ou pagar impostos.

Em Portugal, estamos a viver neste momento a introdução do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Este programa dá indicações claras que o estudo das diferentes representações dos números racionais se deve iniciar logo no 1.º ciclo. Até agora, neste nível de ensino, tem sido feito um trabalho aprofundado da representação decimal e algum trabalho relativo a operadores partitivos, "metade", "terça parte", "quarta parte". No entanto, da minha experiência, os alunos não são levados a trabalhar com as diferentes representações desses números, ou seja, a metade "significa dividir por dois" ou "ter duas partes iguais", mas não são trabalhadas as várias representações como, por exemplo, a fracção. As orientações curriculares que decorrem do novo programa já indicam como objectivo específico do tópico "números racionais não negativos" para o 3.º e 4.º ano do 1.º ciclo, o trabalho com diferentes representações de número racional e a capacidade de as relacionar entre si. As representações decimal e em fracção surgem agora lado a lado. A comparação e a ordenação recebem também atenção neste ciclo, sugerindo o programa que se usem "*valores de referência representados de diferentes formas. Por exemplo: 0,5;* $\frac{1}{2}$*; e 50%"*(ME, p. 19).

Desde à 20/25 anos que a expressão "Sentido de número" surgiu na literatura da educação matemática, normalmente encontra-se ligada aos conhecimentos matemáticos evidenciados em contextos educativos ou relacionados com o quotidiano do cidadão

(Castro & Rodrigues, 2008). McIntosh, Reys e Reys (1992) definem sentido de número como:

> […] A compreensão geral que uma pessoa tem dos números e das operações, juntamente com a destreza e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Reflectindo-se na tendência e na capacidade para usar os números e os métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação de informações. (p. 3)

McIntosh et al. (1992) consideram que o sentido do número é algo pessoal e relaciona-se com as ideias que cada um desenvolve sobre os números e com o modo como essas ideias se relacionam entre si e com outras ideias. Para estes autores a aquisição do sentido do número é algo gradual, começando muito antes de se iniciar a educação formal. No entanto, o simples facto de se ficar mais velho não significa por si só que se desenvolva o sentido do número, pelo que este aspecto deverá ser um objectivo importante da educação de todos os cidadãos.

Os jovens e os adultos encontram uma diversidade maior de números, em contextos mais variados, e utilizam novas ferramentas para lidar com eles. As exigências do mundo de hoje, tecnologicamente muito desenvolvido, fazem com que o sentido de número necessário seja muito mais sofisticado do que no passado, o que leva McIntosh et al. (1992) a afirmar ainda que "na era tecnológica ter sentido do número é um atributo importante que distingue os seres humanos dos computadores" (p. 5).

McIntosh et al. (1992) apresentam um quadro para a caracterização do que chamam *sentido básico do número*, que inclui um conjunto de ideias e processos. Este modelo surge dividido em três grandes blocos, um que respeita ao conhecimento e destreza com os números, outro às operações, e outro à resolução de problemas. Cada bloco tem vários pontos específicos. Assim, no conhecimento e destreza com os números, referem: a) Sentido da regularidade dos números; b) Múltiplas representações dos números; c) Sentido das grandezas relativa e absoluta dos números; d) Sistemas de referência. No conhecimento e destreza com as operações indicam: a) Compreensão do efeito das operações; b) Compreensão das propriedades matemáticas; c) Compreensão da relação entre as operações. Finalmente, na aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo, apontam: a) Compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários; b) Consciencialização da existência de múltiplas estratégias; c) Apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente; d) Sensibilidade para rever os dados e o resultado. Neste estudo privilegiarei essencialmente o primeiro aspecto, relativo ao conhecimento e destreza com os números, e o terceiro, relativo, à resolução de problemas. Para McIntosh et al. (1992), o sentido de número racional inclui o reconhecimento de que estes números podem ser representados de muitas formas diferentes, bem como o reconhecimento de que algumas representações são mais úteis do que outras para resolver determinado problema. A consciência de que algumas estratégias e/ou ferramentas de cálculo são mais eficientes do que outras para resolver um determinado problema é também um indicador importante de sentido de número.

O sentido do número (McIntosh et al.,1992) implica a compreensão dos sistemas numéricos, da forma como estão organizados, das suas diferentes representações. Isso acontece também no caso dos números racionais, onde a representação na recta ajuda o aluno na sua organização mental, na comparação e na ordenação de números. Por exemplo, um aluno de 5.º ano, ao explorar os números decimais contando com a ajuda da calculadora, do 0 ao 10 por décimas (décima a décima) ou do 0 ao 1 por centésimas (centésima a centésima) começa a reconhecer, identificar e repetir padrões emergentes. Os alunos vão descobrindo padrões e regularidades no sistema de numeração, e utilizam este conhecimento noutras situações. Um outro exemplo é o de um aluno que mostra compreender que existem números entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, e que revela sentido de ordenação e, pelo menos, alguma noção da densidade dos números racionais.

De acordo com os mesmos autores, um aluno com sentido de número deve ser capaz de reconhecer e relacionar as diferentes representações de um número. Por exemplo, reconhecer que 30 minutos é metade de uma hora e é $\frac{1}{2}$ hora, é bastante importante e útil em múltiplas situações, bem como reconhecer que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ou que $\frac{3}{4} = 0{,}75$ ou ainda que $\frac{3}{4} = 75\%$. Reconhecer que um certo número pode surgir em diferentes representações e compreender que algumas representações são mais úteis que outras, é muito importante na resolução de muitos problemas.

A decomposição e composição de números, envolve a capacidade de expressar os números em formas equivalentes, o que facilita a resolução de certos problemas, nomeadamente envolvendo operações com números compostos. Supondo por exemplo, que uma pessoa ao ver a conta do supermercado de 8,53 €, poderia pagar com 10 €, e receber o troco com o valor de 1,47 €. Outra pessoa podia pagar com 10,03 € e receber 1,50 € de troco. Em cada caso o total pago é o mesmo, contudo, no segundo exemplo a pessoa decompôs 8,50 + 0,03 de forma a receber menos moedas no seu troco. A consciência de que, em certas alturas, algumas representações, estratégias e ferramentas de cálculo são mais eficientes do que outras, é um indicador de sentido do número.

Outra vertente do sentido do número nesta área é a comparação usando os sistemas de referência, ou seja, o uso de referências associadas ao nosso sistema de numeração para a análise de números. Por exemplo, quando se considera a fracção $\frac{5}{8}$, um aluno poderia pensar nessa fracção graficamente (como parte de um círculo), ou na recta numérica, ou até mesmo numa fracção equivalente ou na sua forma decimal. Outra forma de pensar igualmente importante é o aluno ter a noção que $\frac{5}{8}$ é maior que $\frac{1}{2}$ ou que está entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Aqui, a referência do aluno é $\frac{1}{2}$ na comparação ou representação dos números. O reconhecimento do valor relativo de um número ou de uma quantidade, relativamente a outro número ou outra quantidade, a habilidade de detectar o valor geral da quantidade de um número ou de uma quantidade dada são comportamentos que se desenvolvem com a experiência matemática.

Os sistemas de referência oferecem ao aluno marcos/referências mentais para raciocínios matemáticos. As referências numéricas são pontos médios como $\frac{1}{2}$ e 50%. Há que ter em atenção, contudo, qualquer valor para cada aluno tem um significado diferente, personalizado e entendido de forma diferente, e cada significado torna-se um instrumento de cálculo e raciocínio. As referências são geralmente utilizadas num arredondamento de um resultado ou na compreensão da sua lógica. Por exemplo, um aluno reconhece que 0,98 está perto de 1 ou que $\frac{4}{9}$ é menor que $\frac{1}{2}$. A variedade e complexidade dos sistemas de referência ajuda a tomar decisões sobre números e contextos numéricos, contribuindo para o desenvolvimento do sentido de número.

Proponho-me realizar uma experiência de ensino para ajudar os alunos a desenvolver o sentido de número racional, a partir do tópico do programa do 2.º ciclo, "Números racionais não negativos – noção, representação comparação e ordenação de número racional e equivalência de fracções", com que se inicia nesta etapa o trabalho com os números racionais. Este tópico reveste-se de extrema importância para a compreensão dos tópicos seguintes relativos aos números racionais.

Assim, os alunos trabalharão com diferentes formas de representação de um número racional – fracção, decimal, percentagem, pictórica e verbal. Segundo as *Normas* do NCTM (2007), os alunos devem saber que os números racionais podem ser representados de várias maneiras de modo a compreenderem que $\frac{1}{4}$, 25%, e 0,25 são apenas designações diferentes do mesmo número. Tal como indica este documento, "A compreensão e a capacidade de raciocínio dos alunos ir-se-ão desenvolvendo à medida que eles forem representando fracções decimais através de objectos e na recta numérica, e à medida que forem aprendendo a produzir representações equivalentes de fracções e decimais" (p. 35). As diferentes representações têm um papel importante, na medida em que "ao estudarem fracções, decimais e percentagens em simultâneo, os alunos podem aprender a alternar entre formas equivalentes, escolhendo e usando uma forma adequada e conveniente para resolver problemas e expressar quantidades" (p. 175).

As tarefas a propor são essencialmente problemas e tarefas de natureza exploratória. A resolução de problemas é importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. Devido à sua natureza desafiante, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática (Ponte, 2005). Pelo seu lado, as investigações e explorações têm um lugar de destaque uma vez que:

> Explorar, investigar e analisar situações, discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalhar, formular e resolver problemas, inventar nova terminologia, expor e argumentar em defesa das conclusões a que vão chegando, redigir os resultados e compará-los eventualmente com os de outros alunos ou grupos de alunos [...] é um factor que pode ser realmente decisivo na transformação positiva da Matemática escolar. (APM, 1988 p. 47)

Note-se que, no início dos anos 80, a resolução de problemas começou-se a definir como uma forma de trabalho importante para a educação matemática. Segundo *A agenda para a acção* (NCTM, 1985), o foco do ensino da Matemática devia ser a resolução de problemas. Também Pólya contribuiu para a ênfase que foi atribuída à resolução de problemas. Este matemático, sustentava que do conhecimento que temos sobre qualquer matéria fazem parte informação e *know-how*, e em Matemática este *know-how* é "a capacidade para resolver problemas – não problemas meramente rotineiros mas problemas que requerem algum grau de independência, julgamento, originalidade, criatividade" (Pólya, 2003). Já no final dos anos 80, as *Normas para o* *currículo e avaliação em Matemática escolar* (NCTM, 1991) estabeleciam como um dos objectivos gerais para todos os alunos, o tornarem-se aptos na resolução de problemas matemáticos e, em Portugal, a APM (1988) colocava a resolução de problemas no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Muitos professores, tal como eu, sentem dificuldade em gerir o tempo atribuído ao estudo das representações dos números racionais e em diversificar as suas práticas de sala de aula, nomeadamente neste tópico, de modo a proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem apelativas e significativas para que os alunos compreendam o conceito de número racional nas suas diferentes representações.

É neste contexto que procuro perceber que potencialidades e eventuais problemas se colocam no ensino dos números racionais (noção, representação, comparação, ordenação e equivalência de números racionais e percentagens) através de uma abordagem que enfatiza o desenvolvimento do sentido de número racional através de tarefas de natureza problemática e exploratória e uma diversidade de representações, abordando todos os significados, mas dando ênfase especial aos significados parte-todo e medida. Com este estudo, espero, ainda, contribuir para o meu desenvolvimento profissional, bem como para um melhor conhecimento da problemática do ensino-aprendizagem dos números racionais por parte da comunidade escolar, sobretudo aos colegas que sentem dificuldades semelhantes.

1.2. Problema e questões do estudo

Tendo em conta as dificuldades dos alunos e a minha experiência como professora do 2.º ciclo, neste estudo, procuro perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, em alunos do 5.º ano. Por essa razão, o estudo terá por base a realização de uma unidade de ensino baseada na abordagem acima indicada. Para responder a este problema, considero as seguintes questões:

1. Que compreensão revelam os alunos, antes e depois da unidade de ensino, das diferentes representações de número racional – pictórica, decimal, fracção e percentagem? Quais as dificuldades e os erros

mais significativos que os alunos cometem na utilização das várias representações?

2. Que compreensão revelam os alunos, antes e depois da unidade de ensino, da comparação e ordenação de números racionais e qual a representação que os alunos mais utilizam para comparar e ordenar números racionais?
3. Que compreensão revelam os alunos, depois da unidade de ensino, da equivalência de fracções?

Capítulo 2

Números Racionais e Representações

O presente estudo dá particular atenção ao desenvolvimento dos conceitos e do sentido de número racional, partindo das suas múltiplas representações e significados. Deste modo, neste capítulo abordo diversos trabalhos sobre os temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: (i) o conceito de número racional; (ii) as representações em Matemática; (iii) a construção das partes e a reconstrução da unidade; e (iv) a ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções.

2.1. O conceito de número racional

Como refere Godino (2004), o conceito de número racional positivo foi sendo construído ao longo de vários milhões de anos e durante muitos séculos, a sua definição esteve ligada a contextos concretos de medida e partilha. Os conceitos de fracção e razão inicialmente eram conceitos independentes, mas a partir de certa altura convergiram, dando origem ao conceito de número racional positivo e, mais tarde, ao conceito mais geral de número racional.

Os números racionais são o primeiro conjunto numérico que os alunos aprendem que não se baseia no processo de contagem (Godino, 2004). Até este momento, contando de uma forma ou de outra (para a frente ou para trás, com saltos ou não), os alunos podiam resolver a grande maioria dos problemas que lhes eram apresentados. No entanto, existem muitos problemas que não podem ser resolvidos recorrendo a este processo e que requerem a introdução dos números racionais. Por outro lado, com a introdução dos números racionais o processo de contagem já não pode ser a base do raciocínio. Não há um número racional “seguinte” a um número racional dado. Assim, a prática e o discurso que se iniciam com os números racionais implicam um salto importante na forma de pensar e de usar os números, o que origina muitas dificuldades aos alunos.

O conceito de número racional está entre os mais complexos e mais importantes do ensino básico. Post, Behr e Lesh (1986) indicam que os inúmeros estudos feitos sobre este tema mostram que os alunos têm dificuldades de aprendizagem significativas na aplicação de conceitos de número racional. Segundo estes autores "parece que muitos alunos não têm um conceito funcional interno de número racional". Estudos realizados nesta área apontam diversos factores que podem estar na origem destas dificuldades: (i) o facto de uma fracção ter uma construção multifacetada, ou seja, apresentar diferentes significados; (ii) a concepção da unidade; (iii) o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos; e (iv) a sua representação ser constituída por dois números, facto que leva os alunos a interpretar uma fracção como dois números separadamente (Monteiro & Pinto, 2005). Segundo Post et al. (1986), parece faltar aos alunos a noção quantitativa de número racional que inclui a percepção de que os números racionais são números e a compreensão que os números racionais podem ser representados de várias formas: numerais decimais, razões, divisões, pontos de uma recta numérica, medidas, e partes de um todo.

Vejamos o que um aluno necessita para compreender $\frac{4}{6}$ como uma entidade única, compreender o que essa entidade é e que tem um tamanho. Quando são introduzidos os números racionais os alunos já têm uma boa compreensão dos números naturais. Por isso, para eles, os números, 4 e 6, têm um significado que começam por interpretar à luz dos seus conhecimentos dos números naturais: 6 é duas unidades maior do que 4. Contudo, em $\frac{4}{6}$ existem três coisas novas importantes a considerar: (i) o tamanho do numerador; (ii) o tamanho do denominador: (iii) a relação entre o numerador e o denominador. Há pelo menos duas relações importantes entre 4 e 6, uma é a relação aditiva, que é a que os alunos já conhecem, outra é a relação multiplicativa, é algo que os alunos ainda não conhecem e que é essencial para que compreendam $\frac{4}{6}$ como um único número, e que tem um tamanho definido pela relação inversa entre o numerador e o denominador (Behr, 1992).

O conceito de número racional é um conceito multifacetado que apresenta cinco significados diferentes. Kieren (1976) começou por propor um modelo teórico em que distinguia quatro significados, razão, operador, quociente e medida. Na sua perspectiva, o significado parte-todo estava subjacente em todos os outros e, por isso, não o colocou como um significado distinto. Mais tarde, Behr et al. (1983) prolongaram as ideias de Kieren e propuseram um novo modelo em que o significado parte-todo e as suas relações constituem um significado distinto. Este modelo proporciona uma rede de interligações entre os cinco significados de número racional e as operações básicas, as fracções equivalentes e a resolução de problemas. Assim, de acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) neste modelo, os números racionais podem ter os significados: (i) *parte-todo* - é definido como uma situação em que existe uma comparação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, ou seja, o número racional representa a comparação entre o numerador que representa o número de partes que se tomam do todo e o denominador que é número de partes em que o todo está dividido, a compreensão deste significado é fundamental para a compreensão dos restantes significados; (ii) *razão* – designa uma comparação entre duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta; (iii) *operador* - uma fracção $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$ transformando o cardinal de um conjunto discreto, pode ser partitivo ou multiplicativo partitivo; (iv) *quociente* – qualquer número racional pode ser visto como resultado de uma divisão entre dois números naturais, onde o numerador e o denominador representam o todo; e (v) *medida* – esta situação traduz-se na comparação entre duas grandezas, em que uma delas é considerada a unidade.

Behr et al. (1997) sugerem que a compreensão completa da número racional requer uma compreensão de cada um dos seus significados separadamente e também uma compreensão das relações entre eles. A proposta destes autores baseia-se na teoria dos campos conceptuais, desenvolvida por Vergnaud (1983) que propõe uma visão articulada para a construção de conhecimentos. De acordo com esta teoria, o conhecimento de determinado conceito não deve ser considerado isoladamente, mas sim inserido num campo conceptual, relacionando-se com outros conhecimentos. Ou seja, um conceito não se desenvolve isoladamente e, sim, nas relações com outros conceitos, através de diferentes tipos de problemas que utilizam várias situações e simbolismos. Segundo este autor, um campo conceptual pode ser definido como um "conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão". Assim, a formação de um conceito requer muitas interacções com diferentes conceitos em diferentes situações e contextos.

A partir das investigações que realizaram, Post et al. (1993) definem algumas implicações para o ensino dos números racionais: (i) este deve ter como base os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) devem enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, quociente, razão, medida e operador); (iii) os algoritmos das operações devem ser atrasados e antecedidos pela compreensão de ordem e equivalência; e (iv) o ensino deve ser feito com base em modelos educativos que reforcem as relações entre conceitos e procedimentos, bem como as conversões dentro e entre as diferentes representações. Post e Cramer (1989) defendem também que o conhecimento dos conceitos é fundamental para a compreensão de número racional e afirmam ainda que os conceitos devem ser trabalhados em paralelo com os procedimentos. Segundo estes autores o conhecimento conceptual é um conhecimento rico em relações. Pode ser pensado como uma teia de conhecimentos ligados, uma rede na qual as relações são tão importantes como os pedaços discretos de informação.

2.2. Representações dos números racionais

Representações em Matemática. De acordo com as orientações actuais para o ensino da Matemática (NCTM, 2007) os alunos devem ter oportunidade para trabalhar individualmente, em pares ou em pequenos grupos, para procurem soluções e discutirem-nas com os colegas. Essas soluções envolvem representações e aqui surge uma proliferação de representações, os alunos devem ter oportunidade para criar representações idiossincráticas, recorrer a representações convencionais e misturar ambas as representações como resoluções de problemas contextualizados. Os alunos devem usar as representações como recurso para resolverem situações problemáticas e devem progredir das representações idiossincráticas para as representações mais formais e abstractas. Este documento recomenda que, durante toda a escolaridade os alunos tenham oportunidade para: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (p. 75). Os autores pretendem incentivar o uso de representações idiossincráticas e argumentam que os professores devem "encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas representações não sejam as convencionais" (p. 75); os alunos também devem desenvolver uma compreensão dos pontos fortes e fracos das diferentes representações. As representações idiossincráticas também são um importante recurso para o professor perceber como é que os alunos desenvolveram o seu raciocínio. O papel do professor é ajudar os alunos a construir pontes entre as suas próprias representações e as representações convencionais, ajudando-os a ver as semelhanças (do ponto de vista matemático) entre os múltiplos contextos do problema, pois a criação de representações matemáticas envolve a abstracção e a generalização.

Para Orton et al. (1995), a representação é uma noção útil para descrever, não apenas a lógica dos conceitos de número racional, mas a natureza da Matemática em geral. Matematicamente, uma representação pode ser pensada como um modelo, uma grande parte da Matemática pode ser entendida como a construção de modelos, onde se resolvem os problemas dentro de modelos, e depois traduzem-se as soluções de volta ao mundo real. De acordo com Goldin (2003), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objectos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa. Segundo o mesmo autor, é essencial considerar e distinguir entre sistemas psicológicos internos e sistemas externos a um indivíduo. Esta distinção permite explorar as relações entre os sistemas. Para este autor, os sistemas de representação interna compreendem, entre outros, a linguagem natural, a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, as representações tácteis e cinestésicas, as heurísticas para resolver um problema; as capacidades pessoais, incluindo as concepções e os equívocos em relação à notação matemática convencional e o afecto. Para que a aprendizagem tenha significado, é necessário desenvolver uma variedade de representações internas ajustadas, e que se relacionem entre si. Os sistemas de representações externas incluem as linguagens naturais normativas (padrão), os sistemas matemáticos gráficos, relativas a diagramas e de notação formal, os ambientes de aprendizagem estruturados, que podem incluir as tecnologias ou materiais manipuláveis concretos, e estruturas socioculturais como os sistemas educativos. Por exemplo, um algarismo é um símbolo que se refere a um número que designa, por exemplo, um agregado concreto de objectos. Tanto os algarismos como os gráficos são exemplos de representações concretas e estáticas. Estas são representações externas – que podem ser encontradas em manuais ou produzidas por professores e alunos. Para este autor, as representações raramente têm significado sozinhas – têm que ser compreendidas no quadro de um dado sistema. É o que acontece, por exemplo, com as representações das fracções e dos numerais decimais, assim como dos próprios números naturais no sistema decimal de posição.

A relação entre representações internas e externas tem um carácter bidireccional. Por isso, as representações externas “representam” as internas, mas o contrário também acontece. Por exemplo, quando um aluno, para expressar uma ideia, desenha uma figura, está a utilizar uma representação externa para substituir uma representação interna. Mas quando, perante uma figura, o aluno consegue interpretar a informação que esta descreve, a representação externa está a ser substituída pela interna (Goldin, 2008). Goldin e Shteingold (2001) defendem a importância da interacção entre os dois sistemas de representações. Dizem que para desenvolver o pensamento matemático deve haver compreensão das relações entre as várias representações do mesmo conceito e das semelhanças e diferenças entre os sistemas de representação.

De acordo com Duval (2004), os alunos só podem trabalhar com um determinado objecto matemático se recorrerem à sua representação, uma vez que, em Matemática, se trabalha com objectos abstractos. O autor refere que “os números, as funções, as rectas, etc…, são objectos matemáticos, e as escritas decimal ou fraccionária, os símbolos, os gráficos, etc.., são algumas das suas representações” (p. 14). Segundo o autor, “há uma pluralidade de registos de representação de um mesmo objecto, e a articulação desses registos é a condição para a compreensão em Matemática (Duval, 2003, p. 31).

Representações de números racionais. Representar um número significa atribuir-lhe uma designação, devendo ser trabalhado com os alunos a compreensão de que um número pode ter várias designações. A percentagem, o número decimal, a fracção, linguagem natural e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender de forma a desenvolverem a sua capacidade de raciocínio. Deste modo, os alunos podem chegar, de forma espontânea, à equivalência de fracções e decimais. Segundo o NCTM (2007):

> Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. […] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).

Segundo Moss e Case (1999), quando os alunos se deparam com métodos tradicionais de ensino, surgem diferentes aspectos que se constituem como uma barreira na sua aprendizagem: (i) o tempo dedicado ao ensino dos procedimentos é maior do que aquele que se dedica ao desenvolvimento dos conceitos; (ii) os conceitos são apresentados do ponto de vista dos adultos, não sendo valorizadas as resoluções informais dos alunos; (iii) nas representações usadas, não é dada muita relevância à diferenciação entre um número racional e um número inteiro; e (iv) o número racional é tratado nos programas de Matemática como uma definição linear.

Webb, Boswinkel e Dekker (2008) apresentam um modelo desenvolvido por investigadores do Instituto Freudenthal para ajudar os professores a pensarem sobre os processos de aprendizagem e as estratégias utilizadas pelos alunos. Segundo estes investigadores, o grande desafio do ensino da Matemática no ensino básico é encontrar formas de promover a compreensão dos alunos sobre a Matemática porque, ao contrário daquilo que se pensava anteriormente, o ensino não pode ser baseado nos processos, mas sim na compreensão de conceitos, por exemplo, quando se tenta explicar o mais claramente possível o algoritmo para a adição ou para a subtracção de fracções e damos tempo aos alunos para "treinarem", a realidade é que grande parte dos alunos continuarão a confundir os procedimentos e a esquecer-se como funcionam (p. 111).

O modelo desenvolvido por estes investigadores é o "icebergue de representações", que apresentam como uma poderosa metáfora para ilustrar como os alunos precisam de uma ampla experiência com diferentes representações para construírem o sentido formal das representações matemáticas. Este modelo consiste numa pequena área "fora de água" que é a ponta do icebergue e numa grande área debaixo de água, chamada capacidade flutuante, onde residem as representações informais e pré-formais. A ponta do icebergue representa o procedimento formal ou representação simbólica. Este modelo distingue representações informais, pré-formais e formais e sugere que os professores devem dedicar mais tempo à construção das representações informais e pré-formais.

Para Webb e tal. (2008), a parte do icebergue que fica sob a água é representada por uma combinação de representações informais, incluindo o contexto subjacente, representações (por exemplo, moedas, partes de uma maçã, etc.), e a transição para as estratégias e modelos pré-formais (por exemplo, barras fraccionárias, recta numérica, etc.). Em geral, a progressiva formalização sugerida pelos níveis dentro das capacidades flutuantes do icebergue, implica que as representações mais formais sejam construídas sobre as representações menos formais. No entanto, isto não significa que os alunos quando atingem a compreensão formal não voltem a usar as representações pré-formais. Em vez disso, um aluno deve ser capaz de revisitar as representações pré-formais, especialmente em contextos novos ou desconhecidos. Construir as representações pré-formais dos alunos sobre as representações informais oferece uma maior estrutura matemática ao raciocínio, por exemplo, a utilização de uma fórmula recursiva para descrever padrões numéricos, a utilização da recta numérica para ordenar fracções, e a utilização do modelo de área para a multiplicação. As representações pré-formais oferecem mais oportunidades para desenvolver o sentido crítico e a tomada de decisão dos alunos, mas, muitas vezes, têm limitações no âmbito de problemas mais complexos, onde as representações formais são mais eficazes. Na sua perspectiva, o tempo investido em tarefas para construir o sentido no nível pré-formal reduzirá substancialmente o tempo necessário para ensinar e praticar no nível formal.

Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) também defendem que a aprendizagem dos números racionais deve ser feita com base nos conhecimentos dos alunos, partindo de imagens concretas dos conceitos com recurso a materiais manipuláveis. Porque de acordo com um estudo desenvolvido por Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) os alunos que utilizaram ajudas de materiais manipuláveis na aprendizagem dos números racionais, aparentemente, conseguiram desenvolver um pensamento sobre as fracções baseado em imagens internas. Com base nestas imagens mentais internas, os alunos conseguiam decidir sobre relações de ordem com sucesso, por exemplo, quando no final de uma unidade de ensino pediram a uma aluna que comparasse $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{5}$ ela respondeu que, seis oitavos era maior porque quando olhamos para a fracção temos seis partes pintadas e sobram duas partes por pintar à esquerda e cada uma destas partes é pequena. Quanto a $\frac{3}{5}$ cada parte é maior do que a anterior, também sobram duas partes, mas cada uma delas é maior do que as anteriores, e por isso esta é a fracção menor.

De acordo com a análise de resultados de estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project*, Post et al. (1993) referem que a compreensão de número racional parece estar relacionada com três características do pensamento dos alunos: (i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) a independência cada vez maior das representações concretas. Defendem ainda que os alunos que são privados da utilização e da conversão entre as diferentes representações de número racional terão grandes dificuldades na abstracção de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

No *Rational Number Project* foi utilizado e desenvolvido um modelo de ensino baseado na conversão dentro e entre representações. Este modelo exige a participação activa dos alunos e o uso de uma grande diversidade representações e materiais concretos, como materiais manipuláveis, imagens, diagramas, interacções verbais e simbólicas, tal como se ilustra na Figura 1.

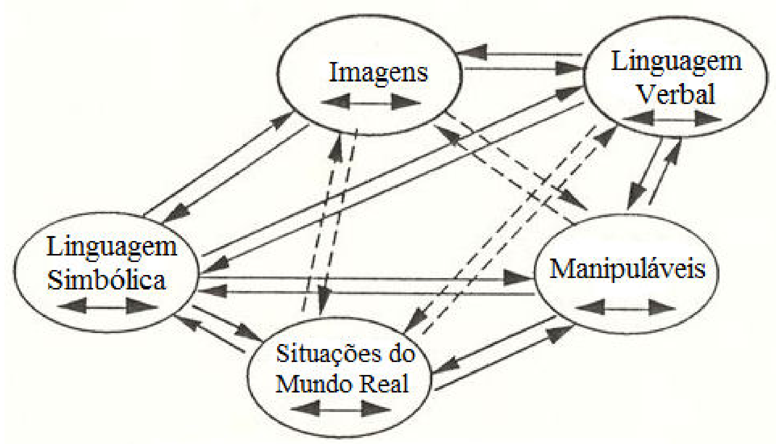


Fig. 1. Modelo de conversões de Lesh (1979).

O modelo foi concebido por Lesh em 1979 e serviu de guia orientador no desenvolvimento do currículo sobre números racionais do *Rational Number Project*. Este modelo salienta que a compreensão se reflecte na capacidade de representar as ideias matemáticas de várias maneiras e na habilidade para fazer conexões entre as diferentes representações, salientam ainda que as conversões entre e dentro das diferentes representações são muito significativas para os alunos. Salientam-se as interacções dentro e entre as representações, as setas que ligam as diferentes representações retratam as conversões entre elas e as setas internas mostram as conversões dentro dessa representação. O modelo indica que o desenvolvimento da compreensão profunda de ideias matemáticas exige experiência em diferentes representações e experiência nas conversões dentro e entre representações. Já que as conversões exigem uma reinterpretação de ideias e conceitos. É através desse processo de reinterpretação que os alunos adquirem novos conhecimentos e reforçam os conhecimentos anteriores, o que resulta numa compreensão mais ampla e mais profunda das ideias matemáticas. Lesh et al. (1987) referem que nas experiências que realizaram, os alunos que tinham maior facilidade na resolução de problemas eram flexíveis na utilização de uma grande variedade de representações relevantes e conseguiam intuitivamente mudar para a representação mais conveniente, em qualquer ponto do processo de resolução.

Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas envolvendo diversas representações de números racionais. Os números racionais ocupam uma parte considerável do currículo do ensino básico, sendo de grande importância para as aprendizagens seguintes. Como referem Monteiro e Pinto (2007), trata-se de um conjunto numérico com propriedades distintas dos naturais – denso e com múltiplas representações – o que provoca conflitos conceptuais nos alunos. Segundo as autoras algumas das dificuldades mais comuns na representação dos números racionais são:

> - Na compreensão dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ os alunos referem que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida.
> - $\frac{1}{2} = 1{,}2$. Mais uma vez as representações não estão relacionadas com os números que representam.
>
> Alguns destes erros revelam que o sistema de numeração decimal não está entendido e que as representações estão desligadas das quantidades que dizem respeito (p. 12).

No Programa de Matemática anteriormente em vigor em Portugal (ME, 1991) a primeira representação de número racional trabalhada é o numeral decimal. No entanto, os alunos apresentam dificuldades na compreensão do conceito. Monteiro e Pinto (2007) apresentam algumas dificuldades que os alunos revelam com os números decimais, referindo que é frequente: “(i) confusão entre décimas e centésimas, por exemplo confundem 2,5 com 2,05; (ii) confundirem o número de algarismos com a quantidade, quando, por exemplo, confundem que 1,456 é maior que 1,5, (iii) e acharem que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais” (p. 11). Estas dificuldades dos alunos devem-se, segundo Owens (1993), ao facto de se ensinar a trabalhar com numerais decimais antes de estes compreenderem o próprio conceito elementar de decimal. Assim, este autor defende que a representação em numeral decimal e a representação fraccionária devem ser trabalhadas concomitantemente, para que o aluno perceba que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

A representação em percentagem de número racional, apesar de ser trabalhada formalmente na escola apenas a partir do 2.º ciclo, faz parte do quotidiano dos alunos. Segundo Moss (2002), num estudo desenvolvido neste âmbito, os alunos revelam uma boa compreensão qualitativa do "significado" de diferentes valores numéricos representados sob a forma de percentagem. Por exemplo, os estudantes afirmaram que 100 por cento significava "tudo", 99 por cento significava "quase tudo", 50 por cento significava "exactamente metade", e 1 por cento significava "quase nada".

De acordo com Parker e Leinhardt (1995) esta é uma forma de representação vantajosa pois está presente no dia-a-dia dos alunos, por exemplo, nos *media*, nas promoções de artigos. Assim, segundo estes autores esta representação é universal e faz a ligação entre situações do "mundo real" e os conceitos matemáticos de estruturas multiplicativas. As percentagens são, no entanto, um conceito difícil de aprender. Baseados em múltipla investigação nesta área os autores referem que as dificuldades dos alunos se revelam: (i) na compreensão do símbolo % pois, se não lhe atribuírem um significado, acabam por colocá-lo em qualquer lugar, e não fazem distinção entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}\%$, (ii) na utilização incorrecta da "regra do numerador", os alunos aplicam esta regra porque acreditam que o símbolo da percentagem à direita do número pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número, como o exemplo indica 0,35 em 35%, mas podem surgir conversões incorrectas como por exemplo 150% em 0,150 e ainda 0,8 em 8%, (iii) na procura da percentagem, como por exemplo escrevem que 60 = 50% de 30, e (iv) no calculo de percentagens maiores que 100.

Para resolver algumas questões sobre números racionais, muitas vezes os alunos fazem esboços, rabiscam, traçam figuras, enfim, utilizam-se de desenhos que, neste trabalho, são designados representações pictóricas. Estas, mesmo sem levar à resposta correcta do problema, demonstram a forma como os alunos elaboram as imagens mentais que servem de apoio à interpretação das informações e a procura das estratégias de solução. Para resolver um problema sobre números racionais os alunos podem ou não usar uma representação pictórica. Mas, muitas vezes, os alunos produzem representações pictóricas influenciados pelas representações que o professor costuma utilizar enquanto resolve os problemas no quadro (Cox, 1999).

De acordo com Cox (1999), pode afirmar-se que as representações pictóricas são instrumentos de ajuda úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação do problema e também facilitar a mudança de estratégias de resolução. O autor estudou as representações usadas na resolução de problemas, e concluiu que os alunos têm diferentes formas de exteriorizar o seu raciocínio. Alguns alunos produzem representações parciais, as quais parecem funcionar principalmente como ajuda de memória; outros alunos constroem representações bastante compreensíveis e parecem comprometer-se com o modelo de raciocínio no qual elas tinham uma função central. O autor sugere que os alunos precisam ter habilidade para interpretar representações, construir as suas próprias representações e desenvolver e comunicar as suas ideias.

Em relação à representação geométrica, Monteiro e Pinto (2007) referem que a recta numérica é um recurso didáctico importante, na medida em que permite evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza. Para Bright et al. (1988) a recta numérica difere dos outros modelos em vários pontos importantes. Primeiro, um comprimento representa a unidade, e sugere não só a iteração da unidade, mas também subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas, ou seja pode ser tratada como uma régua. Em segundo lugar, na recta numérica não existe separação visual entre as unidades consecutivas, o modelo é totalmente contínuo. Estes autores referem um estudo feito com alunos do 7.º ano de escolaridade, onde era pedido aos alunos que representassem algumas fracções na recta numérica. Os resultados indicam que os alunos têm dificuldade em marcar fracções na recta numérica quando o número de partições da recta é diferente do denominador das fracções, mesmo quando o número de partes é um múltiplo ou um submúltiplo do denominador. Estes resultados sugerem assim uma noção imprecisa e inflexível da fracção.

No que diz respeito à representação verbal, Streefland (1991) menciona que é importante que as fracções sejam trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas). Estes esquemas servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução.

2.3. Construção das partes e reconstrução da unidade

Segundo McCloskey e Norton (2009), os esforços feitos no sentido de avaliar e apoiar o raciocínio dos alunos na construção dos conceitos fundamentais sobre fracções, podem ser mais valiosos do que o tempo gasto em sala de aula a praticar os algoritmos padrão para cálculos com fracções. Defendem também que a sobrevalorização da fluência com os processos das operações com fracções "contorna" o desenvolvimento de conhecimentos importantes. E por isso, incentivam os professores a gastar mais tempo e esforço a avaliar e apoiar aquilo que os alunos compreendem sobre as fracções como números que são produzidos através de acções mentais. Neste texto os autores referem cinco acções mentais usadas pelos alunos na resolução de tarefas com números racionais: (i) *unitizing* – tratar um objecto ou uma colecção de objectos como uma unidade ou como um todo, por exemplo, considerar dois hexágonos como um todo; (ii) *partitioning* – acção através da qual se divide a unidade/o todo em partes iguais; (iii) *disembedding* – imaginar que tira uma fracção do todo mantendo o todo intacto e inalterado; (iv) *iterating* – repetir uma parte para produzir partes iguais a ela; (v) *spliting* – é uma composição simultânea de *partitioning* e de *iterating*. Estas acções mentais que foram identificadas a partir da experiência devem tornar-se disponíveis para usar em diversas situações. Para os autores, as acções mentais constituem o elemento chave dos esquemas para que os alunos desenvolvam conceitos sobre fracções.

Na construção das partes e reconstrução da unidade os alunos conjugam estas acções que, segundo McCloskey e Norton (2009), constituem os esquemas de Steffe sobre fracções: (i) Partição simultânea (*simultaneous partitioning*) – que consiste em formar a unidade, dividindo um todo contínuo com recurso a uma unidade composta como modelo; (ii) Parte-todo (*part-whole*) – identificando a unidade, considerar uma parte dessa unidade; (iii) Partilha equitativa (*equi-partitioning*) – construção da unidade, divisão, e iteração de qualquer parte para determinar ou identificar outra parte; (iv) Fraccionamento partitivo da unidade (*partitive unit fractional*) – iterar uma dada fracção unitária para construir um todo; (v) Fraccionamento partitivo (*partitive fractional*) – construção da unidade, desintegrando uma fracção própria do todo e, hipoteticamente, dividir uma fracção própria para produzir uma fracção unitária para depois, por iteração, produzir uma fracção própria e o todo, coordenando uma fracção unitária com uma fracção composta; (vi) Fraccionamento reversível partitivo (*reversible partitive fractional*) – *splitting,* conjugação da divisão e da iteração de um agregado de partes maior do que a unidade, para recrear o todo; e (vii) Fraccionamento iterativo (*iterative fractional*) – divisão e iteração (*splitting)* de uma parte menor que a unidade para reconstrução do todo.

Os dois últimos esquemas são muito importantes para a construção das partes e para a reconstrução da unidade porque utilizam a acção *splitting*, através da qual os alunos desenvolvem formas poderosas de operar para a poderem dividir e iterar de forma criativa e determinar o tamanho de uma parte fraccionária. Na divisão os alunos partem o todo em diversas partes iguais e através da iteração fazem a duplicação de uma parte um determinado número de vezes. Com esta acção os alunos podem explorar a natureza inversa destas duas operações para resolver problemas e recriar o todo a partir de qualquer parte. Os alunos que conseguem realizar estes esquemas alcançam uma etapa significativa na sua compreensão sobre fracções uma vez que são capazes de dividir e iterar de uma forma flexível. Por exemplo, conseguem compreender que uma barra de papel que representa $\frac{4}{7}$, representa $\frac{4}{7}$ de um todo dividido e que essa barra de papel é a repetição de $\frac{1}{7}$ da unidade e que o conjunto é a repetição de sete partes da mesma unidade.

Para Monteiro e Pinto (2007) a conceptualização da unidade é um tema fulcral no desenvolvimento do conhecimento matemático, especificamente na compreensão das fracções, já que uma fracção tem sempre subjacente uma unidade. Contudo, a conceptualização da unidade representa uma grande dificuldade para a aprendizagem dos números racionais. Já que a unidade pode mudar dentro do mesmo problema, por exemplo, se fizermos a seguinte pergunta a um aluno: a Maria gastou $\frac{1}{2}$ da sua mesada em gelados e o Manuel gastou $\frac{1}{3}$ da sua mesada em gelados, os alunos mais habituados à utilização de procedimentos terão tendência em dizer que a Maria gastou mais, porque comparam as fracções sem se preocuparem com as unidades de referência que podem ser diferentes. A reconstrução de unidades a partir de partes, é bastante importante, pois é da relação com uma grande diversidade de unidades que se desenvolve o sentido do número e dos símbolos que o representam (Monteiro & Pinto, 2005).

Lamon (2002) refere-se a diferentes tipos de unidades, considerando unidades simples e compostas. A autora refere que os alunos têm naturalmente no seu quotidiano partições diferentes de uma quantidade, por exemplo, existem muitas maneiras diferentes de pensar em 24 latas de Coca-cola, podem ser 24 latas individuais, podem ser 2 *packs* de 12 latas, 3 *packs* de 8, 1 caixa de 24, etc. Defende assim que se deve aproveitar este conhecimento do quotidiano em vez de tentar moldar o pensamento dos alunos para pensar e trabalhar com partes do mesmo tamanho. Apesar de ser um processo complexo, a formação de unidades compostas a partir de outras unidades é fundamental ser acentuado no ensino das fracções e dos decimais. Porque, na verdade é a capacidade de reconceptualizar quantidades em partes diferentes que adiciona flexibilidade e utilidade aos conhecimentos matemáticos dos alunos (Lamon, 2002). Post et al. (1993) afirmam que para serem flexíveis com o conceito de unidade, os alunos devem ser capazes de aplicar a composição, decomposição e os princípios da conversão das representações na resolução de problemas aritméticos, tanto aditivos como multiplicativos.

Behr et al. (1997) referem que a natureza da unidade que se usa e que se transforma no processo de fraccionamento é de importância central na tentativa de descrever e modelar o conceito de número racional e das suas operações. As unidades podem ser contínuas ou discretas. A noção de quantidade contínua, geralmente, refere-se a comprimentos, área, volumes, refere-se a um único objecto, uma folha de papel ou a um rectângulo. Enquanto uma quantidade discreta diz respeito a um conjunto de objectos, por exemplo, um dúzia de ovos, 15 berlindes, etc., é composta por vários objectos discretos. Numa quantidade contínua, um objecto é composto por várias partes, e cada parte é uma entidade única contínua e está ligado às restantes. Esta unicidade, continuidade e conectividade são evidentes para os alunos e, conceptualmente bem evidentes. Por outro lado, para o conjunto discreto cada uma das partes de igual tamanho pode ser composta por conjuntos de objectos não conexos. Por exemplo, no processo de fraccionamento para definir $\frac{2}{3}$ de 12 maçãs, os alunos devem pensar conceptualmente em 12 maçãs como uma unidade inteira. Ou seja, os 12 objectos devem tornar-se uma entidade conceptual. Assim, é difícil para os alunos pensarem que cada terço corresponde a quatro maçãs e que dois terços são 8 maçãs. Por isso, a literatura sugere que o ensino das fracções comece pelas quantidades contínuas e vá gradualmente passando para as quantidades discretas.

Post et al. (1993) referem que inicialmente os alunos têm mais dificuldade com as quantidades contínuas do que com as quantidades discretas, porque nas quantidades discretas usam as estratégias de contagem que já conhecem, enquanto nas quantidades contínuas têm de usar estratégias de partição que ainda estão a desenvolver. Por exemplo, os alunos mostraram maior facilidade em encontrar $\frac{1}{3}$ de seis berlindes divididos por dois sacos do que em encontrar $\frac{1}{3}$ de um círculo dividido ao meio.

Behr et al. (1992) referem que geralmente os currículos dão maior ênfase às tarefas de construção de partes de um todo do que às tarefas que requerem a construção da unidade a partir das suas partes. Para estes autores, estas tarefas representam a inversão do processo de fraccionamento da unidade, e são importantes porque a compreensão de um processo é maior quando os alunos são capazes de ver o processo ser revertido para voltar ao ponto de partida

2.4. Ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções

2.4.1. Ordenação e comparação

Antes de aprenderem os números racionais os alunos já conhecem os números naturais. Segundo Post et al. (1986) há, inevitavelmente, uma influência inicial dos conhecimentos sobre números naturais no modo como os alunos começam a pensar a ordenação dos números racionais, e em alguns casos essa influência é persistente. Isso, por vezes, afecta negativamente a sua capacidade de compreender as relações de ordem dos números racionais. No conjunto dos números naturais, os alunos podem pensar de duas maneiras diferentes: podem comparar a "grandeza" de dois números pela correspondência com elementos de dois conjuntos finitos que representam os mesmos números. Desta forma, é salientado o aspecto cardinal do número. Ou então, os alunos podem comparar dois números naturais com a sequência de contagem, considerando que o maior número vem depois. Aqui salienta-se o aspecto ordinal.

Contudo, nos números racionais não existe um aspecto ordinal óbvio que permite ordená-los/organizá-los exaustivamente ao longo de uma recta numérica. Mas os símbolos envolvidos em $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sugerem essa relação de ordem. Os alunos podem tentar fazer uso de uma relação de ordem que eles supõem incorrectamente estar presente. De facto são necessárias diferentes estratégias para ordenar $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{9}$, por exemplo, é algo novo para as crianças e, de facto, causa consideráveis dificuldades. Segundo Post et al. (1986) devem ser encontradas formas de ajudar os alunos a lidar com esta questão, sugerindo que devem ser desenvolvidas estratégias que ajudem as crianças a colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas. Pois, alguns reflexos dos números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento estruturas multiplicativas.

Num patamar mais avançado, Post et al. (1986) apontam que a noção quantitativa de número racional dos alunos deve incluir: (iii) a compreensão de que os números racionais têm tamanhos relativos e absolutos, e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. Assim, a magnitude relativa de um par de números racionais pode ser avaliada apenas quando relacionados com a unidade de que deriva o seu significado. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ser inferior a $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Enquanto isso, a ordenação de valores absolutos existe dentro de qualquer conjunto de números racionais, que estão todos relacionados a uma unidade comum. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, se ambos se referem ao mesmo todo. E, como elementos do sistema matemático, $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1. Finalmente, os autores referem que (iv) a compreensão de que a relação entre o numerador e o denominador define o significado de uma fracção, e não as respectivas magnitudes absolutas quando vistas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{4}{9}$, embora os dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ sejam menores do que os seus correspondentes em $\frac{4}{9}$.

Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) referem que a ordenação de fracções exige os seguintes conhecimentos complexos: (i) o tamanho da fracção depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fracção; (ii) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho de cada parte e (iii) quando as fracções têm o mesmo denominador há uma relação directa entre o número de partes que se tomam e o tamanho da fracção.

Na literatura surgem também como dificuldades dos alunos, para trabalharem com questões de ordem, a forma como são utilizadas as palavras “mais” e “maior” (e os seus antónimos, “menos” e “menor” (Post et al., 1986, 1993). Esta dificuldade verifica-se no facto de que, para muitos alunos “mais” pode significar mais peças no conjunto das partes do todo, ou mais área coberta por cada parte da mesma forma, “maior” significa um maior número de partes no todo ou um tamanho maior de cada parte. Assim, para determinar qual das duas fracções é “maior”, é de fundamental importância distinguir claramente entre as palavras “mais” e “maior” (ou “menos” e “menor”), isto é, se mais peças ou partes maiores estão em causa.

Foi ainda detectada uma situação semelhante com as palavras “tamanho” e “quantidade”. Um aluno quando questionado sobre qual das duas fracções é maior, respondeu: “Estamos a falar do tamanho (área) ou sobre a quantidade (número de subdivisões)?” É evidente que é importante definir cuidadosamente com os alunos as palavras a usar para identificar conceitos de números racionais. Isto é particularmente importante no início do processo de ensino-aprendizagem.

Diversos estudos apontam estratégias informais que os alunos usam na resolução de tarefas de comparação de fracções, que é pouco provável que lhes tenham sido especificamente ensinadas. Uma dessas estratégias é o *pensamento residual* que, de acordo com Post et al. (1986), refere-se à quantidade que é necessária para construir o todo. Assim, na comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos podem perceber que no primeiro falta $\frac{1}{6}$ para completar o todo (o valor residual) enquanto no segundo só falta $\frac{1}{8}$ e concluir então que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Outra estratégia é *utilização de pontos de referência,* que envolve a comparação de duas fracções utilizando uma terceira como referência, muitas vezes $\frac{1}{2}$ e às vezes 1. Por exemplo um aluno que utiliza esta estratégia diria que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fracção é maior do que a metade e a segunda é menor que a metade. Outra estratégia, ainda, é o *pensamento diferencial*. Alguns alunos afirmam que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque ambos exigem apenas uma parte para formar o todo. Neste caso os alunos focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, mas não consideram o tamanho real da fracção. Esta é uma forma de pensar característica dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorrectos. Assim, os alunos que usam o pensamento residual e pontos de referência são geralmente melhor sucedidos do que os que usam o pensamento diferencial.

Post et al. (1986) desenvolveram um estudo, onde investigam os benefícios da utilização de materiais manipuláveis na aquisição dos conceitos de ordem e equivalência de números racionais, onde defendem que a aprendizagem deve construir-se de um nível concreto para um nível abstracto. Nesse sentido, referem que dar às crianças a oportunidade de explicar verbalmente uma demonstração de manipulação permite-lhes realizar uma assimilação mental de síntese e envolve processos metacognitivos, uma vez que requer pensar sobre o pensar. Especula-se que essa actividade está relacionada ao avanço do concreto para o pensamento formal. Os resultados do estudo feito por Post et al. (1986) indicam que uma utilização coordenada do conhecimento sobre ordenação e equivalência, combinado com a habilidade de estimar o tamanho dos números racionais levou alguns alunos a serem bem sucedidos em tarefas desta natureza.

Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) desenvolveram um estudo, sobre a compreensão que os alunos do 4.º ano têm da ordenação e equivalência de números racionais. O estudo contemplou 11 entrevistas com 12 alunos, realizadas durante as 18 semanas da unidade de ensino. As tarefas propostas tinham como objectivo identificar estratégias para comparar pares de fracções de três tipos: (i) com numeradores iguais; (ii) com denominadores iguais e (iii) com numeradores e denominadores diferentes. Para estes autores uma forma de perceber a noção quantitativa de número racional de um aluno, é perceber a sua capacidade para compreender a dimensão relativa dos números racionais na comparação de um par ou de um conjunto de racionais, isto é, a sua capacidade para determinar relações de: igualdade, inferioridade ou superioridade. O objectivo principal desta investigação foi conhecer o papel de modelos físicos para facilitar a aquisição e utilização de conceitos matemáticos e perceber como a compreensão dos alunos progride do concreto para o abstracto.

A hipótese principal do projecto era que a capacidade de fazer traduções entre e dentro das diferentes representações podia desenvolver ideias significativas para os alunos. A partir das repostas dadas nas entrevistas os autores do estudo elaboraram uma descrição dos processos de pensamento manifestados pelos alunos, em cada classe de fracções foram identificadas estratégias distintas. Assim, no que diz respeito às fracções com numeradores iguais foram identificadas cinco estratégias, as quatro primeiras são válidas e a última é inválida: (i) numerador/denominador – esta estratégia é evidenciada quando os alunos se referem aos numeradores e aos denominadores, indicando que estava presente o mesmo número de partes (numerador), mas que a fracção com denominador maior tem o menor tamanho de cada parte; (ii) denominadores – as explicações associadas a esta estratégia referem-se apenas aos denominadores das fracções; (iii) utilização de pontos de referência – os alunos fazem referência a uma terceira fracção ou número inteiro; (iv) utilização de materiais manipuláveis – nesta situação os alunos usam imagens ou materiais manipuláveis para responder às questões; (v) raciocínio com base nos números naturais – esta é a estratégia inválida, onde os alunos utilizam as regras dos números naturais, comparam apenas os denominadores, e não consideraram a relação inversa entre o numerador e o denominador. Nas primeiras entrevistas foi mais frequente a estratégia inválida do raciocínio com base nos números naturais, mas nas últimas entrevistas foi mais frequente a análise só do denominador.

Naquilo que diz respeito às fracções com denominadores iguais, a análise sugere cinco estratégias, as quatro primeiras são válidas e quinta é inválida: (i) numerador/denominador – os alunos referem-se aos numeradores e aos denominadores, indicam que o tamanho das partes é o mesmo mas que num caso consideramos menos partes; (ii) utilização de um ponto de referência – tal como nas fracções com os mesmos numeradores, os alunos referem-se a outra fracção ou a um número inteiro; (iii) utilização de materiais manipuláveis – os alunos usam imagens ou materiais manipulativos para comparar as fracções; (iv) raciocínio com base nos números naturais – os alunos ordenaram as fracções comparando apenas os numeradores; (v) noção incorrecta de numerador e de denominador – os alunos fazem uma comparação errada dos tamanhos das partes, invertendo a relação entre o numerador e o denominador. A primeira estratégia foi a mais utilizada pelos alunos.

Por fim, na comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes, foram encontradas seis estratégias, as três primeiras são válidas e as três últimas são inválidas: (i) aplicação de razões – os alunos utilizam razões para determinar fracções equivalentes; (ii) utilização de pontos de referência – os alunos fazem referência a outras fracções ou números naturais para comparar fracções; (iii) utilização de materiais manipuláveis – os alunos utilizam imagens ou materiais para compara fracções: (iv) adição – os alunos comparam fracções somando o numerador com o denominador; (v) proporção incompleta – as explicações dos alunos revelam que estes usaram uma relação proporcional, mas não a usaram correctamente; (vi) raciocínio com base nos números naturais – as explicações dos alunos sugeriram que faziam comparações específicas do numerador e do denominador usando a ordenação dos números naturais. As estratégias mais usadas foram: aplicação de razão e a utilização de materiais manipuláveis.

Os resultados sugerem que os esquemas que os alunos têm da ordenação de números naturais são muito fortes e, pelo menos nas abordagens iniciais, fazem generalizações abusivas. Reflectem ainda a dificuldade que os alunos têm em desenvolver uma noção quantitativa de fracção suficientemente forte, para lidar com questões de ordenação. Os dados obtidos no final da unidade de ensino revelam que os alunos se conseguiram distanciar mais dos esquemas que tinham dos números naturais.

Os resultados indicam que, com um ensino adequado e durante um período de tempo prolongado, a maioria das crianças, até ao final do 4.º ano, são capazes de desenvolver um pensamento adequado para lidar com questões de ordenação e equivalência de fracções. Contudo, esta observação é limitada pois muitos alunos apresentam dificuldade na compreensão da relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que um todo está dividido, só um número pequeno de alunos desta idade consegue adquirir esta compreensão rapidamente, a maior parte precisa de muito tempo para a adquirir e para alguns esta relação permanece indefinida mesmo depois de terem tido muitas oportunidades para aprender e praticar.

Os autores recomendam a introdução das fracções no 3.º ano, sendo esta introdução limitada ao estabelecimento de significados elementares de fracção, com uma forte ênfase nas fracções unitárias. No final do terceiro ano ou no início do quarto devia ser introduzido o conceito de fracção não unitária, que seria desenvolvido através da iteração das fracções unitárias.

Post et al. (1993) referem que a predominância da influência dos números naturais também se verifica na ordenação de números racionais na representação de numeral decimal. Os alunos apresentam dificuldade na ordenação numerais decimais constituídos por um número diferente de casas decimais, um erro comum acontece quando os alunos têm de ordenar 0, 4 e 0,39, e afirmam que 0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4 utilizando o conhecimento que têm dos números naturais.

Orton et al. (1995) indica que uma estratégia possível para comparar duas fracções é encontrar fracções equivalentes com denominadores comuns, por exemplo, para comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{18}$ pode-se encontrar fracções equivalentes às dadas com denominador 90, $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$, e assim, podemos verificar que $\frac{2}{5}$ é maior. Contudo, os autores referem também que este procedimento, geralmente, não é muito significativo para os alunos do 5.º ano.

Uma estratégia possível para comparar e ordenar números racionais é escrevê-los na representação de numeral decimal (Bezuk & Cramer, 1989). Associada a esta representação está também a representação na recta numérica. Num currículo que enfatiza a capacidade dos alunos passarem facilmente de umas representações para outras, esta é uma estratégia de resolução de problemas que será natural eles utilizarem.

2.4.2. Fracções equivalentes

Segundo Kamii e Clark (1995), o conhecimento de fracções equivalentes é a capacidade para relacionar o mesmo número a "nomes" diferentes, a capacidade de ignorar ou imaginar divisões e linhas como uma manifestação do pensamento flexível. A compreensão de fracções equivalentes deve caminhar do conhecimento informal e intuitivo para o conhecimento formal. Assim, os alunos começam, por exemplo, por comparar fracções através da visualização e manipulação de materiais e posteriormente pensam no “tamanho” das partes (por exemplo, $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$) e, por fim, pensam em fracções equivalentes e acabam por usar as fracções equivalentes como meio de comparar fracções.

Kamii e Clark (1995) consideram que as fracções equivalentes envolvem dois aspectos do que Piaget chama pensamento operativo: pensamento multiplicativo e a conservação do todo e das partes. Estes autores investigam a compreensão de equivalência de fracções de alunos do 5.º e do 6.º ano de escolaridade que já anteriormente tinham estudado esta noção. Na resolução de problemas envolvendo o significado parte-todo, a maioria dos alunos tendeu a usar estratégias que os autores designam de perceptuais (baseada na manipulação de materiais e na observação de imagens) e não as estratégias formais trabalhadas anteriormente.

Estes autores criticam o ensino tradicional da equivalência de fracções por encorajar as estratégias perceptuais e figurativas (com imagens e manipuláveis), sem promover o desenvolvimento do pensamento multiplicativo (Kamii & Clark, 1995). Criticam, ainda, o facto de habitualmente, numa primeira fase, se introduzirem apenas fracções próprias, surgindo as fracções impróprias e os numerais mistos apenas mais tarde.

Kamii e Clark (1995) defendem que o ensino deve partir de problemas realísticos. Consideram que os alunos devem desenvolver as suas próprias estratégias, procurando dar sentido a situações para eles bastante complexas e inventando as suas próprias soluções. Em vez de se dar imagens ou materiais aos alunos, estes devem ser encorajados a representar o seu pensamento no papel. Na sua perspectiva, esta acção de representar activamente objectos e relações matemáticas tem mais potencialidades para o seu desenvolvimento do que apenas usar representações já previamente elaboradas. Consideram ainda que partes fraccionárias de segmentos de recta são ensinadas, com vantagem, no contexto das medidas. Para as autoras, os alunos atingem um ponto crucial na aquisição dos conceitos de ordem e equivalência de número racional, quando se tornam independentes dos materiais manipulativos e começam a ser capazes de lidar com as fracções como números, evoluindo assim na sua noção quantitativa de número racional.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Neste capítulo apresento a planificação da unidade de ensino do tópico “noção e representação, comparação, ordenação e equivalência de números racionais”. Indico as opções fundamentais que presidiram à concepção da unidade, com destaque para as representações usadas e para a diversidade das tarefas propostas aos alunos.

3.1. Hipótese geral de ensino-aprendizagem e trajectória de aprendizagem prevista

Hipótese geral de ensino-aprendizagem. Com base na revisão da literatura que fiz sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais e na minha experiência enquanto professora, formulei a seguinte hipótese geral de ensino-aprendizagem: os alunos desenvolvem melhor a sua compreensão e o seu sentido de número racional ao trabalharem simultaneamente as várias representações de número racional, nos diferentes significados, com diferentes tipos de unidades e com tarefas de natureza diversificada.

Pressupostos iniciais. A organização desta unidade de ensino tem por base, em primeiro lugar, o conhecimento que tinha sobre os alunos a quem se destinava. Apesar de só ter conhecido os alunos nesse ano, durante o 1.º período, o diagnóstico que realizei levou-me a perceber quais os conhecimentos e dificuldades dos alunos sobre números racionais (uma descrição mais pormenorizada desta aula de diagnóstico encontra-se no Anexo 1 e as tarefas realizadas encontram-se no Anexo 11).

A aula de diagnóstico superou as minhas expectativas, porque, apesar de os alunos não terem qualquer conhecimento formal deste tema, mostraram-se empenhados participativos e esforçaram-se por tentar encontrar estratégias que lhes permitissem resolver as tarefas propostas, apesar de nem sempre serem bem sucedidos. Os alunos mostraram dificuldade na linguagem própria das fracções, dizendo "segunda parte" para se referirem a um meio, ou "terceira parte" para se referirem a um terço. Mostraram um bom desempenho na utilização de fracções unitárias como operadores, revelando conhecimento dos números partitivos, possivelmente trabalhados durante o 1.º ciclo. Contudo, este conhecimento sobre os números partitivos parece ser essencialmente numérico, relacionado com a ideia de divisão cujo divisor é o denominador da fracção unitária. Além disso, mostraram dificuldades na compreensão do sistema de numeração decimal e na compreensão dos números racionais na representação decimal. Deste modo, considerei prioritário clarificar os aspectos essenciais do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, para que os alunos pudessem desenvolver uma compreensão mais sólida e completa dos números racionais.

Tendo como ponto de partida uma primeira revisão da literatura e as mais recentes orientações curriculares, considerei que a estratégia a seguir para levar os alunos a desenvolverem o sentido do número racional deveria: (i) ter como base os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, quociente, razão, medida e operador); (iii) contemplar os diferentes tipos de unidades e a respectiva construção; (iv) tratar a ordenação, comparação e equivalência de fracções antes das operações com fracções; (v) basear-se em modelos educativos que reforçassem as relações entre conceitos e procedimentos; e (vi) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fracção, pictórica, percentagem e verbal) (Post et al., 1993).

Objectivos de aprendizagem. A escolha das tarefas teve também em consideração a necessidade de desenvolver as competências matemáticas gerais e específicas definidas no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001). No que diz respeito às competências específicas considerei as seguintes:

- O reconhecimento dos conjuntos dos números (…) racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles (…);
- A aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- A aptidão para trabalhar com percentagens e para compreender e utilizar as suas diferentes representações (p. 61).

De acordo com as indicações do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), pretendo que os alunos desenvolvam o sentido de número racional, bem como a capacidade para utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. Assim, os alunos devem compreender e ser capazes de usar propriedades e representações dos números racionais; ser capazes de apreciar a ordem de grandeza dos números e ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.

Procuro, também, promover as capacidades transversais, de resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática dos alunos. Deste modo, a unidade de ensino contempla tarefas de natureza exploratória bem como problemas cuja resolução visa proporcionar aos alunos experiências de ensino significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da capacidade de resolução de problemas. Tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos, o trabalho a realizar na sala de aula valoriza o trabalho em grupo e a pares e os momentos de discussão colectiva.

Trajectória de ensino-aprendizagem. Segundo Simon (1995), planificar o ensino é tomar decisões sobre os conteúdos e sobre as tarefas de aprendizagem. A unidade de ensino que apresento pretende ser aquilo que o autor denomina trajectória hipotética de ensino-aprendizagem – *hypothetical learning trajectory* – um caminho de ensino-aprendizagem constituído, neste caso, por 7 fichas de trabalho que organizei ao pensar nas ideias e processos matemáticos que quero que os alunos desenvolvam. Todas as fichas de trabalho mantêm uma característica comum e que é a linha orientadora deste trabalho – usar representações e significados diferentes, para que os alunos adquiram flexibilidade na conversão, nas relações entre as várias representações e para que possam trabalhar os diversos significados de número racional de uma forma integrada e integradora. Inicialmente, começo por introduzir as diferentes representações de número racional, evidenciando as relações existentes entre si, bem como as respectivas conversões. De seguida, proponho tarefas na representação decimal nos diversos significados, para relembrar conceitos já trabalhados nesta representação durante o 1.º ciclo do ensino básico, como por exemplo, a comparação e ordenação, onde os alunos mostraram dificuldade no diagnóstico. Posteriormente, introduzo as fracções impróprias e os numerais mistos fraccionários, como outra forma de representar números racionais, também nos diferentes significados. Nesta altura considero também importante trabalhar a construção de partes e a reconstrução da unidade na representação fraccionária (usando fracções próprias e impróprias) e a percentagem, utilizando a representação pictórica como apoio para que os alunos possam visualizar as transformações realizadas. Esta abordagem inicial tem como principal objectivo, desenvolver nos alunos a noção de número racional, a consciência de que estes podem ser representados de diferentes formas e permitir-lhes ganhar alguma flexibilidade nas conversões entre e dentro dessas representações.

No momento seguinte, são introduzidos os conceitos de partilha equitativa, de comparação e ordenação de números racionais e equivalência de fracções. A comparação de fracções é um tópico onde os alunos mostram muitas dificuldades, sendo por isso introduzida pela comparação entre pares de fracções com numeradores iguais e com denominadores iguais. Pelo seu lado, a ordenação é realizada principalmente a partir de números representados de três formas diferentes: fracção, decimal e percentagem. Inicialmente são apresentadas as fracções básicas que os alunos facilmente relacionam com as outras representações. Seguidamente, são abordadas as fracções equivalente e, a partir destas, é estudada a densidade dos números racionais. Para finalizar as estratégias de ordenação e comparação de números racionais, é introduzida, formalmente, a recta numérica que constitui uma poderosa ferramenta para a compreensão das relações de ordem nos números racionais. Finalmente, a unidade de ensino aborda ainda a percentagem como operador.

Esta trajectória de aprendizagem é hipotética porque é criada como uma experiência de ensino e porque não é possível prever se será, de facto, um caminho de aprendizagem. Ela é relativamente previsível na medida em que posso antecipar as abordagens, discussões e resoluções que pode proporcionar aos alunos.

Na experimentação, durante as interacções com os alunos avalio em que medida os alunos reagem de acordo com o previsto e evoluem na direcção pretendida (Brocardo, Serrazina, Rocha, Mendes, Menino & Ferreira, 2008).

3.2. Tarefas

Actividade e tarefa. Aquilo que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente de dois factores: a actividade que realizam e a reflexão que efectuam sobre essa actividade (Ponte, 2005). A actividade que tem lugar na aula de Matemática baseia-se fundamentalmente na realização de tarefas. Para que os alunos desenvolvam uma "actividade matemática, rica e produtiva", estas tarefas devem ser de diferente natureza – exercícios, problemas, investigações, explorações e projectos (Ponte, 2002). O professor deve seleccionar as tarefas de acordo com os objectivos propostos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destina.

Para Ponte (2005), uma tarefa pode ser definida de acordo com o seu grau de desafio matemático e do seu grau de estrutura. A primeira dimensão liga-se à percepção de dificuldade, podendo uma tarefa ter um desafio "reduzido" ou "elevado". No que diz respeito ao grau de estrutura, uma tarefa pode ser "aberta" ou "fechada". Uma tarefa aberta apresenta alguma indeterminação, naquilo que é dado ou naquilo que é pedido ou em ambas as coisas. Uma tarefa "fechada" apresenta com clareza aquilo que é pedido e aquilo que é dado. Assim, um exercício é uma tarefa de desafio reduzido e fechada; um problema é uma tarefa de elevado desafio e fechada e uma exploração é uma tarefa de desafio reduzido e aberta. A presente unidade de ensino dá ênfase à diversidade de tarefas, sendo constituída por problemas, explorações e exercícios.

Problemas. Um problema pode ser definido como "uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução" (Kantowski, 1981, in Abrantes, 1988, p. 3). Segundo Pólya (2003), para que os alunos se sintam desafiados nas suas capacidades matemáticas e possam experimentar o gosto pela descoberta, o professor deve propor-lhes problemas. Para este autor, um problema pode ser modesto mas desafiar o aluno, despertando as suas faculdades inventivas e ajudando-o a descobrir o prazer da descoberta e o gosto pelo trabalho mental. Na sua perspectiva, a resolução de problemas envolve quatro fases: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano; e reflectir.

Também segundo o *Currículo Nacional* (ME, 2001) os alunos devem "desenvolver a capacidade de usar a Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a auto-confiança necessária para fazê-lo" (p. 57). Deste modo, os problemas devem desafiar o raciocínio dos alunos para permitir que estes tenham oportunidade de relacionar saberes e encontrar estratégias adequadas nesse processo. A resolução de problemas é importante porque permite aos alunos ir mais além na construção do seu conhecimento.

Explorações. Segundo Ponte (2005) as tarefas de exploração caracterizam-se por serem relativamente abertas e acessíveis. Aquilo que distingue uma tarefa de investigação de uma exploração é o seu grau de desafio – as tarefas de exploração apresentam um grau de desafio mais reduzido do que as tarefas de investigação.

Além disso, uma tarefa de exploração distingue-se de um exercício pelo seu grau de abertura. No entanto, Ponte (2005) refere que a linha de demarca um exercício de uma exploração nem sempre é nítida, pois depende dos conhecimentos prévios dos alunos. Se os alunos tiverem os conhecimentos necessários à resolução da tarefa sem dificuldade, então estão perante um exercício, mas se, pelo contrário, ainda não estiverem formalmente munidos dos procedimentos para resolver essa tarefa, então estão perante uma exploração para a qual terão de mobilizar os seus conhecimentos informais e/ou intuitivos.

Este tipo de tarefa proporciona aos alunos o uso do conhecimento do seu quotidiano na construção do seu conhecimento matemático. Ponte (2005) contraria a ideia de que os alunos só devem resolver uma tarefa se tiverem sido ensinados a resolvê-la, pois os alunos já sabem muitas coisas que são capazes de mobilizar para a aula de Matemática. Ao propor tarefas que apelam a este conhecimento do quotidiano, o professor pode proporcionar uma aprendizagem mais eficaz, fazendo com que os alunos descubram o seu próprio método para resolver uma questão, em vez de se limitarem a aprender o método ensinado pelo professor.

Exercícios. O que define um exercício, não é o contexto em que é apresentado mas sim, o facto de o aluno ter, ou não, um processo imediato para o resolver. Se o aluno conhecer esse processo de resolução estamos perante um exercício, se o aluno não o conhecer, então a questão já é, para ele, um problema. Num exercício, o enunciado indica claramente o que é pedido e o que é dado (Ponte, 2005).

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), quando a solução é sabida de antemão pelo professor, a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Este tipo de tarefa não tira o lugar aos problemas, projectos, explorações e investigações, sendo necessário articular os diferentes tipos de tarefas para promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

A presente unidade de ensino dá ênfase à construção do conhecimento com base no desenvolvimento da compreensão, partindo do conhecimento informal e intuitivo dos alunos para chegar ao conhecimento formal (Kieren, 1988). Para isso, a representação dos números racionais, parte de materiais concretos para depois os alunos chegarem à formalização dos conceitos matemáticos. Tal como indica o *Currículo Nacional* (ME, 2001):

> Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da actividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim (p. 71).

3.3. Dinâmica da sala de aula

A actividade realizada na sala de aula envolve diferentes formas de trabalho. Assim, é privilegiado o trabalho em grupo e a pares como forma de proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de partilha e discussão, mas também são contemplados momentos de trabalho individual. O diálogo na sala de aula e a interacção social podem ser utilizados para promover o reconhecimento de conexões entre ideias e a reorganização do conhecimento (NCTM, 2007). Num sentido semelhante, afirmam Ponte et al. (1997):

> Os alunos podem assim participar em dois níveis do discurso da aula – o colectivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem. Trata-se de uma forma prática de trabalhar, que não exige, de um modo geral, alterações no espaço físico da sala de aula e que proporciona aos alunos uma certa margem de autonomia. É particularmente adequada quando a tarefa proposta é relativamente estruturada e não exige um elevado nível de concentração individual. (p. 94)

Segundo Ponte et al. (1998) a realização das tarefas envolve três fases essenciais: (i) a apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) o desenvolvimento do trabalho pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final. Esta última fase da realização de uma tarefa é muito importante pois, segundo Bishop e Goffree (1986) a fase reflexiva de uma actividade é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados, já que um bom momento de reflexão pode permitir aos alunos ligar ideias sobre vários temas, mostrando como as ideias matemáticas são interligadas. Os momentos de discussão constituem, por isso, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). De acordo com o NCTM (2007),

> A aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interacções na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjecturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio Matemático. Como tal, Cada tarefa culmina sempre com um momento de discussão colectiva, como forma de reflectir, discutir ideias, processos e conclusões (p. 23).

Os momentos de discussão das tarefas são também importantes para o desenvolvimento da comunicação, uma das três capacidades transversais indicadas no novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). De acordo com este documento, "o aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos" (p. 8). As orientações deste documento indicam-nos que "o desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, é considerado um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula" (p. 8).

3.4 Planificação da unidade de ensino

Orientações gerais. O novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) dá destaque à noção e representação de número racional. Assim, e apesar de este programa ainda não estar a ser seguido na escola no momento da realização deste estudo, optei por seguir esta orientação para o tópico *"Números racionais não negativos"* abordando os subtópicos: (i) noção e representação de número racional; (ii) comparação, ordenação e equivalência e; (iii) percentagens. Nesta data ainda não era conhecido o número de blocos a leccionar em cada um dos tópicos, mas os materiais divulgados pela DGIDC de apoio à implementação do programa (Menezes et al., 2009) sugeriam a utilização de 7,5 blocos (de 90 minutos) para os desenvolver. Contudo, devido às dificuldades dos alunos com os números decimais e à utilização de uma grande diversidade de representações e significados, decidi atribuir 9 blocos à realização de tarefas e 1 bloco para a realização de testes.

De resto, a planificação da unidade de ensino segue as orientações do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (DGIDC, 2007) e das *Normas* do NCTM (2007). Segundo estes documentos:

- Os alunos devem realizar diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente, problemas, investigações, exercícios e projectos.
- O ensino-aprendizagem tem de prever momentos para o confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas.
- Ouvir, praticar, fazer, argumentar e discutir são actividades importantes na aprendizagem da Matemática.
- As tarefas devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos. Essas situações devem ser apresentadas de modo realista e sem artificialidade, permitindo capitalizar o conhecimento prévio dos alunos.
- O professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas.
- Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e desenvolver a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra.
- Os alunos devem ter oportunidade para trabalharem de diferentes formas na sala de aula, individualmente, a pares, em pequeno grupo ou em grupo turma.

A elaboração desta unidade de ensino tem por base os documentos curriculares referidos e a revisão da literatura sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos. Essa revisão da literatura permitiu-me conhecer estudos empíricos e um amplo conjunto de tarefas para promover o sentido do número racional, a construção de partes e a reconstrução da unidade, a conversão entre e dentro das diversas representações, a ordenação e comparação dos números racionais e equivalência de fracções. Foram também considerados os conhecimentos demonstrados pelos alunos relativamente a este tema antes do início desta unidade de ensino. Tendo em conta esses elementos, considerei necessário dar maior ênfase à representação decimal do que a inicialmente prevista. Durante a unidade de ensino a planificação sofreu alguns ajustes, nomeadamente no que diz respeito ao tempo previsto para o desenvolvimento de algumas tarefas. Esta necessidade surgiu de alguma falta de autonomia dos alunos e de algumas dificuldades pontuais num ou noutro conceito.

O Quadro 1 apresenta uma planificação da realização das fichas que integram a unidade de ensino, onde consta o tempo dedicado à resolução das tarefas, bem como o modo de trabalho em cada aula. A planificação mais detalhada da unidade de ensino é apresentada no Anexo 2.

Significados, representações e contextos. As tarefas foram seleccionadas tendo em conta os significados parte-todo, razão, operador, quociente e medida. De acordo com os tópicos abordados os significados que receberam maior atenção foram o parte-todo e a medida, em segundo lugar ficaram o quociente e o operador e, por último, o que recebeu menor destaque foi o significado razão.

A estrutura desta unidade foi concebida tendo em atenção que o pleno conhecimento dos números racionais passa pelo conhecimento das suas diferentes formas de representação (NCTM, 2007). Os alunos não só devem ser fluentes a usar as diversas representações, como devem ser capazes de passar facilmente de uma representação para outra, bem como ser expeditos na decisão sobre a representação a utilizar para resolver um problema.

Nesta unidade de ensino são valorizadas as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, privilegio os processos informais e as representações que os alunos já conhecem para a partir dai introduzir, gradualmente, novas representações formais de número racional. Contudo, com a introdução das novas representações, estas não passam a ser privilegiadas em relação às anteriores, pelo contrário, os alunos devem adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Os problemas propostos têm, tanto quanto possível, contextos significativos "para ajudar os alunos a encurtar o fosso entre o seu conhecimento pessoal e o conhecimento formal da Matemática" e a construir um novo conhecimento matemático, sobre o que já sabem (Gravemeijer, 2005, p. 2) para que construam conhecimento com significado.

Quadro 1 – Planificação da unidade

Aulas previstas: 10 blocos de 90 minutos				
Fichas de Trabalho	**Tópicos**	**Modo de trabalho**	**Duração em minutos**	**Blocos**
Teste Diagnóstico	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	Individual	45	0,5
Ficha de trabalho 1	Noção e representação de número racional.	Em pares	90	1
Ficha de trabalho 2	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais.	Em pares	90+45	1,5
Ficha de trabalho 3	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais.	Em pares	45+90	1,5
Ficha de trabalho 4	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	Em pares	90+45	1,5
Ficha de trabalho 5	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	Em pares	45+90	1,5
Ficha de trabalho 6	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes	Em pares	90	1
Ficha de trabalho 7	Noção e representação de número racional e percentagem	Em pares	90	1
Avaliação de conhecimentos	Noção e representação de número racional, Comparação e ordenação. Fracções equivalentes.	Individual	45	0,5

A unidade de ensino é composta por sete fichas de trabalho constituídas por uma grande diversidade de tarefas com uma grande diversidade de contextos, representações e significados. De acordo com esta diversidade, com os tópicos abordados e com a hipótese geral de ensino-aprendizagem, foi definido um conjunto de objectivos para cada uma das fichas de trabalho:

Ficha de Trabalho 1. Com esta ficha de trabalho (Anexo 3) pretendo introduzir as diferentes representações de número racional, através de uma tarefa exploratória e do uso de materiais manipuláveis que permitem a visualização e a elaboração de relações entre as diferentes partes obtidas por dobragens sucessivas de uma tira de papel. Os objectivos de aprendizagem definidos para esta ficha de trabalho são: (i) Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas; (ii) Representar sob a forma de fracção, número decimal e percentagem um número racional não negativo; (iii) Comparar números representados de diferentes formas; (iv) Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes; e (v) Compreender e usar um número racional na relação parte-todo, razão e medida.

Ficha de Trabalho 2. Com a realização desta ficha de trabalho (Anexo 4) pretendo fazer uma revisão dos conceitos de numeral decimal, através da realização de exercícios (questões 1-4) e problemas (questões 5-8), para levar os alunos a: (i) Compreender e usar um número racional como parte-todo, medida e operador; (ii) Comparar e ordenar números racionais representados na forma de numeral decimal; (iii) Reconstruir a unidade a partir das suas partes; (iv) Ler e escrever na representação decimal e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.

Ficha de Trabalho 3. Esta ficha de trabalho (Anexo 5) tem como ideia central a construção de partes e a reconstrução da unidade nas representações pictórica, fracção e percentagem. Com ela são introduzidas também as fracções impróprias e os numerais mistos fraccionários, através de um conjunto de tarefas de exploração (questões 1, 2, 3, 5 e 6) e exercícios (questão 4). Os objectivos de aprendizagem definidos são: (i) Compreender e usar um número racional como parte-todo, operador e medida; (ii) Reconhecer fracções que representam números maiores do que a unidade; (iii) Escrever fracções impróprias na forma de numeral misto fraccionário; (iv) Comparar números racionais; (v) Reconstruir a unidade a partir das suas partes; (vi) Reconstruir as partes a partir da unidade e (vii) Compreender e utilizar um número racional nas representações: fracção, numeral decimal, numeral misto fraccionário, percentagem e pictórica.

Ficha de Trabalho 4. Esta ficha de trabalho (Anexo 6) foi concebida com o intuito de desenvolver o conceito de partilha equitativa, a comparação e a ordenação de números racionais nas diferentes representações e para desenvolver os significados operador e medida, através da resolução de uma tarefa de exploração (tarefa 1), de problemas (tarefa 2) e de exercícios (tarefas 3-7). Para isso, são definidos os seguintes objectivos: (i) Compreender e usar um número racional como quociente, operador e medida; (ii) Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; (iii) Reconstruir a unidade e as partes; (iv) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; e (v) Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas.

Ficha de Trabalho 5. Com a realização desta ficha de trabalho (Anexo 7) pretendo abordar a equivalência de fracções, a ordenação e comparação de fracções e a densidade dos números racionais, através da resolução de tarefas de exploração (tarefas 1-4) e problemas (tarefas 5-9). A ficha envolve os seguintes objectivos: (i) Compreender e usar um número racional como relação parte-todo; medida, razão e operador; (ii) Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; (iii) Reconstruir as partes; (iv) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; (v) Comparar números racionais representados sob a forma de fracção; (vi) Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; e (vii) Decomposição de fracções.

Ficha de Trabalho 6. Esta ficha de trabalho (Anexo 8) contempla a comparação e ordenação de números racionais através da recta numérica, usando problemas (questões 1 e 2) e exercícios (questões 3-6). Os seus objectivos de aprendizagem são: (i) Compreender e usar um número racional como medida e operador; (ii) Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; (iii) Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; (iv) Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; (v) Reconstruir as partes; e (vi) Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade.

Ficha de Trabalho 7. Esta ficha de trabalho (Anexo 9) dá ênfase à representação de números racionais sob a forma de percentagem e ao cálculo de percentagens, através da resolução de exercícios (tarefas 1 e 2) e de problemas (tarefas 3 e 4). Assim, foram definidos os seguintes objectivos: (i) Compreender e utilizar um número racional nas representações: fracção, numeral decimal e percentagem; (ii) Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; (iii) Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; (iv) Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100; e (v) Calcular e usar percentagens.

As fichas de trabalho 1, 3 e 7 contêm tarefas adaptadas da brochura para o 2.º ciclo elaborada a pedido da DGIDC (Menezes et al., 2008), para apoiar a aplicação do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* e a sua realização seguiu as recomendações sugeridas pelos autores. A ficha 2 é baseada na brochura *Cadeia de*

Decimais, publicada pela ESE de Lisboa (Monteiro et al., 2006). As fichas 3, 4, 5 e 6 contêm tarefas adaptadas da brochura *Desenvolvendo o Sentido de Número Racional* (Monteiro & Pinto, 2007)

3.5. Avaliação dos alunos

Nesta unidade, a avaliação dos alunos é baseada na diversidade de técnicas e instrumentos. Para a concepção desta proposta foi considerada a avaliação formativa de diagnóstico, de forma a integrar os conhecimentos anteriores dos alunos. No decorrer da unidade de ensino todos os modos de trabalho na sala de aula, o empenho dos alunos na aula, a sua participação oral, a capacidade de argumentação, a realização de trabalho de casa e o comportamento foram elementos avaliados no domínio das "atitudes e valores". Para além disso, foram considerados para a avaliação os testes escritos individuais, as apresentações e discussões orais das tarefas bem como as produções escritas dos alunos da resolução das tarefas. Foi utilizada a avaliação formativa que, por ser contínua, permite que o professor recolha a informação, que aprecie o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, diagnostique problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e acção didáctica (ME, 2007).

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas gerais desta investigação (abordagem qualitativa e interpretativa), o *design* (investigação sobre a minha prática profissional, no quadro de uma experiência de ensino, que recorre a observação participante e a estudos de caso) e as fases deste estudo. De seguida, apresento o balanço de um estudo piloto sobre representação de números racionais, os participantes, os instrumentos de recolha de dados e os processos usados na respectiva análise.

4.1. Opções metodológicas gerais, *design* e fases do estudo

Uma investigação qualitativa e interpretativa. Pela natureza do estudo, a metodologia adoptada segue, em termos gerais, o paradigma interpretativo. Neste paradigma "o objectivo primordial da investigação centra-se no significado humano da vida social e na sua clarificação e exposição por parte do investigador" (Erickson, 1989, p. 196). O paradigma interpretativo valoriza a compreensão e a explicação, tendo em vista desenvolver e aprofundar o conhecimento de um fenómeno ou situação, num dado contexto (Bogdan & Biklen, 1994). Esta investigação apresenta as cinco principais características de uma investigação qualitativa apresentadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) O ambiente natural é a fonte directa dos dados e a investigadora é o principal instrumento de recolha de dados; (ii) os dados são de natureza essencialmente descritiva e interpretativa; (iii) o interesse da investigadora centra-se na compreensão do modo como os fenómenos decorrem, sendo o processo mais relevante do que os produtos finais obtidos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva e exploratória; e (v) a investigadora interessa-se por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências. No entanto, apesar dos dados a obter serem essencialmente de natureza qualitativa, também pretendo recolher alguns dados de natureza quantitativa que ajudem a traçar um quadro geral das aprendizagens dos alunos.

Uma investigação sobre a minha prática profissional. Esta investigação incide sobre a minha prática profissional, na sala da aula, como professora de Matemática de uma turma do 2.º ciclo do ensino básico. Este é o terreno fundamental onde tem lugar o processo de ensino-aprendizagem mas, como acontece com todos os professores, por vezes, surgem situações para os quais não tenho resposta imediata. Daí, nasceu o meu interesse em investigar e procurar respostas para os problemas da minha prática. Sinto necessidade de compreender as dificuldades e os processos que os meus alunos utilizam para poder proporcionar experiências de aprendizagem que permitam obter os resultados desejados.

Tal como refere Ponte (2002) "a investigação é um processo privilegiado de construção do conhecimento" (p. 6). E a investigação do professor sobre a sua prática profissional é "um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente" (p. 6). Este autor define dois tipos principais de objectivos para este tipo de investigação: (i) alterar algum aspecto da prática, e (ii) procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa prática. A investigação sobre a prática profissional pressupõe a reflexão sobre o que se faz, a forma como se faz e os resultados obtidos. De acordo com Oliveira e Serrazina (2002) "a reflexão fornece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas" (p. 29). Neste estudo procuro compreender a natureza dos problemas que se colocam na minha prática, já que aplico um conjunto de tarefas no quadro de uma unidade de ensino.

Experiência de ensino. De acordo com Steffe e Thompson (2000), a metodologia de experiência de ensino tem as suas raízes na Educação Matemática e caracteriza-se globalmente por procedimentos padronizados, pelos quais o investigador constrói estratégias para conhecer a Matemática dos alunos. Ao procurar compreender o contributo da proposta pedagógica que informa a unidade de ensino vou também investigar a minha própria prática enquanto docente. Assim, este estudo proporciona a oportunidade de reflectir sobre a minha intervenção nas aulas, de um modo mais estruturado e aprofundado. Neste sentido, há alguns aspectos a ter em conta, nomeadamente, (i) a produção de conhecimento através desta forma de investigação; (ii) a clareza e o rigor metodológico e a proximidade que existe entre o investigador e o objecto de estudo; e (iii) a finalidade desta investigação (Ponte, 2002).

Observação participante. Como investigadora, serei também eu que recolherei directamente os dados, por observação participante no ambiente natural dos alunos. Deste modo, as acções dos participantes são observadas no seu ambiente natural, facilitando a compressão dos fenómenos de interesse (Bogdan & Biklen, 1994). Através da observação participante pretendo "compreender o ambiente natural onde vivem os participantes, sem o alterar ou manipular" (Gay, Mills & Airasian, 2006, p. 413). Usarei a informação para retirar informação importante, através dos órgãos sensoriais e com recurso à teoria e à metodologia científica, a fim de poder descrever, interpretar e agir sobre a realidade das minhas aulas (Carmo & Ferreira, 1998). A observação participante facilita a recolha de dados sobre a interacção social na situação em que esta ocorre (Burgess, 1984). As vantagens desta abordagem metodológica são (i) a oportunidade de recolher dados ricos e pormenorizados, resultantes da observação de contextos naturais e (ii) o facto de obter relatos de situações na própria linguagem dos participantes, o que dá acesso aos conceitos que eles usam na vida de todos os dias.

Estudo de caso. Segundo Ponte (2006), "mais do que uma metodologia, um estudo de caso é essencialmente um *design* de investigação (p. 7)". Para o autor, este tipo de investigação tem essencialmente 3 características: (i) é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando partido de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos (p. 7); (ii) não é uma investigação experimental. Usa-se quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como é (p. 8) e; (iii) os resultados podem ser dados a conhecer de diversas maneiras, no entanto assume com frequência a forma de narrativa cujo objectivo é contar uma história que acrescente algo significativo ao conhecimento existente e seja tanto quanto possível interessante e iluminativa (p. 9).

Sendo o objecto do estudo as aprendizagens dos alunos no quadro de uma experiência de ensino, considero adequado usar estudos de caso já que se trata de um *design* de investigação que é "(i) o menos construído, portanto o mais real; (ii) o menos limitado, portanto o mais aberto; (iii) o menos manipulável, portanto o menos controlado" (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994, p. 169). Ponte (2006) refere que "muitas vezes, um dado caso faz parte de um caso maior ou inclui outras entidades como 'subcasos' (p. 5)". Assim, são constituídos como casos, num nível macro, uma turma do 5.º ano e, num nível micro, uma aluna dessa turma. Matos e Carreira (1994) defendem que o estudo de caso é adequado quando o fenómeno de estudo não se pode isolar do contexto, sendo um meio de investigar fenómenos imersos em unidades sociais complexas que incluem múltiplos elementos potencialmente importantes para a compreensão desse fenómeno, o que corresponde à situação desta investigação. Para Ponte (2006) os estudos de caso “visam conhecer uma entidade bem definida”, sendo o seu objectivo:

> Compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supões ser única e especial (…). (p. 2)

Fases do estudo. Este estudo foi desenvolvido entre Setembro de 2009 e Outubro de 2010. Teve início com a revisão da literatura sobre o tema em estudo e também sobre metodologias de investigação em educação. A segunda fase foi a preparação dos instrumentos de recolha de dados e a concepção da unidade de ensino, bem como a criação de condições necessárias para o desenvolvimento do estudo. Após uma primeira abordagem e análise dos dados, tive necessidade de fazer um novo aprofundamento teórico, analisando os dados tendo em conta as questões de investigação e a teoria já existente sobre o tema. Por fim, foram escritos os demais capítulos desta dissertação. A calendarização das fases do estudo encontra-se resumida no Quadro 2.

Quadro 2 – Fases do estudo

	Set.-Out.09	Nov. 09	Dez. 09	Jan. 10	Fev. – Mar.10	Abr. 10	Mai. 10	Jun.-Jul.10	Ago. 10	Set. 10	Out. 10
Revisão de literatura	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	
Concepção de Instrumentos e da Unidade de Ensino		✓	✓	✓							
Recolha de dados		✓		✓	✓						
Análise de dados			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Produção/divulgação							✓	✓	✓	✓	✓

4.2. Balanço de um estudo-piloto sobre representação de números racionais

O meu interesse pelo estudo dos números racionais nasceu da minha prática profissional como professora mas teve maior intensidade a partir de um estudo realizado para a disciplina de Didáctica dos Números e da Álgebra durante o ano lectivo de 2008/09, ano curricular do mestrado. Este estudo foi realizado por mim e mais duas colegas, enquanto grupo de trabalho, e consistiu na experimentação da tarefa "*Dobras e mais dobras"* que faz parte dos materiais de apoio à implementação do novo *Programa de Matemática* (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008). O objectivo do estudo era perceber em que medida estes materiais representam uma alternativa viável e vantajosa em relação às práticas de ensino usuais. A referida tarefa foi aplicada em duas turmas de 5.º ano de escolas diferentes. Como instrumentos de recolha de dados foram utilizadas entrevistas, uma antes e outra depois da aplicação da tarefa, e os documentos produzidos pelos alunos. Tanto as entrevistas como as aulas foram audiogravadas.

O desempenho dos alunos na exploração e na discussão da tarefa acabou por superar as nossas expectativas dado que estes conseguiram atingir os objectivos inicialmente propostos e até ir ainda mais além. As conclusões desse estudo indicam assim que a tarefa é pertinente e adequada para um primeiro contacto dos alunos com o conceito de número racional no seu significado parte-todo, e em diversas representações (fracções, decimais, percentagem, pictórica), em particular relativamente às noções de numerador, denominador e fracção equivalente.

No entanto, na realização da tarefa proposta, os alunos, apenas com os conhecimentos adquiridos no 1.º ciclo, não compreendiam o que lhes era pedido inicialmente na questão 1, pois não percebiam o que se pretendia com a frase "representar um número de diferentes formas". Para dar início à resolução as professoras sentiram necessidade de promover a discussão colectiva da primeira figura, negociando o significado do conceito "representar" para que os alunos entendessem o que era pedido. A partir da representação da metade, discutida em colectivo, os alunos revelaram grande compreensão das representações, fazendo com facilidade a transferência desse conhecimento para as restantes questões. Com o decorrer da aula, a maioria dos grupos concretizou diferentes representações (fraccionária, decimal, percentagem e pictórica), ultrapassando aqui as expectativas das professoras. Isto sugere que os alunos conheciam, pelo menos informalmente, diversas representações dos números racionais, mas não os termos "representar" ou "representação".

Também na realização da segunda questão da tarefa eu e as minhas colegas fomos surpreendidas pois os alunos conseguiram, através da visualização e manipulação do material fornecido (tiras de papel), estabelecer múltiplas relações entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{8}$. Perceberam com facilidade as relações mais simples e começaram desde logo a usar o operador multiplicativo e partitivo para representar essas relações. Além disso, descobriram fracções equivalentes, como, por exemplo, "um meio é o quádruplo de um oitavo" ou "quatro oitavos é igual a um meio". Revelaram neste ponto uma compreensão muito significativa do conceito de número racional no seu significado operador, trabalhado no 1.º ciclo.

Uma dificuldade revelada na primeira entrevista e que se manteve na segunda entrevista, foi o facto de um aluno representar $\frac{1}{4}$ como 0,4 em número decimal. Isto revela que este aluno não compreendeu como é que se faz a correspondência entre as duas representações, apesar do seu grupo de trabalho ter realizado a correspondência correctamente.

Os alunos revelaram-se pouco à vontade com a utilização de algumas representações, nomeadamente a fracção, apesar de a utilizarem em situações que já conheciam como $\frac{1}{2}$. Na maior parte das questões da entrevista, os alunos utilizaram essencialmente as representações em número decimal e em linguagem natural ou pictórica, recorrendo pouco à representação fraccionária. Contudo, o uso desta representação já se começou a verificar um pouco mais na segunda entrevista.

Ao longo do trabalho, os alunos adoptaram diferentes estratégias para representar e comparar diferentes números racionais. Utilizaram a metade como âncora do raciocínio fraccionário; representaram os números preferencialmente em linguagem natural e decimal; utilizaram na maior parte das vezes o operador metade da metade; e utilizaram a representação decimal em detrimento da representação em fracção, levando-nos a concluir que o uso inicial reduzido desta representação ocorre provavelmente porque os alunos estão mais familiarizados com a representação decimal, que já conhecem desde o 1.º ciclo.

Pudemos comprovar, mais uma vez, que os números racionais são um tema complexo e de difícil compreensão para os alunos. Verificámos também que, uma vez que se trata de um tema abstracto, a manipulação de materiais concretos constitui um factor importante para que os alunos possam fazer descobertas através da visualização e depois passarem para a formalização. Consideramos também, mais uma vez, que, embora seja por vezes difícil de concretizar na nossa sala de aula o trabalho de grupo, este tem grande relevância na aprendizagem, ao proporcionar momentos de discussão e explicitação de raciocínios. Assim, a manipulação de material concreto favoreceu a aprendizagem dos alunos, permitindo-lhes, através da visualização, comparar e relacionar diferentes partes coloridas, proporcionando descobertas extremamente ricas. Além disso, o trabalho de grupo constituiu-se um factor favorável à aprendizagem dos alunos, pois facilitou a comunicação matemática e a troca de ideias e experiências.

Como professora, tive oportunidade de verificar que, apesar do trabalho de grupo ser importante, as descobertas dos alunos não devem ficar apenas restritas aos alunos do respectivo grupo. O professor deve criar momentos de discussão em turma, onde os alunos têm oportunidade de dar a conhecer aos outros as suas descobertas. Pude constatar que é nestes momentos que muitas vezes surgem discordâncias entre os alunos, levando-os a exprimirem os seus raciocínios e justificações, de forma a convencer os outros de que as suas ideias estão correctas.

Enquanto investigadora as minhas aprendizagens também foram muito enriquecedoras. De facto, este foi o meu primeiro trabalho desta natureza. Foi ai que iniciei a minha aprendizagem prática sobre a forma como se observa uma aula, a importância dos registos feitos na aula (pois foram estes que vieram colmatar o facto de não termos realizado a gravação em vídeo) e o quanto é importante que estes registos sejam pormenorizados e bem identificados. Sobre a concepção das entrevistas, aprendi que o seu planeamento é muito importante e que devíamos ter feito previamente um guião da entrevista de acordo com categorias prévias de análise que depois nos ajudassem na análise dos resultados. Como nós não o fizemos acabámos por colocar algumas questões que não estavam relacionadas com os objectivos da tarefa e que depois tivemos de desconsiderar na análise, pois não foram trabalhadas na aula.

Eu e as minhas colegas sentimos grandes dificuldades na análise dos dados visto que não estabelecemos *a priori* categorias de análise bem definidas. Tínhamos muitos dados dispersos e a certa altura não sabíamos como os organizar, levando assim a alguma dificuldade da nossa parte em chegar a conclusões. Ainda no que diz respeito à análise de dados, apesar de termos gravado as aulas em áudio, quando analisámos a respectiva transcrição, sentimos alguma dificuldade em perceber o que se passava no momento. Assim, pensamos que será útil fazer o cruzamento entre as transcrições e o visionamento de uma gravação em vídeo. Desta forma, as transcrições facilitam o visionamento da gravação em vídeo, permitindo focar a atenção nas relações entre os discursos do professor e dos alunos, que podem passar despercebidas. A observação das gravações em vídeo permite perceber melhor toda a dinâmica e ambiente da aula.

4.3. Participantes

A turma objecto de estudo. Os participantes do estudo são alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade, de uma escola básica, do ensino público, que constitui um território educativo de intervenção prioritário (TEIP). A classe socioeconómica das famílias é, no geral, baixa ou média-baixa e os encarregados de educação, na sua maioria, têm como habilitações académicas o 2.º ou 3.º ciclo do ensino básico e, menos frequentemente, o ensino secundário.

Esta turma é composta por 22 alunos, 9 raparigas e 13 rapazes, com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos de idade (a maioria com 10 anos), sendo que 6 alunos já reprovaram em anos anteriores. É uma turma que revela falta de hábitos e métodos de trabalho, nomeadamente de trabalho com os pares. É receptiva a novos tipos de tarefa e mantém um ritmo de trabalho equilibrado. Durante o primeiro período revelaram no geral um bom aproveitamento, no entanto, o ritmo de trabalho e o empenho dos alunos é bastante heterogéneo. Existe um núcleo grande de alunos empenhados e com bom aproveitamento e existe um conjunto mais pequeno de alunos com dificuldades, mas empenhados. Existe ainda um grupo de alunos pouco empenhados e com total desinteresse pelas actividades escolares, são estes alunos, que por vezes apresentam comportamentos de indisciplina. Durante este ano lectivo não houve registo de situações graves de indisciplina, no entanto, é unânime entre os professores da turma que os alunos têm dificuldade em cumprir as regras de sala de aula, são precipitados e tentam participar avidamente, o que provoca alguma confusão nas aulas. A maior parte dos encarregados de educação preocupam-se com a vida escolar dos seus educandos, mas devido às suas diminutas habilitações escolares, não os conseguem acompanhar academicamente.

Para além de ser a sua professora de Matemática, sou também a directora de turma e professora de Ciências da Natureza, Estudo Acompanhado e Formação Cívica, estando assim com os alunos 11 tempos (de 45 minutos) por semana. Devido ao facto de passarmos muito tempo juntos e de ser a directora de turma, temos uma relação bastante próxima, os alunos vêem-me como uma referência e o seu maior apoio dentro da escola para os ajudar a resolver problemas das disciplinas que lecciona, mas também problemas da sua integração social na escola e pessoais.

A aluna objecto de estudo. Neste estudo, uma aluna é objecto de estudo de caso. Para essa escolha defini as seguintes condições: (i) possuir uma razoável capacidade de expressão oral e escrita para que seja capazes de justificar e comunicar as suas resoluções, bem como argumentar as suas descobertas; (ii) ter facilidade em reunir fora das aulas e (iii) mostrar predisposição para participar no estudo. A aluna escolhida para ser o estudo de caso desta investigação é Leonor que satisfaz as condições anteriores e mostrou desde logo interesse em participar no estudo. Além disso, Leonor demonstra um bom desempenho ao nível da disciplina de Matemática, apresenta bons resultados nos testes e entrevistas, mostra ter um bom raciocínio matemático, apresenta diversas estratégias na resolução de problemas e tem uma boa capacidade de comunicação oral e escrita. Foram-lhe realizadas duas entrevistas, uma antes e outra depois da realização da unidade de ensino.

4.4. Recolha de dados

4.4.1. Pedidos de autorização

A recolha de dados teve três momentos principais – antes, durante e após a realização da unidade de ensino. Comecei por pedir autorização à Direcção da Escola para a realização do estudo, o que me foi prontamente concedido, desde que os encarregados de educação também anuíssem. Posteriormente, informei a coordenadora do departamento e a coordenadora do grupo disciplinar de Matemática da realização deste estudo. Por último, pedi autorização aos encarregados de educação (Anexo 10) para a realização da investigação com os seus educandos e também para a gravação em áudio e vídeo das aulas e entrevistas, como forma de recolha de dados, garantindo o anonimato dos alunos e o uso das imagens exclusivamente para a investigação. Todos os encarregados de educação e alunos concordaram com a realização da investigação e concederam autorização para a realização das gravações.

4.4.2. Instrumentos de recolha de dados

Aula de diagnóstico. Antes da elaboração da unidade de ensino senti necessidade de realizar uma aula de diagnóstico para aferir os conhecimentos dos alunos sobre os números racionais. Esta aula realizou-se no dia 24 de Novembro de 2009, num bloco de 90 minutos, tendo proposto aos alunos um conjunto de tarefas (Anexo 11) com carácter de diagnóstico sobre noção, ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, envolvendo diferentes representações de número racional. Nesta aula existiram dois momentos de trabalho distintos, primeiro, em pequenos grupos e, depois, uma discussão colectiva das tarefas. Esta aula foi gravada em vídeo, primeiro, incidindo no trabalho de um grupo de alunos, depois, na discussão colectiva.

Entrevistas. A entrevista pode ser entendida como "uma forma especial de comunicação entre pessoas" (Anderson & Arsenaul, 2002, p. 190) tendo subjacente um determinado assunto. De acordo com Lessard-Hébert (1996), as entrevistas são um instrumento importante na recolha de dados válidos sobre crenças, opiniões e ideias dos sujeitos observados. As principais vantagens das entrevistas são: (i) as pessoas sentem-se "mais à vontade do que quando completam um questionário" e (ii) permitem "uma informação mais completa do que a disponível na escrita" (Anderson & Arsenault,, 2002, p. 190). De acordo com Gay et al. (2006) as entrevistas podem subdividir-se em três tipos principais: estruturadas, não estruturadas e semi-estruturadas. Neste estudo são utilizadas entrevistas semi-estruturadas, tendo por base um conjunto de questões definidas à partida para serem administradas de forma flexível, introduzindo por vezes novas perguntas, de acordo com as respostas fornecidas pelos alunos, de modo a obter informação sobre o seu raciocínio.

Com as entrevistas pretendo conseguir elementos sobre a capacidade dos alunos para: (i) lidarem com o conceito básico de número racional; (ii) trabalharem com números racionais nas suas múltiplas representações; (iii) construírem a parte e reconstruírem a unidade e manipularem diferentes tipos de unidade; e (iv) resolverem problemas que envolvam os vários significados dos números racionais. Pretendo também compreender as estratégias que os alunos utilizam bem como as dificuldades que demonstram na resolução de problemas. São feitas duas entrevistas, uma inicial (Anexo 12), após o teste diagnóstico e uma no final do estudo (Anexo 13).

Testes. O teste diagnóstico (Anexo 14) tem como objectivo diagnosticar e verificar as concepções dos alunos sobre o conceito de número racional e os conhecimentos formais e informais que os eles já têm sobre representações, ordenação e comparação de número racional. Este teste é elaborado de forma a incluir diferentes representações de número racional – fracção, decimal, percentagem, pictórica e verbal – e diversos significados do número racional – parte-todo, razão, quociente, medida e operador – bem como quantidades contínuas e discretas. Pelo seu lado, o teste final (Anexo 15), tem por objectivo avaliar e verificar as aprendizagens dos alunos adquiridas durante a experiência de ensino. Este teste é elaborado em conformidade com o primeiro, ou seja, segue a mesma estrutura e tem questões um pouco mais complexas.

Registos de observação. A observação tem como objectivo compreender as aprendizagens bem como as dificuldades que se manifestam durante a realização das tarefas pelos alunos, procurando desta forma perceber como estes estruturam o seu pensamento e inter-relacionam as suas aprendizagens. Como formas de registo da observação utilizo o diário de bordo, onde registo a forma como os alunos aderiram às tarefas, bem como o modo como decorre a aula, permitindo-me reestruturar e adequar o processo de implementação da unidade de ensino. O diário de bordo constitui o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Para além do registo em diário de bordo (Anexo 16), efectuo também gravações vídeo e áudio das aulas da experiência de ensino, com o fim de captar aspectos que poderiam passar despercebidos em virtude da minha atenção como professora não poder estar focada unicamente num determinado grupo de trabalho, mas ter de acompanhar o trabalho de toda a turma.

Análise documental. Pretendo também analisar os trabalhos escritos realizados pelos alunos nas diversas tarefas do estudo, como forma de obter mais elementos para compreender os processos e as estratégias que eles utilizam, os erros que cometem e as dificuldades que revelam.

Assim, as entrevistas e os testes são o principal método de recolha de dados e têm como objectivo verificar quais as aprendizagens realizadas pelos alunos, enquanto os restantes processos de recolha de dados têm a dupla função de ajudar a perceber melhor as aprendizagens realizadas e de contribuir para perceber os efeitos da unidade de ensino nas aprendizagens dos alunos.

Fases da recolha de dados. Este projecto tem quatro fases principais. A primeira tem como objectivo realizar o diagnóstico que serve de base à elaboração da unidade de ensino, este diagnóstico realiza-se durante uma aula em que os alunos resolvem em grupo tarefas sobre noção, representação, ordenação, comparação e equivalência de números racionais representados de diferentes formas e por fim, discutem em grande grupo essas mesmas tarefas. A segunda fase é constituída por um pré-teste (diagnóstico) e uma primeira entrevista. A terceira corresponde à realização da experiência de ensino. E, finalmente, a última fase é constituída por um pós-teste (avaliação das aprendizagens) e uma segunda entrevista. Os instrumentos de recolha de dados são: (i) entrevistas, uma inicial e uma final; (ii) testes escritos, um no início e outro no fim; (iii) os trabalhos realizados pelos alunos nas aulas; e (iv) gravações vídeo das aulas. As entrevistas têm como objectivo responder directamente às questões do estudo no que se refere às aprendizagens realizadas, o teste escrito tem uma função diagnóstica e avaliativa da aprendizagem dos alunos e a análise dos registos de observação e dos trabalhos dos alunos serve principalmente para uma melhor organização dos dados e uma reflexão mais aprofundada sobre a importância da unidade de ensino nas aprendizagens dos alunos.

Quadro 3 – Fases da recolha de dados

Aula de Diagnóstico	Pré-teste	1.ª Entrevista	Realização da Unidade de ensino	Pós-teste	2.ª Entrevista
24/11/2009	7/1/2010	11/1/2010	19/1/2010 a 23/2/2010	17/02/2010	19/02/2010
Gravação em vídeo e áudio Produções escritas dos alunos	Produções escritas dos alunos	Gravação em vídeo e áudio	Gravação em vídeo e áudio Diário de bordo Produções escritas dos alunos	Produções escritas dos alunos	Gravação em vídeo e áudio

4.5. Análise de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais acumulados com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. Estes autores acrescentam ainda que a análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.

O processo de recolha de dados gerou um enorme volume de informação que senti necessidade de organizar. Devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, e uma vez que não existiam hipóteses formuladas, procedi à sua análise de modo indutivo. Procedi à transcrição integral das gravações vídeo das entrevistas, procurando uma categorização que me permitisse responder às questões do estudo. Tendo em conta a revisão da literatura e os objectivos do estudo considerei as seguintes categorias de análise: (i) dificuldades e erros mais significativos que os alunos cometem na utilização das várias representações de número racional (decimal, pictórica, fracção e percentagem); (ii) estratégias e dificuldades reveladas pelos alunos na construção de partes e na reconstrução da unidade, utilizando diferentes representações; e (iii) estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos na comparação e ordenação de números racionais e na equivalência de fracções. Esta categorização foi utilizada tanto na análise do percurso da turma, como na elaboração do estudo de caso de Leonor.

Capítulo 5

O Trabalho da Turma

5.1. Estrutura das aulas

A turma do 5.º ano de escolaridade deste estudo é constituída por 22 alunos, 9 raparigas e 13 rapazes. Na aula de Matemática os alunos são bastante participativos e têm um papel muito activo. Desde o início do ano lectivo trabalham geralmente aos pares. Deste modo, os dados que apresento nesta secção geralmente são elaboradas por dois alunos e resultam da troca de ideias entre ambos, excepto a primeira tarefa que foi realizada em grupo. Em cada aula distribuo a tarefa a realizar e indico o trabalho a desenvolver. Nas situações em que os alunos revelaram mais dificuldade começamos com a interpretação do enunciado da tarefa e, a partir daí, os alunos desenvolvem o seu trabalho. Durante a aula vou acompanhando a actividade de cada par e tirando as dúvidas que vão surgindo. No final de um conjunto de tarefas, fazemos a sua discussão. Geralmente, os alunos trabalham cerca de 40/45 minutos nas tarefas e depois, no tempo restante, fazemos a sua discussão. Foi minha preocupação que as tarefas fossem discutidas no dia em que eram feitas, enquanto os alunos ainda têm memória do seu trabalho, para que a discussão fosse mais rica, já que os alunos ainda não conseguem fazer registos muito elaborados sobre as suas resoluções. Usualmente, um par apresenta as suas conclusões aos colegas, explicando o que fez e esclarecendo eventuais dúvidas, caso existam. Seguidamente, os outros pares apresentam estratégias ou conclusões diferentes que tenham obtido.

Ao longo da unidade de ensino surgiram muitas situações de aprendizagem e de partilha de conhecimentos, pelo que não apresento aqui uma descrição exaustiva de todos os momentos vividos nas aulas. Apresento apenas situações que levaram a novos conhecimentos ou episódios especialmente marcantes no desenvolvimento do sentido de número racional, ou questões que se revelam fundamentais para a compreensão das diferentes representações de número racional, da comparação e ordenação de números racionais e equivalência de fracções. Começo por fazer uma apresentação do trabalho da aula e dos momentos que se destacaram na realização e discussão das tarefas. Apresento ainda um episódio de cada aula, escolhido pela sua pertinência na aprendizagem dos alunos, fazendo uma reflexão/análise desse episódio.

A unidade de ensino foi realizada em 12 aulas de 90 minutos (2 aulas foram dedicadas à realização dos testes), essencialmente nas aulas de Matemática, mas em algumas situações pontuais também foram utilizadas as aulas de Estudo Acompanhado. A unidade é constituída por um conjunto de sete fichas de trabalho, construídas com base no diagnóstico relatado no Anexo 1, no pré-teste e nas entrevistas.

Quadro 4 – Aplicação das fichas de trabalho

Aula	Data	Tarefas realizadas
1.ª	7 de Janeiro	Teste diagnóstico
2.ª	19 de Janeiro	Ficha de Trabalho 1 - realização e discussão.
3.ª	21 de Janeiro	Ficha de Trabalho 2 – discussão das pág. 1 e 2.
4.ª	26 de Janeiro	Conclusão da Ficha de Trabalho 2.
5.ª	2 de Fevereiro	Ficha de Trabalho 3.
6.ª	3 de Fevereiro	Discussão da última Tarefa da Ficha 3 e realização da Ficha de Trabalho 4, com discussão da primeira parte.
7.ª	4 de Fevereiro	Conclusão da Ficha de Trabalho 4 e discussão das tarefas.
8.ª	9 de Fevereiro	Realização da Ficha de Trabalho 5 até à Tarefa 3 e respectiva discussão
9.ª	11 de Fevereiro	Conclusão da realização e discussão da Ficha 5.
10.ª	23 de Fevereiro	Ficha de Trabalho 6.
11.ª	24 de Fevereiro	Ficha de Trabalho 7.
12.ª	25 de Fevereiro	Pós-Teste

5.2. A realização das fichas de trabalho

5.2.1. Ficha de Trabalho 1

A primeira aula desta unidade de ensino realizou-se no dia 19 de Janeiro de 2010, tendo como principal objectivo introduzir a linguagem associada aos números racionais nas suas diferentes representações e significados. Nesta aula surgem já algumas questões envolvendo comparação de números racionais, tendo por base a Ficha de Trabalho 1 "Dobras e Mais Dobras" (Anexo 3).

O trabalho em sala de aula foi realizado em grupo, foram formados 5 grupos de trabalho com aproximadamente 4/5 alunos por grupo. Os enunciados das questões foram entregues individualmente. Primeiro entreguei as questões 1 e 2, dei cerca de 30 minutos para a sua resolução, após o que realizámos a respectiva discussão em cerca de 25 minutos. Seguidamente, entreguei o enunciado da questão 3, dei cerca de 20 minutos para a sua resolução e fizemos a discussão colectiva dessa mesma questão. Deste modo, a tarefa foi realizada num bloco de 90 minutos, embora tenha sido necessário utilizar mais um tempo da aula de Estudo Acompanhado para fazer a síntese das conclusões da discussão colectiva. A tarefa é assim composta por três questões que apresento de seguida, tendo dado origem a alguns momentos significativos da discussão colectiva.

Questão 1. Nesta questão é dado o "todo", que é a tira de papel, e é pedido aos alunos que representem 3 partes diferentes dessa tira. É uma situação contextualizada, utilizando grandezas contínuas; envolve o significado parte-todo, a informação é dada na representação pictórica e a resposta podia ser dada nas representações: verbal, decimal, fracção ou percentagem.

Os alunos mostram alguma dificuldade na interpretação do enunciado das questões, pelo que a realização de cada uma foi antecedida por um momento de interpretação dos termos/conceitos relativos ao que devia ser feito. Na primeira questão foi inclusivamente necessário recorrer a um exemplo e optei por realizar a representação da primeira tira em grande grupo. Desenho a tira no quadro, representando pictoricamente também a parte da tira a considerar, de seguida peço aos alunos que digam que parte da tira está pintada. A primeira representação utilizada é a verbal e muitos alunos dizem que está pintada a metade da tira. Depois continuo a insistir noutra forma de representar aquela parte e a partir da representação verbal "metade", alguns alunos conseguem chegar à representação decimal 0,5. Continuo a insistir e dois alunos da turma indicam a fracção "um de dois". Finalmente, como os alunos não se lembram da percentagem, eu pergunto: "e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?" Aqui os alunos não mostram muita dificuldade e a maior parte da turma diz que é 50%. Depois desta discussão/negociação colectiva de uma parte da primeira questão, os alunos continuam o seu trabalho nos grupos com mais entusiasmo e confiança.

No início da discussão colectiva, para apoiar a participação dos alunos, peço-lhes que afixem, no quadro, o trabalho realizado em cada grupo. De seguida peço ao primeiro grupo que apresente o seu trabalho à turma:

Professora: Sim, vens explicar aquilo que o teu grupo fez.

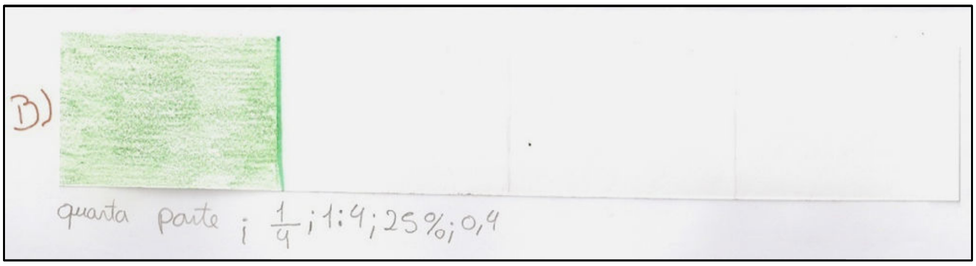
Diana: …

Professora: Alto, mais alto para os outros ouvirem.

Diana: Na figura B escrevemos: quarta-parte; 1 por 4 ($\frac{1}{4}$); 1 a dividir por 4; 25% e 0,4.

Professora: Estiveram com atenção? Concordam com aquilo que a Diana Disse?

Turma: Sim…



Carolina, Diana e Filipe, Q1-FT1

Os alunos não têm as suas resoluções para comparar, pois estão todas no quadro. Como não estão concentrados, nem se apercebem do erro da colega ao referir que o número decimal que representa esta situação é 0,4. Como nenhum aluno repara no erro, prosseguimos para a apresentação dos outros grupos. De seguida peço a Tiago que venha apresentar o trabalho desenvolvido pelo seu grupo:

Tiago: Então nós temos: quarta-parte; um sobre quatro ($\frac{1}{4}$); um a dividir por quatro; 25% e 0,25.

Professora: (…) Concordas Diana?

Diana: Sim…?

Turma: Não! Está mal…

Professora: O que é que está mal?

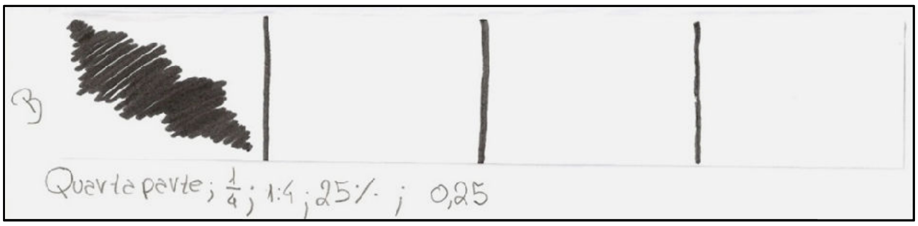
Rui: É o 0,25…

Professora: Porquê?

Rui: Porque é a quarta-parte.

Daniel: É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.

André: Oh professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta-parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

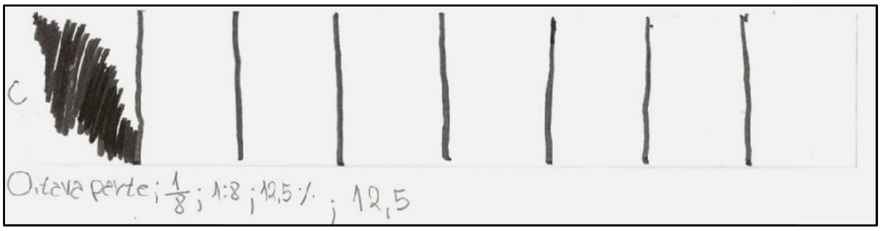


Leonor, Rui, Henrique e Tiago, Q1-FT1

Nos 6 grupos existentes na turma apenas o primeiro comete este erro, transferindo para o número decimal o denominador da fracção. Aparentemente, os restantes grupos chegam ao numeral decimal por comparação com o anterior e com 100%.

Na terceira tira, todos os grupos usam correctamente a representação verbal, a fracção, o quociente e a percentagem. Contudo, em geral, toda a turma mostra dificuldades na representação em numeral decimal. Essencialmente, verificaram-se dois tipos de erro distintos. Um, como vimos, surgiu no grupo de Diana que constrói o numeral decimal à custa do denominador da fracção.

Outro erro, cometido por alguns grupos, tem origem na dificuldade em determinar a metade de 0,25. Os alunos começam por determinar metade de 25 % e conseguem obter 12,5, só que depois, mostram dificuldade em fazer a metade de 0,25. Os alunos sabem que $\frac{1}{4}$ é 0,25, mas ao fazerem a metade de 0,25 enganam-se e obtêm 1,25. Este resultado leva-os a entrar em contradição porque acham que este resultado não faz sentido já que a metade de 0,25 deve ser um número menor e 1,25 é maior. Os alunos mostram dificuldade na compreensão do sistema de numeração decimal, não se lembram de acrescentar logo um zero para ficarem com 0,250 e a partir daí chegarem a 0,125.



Leonor, Rui, Henrique e Tiago, Q1-FT1

Contudo, durante a discussão da tarefa os alunos conseguem chegar à resposta correcta:

Daniel: É 12,5 % porque a c é metade da b.

Professora: Se o b era 25%, o c é…

Daniel: É a metade que é 12

Professora: É 12%?

Luís: Não professora é 12,5%. Porque 12,5+12,5 é 25.

Professora: Então e o decimal, como é que fica?

Tiago: É 0,125.

(…)

André: Pois é 0,125.

Professora: Porquê?

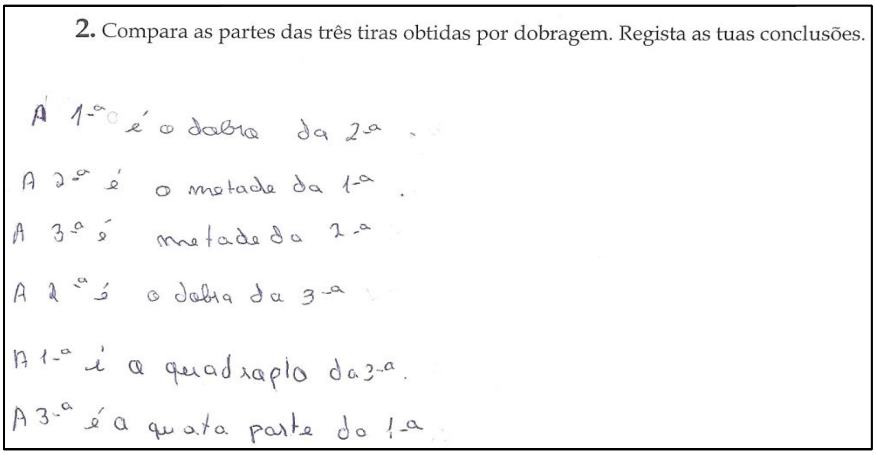
André: É 0,125 porque 0,125x8 é que dá uma unidade inteira.

É Tiago quem chega à resposta correcta, mas depois é André que a justifica estabelecendo a relação com a unidade.

Questão 2. Nesta questão é pedido aos alunos que relacionem entre si as três partes obtidas na questão 1. É uma situação contextualizada, nos significados parte-todo e medida, com grandezas contínuas. A informação é dada na representação pictórica. Na resposta não é pedida uma representação específica, sendo que, os alunos podem utilizar qualquer representação de número racional, contudo, é expectável que os alunos usem as representações obtidas na primeira questão para estabelecerem as relações pedidas.

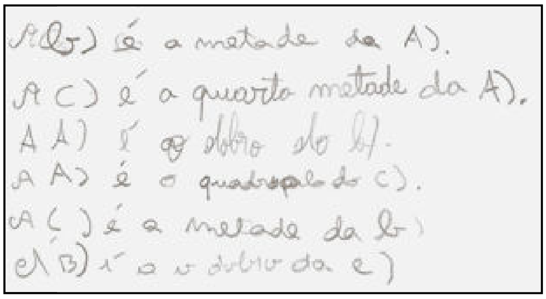
A resolução desta questão também foi precedida por uma negociação do trabalho a desenvolver, pois os alunos mostram dificuldade em compreender o que é "fazer relações", comparar as partes obtidas. Para esta negociação pego nas duas primeiras tiras ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$) e peço aos alunos que as comparem. Alguns alunos concluem visualmente que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$ e este foi então o mote para se dar início ao trabalho nos grupos.

Todos os grupos conseguem estabelecer algumas relações entre as partes e só alguns conseguem comparar todas as tiras, mas todos os grupos usam apenas a linguagem verbal para exprimirem essas relações:


2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

A 1.ª é o dobra da 2.ª.
A 2.ª é o metade da 1.ª.
A 3.ª é metade da 2.ª
A 2.ª é o dobra da 3.ª
A 1.ª é a quadraplo da 3.ª.
A 3.ª é a quata parte da 1.ª

ariana, Elsa, Alexandre e Leonardo, Q2-FT1


A(B) é a metade da A).
A C) é a quarta metade da A).
A A) é o dobro do B).
A A) é o quadrupolo do C).
A C) é a metade da B)
A B) é o dobro da C)

André, Francisco, Rodrigo e Miguel, Q2-FT1

Na discussão desta questão peço a cada grupo que diga uma das relações que encontrou. Como os alunos só conseguem usar a representação verbal, eu, durante a discussão, peço que completem com a linguagem matemática:

Daniel: A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.

Professora: Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?

André: Dividir por 2.

Rui: Um de quatro é igual a metade a dividir por 2.

André: A b é o dobro da c.

Professora: Como é que eu escrevo isso?

André: Um de quatro é o dobro.

Professora: Como é que é o dobro?

André: Duas vezes…

Professora: Duas vezes o quê?

André: Um traço oito.

Professora: Um oitavo. Um quarto é o dobro de um oitavo.

Alexandre: O primeiro é o dobro do segundo.

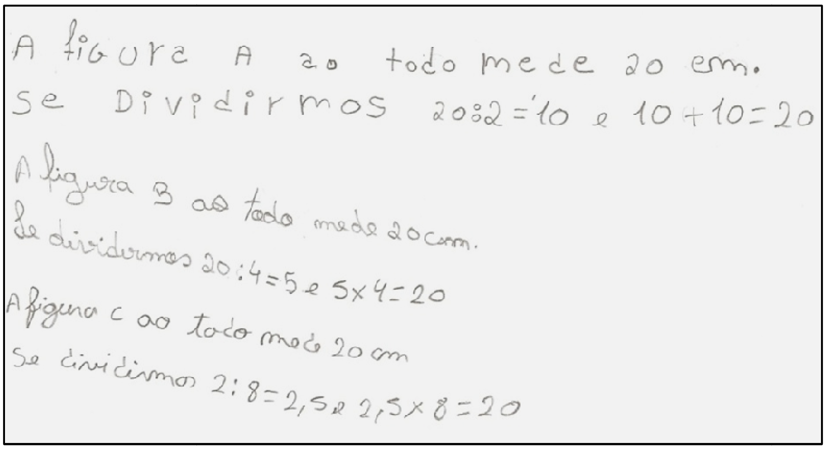
Professora: Como é que eu escrevo isso?

Alexandre: Um meio é o dobro de… Um sobre quatro.

Os alunos conseguem encontrar as principais relações existentes entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Contudo, exprimem essas relações em linguagem verbal e mostram grandes dificuldades em representá-las utilizando a linguagem matemática. Esta foi a primeira aula de ensino formal deste tópico, pelo que, é natural que os alunos ainda tenham bastantes dificuldades com a linguagem própria das fracções.

Questão 3. Na última questão é pedido aos alunos que determinem a razão entre o comprimento da tira e o comprimento de cada uma das partes obtidas por dobragem. Esta questão é contextualizada, com grandezas contínuas, no significado razão. A informação é dada na representação pictórica e a resposta pode ser dada sob a forma de fracção ou em linguagem verbal.

Esta questão tem como objectivo desenvolver nos alunos a compreensão de número racional como razão. Para facilitar a resolução e tendo em conta que esta é a primeira aula sobre o tema, decidi definir um número "simpático" para a medida da tira, 20 cm. Os alunos apoiam-se nas relações entre as partes da tira, discutidas na questão anterior para "descobrirem" o comprimento da parte:


A figura A ao todo mede 20 cm.
Se Dividirmos 20:2=10 e 10+10=20
A figura B ao todo mede 20cm.
Se dividirmos 20:4=5 e 5x4=20
A figura C ao todo mede 20 cm
Se dividirmos 2:8=2,5 e 2,5x8=20

Carolina, Diana e Filipe, Q3-FT1

Apesar de conseguirem estabelecer uma relação entre o comprimento total das tiras e o comprimento das partes, os alunos, não conseguem chegar à representação simbólica da razão, ficando ainda pela linguagem verbal, como podemos ver no seguinte diálogo:

> **Professora:** Então vamos ver que a que conclusões chegaram? Que relação encontraram entre o comprimento da tira e o comprimento da primeira parte?
>
> **Luís:** A metade mede 10 cm. Ou seja, se a tira mede 20, a metade é 10. Que é 20 a dividir por 2.
>
> **Professora:** Então qual é a relação entre o comprimento da parte e do todo?
>
> **Vários alunos:** É a metade.

Balanço. Durante a realização da tarefa que integrava esta ficha de trabalho procurei tirar dúvidas e ter a noção do trabalho que estava a ser realizado nos diversos grupos, mantendo-me atenta às descobertas realizadas. Na resolução da tarefa os alunos utilizam a metade como âncora para relacionarem as diferentes partes da tira, mostrando perceber o padrão utilizado, em que o valor seguinte é sempre a metade do anterior e utilizam esse conhecimento para chegar às representações seguintes, sem terem de partir sempre da unidade. Utilizam essencialmente estratégias de visualização que são reforçadas pela utilização do material manipulável. Além disso, concluem que à medida que aumentamos o número de partes, estas vão ficando cada vez menores. Estabelecem um conjunto de relações multiplicativas entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ importantes para o desenvolvimento do sentido de número racional.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram: (i) compreender o enunciado das questões, mais especificamente compreender o que era "representar" e como "estabelecer relações"; (ii) saber como obter a metade de 0,25; (iii) compreender a linguagem específica das fracções, pois liam $\frac{1}{4}$ como "1 sobre 4", ou "1 de 4"; e (iv) usar a linguagem matemática para representar relações entre as partes da tira de papel (utilizavam essencialmente a linguagem verbal).

5.2.2. Ficha de Trabalho 2

A Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) foi aplicada em duas aulas consecutivas (a 21-26 de Janeiro), onde os alunos trabalharam a pares. É agora objecto de atenção mais directa a comparação e ordenação de números racionais.

Um dos pressupostos desta unidade de ensino é trabalhar articuladamente todas as representações de número racional, mas não estava previsto um trabalho tão intenso com os números decimais. No entanto, foram detectadas, na turma, dificuldades na ordenação e comparação de números decimais, tanto na aula de diagnóstico realizada em Novembro, como no pré-teste e na entrevista. Houve assim, a necessidade de trabalhar mais intensamente a conceptualização dos números decimais, principalmente quando se pretende que os alunos ordenem e comparem números decimais, para o que necessitam de compreenderem as noções de décima, centésima e milésima. O uso do modelo 10x10 pode ser importante pois pode ajudar os alunos a evitar alguns erros habituais, por exemplo, na comparação entre décimas e centésimas. Um dos erros geralmente cometidos pelos alunos na comparação/ordenação de números decimais, apontado na literatura, é que os alunos consideram, por exemplo, que 0,3 é menor do que 0,16. Através das tarefas apresentadas evidencia-se a necessidade de comparar a décima com a centésima e, por consequência, a necessidade de refinamento da unidade para poder fazer essa comparação.

Esta ficha de trabalho contempla ainda, com grande intensidade, a necessidade de definir uma unidade de referência e a necessidade de diversificar essa mesma unidade. Muitas vezes, quando o ensino não tem por base as abordagens conceptuais, existe tendência para mal-entendidos, principalmente quando não existe uma alusão clara ao contexto, ao todo (por exemplo, $\frac{1}{2}$ de 16 não é o mesmo que $\frac{1}{2}$ de 18).

Na primeira aula (21 de Janeiro) os alunos realizaram em pares e discutimos as tarefas até ao final da 3.ª página. Passados os 5 minutos iniciais para organização da turma, dei sensivelmente 40 minutos para a realização das tarefas e depois tivemos mais cerca de 40 minutos para a discussão das tarefas realizadas. Na segunda aula (26 de Janeiro) foram realizadas e discutidas as restantes tarefas. Devido à dimensão da ficha de trabalho, vou apresentar apenas três questões, por considerar que exemplificam o trabalho realizado.

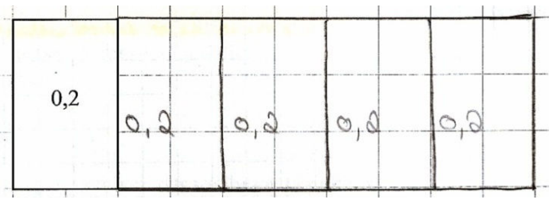
Tarefa 1. Nesta tarefa é pedido aos alunos que construam a unidade a partir das suas partes. O contexto é puramente matemático, envolvendo o significado parte-todo. A informação é apresentada na representação pictórica e a resposta é pedida na mesma representação.

Começamos por definir a forma de trabalho, e como na última aula o trabalho em grupo não foi tão produtivo como esperava, peço que trabalhem em pares de acordo com os lugares que ocupam, e cada aluno tem a sua própria ficha de trabalho e a responsabilidade de escrever nela tudo aquilo que o par discute e concluí.

Depois da distribuição da ficha de trabalho opto por não dar indicações, nem fazer a leitura colectiva do enunciado. Contudo, os alunos mostram grande falta de autonomia e de iniciativa, precipitam-se e acham sempre que não sabem ou que é muito difícil. Assim:

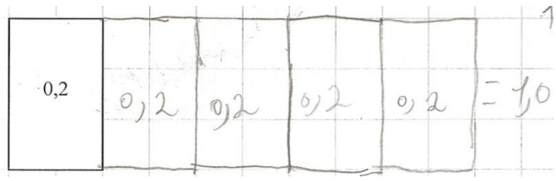
> **Luís:** Professora eu não estou a perceber o que é para fazer aqui (Tarefa 1).
>
> **Professora:** Constrói as unidades (as figuras inteiras) a partir das porções indicadas. Por exemplo, vocês têm ai na primeira figura uma décima, como é que é a figura completa? Como é que é o todo?
>
> **Luís:** É uma unidade.
>
> **Professora:** Então e o que é que eu tenho de fazer para ter uma unidade?
>
> **Leonor:** Tem de acrescentar os "quadradinhos" até fazer uma unidade.
>
> **Luís:** Ah! Então isso é fácil… Até fazer um vírgula zero!?

Após esta discussão inicial, todos os alunos da turma conseguem fazer com sucesso a reconstrução da unidade a partir das suas partes. Alguns limitam-se a duplicar as partes para construir o todo através da representação pictórica. Mas outros completam a representação pictórica com a representação decimal:



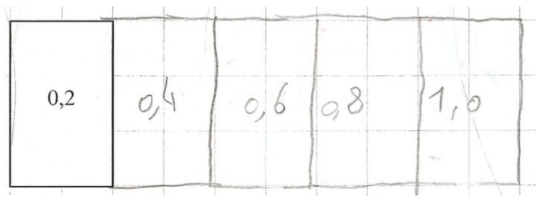
Carolina, T1-FT2

Carolina regista em cada parte o seu valor na representação decimal.



Francisco, T1-FT2

Francisco, para além de registar em cada parte o seu valor decimal, inclui ainda a alusão ao todo, referindo em cada figura que o conjunto das partes totaliza a unidade que representa por 1,0.



Miguel, T1-FT2

Já Miguel inclui também o total, mas vai apresentando totais parciais à medida que acrescenta uma nova parte à anterior.

Na discussão colectiva das conclusões dos alunos, estes explicam algumas das resoluções apresentadas:

Professora: Quanto valia a primeira parte?

Rui: Era 9.

Professora: Não só a primeira parte?

Luís: Uma décima.

Rui: E tínhamos que fazer uma unidade.

Carolina: Temos de acrescentar mais 9 décimas.

Professora: Porquê?

Carolina: Porque 9 décimas mais uma décima dá uma unidade.

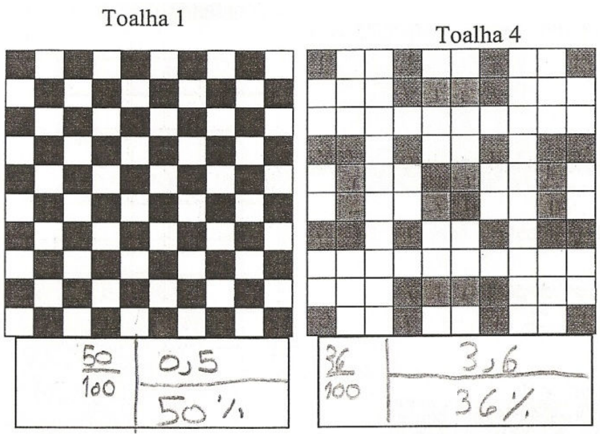
Professora: E quantas décimas fazem uma unidade?

Alunos: Dez.

Apesar das dificuldades de leitura e interpretação do enunciado, comuns a todos os alunos, a turma mostra conhecer a relação entre a décima e a unidade e consegue usá-la com sucesso. Isto parece bastante normal dado que este tema faz parte do programa de Matemática do 1.º ciclo.

Tarefa 2 - Questão 3. A questão 3 pede aos alunos que representem a parte pintada das toalhas sob a forma de numeral decimal, de percentagem e de fracção. Apresenta uma situação contextualizada no significado parte-todo envolvendo grandezas contínuas. A informação é dada na representação pictórica e a resposta é pedida na forma de numeral decimal, fracção e percentagem.

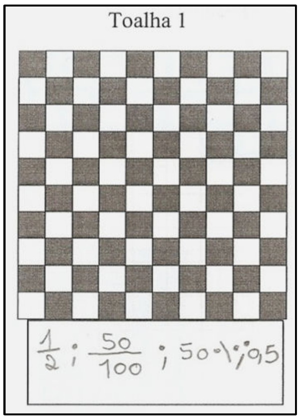
Esta questão envolve diferentes representações de número racional. Neste caso os alunos já se mostram bastante à vontade em utilizar as representações: decimal, pictórica, fracção e percentagem. De um modo geral, a turma consegue obter todas as representações, no entanto, alguns alunos ainda mostram dificuldade na conversão para numeral decimal:



Nuno, T2.Q3-FT2

Nuno usa, com sucesso, a fracção decimal de denominador cem para representar a parte colorida em todas as toalhas. No que diz respeito à representação em percentagem, o aluno também não mostra dificuldades nas toalhas 1, 3 e 4. Contudo, mostra dificuldades na representação decimal, mostrando não ter compreendido a forma correcta para converter um número racional da representação pictórica (tabela 10x10) para numeral decimal. Na primeira toalha o aluno usa correctamente o numeral decimal, talvez porque foi uma relação amplamente trabalhada nas aulas anteriores, mas nas situações novas, não tem sucesso e também não mostra estabelecer uma comparação com aquilo que fez na toalha 1.

Alguns alunos conseguem representar a primeira toalha usando duas fracções equivalentes:



Amélia, T1-FT2

Neste caso, os alunos usam a fracção que mais trabalhámos, a representação da metade $\frac{1}{2}$ e a fracção decimal.

Professora: Então que representações usaram para a primeira toalha?
Marta: A metade…
Professora: E como é que eu represento a metade?
Marta: É um tracinho dois.
Professora: um meio. Mais…
Marta: 0,5 e 50%.
Professora: Alguém tem mais alguma hipótese?
Amélia: cinquenta por cem.
[…]
Professora: Esta é uma fracção nova…($\frac{50}{100}$)
André: É a metade de 100.

Aproveitei esta relação para lhes explicar formalmente que aquilo que haviam descoberto se chamam fracções equivalentes e que $\frac{1}{2}$ é a forma mais simples (fracção irredutível) para representar a metade. Concluímos ainda que todas as fracções cujo numerador é metade do denominador, representam (são equivalentes) a metade.

Na discussão da toalha 4, André tenta perceber melhor a equivalência de fracções:

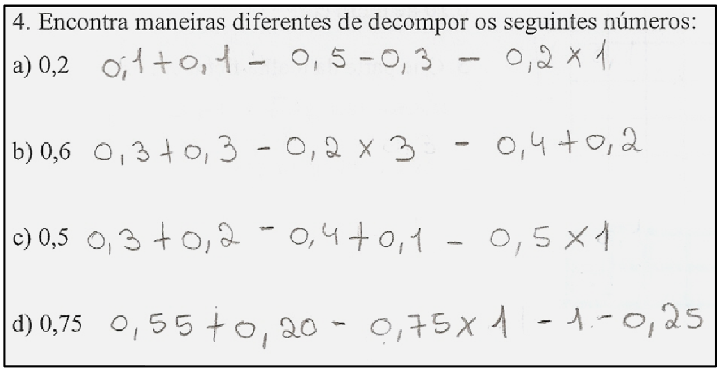
> **André:** E não há outra maneira sem ser 36 por 100?
>
> **Professora:** Sim, existem muitas outras hipóteses para representar esta fracção. Olha por exemplo se em vez do 100, eu tivesse 50, como é que ficava esta fracção?
>
> **Miguel:** 18
>
> **Leonor:** Sim, a metade.

Apesar da aparente facilidade que alguns alunos tiveram em estabelecer esta relação, a maior parte da turma mostrou bastantes dificuldades e alguns alunos não a compreenderam.

Questão 4. Nesta questão é pedido aos alunos que decomponham um conjunto de números decimais. A questão apresenta um contexto puramente matemático no significado parte-todo. A informação é dada na representação decimal e não são dadas indicações sobre a representação a utilizar nas respostas.

Com esta tarefa desejava que os alunos desenvolvessem o sentido de número racional, compreendendo o sistema de numeração decimal. Através da sua resolução os alunos descobrem padrões e regularidades no sistema de numeração e utilizam este conhecimento noutras situações. A decomposição e recomposição de números envolvem a capacidade de expressar números em formas equivalentes, o que facilita a resolução de certos problemas, nomeadamente envolvendo operações com números compostos (McIntosh et al., 1992).

Verifiquei que grande parte dos alunos utiliza a adição para decompor os números decimais apresentados. Contudo, alguns mostram um grande esforço por apresentar maior diversidade nas suas respostas:


4. Encontra maneiras diferentes de decompor os seguintes números:

a) 0,2 0,1+0,1 – 0,5–0,3 – 0,2×1

b) 0,6 0,3+0,3 – 0,2×3 – 0,4+0,2

c) 0,5 0,3+0,2 – 0,4+0,1 – 0,5×1

d) 0,75 0,55+0,20 – 0,75×1 – 1–0,25

Leonor e Amélia, T1-FT2

Estas alunas usam as operações: adição, subtracção e multiplicação para decompor os números decimais apresentados. Assim, usam as decomposições mais simples baseadas na repetição aditiva da mesma parcela, utilizam a subtracção a partir da unidade superior e um operador multiplicativo, que em algumas circunstâncias foi a unidade.

Balanço. Os alunos revelam compreender que 1 unidade é composta por 10 décimas e mostram à vontade na composição da unidade utilizando diferentes partes. Mostram facilidade na representação em percentagem usando a tabela 10x10. Com esta representação os alunos conseguem também utilizar fracções decimais e simplificá-las.

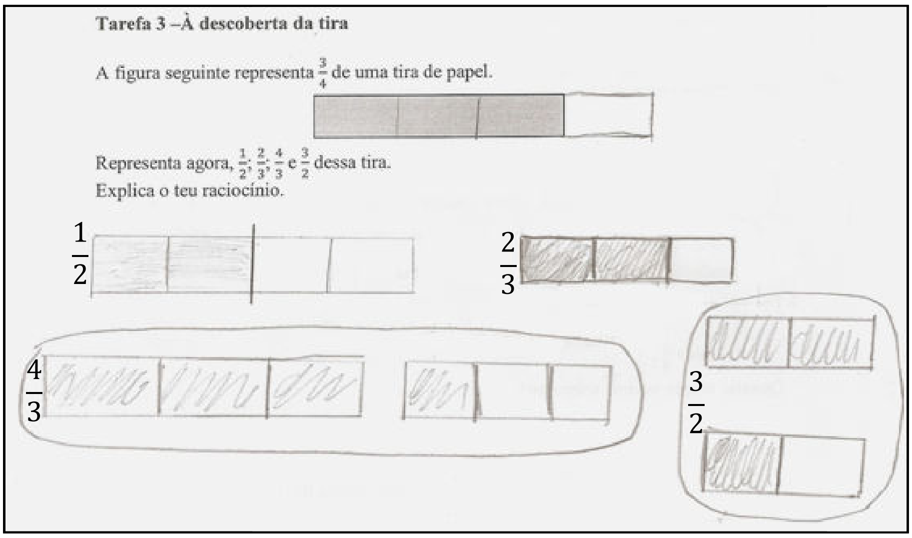
Mostram dificuldade em compreender e interpretar os enunciados das questões. Têm dificuldade em exprimir quer verbalmente, quer por escrito, as conclusões do seu trabalho. Revelam compreender que 0,5=0,50, mas depois mostram dificuldade em generalizar e aplicar este conhecimento a novas situações, o que pode significar que "decoraram" este exemplo, que será um dos mais comuns, mas não compreendem verdadeiramente esta relação.

Os alunos mostram também grande dificuldade em usar as fracções não unitárias e os decimais como operadores. Alguns usam com sucesso 0,5 e 25% como operador, porque no primeiro caso sabem que 0,5 representa a metade e por isso dividem por 2 para resolverem o problema e no segundo caso, sabem que 25% é a quarta-parte e dividem por 4. No caso do operador 0,4 a maior parte dos alunos não consegue resolver a tarefa porque não encontra nenhuma relação simples com o todo.

5.2.3. Ficha de Trabalho 3

Esta ficha de trabalho (Anexo 5) realizou-se nos dias 2 (aula de Matemática) e 3 de Fevereiro (45 minutos da aula de Estudo Acompanhado). Os alunos trabalharam a pares. Na aula de 2 de Fevereiro realizam a ficha durante cerca de 50 minutos e discutimos as resoluções dos alunos até à Tarefa 5 nos restantes 35 minutos. No segundo dia (3 de Fevereiro) foi discutida a última tarefa da ficha. Nesta ficha de trabalho são abordados os tópicos noção e representação de números racionais; comparação e ordenação.

Tarefa 3. Nesta tarefa é pedido aos alunos que, a partir de uma parte de uma tira de papel, representem pictoricamente partes menores que a unidade e agregados de partes maiores que a unidade. Esta tarefa apresenta uma situação contextualizada envolvendo grandezas contínuas nos significados parte-todo e operador. A informação é dada na representação pictórica e em fracção e a resposta é pedida na representação pictórica.



Leonor e Amélia, T3-FT3

Os alunos começam por tentar descobrir como seria a tira de papel completa:

André: Falta só um bocadinho …

Professora: Falta?

André: Dividia-se em 3, eu acho…

Professora: Isso quer dizer que ao todo temos quantas partes?

Luís: Tem 3 partes e depois divide-se esses 3 em 4.

André: Não! Este aqui divide-se em 3… E depois temos de acrescentar mais $\frac{1}{4}$.

Professora: Um todo quantos quartos tem?

André: 4.

Luís, inicialmente, mostra alguma confusão, acha que o todo tem 12 partes, porque multiplica o numerador e o denominador. Já André parece compreender que a tira não está completa, desde o início afirmava que "faltava uma parte", revela entender que se trata de uma fracção própria. Percebe também que o numerador representa as 3 partes que estão na figura e que a figura completa tem de ter um total de 4 partes.

De seguida os alunos representaram $\frac{1}{2}$ da tira:

Professora: Agora temos de representar $\frac{1}{2}$ da tira.

André: Da tira completa?

Professora: Sim.

Aluno1: Então temos de pintar 3…

Professora: Das 4 partes temos de pintar 3…

Alunos: Não temos de pintar 2.

Marta: São 2, temos que pintar a metade. É a metade.

Aluno2: Sim professora, temos de pintar só 2 de 4

Como referi que tinham de representar metade da tira completa, os alunos optaram por usar a tira já dividida em 4 partes, revelando compreender a equivalência entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

No que diz respeito à representação de $\frac{2}{3}$ da tira deu-se o seguinte diálogo:

Professora: E agora como é que representamos $\frac{2}{3}$ da tira?

André: Professora mas agora podemos partir a tira só em 3?

Amélia: Sim**,** agora partimos a tira em 3 partes e depois pintamos só 2 não é?

André: Ah! Agora fazemos outra tira não é?

Alguns alunos continuam presos à divisão em 4 partes e não conseguem representar a parte pedida. Já para Amélia isso não é um problema, pois percebe que apenas tem de manter a tira completa e depois pode fazer as divisões de acordo com aquilo que é pedido, revela ainda compreender a fracção no significado parte-todo e à vontade na conversão entre a fracção e a representação pictórica.

No que se refere às fracções impróprias, os alunos têm alguma dificuldade inicial em compreender como é que pintam mais partes do que as contidas numa unidade.

André: Oh professora $\frac{4}{3}$ é pintar a tira toda não é?

Professora: Aqui pintámos $\frac{2}{3}$ e agora vamos pintar $\frac{4}{3}$. Quantas tiras são?

Alunos: 5

André: Não, são 2. Uma pintamos toda, e a outra pintamos só um bocadinho.

Alunos: Não estou a perceber.

Professora: Então explica lá outra vez André.

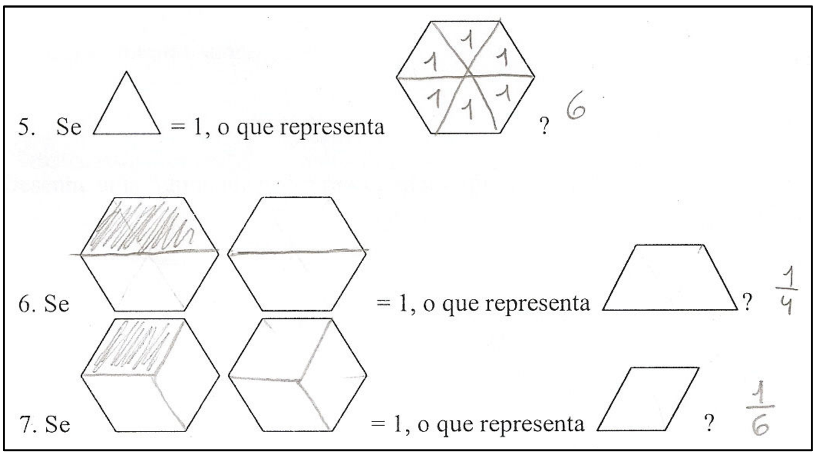
André: Então temos de fazer uma tira dividida em 3 e pintamos toda e depois ainda temos de fazer outra tira, dividimos também em 3 mas só pintamos mais um bocadinho.

André é um aluno muito empenhado e participativo, e nesta questão mostra grande compreensão da fracção como parte de um todo, explicando ainda com clareza a noção que tem do todo.

Depois desta primeira discussão envolvendo uma fracção imprópria, André faz a transferência deste conhecimento para a questão seguinte com facilidade:

André: Então professora um todo são 2 metades. Temos de fazer mais uma tira e pintar mais uma metade.

Tarefa 6. Esta tarefa tem como objectivo desenvolver nos alunos a compreensão da relação parte-todo e a compreensão que existe sempre uma unidade de referência com a qual comparamos a parte que procuramos. São dadas várias figuras que representam a unidade e é pedido aos alunos que indiquem a que parte do todo correspondem outras figuras. A tarefa tem um contexto puramente matemático no significado medida.



Amélia, T3-FT3

Esta tarefa envolve o significado medida. As questões 1, 3 e 5 apresentam unidades de medida mais pequenas do que a figura a medir e, nestas situações, os alunos não apresentaram qualquer dificuldade. Para chegarem às respostas dividem a figura a medir em figuras mais pequenas (a unidade de medida). Já nas questões 2, 4, 6 e 7, a unidade de medida é maior do que a figura a medir e aqui os alunos mostram alguma dificuldade em compreender "como é que colocamos uma figura maior dentro de uma mais pequena?". Na realização da tarefa, quando os alunos me colocam esta questão peço-lhes que pensem ao contrário, que imaginem que colocam a medida sobre a figura que querem medir e que tentem separar as figuras maiores nas figuras mais pequenas com as quais as têm de comparar. Depois destas sugestões a maior parte da turma resolve estas questões com sucesso, usando com facilidade fracções próprias e impróprias.

> **Luís:** Se as duas figuras são a unidade (refere-se à questão 6), então a figura é metade da metade de uma unidade.
>
> **Professora:** Como é que eu represento a metade da metade?
>
> **Luís:** Quatro… Quatro de um.
>
> **Professora:** 4 de um, assim (escrevo $\frac{4}{1}$)
>
> **Turma:** Não, é ao contrário, $\frac{1}{4}$.
>
> **Professora:** Luís, como é que tu achas que é?
>
> **Luís:** Não, professora eu fiz $\frac{1}{4}$, mas enganei-me.
>
> **Professora:** Carolina o que é que tu achas? É $\frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{1}$?
>
> **Carolina:** É um quarto porque essa figura só ocupava uma parte e a figura completa tinha 4.
>
> **Rui:** Podia caber 4, mas nós só temos uma ali daquele lado, por isso é só $\frac{1}{4}$.

Alguns alunos ainda continuam a fazer uma leitura errada da fracção, continuam a dizer "um de quatro", o que pode querer dizer que interiorizaram a fracção no sentido parte-todo. Já Carolina mostra compreender e conseguir usar o número racional como medida, tanto na representação pictórica como em fracção.

Balanço. Na discussão das tarefas alguns alunos conseguem comparar a fracção com a unidade, por exemplo, conseguem compreender que $\frac{3}{4}$ é menor do que a unidade pois esta é $\frac{4}{4}$, e percebem também quanto falta para completar a unidade, o que significa que usam a unidade como referência. Utilizam a representação pictórica como apoio para chegarem à fracção e conseguem relacionar as fracções com as percentagens básicas. Mostram destreza na construção da unidade e das partes nos significados parte-todo e operador com quantidades contínuas e discretas.

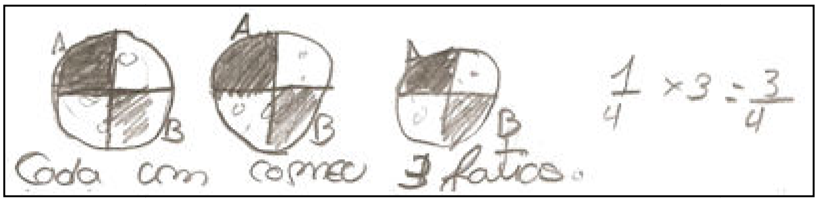
Alguns alunos continuam a mostrar dificuldade na representação em fracção, trocando a posição de numerador e denominador. Os alunos revelam conseguir usar o número racional como medida tanto na representação decimal como na representação pictórica. Mostram estranheza e alguma dificuldade em compreender fracções impróprias e, nos numerais mistos fraccionários, esqueciam-se com frequência da parte inteira considerando o número inteiro separadamente da parte fraccionária.

5.2.4. Ficha de Trabalho 4

Esta ficha de trabalho (Anexo 6) foi realizada em 45 minutos da aula de Estudo Acompanhado do dia 3 de Fevereiro e na aula de Matemática do dia seguinte. Os alunos trabalharam a pares, no primeiro dia realizaram e discutimos a tarefa 1 e no segundo dia realizaram e discutimos as restantes tarefas. Os temas abordados são a noção e representação de números racionais, a ordenação e comparação de números racionais e a equivalência de fracções, que é pela primeira vez abordada de forma explícita.

Tarefa 1 - Questão 1. Esta questão envolve o significado quociente, é uma situação contextualizada e envolve grandezas contínuas. É pedido aos alunos que partilhem equitativamente 3 pizas por 4 amigos e que depois comparem a quantidade que cabe a cada amigo com a unidade. A informação é dada verbalmente e não são dadas informações sobre a representação a utilizar nas respostas.

Os alunos mostram-se muito entusiasmados e motivados na realização desta ficha de trabalho e começaram a tentar fazer "explicações" mais completas das suas resoluções. Iniciam a realização desta questão com o desenho das 3 pizas, mas depois alguns não conseguem repartir as pizas pelos 4 amigos, nessa altura sugiro-lhes que atribuam nomes às fatias. A maioria dos alunos consegue partilhar as 3 pizas pelos 4 amigos, utilizando essencialmente a representação pictórica das pizas.



Rui, T1.Q1-FT4

Durante a discussão colectiva da tarefa mostram-se bastante confiantes na sua resolução explicando com clareza a forma como pensaram:

Leonardo: Então nós fizemos 3 pizas e dividimos…

Professora: Em quantas partes?

Leonardo: Em quatro.

Professora: E agora?

Leonardo: E depois contámos as "pizas" (partes) que cada um comeu.

Leonardo explica que começaram por "fazer" as três pizas e depois dividiram-nas em 4 partes iguais. Todos os restantes alunos da turma usaram a representação pictórica para resolverem esta tarefa. Contudo, os alunos não ficam apenas pela representação pictórica da situação, todos avançam com a representação em fracção baseada nessa representação pictórica:

Professora: E depois fizeram mais alguma coisa?

Leonardo: Sim, fizemos contas.

Professora: Que contas fizeram?

Leonardo: Fizemos um sobre quatro…

Professora: Um quarto…

Leonardo: Vezes três é igual a três quartos.

Assim, alguns apresentam a parte que cada um come como produto $\frac{1}{4}x3$, revelando aqui uma transferência de conhecimentos dos números inteiros, um conhecimento intuitivo já que os alunos não trabalharam formalmente a multiplicação entre números racionais e números inteiros:

Leonor: Nós contámos logo. Três do A, três do B…cada um comia 3 partes, então comia $\frac{3}{4}$.

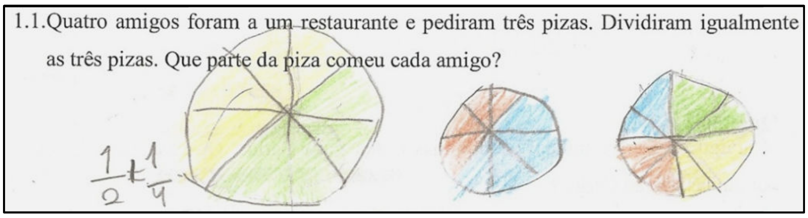
Professora: Então compreenderam logo que cada fatia correspondia ao tamanho…

Turma: um quarto.

Amélia: Oh professora, mas se cada um comia 3 partes era logo $\frac{3}{4}$.

Outros alunos, como Amélia e Leonor que trabalharam juntas durante toda a unidade de ensino, partiram directamente da figura, revelando compreender também que cada parte representa $\frac{1}{4}$ da piza e, por consequência, se cada um come 3 fatias, significa que come $\frac{3}{4}$ da piza.

Apesar de também recorrer à representação pictórica, Daniel partilhou as pizas de uma forma diferentes dos restantes colegas:



Daniel, T1.Q1-FT4

Daniel: Oh professora, eu tenho outra solução.

Professora: Sim, então diz lá a tua solução.

Daniel: Desenhamos 3 pizas e depois dividimos em 8 partes. Depois o A come a metade, depois o B também come outra metade, o C come outra metade, o D come outra metade. Depois o A come mais duas fatias, e depois é sempre assim cada um come mais duas fatias.

Vários alunos da turma: Pois é, também dava assim. Era a mesma coisa.

O aluno divide a figura em 8 partes e, se inicialmente se podia pensar que o aluno usava essa divisão em 8 partes para distribuir a piza pelos 4 amigos, isso não se veio a verificar pois o aluno consegue abstrair-se dessas mesmas divisões e usa outras equivalentes e mais simples. Daniel, começa por dizer que cada um come metade de uma piza, não utiliza a divisão em 8 partes, só usa essa divisão quando diz que na última piza cada um come mais duas fatias. Contudo, no momento seguinte, representa essas duas fatias por $\frac{1}{4}$:

Professora: Então e agora como é que eu posso representar isto?

Luís: três de quatro.

Professora: Sim… Podemos imaginar que aqui temos $\frac{2}{4}$ e aqui temos o outro quarto.

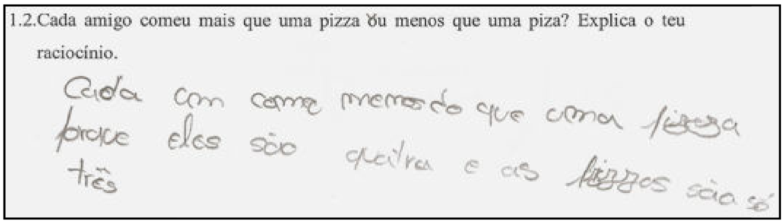
Daniel: É um por dois…

Professora: Um meio…

Daniel: Mais três quartos…não, mais um quarto.

Neste diálogo verificamos então que o aluno, apesar de usar a divisão das pizas em 8 partes, que faz sentido por ser um número múltiplo de 4, não a usa para representar a parte que coube a cada amigo em fracção, mas utiliza fracções equivalentes simplificadas. Daniel mostra alguma dificuldade na linguagem das fracções ao dizer "um por dois" para se referir a um meio, mas depois de eu o corrigir o aluno já usa a linguagem correcta para se referir a um quarto.

A questão seguinte pede aos alunos que comparem a parte que cada amigo comeu com a unidade. Alguns deles usam o conhecimento intuitivo e o sentido prático do dia-a-dia para responder à questão:

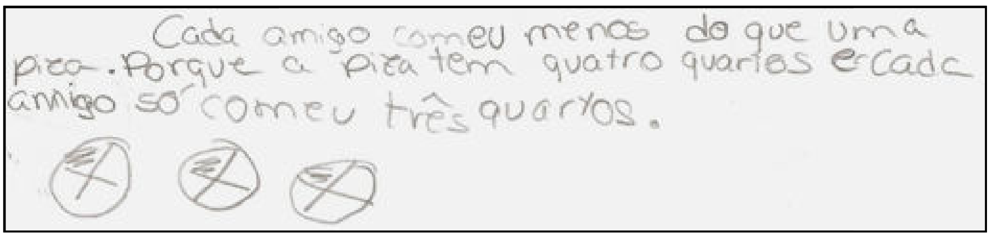

1.2.Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Cada um come menos do que uma pizza proque eles são quatra e as pizzas são só três

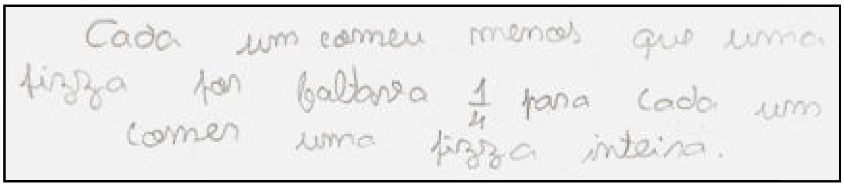
Rui, T1.Q1-FT4

Para estes alunos parece evidente que, se existem mais amigos do que pizas e se todos comem o mesmo, então não é possível que cada um coma mais do que uma piza.

Outro grupo de alunos, por seu turno, usa o conhecimento que tem sobre fracções e utiliza uma estratégia formal para comparar $\frac{3}{4}$ com a unidade:


Cada amigo comeu menos do que uma piza. Porque a piza tem quatro quartos e cada amigo só comeu três quartos.

Leonor, T1.Q1-FT4


Cada um comeu menos que uma fizza for faltara $\frac{1}{4}$ para cada um comer uma fizza inteira.

Tiago, T1.Q1-FT4

Professora: Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza?

Turma: Menos.

Professora: Menos, porquê Leonor?

Leonor: Porque eles comeram só $\frac{3}{4}$ e uma piza inteira tem $\frac{4}{4}$.

André: Oh professora e não é só isso, vê-se logo porque se há 3 pizas eles são 4 não dá para comerem mais do que uma unidade

Estes alunos comparam o todo e a parte, ou seja percebem que o todo tem 4 partes mas cada amigo só come 3 dessas partes. Podemos dizer que transformam a unidade numa fracção de numerador e denominador 4 e depois comparam apenas os numeradores.

Tarefa 1 - Questão 3. Esta questão pede aos alunos que comparem as partes obtidas em cada uma das questões anteriores ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$). É igualmente uma situação contextualizada com grandezas contínuas, mas envolvendo o significado medida.

Nas questões anteriores tivemos oportunidade de comparar fracções com denominadores iguais e esta questão envolve uma situação de comparação entre fracções com numeradores iguais e com denominadores diferentes. Na sua discussão começámos por estabelecer a relação entre o tamanho da parte que cabe a cada amigo nas duas situações ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$):

Professora: Qual a diferença entre aquilo que cada um come no primeiro caso e no segundo caso? O que é que se alterou?

Amélia: Foi que ficou partido em mais partes.

Professora: E o que é que aconteceu a cada parte?

Alunos: Ficou mais pequenino. Ficou a metade.

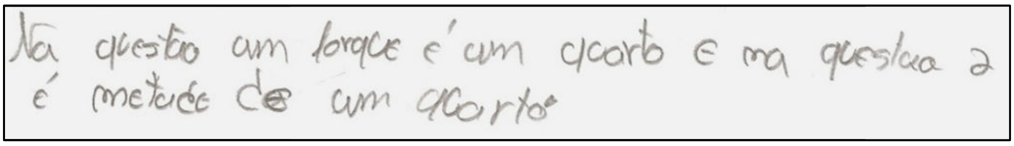
Leonor: Pois é $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$!

Professora: Quer dizer que cada um passou a comer que parte daquilo que comiam no primeiro caso?

Alunos: A metade.

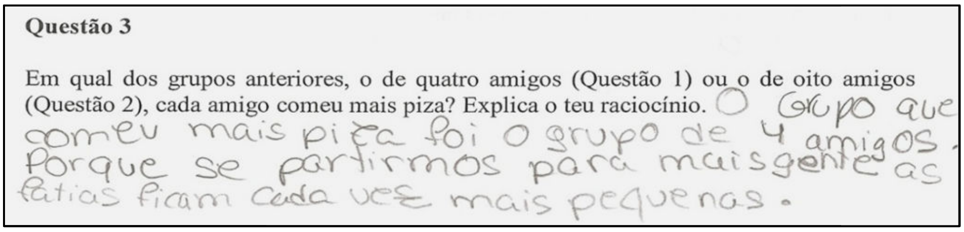
Professora: Pois porque nós duplicámos o número de amigos, logo cada um teve de partilhar cada fatia com outro.

Os alunos, através das perguntas que lhes faço, referem que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$, porque segundo a sua justificação, cada parte passa a ser metade da anterior. Verifica-se que esta situação apresenta um contexto significativo para os alunos, porque se tentássemos por meios abstractos dizer aos alunos que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$ seria certamente complicado. Assim os próprios alunos tiveram oportunidade para deduzir isso através de uma situação familiar e lógica. Eles também já tinham chegado a esta mesma conclusão nas suas respostas como podemos ver no seguinte exemplo:


Na questão um porque é um quarto e na questão 2 é metade de um quarto

Rui, T1.Q3-FT4

Por outro lado, alguns alunos continuam a utilizar a lógica da situação para fazer a comparação entre as duas fracções:


Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio. O grupo que comeu mais piza foi o grupo de 4 amigos. Porque se partirmos para mais gente as fatias ficam cada vez mais pequenas.

Leonor, T1.Q1-FT4

Professora: Em qual dos grupos anteriores, cada amigo comeu mais piza?

Nuno: Eu acho que foi na questão 1, porque na dois tínhamos que dividir as pizas para 8 pessoas e na 1 só tínhamos 4 pessoas.

André: Pois tínhamos menos pessoas para distribuir.

Professora: E a quantidade de piza é sempre a mesma, não é?

Amélia e Leonor: Pois nós também pensámos assim, só que dissemos que as fatias assim ficavam cada vez mais pequeninas.

Amélia: Podemos concluir que comem o mesmo número de fatias, mas como partimos por menos pessoas (na questão 1) as fatias são maiores.

Os alunos não recorrem a estratégias formais para comparar as fracções, utilizam antes o conhecimento informal e prático que têm da partilha, referindo que $\frac{3}{8}$ é mais pequeno do que $\frac{3}{4}$ porque se distribui a mesma piza por mais pessoas e por isso as fatias são menores. Posteriormente, aproveito ainda para transportar o conhecimento que os alunos tinham construído da relação entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$ para outra representação, a percentagem:

Professora: Então e o $\frac{3}{4}$ em percentagem seria quanto?

Leonor: 75%

Professora: E o $\frac{3}{8}$?

Aluno 1: É o dobro.

Alunos: Não, é metade. É 32%. Não é 37,5%.

[…]

Professora: Como é que concluíram que $\frac{3}{4}$ é 75%?

Leonor: Porque se $\frac{1}{4}$ é 25%, então tínhamos $\frac{1}{4}$ que é 25% + $\frac{1}{4}$ que é 25%, mais 25% e ai cheguei aos 75%

Leonor mostra grande facilidade na conversão entre as várias representações de números racionais. Mostra reconhecer que $\frac{3}{4}$ também pode ser representado por 75% e posteriormente refere que partiu da fracção base $\frac{1}{4}$ que já sabia tratar-se de 25% para construir 75% que é 3x25%.

Tarefa 2 - Questão 2. Esta questão pede aos alunos que representem $\frac{9}{12}$ através de uma fracção, podendo a situação ser representada por outras fracções equivalentes. É uma situação contextualizada, no significado parte-todo, envolvendo grandezas discretas. A informação é dada na representação verbal e a resposta é pedida em fracção.

A maioria dos alunos opta pela fracção mais simples partindo do enunciado da questão:

Professora: "O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fracção das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

Rodrigo: nove de doze

Professora: Nove doze avos?

[…]

Professora: Porquê? Porquê Filipe?

Rui: Não eu acho que é 12 de 9.

Professora: Porquê?

Rui: Porque o amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9.

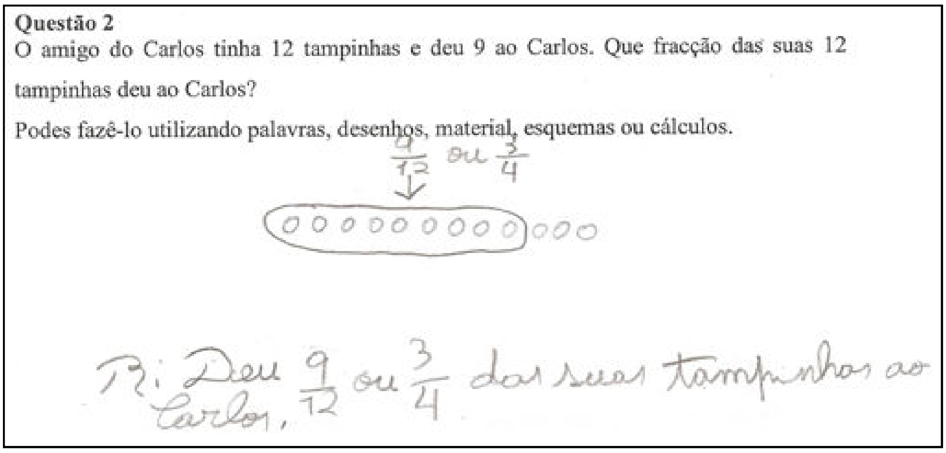
Nuno: 9 de 12. Porque ele tirou 9 das 12. Por isso é que é 9 de 12.

Professora: Então Rui como é que achas que é?

Leonor: É como se tivesses pintado nove e o total são 12.

Rodrigo começa então por dizer a sua resposta, utilizando o significado parte-todo. Rui mostra ainda alguma dificuldade na construção da fracção e baralha o numerador com o denominador. Mas Nuno e Leonor, mostram que não têm dúvidas sobre isso, explicando que tem de ser $\frac{9}{12}$, porque 9 é a parte e 12 é o "total" (todo).

Miguel é único aluno da turma que consegue ir um pouco mais além, percebendo que $\frac{9}{12}$ também pode ser representado pela fracção equivalente $\frac{3}{4}$.



Questão 2

O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fracção das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

$\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$

R: Deu $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ das suas tampinhas ao Carlos.

Miguel, T2.Q2-FT4

Miguel: Ou então podia ser 3 de 4. É o mesmo.

Professora: Então explica lá isso a quem não está a perceber.

[…]

Professora: Então agora o Miguel vai tentar explicar a sua conclusão.

Miguel: Isso ai é como se fizéssemos 3+3+3+3. Ele deu 9 e depois ainda sobraram mais 3 tampas. É como se fosse 3 de 4.

Professora: Então isto (3 tampinhas) representa que parte do todo?

Turma: A quarta parte.

Leonor: Sim, é como se fosse 3 tampinhas $\frac{1}{4}$, 6 tampinhas $\frac{2}{4}$ …

Professora: Isto tudo (9 tampinhas) $\frac{3}{4}$.

Leonor: O que ele deu, as nove tampinhas, representam $\frac{3}{4}$.

Professora: $\frac{3}{4}$ das …

Leonor: Das 12 tampinhas.

Miguel é um aluno pouco comunicativo e mostra bastante dificuldade em explicar à turma a forma como pensou. Muitos colegas não compreendem o que ele lhes está a tentar explicar, mostrando dificuldades na compreensão das unidades compostas. Posteriormente, tentei desconstruir a ideia de Miguel para que os colegas compreendessem, até que Leonor compreende o que o colega tinha descoberto e começa também a tentar explicar "é como se 3 tampinhas fossem $\frac{1}{4}$", mostrando facilidade de raciocínio e compreensão dos números racionais.

Tarefa 3. Esta tarefa apresenta um contexto puramente matemático, no significado medida. Pede-se aos alunos que ordenem um conjunto de quatro números representados de diferentes formas: fracção, decimal e percentagem.

A ordenação de números racionais é sempre uma questão problemática, onde os alunos revelam algumas dificuldades. Miguel revela alguma confusão na ordenação de 26% e 0,267:

Miguel: O primeiro é 1 de 4.

Professora: Porquê?

Miguel: Porque $\frac{1}{4}$ é igual a 0,25.

Professora: Que é igual a 25%? Ok

Miguel: A seguir é o 0,267

Professora: E a seguir?

Miguel: 26%.

Professora: E a seguir?

Miguel: Sete décimos.

Leonor: Eu acho que está mal. $\frac{1}{4}$ está certo, mas o outro dava 26,7%.

Professora: Se tu fosses transformar isto em percentagem…

Leonor: Dava 26,7%.

Professora: E então concordam?

Turma: Sim

Leonor: Temos de trocar o 0,267 com o 26%.

Professora: Mas também podíamos transformar o 26% em decimal, como é que ficava?

Leonor: 0,260.

Professora: Então comparando as percentagens ou os decimais chegamos à mesma conclusão. Então e o $\frac{7}{10}$, fica ali porquê?

Aluno: É como se fosse 0,700.

Professora: E em percentagem?

Leonor: 70%.

Os alunos foram unânimes em considerar que $\frac{1}{4}$ é o número mais pequeno do conjunto apesentado e que $\frac{7}{10}$ é o maior. Contudo, Miguel considera que 0,267 é menor do que 26%. O aluno converte $\frac{1}{4}$ para decimal para poder comparar os diferentes números, o que pode indiciar que usa como estratégia a conversão de todos os números para a representação decimal. No entanto, o facto de o aluno ter dito que 0,267 é menor do que 26%, não se enquadra nas dificuldades descritas na literatura, segundos as quais os alunos teriam tendência para considerar 267 maior do que 26. Aparentemente o aluno poderá ter cometido algum erro na conversão, ou poderá não ter convertido 26% para decimal.

Leonor por seu lado, refuta a ideia do colega e parece ter grande à vontade nas conversões entre as várias representações de número racional e também no "método"/"processo" para comparar números decimais. Na sua resolução, a aluna converte o numeral decimal para percentagem e percebe que 26,7% é maior do que 26%, mas quando lhe sugiro que transforme o decimal em percentagem, apresenta logo a resposta adaptada à necessidade, ou seja, apresenta logo o reultado com três casas decimais tal como tinha 0,267.

Balanço. Os alunos utilizam o sentido intuitivo da experiência do dia-a-dia na resolução da Tarefa 1, o que lhes permite estabelecer relações mais abstratas entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$. Com base nesse sentido intuitivo, mas também revelando reconhecer as regras mais formais das fracções os alunos conseguem comparar dois números racionais com base na compreensão da realidade, atribuindo significado às aprendizagens. Talvez por se sentirem mais à vontade com a situação apresentada, o facto é que os alunos conseguem elaborar mais as suas justificações e as suas respostas.

Inicialmente os alunos mostram dificuldades na realização da partilha das 3 pizas pelos 4 amigos, não conseguem encontrar uma estratégia adequada, o que me parece compreensível dado que esta é a primeira vez que se trabalha formalmente a partilha equitativa. Perante esta dificuldade sugiro aos alunos que representem a situação pictoricamente e a partir daqui quase todos os alunos conseguem resolver a tarefa com sucesso. Nesta situação a representação pictórica é bastante importante para iniciar o trabalho dos números racionais como quociente. Todos os alunos usam a representação pictórica para encontrar a parte da piza que cada amigo come, mas nenhum usa apenas essa representação, recorrem sempre à fracção para responder às questões, apesar de não serem dadas indicações sobre a representação a usar na resposta. Esta situação talvez possa indicar que os alunos não encaram a representação pictórica como forma de resposta, sentindo necessidade de utilizar os "números" e as "contas".

Na Tarefa 2, envolvendo a utilização da fracção como operador, os alunos mostram algumas dificuldades. O total de objectos discretos coincide com o denominador do operador, o que faz com que os alunos construam as fracções no significado parte-todo e não no significado operador. Apenas um aluno consegue agrupar as tampinhas em unidades compostas, todos os outros utilizam as unidades simples do enunciado.

No que concerne à ordenação de números racionais, a maior parte dos alunos mostra compreender e dominar uma estratégia para comparar números racionais com diferentes quantidades de casas decimais. Contudo, outros alunos ainda continuam a errar na ordenação de números racionais. Verifica-se também que os alunos já conseguem converter com facilidade os números racionais nas suas diferentes representações e também que conseguem escolher aquelas que mais lhes facilitam a resolução.

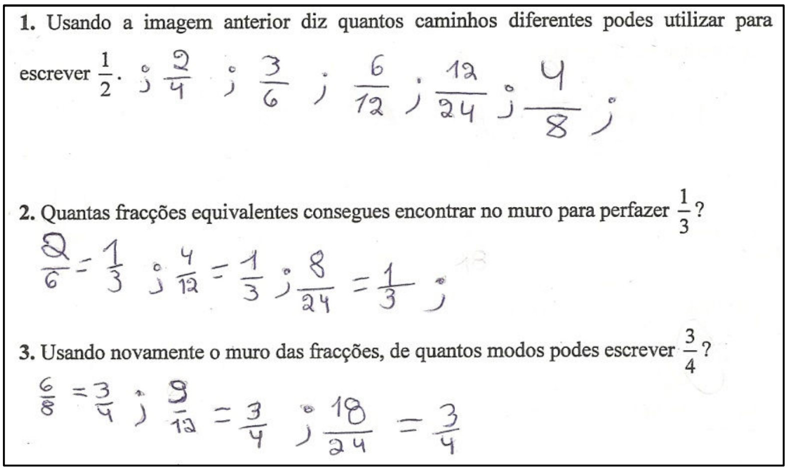
Nesta ficha de trabalho, verifica-se ainda que os alunos utilizam de forma intuitiva e correcta, a adição de fracções com o mesmo denominador e a multiplicação de um número inteiro por uma fracção.

5.2.5. Ficha de Trabalho 5

A Ficha de Trabalho 5 (Anexo 7) foi realizada nos dias 9 e 11 de Fevereiro de 2010. Os alunos trabalharam a pares, no primeiro dia fizeram e discutimos até à Tarefa 3 e no segundo dia realizaram e discutimos as restantes tarefas. Esta ficha aborda os subtópicos noção e representação de números racionais, comparação e ordenação e equivalência de fracções.

Tarefa 1. A tarefa 1 tem como objectivo desenvolver a compreensão da equivalência de fracções com base no "muro das fracções". Esta tarefa pede aos alunos que apresentem fracções equivalentes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$. O contexto da tarefa é puramente matemático no significado parte-todo.

Nesta tarefa os alunos apresentam alguma dificuldade em compreender o que lhes é pedido e como podem encontrar caminhos diferentes para escrever uma determinada fracção. Existe necessidade de negociar a forma como devem usar o muro e o que quer dizer "outra forma de escrever …". Depois desta negociação inicial, os alunos conseguem encontrar todas as hipóteses que existentes no muro, mas não vão além disso:



1. Usando a imagem anterior diz quantos caminhos diferentes podes utilizar para escrever $\frac{1}{2}$. ; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{12}{24}$; $\frac{4}{8}$;

2. Quantas fracções equivalentes consegues encontrar no muro para perfazer $\frac{1}{3}$?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$;

3. Usando novamente o muro das fracções, de quantos modos podes escrever $\frac{3}{4}$?

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

Nuno, T1.Q1-FT5

Professora: O que é que são estas fracções que estão no quadro?

Alunos: São fracções que representam a metade.

Professora: Sim são todas fracções que representam a metade e por isso são todas fracções …

Miguel: Equivalentes.

Os alunos revelam compreender que as fracções encontradas são equivalentes à inicial. No final da discussão colectiva, Rui tenta dar outras hipóteses que não estão no muro, indiciando ter compreendido uma estratégia para determinar fracções equivalentes a um meio:

Rui: Então mas ainda podia ser 5 de 10.

Professora: Sim é verdade, esta opção não estava representada no muro das fracções mas também é uma hipótese. Então como é que nós podemos identificar uma fracção que represente a metade?… Sempre que o numerador é o quê do denominador?

Leonor: é a metade.

Rui: Oh stôra, por exemplo se nós temos 24 fazemos vezes 2 que dá 48, isso dá?

Leonor e Rui conseguem então perceber que qualquer fracção cujo numerador seja metade do denominador representa a metade. Tiago consegue ainda encontrar uma relação semelhante para indicar fracções equivalentes a $\frac{1}{3}$, e refere que "o denominador é 3 vezes o numerador" e dá o seguinte exemplo:

Tiago: $\frac{3}{9}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$ porque 3x3 é igual a 9.

Desta relação a turma conclui que todas as fracções cujo denominador é o triplo do numerador, são equivalentes a $\frac{1}{3}$.

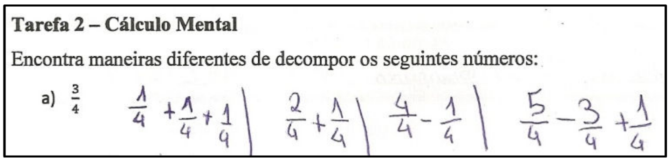
Durante a discussão colectiva percebi que Tiago estava a utilizar outra estratégia para determinar fracções equivalentes a $\frac{3}{4}$ e que não era a observação do muro das fracções. Pedi-lhe que explicasse à turma:

Tiago: Multiplicamos 3 por 3 dá 9; 4 x3 dá 12.

Para encontrar fracções equivalentes a $\frac{3}{4}$ Tiago já usa as estratégias formais, multiplicando numerador e denominador pelo mesmo número.

Tarefa 2. Nesta tarefa é pedido aos alunos que decomponham um conjunto de cinco fracções, mas não são dadas condições para a decomposição. Esta tarefa apresenta uma situação num contexto puramente matemático envolvendo o significado parte-todo.

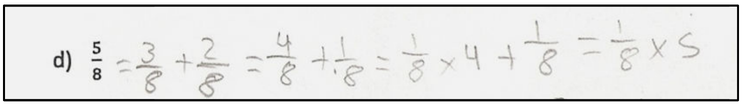
De um modo geral, a turma usa uma grande diversidade de decomposições das fracções dadas:


Tarefa 2 – Cálculo Mental

Encontra maneiras diferentes de decompor os seguintes números:

a) $\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \;|\; \frac{2}{4}+\frac{1}{4} \;|\; \frac{4}{4}-\frac{1}{4} \;|\; \frac{5}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$

Tiago, T2-FT5


d) $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}+\frac{2}{8} = \frac{4}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\times 4+\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\times 5$

Mariana, T2-FT5

Verifica-se que os alunos utilizam maioritariamente a adição de fracções com denominadores iguais. Contudo, utilizam também a subtracção de fracções com os mesmos denominadores e a multiplicação de uma fracção por um número inteiro como meio de simplificar uma adição de parcelas repetidas. Alguns alunos usam ainda expressões numéricas envolvendo as operações adição e subtracção.

Tarefa 6. É uma situação contextualizada no significado medida com uma grandeza contínua. É pedido aos alunos que comparem 3 fracções.

Leonor explica a comparação das três fracções utilizando estratégias informais:

Leonor: $\frac{3}{8}$ sabemos que é menos do que a metade, porque $\frac{4}{8}$ é que é a metade, porque 4 é metade de 8.

Professora: Então dizemos que este ($\frac{3}{8}$) é do:

Leonor: André… Não, é o Luís, é o Luís. O André diz que comeu mais do que a metade. 2,5 é metade de 5

Professora: 3 é maior do que 2,5 logo

Leonor: É mais do que a metade, esse ($\frac{3}{5}$) é do André. E o Diogo não comeu quase nada, é esse ($\frac{2}{20}$).

Neste caso, a aluna usa a metade como referência para comparar $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{5}$, encontra a metade para cada um dos denominadores e depois compara as fracções com a metade. Apesar de não explicar, parece óbvio para Leonor que $\frac{2}{20}$ é quase nada porque ela nem o inclui nas suas estratégias de comparação.

Balanço. De um modo geral os alunos conseguem atingir os objectivos definidos para esta ficha de trabalho. Determinaram fracções equivalentes a outras dadas usando a imagem visual do Muro das fracções. Conseguem encontrar uma estratégia para identificar e construir fracções equivalentes a $\frac{1}{2}$ e conseguem generalizá-la a outros exemplos. Usam correctamente estratégias formais para obter fracções equivalentes a $\frac{3}{4}$. Mostram ainda compreender de forma intuitiva a subtracção e adição de fracções com o mesmo denominador e a multiplicação de uma fracção por um número inteiro, que usam para decompor fracções.

Inicialmente usam a visualização de um exemplo concreto para obter fracções equivalente, mas gradualmente começam a afastar-se de estratégias mais informais e começam a generalizar as suas conclusões para passarem a usar estratégias mais formais, como a multiplicação do numerador e do denominador pelo mesmo número inteiro. Para comparar fracções usam essencialmente estratégias informais, como a comparação com a metade. Mas quando usam estratégias formais na comparação de números racionais, os alunos optam quase sempre pela conversão para decimal e só raramente transformam as fracções noutras equivalentes com denominadores iguais.

Os alunos mostram ainda alguma dificuldade na interpretação de enunciados verificando-se uma grande necessidade de negociação de significados. Têm dificuldade em usar uma fracção como operador quando esta não é unitária. Não compreendem ainda a densidade dos números racionais e quando lhes peço que encontrem três fracções entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$, têm dificuldade pois acham que estes números estão "seguidos".

5.2.6. Ficha de Trabalho 6

A Ficha de Trabalho 6 (Anexo 8) foi realizada no dia 23 de Fevereiro. Os alunos trabalharam durante cerca de 45 minutos em pares e no tempo restante foi realizada a discussão colectiva das tarefas. Os subtópicos abordados são: noção e representação de números racionais; comparação e ordenação; equivalência de fracções.

Tarefa 1 - Questão 2. Esta tarefa pede aos alunos que usem uma fracção como operador para determinar partes de um percurso e que comparem essas mesmas partes usando a dupla recta numérica. É uma situação contextualizada, com uma grandeza contínua no significado operador. Os dados são apresentados na representação pictórica e em fracção e no que diz respeito à resposta, não são definidas representações.

A tarefa foi realizada em grande grupo, utilizando as sugestões dos alunos, como se verifica no seguinte diálogo:

Professora: Então por onde podemos começar? Podemos tentar marcar na recta numérica a posição de cada um.

Luís: Professora pode tirar a Inês já está lá colocada.

Leonor e Amélia: sim já está lá $\frac{1}{2}$.

Professora: Ah! Não está a Inês, está $\frac{1}{2}$ do percurso marcado.

Amélia: Pode dizer que é a Inês.

Professora: Sim. Então aqui é a Inês. Então, quantos quilómetros fez a Inês?

Leonor: 4 quilómetros.

Luís consegue perceber de imediato a posição de Inês, começando por marcar aquele ponto que à partida seria o mais fácil. Neste caso podemos considerar que usam a fracção $\frac{1}{2}$ como operador. Depois André sugere que se recorra à recta numérica e que se divida o percurso em 8 partes:

Professora: Agora temos de pegar nos outros: $\frac{5}{8}$, quantos quilómetros são?

André: Oh professora eu estava a pensar podíamos dividir os 8 quilómetros em 8 partes e pintar 5.

Leonor: Eu também estava a pensar nisso.

Professora: E isso são quantos quilómetros?

André: 5 quilómetros.

Leonor: Porque podemos pensar que são 5 dos 8.

Luís: Então ele também só andou metade!

André: 5 é mais do que metade a metade de 8 é 4.

Aluno 1: Andou mais 1quilómetro.

Professora: Agora o Fernando andou $\frac{2}{8}$, quantos quilómetros?

Leonor: 2 quilómetros.

Na situação em que o denominador das fracções é igual ao número de quilómetros do percurso os alunos usam o conhecimento que têm da fracção como parte-todo, já que não sentiram necessidade de a usar como operador.

Professora: Agora vamos ver a Marta que fez $\frac{3}{4}$ do percurso.

Tiago: Passamos para uma fracção equivalente.

Professora: Sim, ou reformulamos a forma como dividimos a recta ou encontramos uma fracção equivalente com que denominador?

Alunos: Oito.

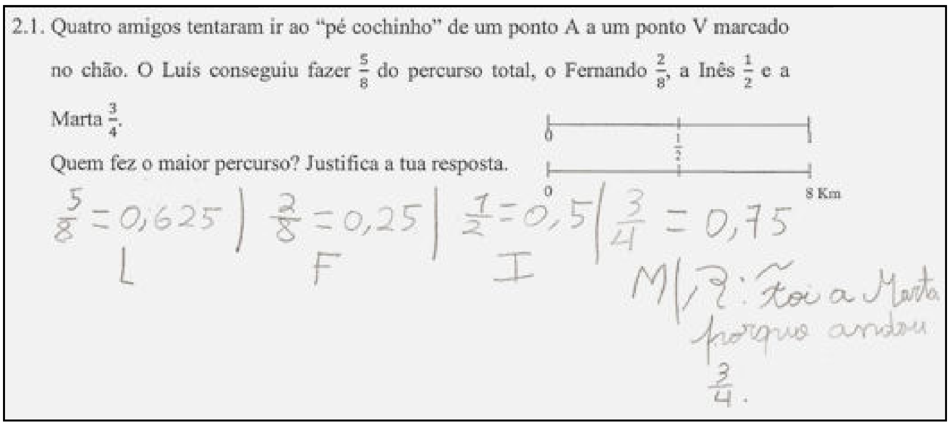
Professora: Pois! Não me interessa ter uma fracção equivalente qualquer, interessa-me ter uma fracção equivalente com denominador 8.

Amélia: Sim são 6 oitavos.

Professora: Isso quer dizer que a Marta andou quantos quilómetros?

Amélia: Andou 6 quilómetros.

Para determinar $\frac{3}{4}$ dos 8 quilómetros do percurso os alunos aplicam um conjunto de conhecimentos que já detêm e dominam sobre fracções. Como lhes facilitava os cálculos ter o denominador 8 porque o percurso tinha 8 quilómetros, como diz Tiago, passam $\frac{3}{4}$ para a fracção equivalente com denominador 8, $\frac{6}{8}$, e voltam a usar a fracção como parte de um todo e não como operador. Depois destas conclusões vemos outras situações em que o denominador não é igual ao comprimento do percurso, de forma a discutir estratégias formais para utilizar uma fracção como operador. Miguel por seu turno, transfere para esta tarefa o conhecimento que tem sobre a comparação de fracções:


2.1. Quatro amigos tentaram ir ao “pé cochinho” de um ponto A a um ponto V marcado no chão. O Luís conseguiu fazer $\frac{5}{8}$ do percurso total, o Fernando $\frac{2}{8}$, a Inês $\frac{1}{2}$ e a Marta $\frac{3}{4}$.

Quem fez o maior percurso? Justifica a tua resposta.

$\frac{5}{8} = 0{,}625$ L | $\frac{2}{8} = 0{,}25$ F | $\frac{1}{2} = 0{,}5$ I | $\frac{3}{4} = 0{,}75$ M

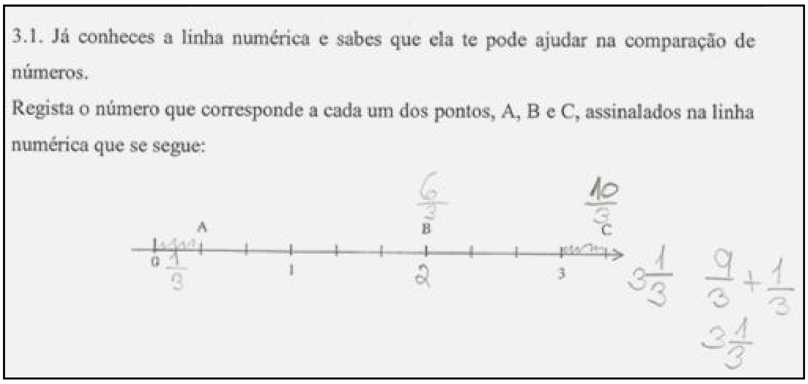
R: Foi a Marta porque andou $\frac{3}{4}$.

Miguel, T1.Q2-FT6

Miguel transforma todos os operadores em decimais e compara-os. Acaba por acertar porque todos diziam respeito ao mesmo percurso.

Tarefa 1 - Questão 3. Nesta questão é pedido aos alunos que indiquem os números assinalados na linha numérica (3.1.) e que registem na linha numérica cinco números racionais representados de diferentes formas (3.2). Esta tarefa tem um contexto puramente matemático, no significado medida.

Esta questão também foi realizada em grande grupo, utilizando as ideias e as sugestões de todos os alunos da turma. Sempre que possível utilizámos o número inteiro e a representação mais simplificada:


3.1. Já conheces a linha numérica e sabes que ela te pode ajudar na comparação de números.

Regista o número que corresponde a cada um dos pontos, A, B e C, assinalados na linha numérica que se segue:

Tiago, T1.Q3-FT6

Professora: Queremos saber quanto é que é o A, o B e o C. Quanto será o A?

André: É zero virgula…Podemos fazer o 1 a dividir por 3.

Professora: Sim então é …

Tiago: É um terço.

Professora: E o que tu estavas a dizer era o mesmo mas em decimal, que dava 0,3333.

André: Pois é professora é infinito.

Neste diálogo André divide os termos da fracção para tentar chegar a um numeral decimal, enquanto Tiago propõe simplesmente que se use a fracção. Esta situação pode indicar que alguns alunos continuam presos à representação decimal, o que é compreensível já que os alunos se sentem muito mais familiarizados com os números decimais do que com as fracções.

No que diz respeito ao ponto C, e por comparação com os anteriores, Leonor percebe rapidamente que a fracção que lhe corresponde é $\frac{10}{3}$.

Leonor: Eu já sei o C, então podem ser $\frac{10}{3}$.

Professora: Sim é verdade, mas sempre que possível devemos escrever os números de formas mais simples. Por exemplo, se eu sei que $\frac{6}{3}$ são 2 unidades. Agora o $\frac{10}{3}$ vocês também o sabem escrever de outra forma, como é que é? Qual é o número inteiro?

André: É o 3 mais $\frac{1}{3}$.

Professora: Sim podemos então usar um numeral misto fraccionários 3 $\frac{1}{3}$. Que seriam os $\frac{9}{3}$ que são 3 unidades mais $\frac{1}{3}$.

Depois de os alunos terem chegado à fracção $\frac{10}{3}$, e visto que se trata de uma fracção imprópria, incitei-os as representarem-na na forma de numeral misto fraccionário. André mostra perceber imediatamente a pergunta e transforma com facilidade a fracção imprópria no numeral misto fraccionário. É de referir que a recta numérica é um recurso bastante importante para trabalhar esta conversão porque os alunos conseguem ver a divisão em terços e por isso conseguem contá-los e perceber que são 3 unidades inteiras mais um bocadinho facilmente identificado como $\frac{1}{3}$.

Balanço. Em situações simples os alunos usam com facilidade uma fracção como operador, o que já não acontece em situações mais complexas, essencialmente, quando o operador não é uma fracção unitária, para ultrapassarem a dificuldade, converteram as fracções em decimais e usaram-nos como operadores. Esta é uma estratégia habitual, verificando-se que os alunos se socorrem muitas vezes dos números decimais, o que parece compreensível devido a todo o trabalho que já desenvolveram com os números racionais nesta representação. Enquanto alguns alunos se mostram muito presos à representação decimal, outros já mostram indícios de interpretar uma fracção como um número e já usam com bastante à vontade esta representação na ordenação de números racionais. Usam a metade como referência na comparação de fracções e conseguem encontrar fracções equivalentes adequadas ao contexto do problema. Conseguem representar um número racional na sua forma mais simplificada, convertem, com facilidade, uma fracção imprópria a numeral misto fraccionário.

Em situações onde os alunos ainda não detêm conhecimento formal da fracção como operador, usam-na como parte-todo, por exemplo, os alunos determinam o comprimento de $\frac{2}{8}$ do percurso da seguinte forma: o percurso tem 8 quilómetros, que é o denominador e então ele andou 2 quilómetros dos 8 quilómetros. Parece-me que esta situação se deve ao facto de o denominador dos operadores ser igual ao comprimento do percurso, o que fez com que os alunos não sintam necessidade de usar a fracção como operador.

5.2.7. Ficha de Trabalho 7

A Ficha de Trabalho 7 (Anexo 9) foi realizada no dia 24 de Fevereiro de 2010 e é a última desta unidade de ensino. Neste caso os alunos também trabalham a pares, durante cerca de 30 minutos enquanto realizam as tarefas 1 e 2. Posteriormente os alunos mostram muitas dificuldades em avançar uma hipótese para a resolução das tarefas 3 e 4, pelo que, essas tarefas são realizadas em grande grupo. Esta ficha de trabalho aborda os subtópicos noção e representação de números racionais e percentagem.

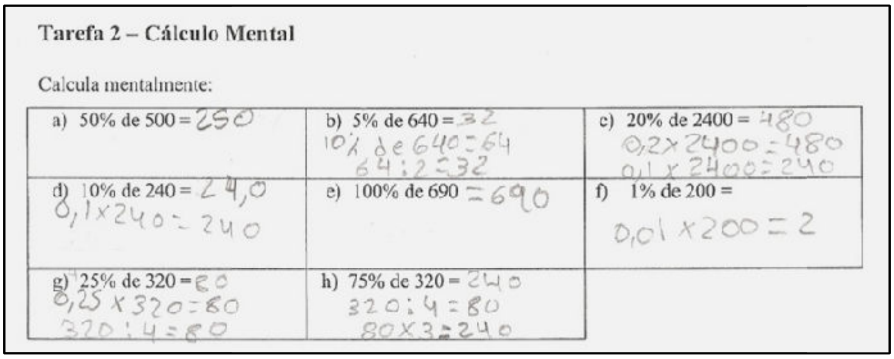
Tarefa 1. Esta tarefa pede aos alunos que façam conversões entre as três representações apresentadas: percentagem, fracção e decimal. A tarefa apresenta um contexto puramente matemático, no significado parte-todo.

A tarefa tem como objectivo fazer uma síntese das conversões já utilizadas pelos alunos e recordar as fracções decimais. Os alunos não apresentam dificuldades com as duas primeiras fracções que lhes são bastante familiares mas estas surgem quando têm de representar 0,1 em fracção e não se recordam das fracções decimais. Peço-lhes que façam a leitura do número e a partir daí os alunos começam a perceber que se é 1 décima então é 1 de dez e por isso $\frac{1}{10}$ e começam a extrapolar para os exemplos anteriores:

André: Mas também podia ser $\frac{25}{100}$, porque são 25 centésimas.

Os alunos não mostram qualquer dificuldade na conversão para percentagem em qualquer um dos casos.

Tarefa 2. Esta é uma tarefa de cálculo mental, onde é pedido aos alunos que calculem uma determinada percentagem de vários números inteiros. Apresenta um contexto puramente matemático, no significado operador. A representação de número racional apresentada é a percentagem e a resposta é pedida na representação simbólica, número inteiro.



Tarefa 2 – Cálculo Mental

Calcula mentalmente:

a) 50% de 500 = 250	b) 5% de 640 = 32 10% de 640 = 64 64 : 2 = 32	c) 20% de 2400 = 480 0,2 × 2400 = 480 0,1 × 2400 = 240
d) 10% de 240 = 24,0 0,1 × 240 = 240	e) 100% de 690 = 690	f) 1% de 200 = 0,01 × 200 = 2
g) 25% de 320 = 80 0,25 × 320 = 80 320 : 4 = 80	h) 75% de 320 = 240 320 : 4 = 80 80 × 3 = 240	

Mariana, T2-FT7

Nesta tarefa os alunos revelam bastante facilidade com os operadores 50% e 25%. No primeiro caso identificam de imediato a metade e no segundo caso os alunos usam 25% como a quarta-parte e fazem a divisão por 4:

Leonor: (50% de 500) É 250 porque é a metade.

Professora: (5% de 640) O 5% não é um cálculo tão directo como o 10%, mas nós podemos partir deste para depois calcular o 5%. Então quanto é 10% de 640?

Aluno 1: 64

Professora: Então quanto é que é 5%?

Leonor: Podemos dividir por 2

Neste caso alguns alunos conseguem chegar a 10% de 640 e Leonor consegue estabelecer a relação entre 10% e 5%, percebendo que depois de encontrar 10% tem de “dividir por 2” para encontrar 5%.

Balanço da ficha de trabalho. Os alunos mostram destreza nas conversões, em especial de percentagem para decimal e vice-versa. Ainda mostram alguma dificuldade com a conversão de decimal para fracção, que se vem a desvanecer com o reforço das fracções decimais. A turma revela facilidade em usar as percentagens 50%, 25% e 100% como operadores e consegue construir o operador 75% com base no 25%.

Inicialmente, os alunos mostram dificuldade na utilização do operador 10%, mas depois conseguem utilizá-lo com destreza como base para calcular 5% e 20%.

5.3. Desempenho dos alunos nos testes

Neste ponto apresento uma análise comparativa dos resultados (Anexo 17) apresentados, pelos alunos no teste diagnóstico (Anexo 14) e no teste final (Anexo 15), no que diz respeito a representações, comparação e ordenação de números racionais e equivalência de fracções, nos diversos significados.

5.3.1. Representações

As tarefas sobre representações incidem sobretudo no significado parte-todo, seguindo-se os significados quociente, operador e razão.

Significado parte-todo

Questões 1 (pré-teste) e 4 (pós-teste). Nestas questões são apresentadas três figuras com algumas partes sombreadas e é pedido aos alunos que representem a parte pintada sob a forma de fracção. Em ambos os testes a tarefa apresenta um contexto puramente matemático, sendo no pré-teste as quantidades todas contínuas e no pós-teste contínuas e discretas. De um modo geral, a turma tem um bom desempenho nestas questões no pré-teste e consegue melhorar no pós-teste, revelando bastante à vontade na conversão entre as representações pictórica e fraccionária.

Questões 2 (pré-teste) e 5 (pós-teste). É pedido aos alunos que construam pictoricamente a unidade a partir de uma parte dada pictoricamente e em fracção. Ambas as questões representam situações em contextos puramente matemáticos. Tanto antes como após a unidade de ensino os alunos têm bons resultados nestas questões. Contudo, verifica-se, ligeiramente, um melhor desempenho antes da unidade de ensino, o que pode estar relacionado com o facto de no pós-teste estar representada uma fracção imprópria. Os alunos revelam ainda dificuldade em compreender que neste caso a unidade está contida no agregado das partes, mas, apesar disso, revelam bom desempenho na conversão entre a fracção e a representação pictórica.

Questões 8 (pré-teste) e 8 (pós-teste). Estas questões pedem aos alunos para construir pictoricamente partes de um todo. A informação é dada pictoricamente e em fracção e a resposta é pedida apenas na representação pictórica. Ambas as questões têm um contexto puramente matemático. No pré-teste os alunos revelam um desempenho satisfatório e melhoram bastante no pós-teste. Revelam, de um modo geral, uma boa compreensão da construção de partes no significado parte-todo com fracções próprias e proficiência na conversão entre a representação em fracção e a representação pictórica.

Questões 15 (pré-teste) e 15 (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que reconstruam pictoricamente a unidade. A informação é dada em percentagem e pictoricamente com quantidades discretas num contexto puramente matemático. No pré-teste a turma tem um desempenho muito bom, mas no pós-teste baixa consideravelmente o seu desempenho, apesar de se manter num nível positivo. Esta diferença entre o pré-teste e o pós-teste pode estar relacionada com as percentagens apresentadas pois, no teste inicial, a fracção apresentada é 20%, e por iteração dessa mesma parte os alunos obtêm o todo (100%). Já no pós-teste, a percentagem apresentada é 80% e, nesta situação, os alunos primeiro têm de encontrar a parte que podem depois iterar para obter 100%. É nesse passo intermédio que uma grande parte dos alunos erra. Apesar de tudo, verifica-se um desempenho razoável na conversão entre a percentagem e a representação pictórica.

Questões 17 (pré-teste) e 17 (pós-teste). É dado o todo e as partes através de números naturais e é pedido aos alunos que representem as partes através de uma fracção. As situações são contextualizadas e envolvem quantidades discretas. No pré-teste os alunos revelam um desempenho fraco, dos alunos que têm sucesso a maior parte usa a linguagem verbal revelando assim, dificuldade na construção da fracção a partir da linguagem verbal. Os alunos melhoram substancialmente no pós-teste verificando-se que neste momento já usam preferencialmente fracções simplificadas.

Questões 20 b) (pré-teste) e 20 a) (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que identifiquem uma determinada percentagem numa figura. Ambas as questões têm um contexto puramente matemático. Os alunos têm um bom desempenho antes da unidade de ensino, relacionando com facilidade a metade com 50%. Depois da unidade de ensino os alunos também revelam um bom desempenho na conversão entre a percentagem e a representação pictórica. No entanto alguns alunos erram nesta questão, mostrando dificuldade em encontrar a percentagem a atribuir a cada uma das cinco partes do todo.

Significado quociente

Questões 3 a) (pré-teste) e 1 a) (pós-teste). Na questão 3 a) do pré-teste é solicitado aos alunos que representem pictoricamente a parte de uma piza que cabe a um de três amigos que a partilham igualmente entre si. É uma situação contextualizada envolvendo uma quantidade contínua. Na questão 1 a) do pós-teste é pedido aos alunos que representem pictoricamente a parte que cabe a cada um dos quatro amigos que partilham três pizas constituindo também uma situação contextualizada com quantidades discretas. Os alunos têm um bom desempenho na situação simples apresentada no diagnóstico, no pós-teste conseguem ter melhor desempenho, neste caso, em situações mais complexas. Apresentam também facilidade na conversão da linguagem verbal para a representação pictórica.

Questões 3 b) (pré-teste) e 1b) (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que representem em fracção a parte da piza que atribuem a cada menino da situação anterior. Nesta situação, em ambos os testes, os alunos têm um desempenho mais fraco do que na questão anterior onde era pedido para representar a mesma situação pictoricamente. Apesar de o desempenho ser positivo, os alunos revelam-se mais à vontade na representação pictórica do que na representação fraccionária.

Questões 9 b) (pré-teste) e 9 a) (pós-teste). Esta questão também representa uma situação de partilha equitativa, representando uma situação contextualizada. No pré-teste é pedido aos alunos que representem através de uma fracção, a partilha de um bolo por três meninos e de dois bolos por seis meninas. No pré-teste os alunos revelam muitas dificuldades na representação desta situação em fracção, mostrando um desempenho pouco satisfatório. No pós-teste é pedido aos alunos que representem, através de uma fracção, uma situação de partilha em que os dois rapazes comem três sandes e as quatro raparigas comem seis sandes. É também uma situação contextualizada com quantidades contínuas. Neste caso o desempenho dos alunos é um pouco melhor, mas ainda assim, mostram muitas dificuldades. Todos os alunos que erram representam a situação através de uma fracção própria e os alunos que acertam conseguem usar indiferentemente uma fracção imprópria e um numeral misto fraccionário. Assim, verifica-se que os alunos no final da unidade de ensino continuam a mostrar dificuldade em representar uma determinada situação de partilha equitativa através de uma fracção imprópria.

Significado operador

Questões 5 a) (pré-teste) e 3 (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que usem fracções não unitárias como operador. São situações contextualizadas, em que a informação é dada em fracção e números naturais. No pré-teste os alunos mostram muita dificuldade com esta questão por se tratar de uma fracção não unitária, muitos deles conseguem calcular a fracção unitária mas não percebem que a têm de iterar. Depois da unidade de ensino os alunos conseguem um bom desempenho em tarefas desta natureza. Os alunos que respondem correctamente a esta questão usam a fracção como operador, calculam a fracção unitária e multiplicam esse valor pelo numerador.

Questões 11 (pré-teste) e 11.2 (pós-teste). Estas questões solicitam aos alunos que usem a percentagem 75% como operador. São ambas situações contextualizadas. No pré-teste, apesar de a percentagem utilizada ser simples os alunos têm um desempenho muito fraco nesta questão, alguns deles não respondem à questão e a maior parte dos restantes utiliza apenas um valor numérico, sem apresentar cálculos. Após a unidade de ensino, os alunos apresentam um bom desempenho. Dos que apresentam a resolução, a maior parte começa por encontrar 25% ou $\frac{1}{4}$ e depois multiplica esse valor por três.

Questões 16 (pré-teste) e 16 (pós-teste). Em qualquer uma destas questões é pedido aos alunos que calculem $\frac{1}{3}$ de um número natural. Ambas apresentam uma situação contextualizada. No pré-teste esta é a questão a que menos alunos respondem (cerca de metade da turma). O desempenho dos alunos é bastante fraco, os alunos revelaram dificuldade na interpretação do enunciado da tarefa. Os alunos que conseguem ter sucesso usam o conhecimento que têm dos números partitivos e efectuaram a divisão por três. Após a unidade de ensino, o desempenho dos alunos melhora bastante, a questão é bastante simples e alguns alunos também usam a divisão por 3 para obter $\frac{1}{3}$ da medida dada.

Questões 19 (pré-teste) e 19 (pós-teste). Esta questão pede aos alunos que usem um numeral decimal como operador. A situação é contextualizada. No pré-teste os alunos obtêm um desempenho muito fraco nesta questão, ao contrário daquilo que era de esperar devido ao facto de ser um conteúdo trabalhado durante o 1.º ciclo do ensino básico. Após a unidade de ensino, o desempenho dos alunos melhora bastante, o que também pode indiciar que os alunos inicialmente não se lembram deste conteúdo e depois durante a unidade de ensino vão relembrando o que tinham trabalhado anteriormente.

Significado razão

Questões 7 b) e c) (pré-teste) e 7.1 (pós-teste). Nestas questões é solicitado aos alunos que representem uma determinada situação através de uma razão, é uma situação contextualizada. No pré-teste os alunos não mostram um bom desempenho na representação de uma razão. Muitos usam a linguagem verbal para descrever a razão, como por exemplo: "3 litros de tinta azul para 3 litros de tinta branca" (Rui, pré-teste). O desempenho dos alunos melhora substancialmente depois da unidade de ensino, apresentando agora um nível bastante satisfatório. Os alunos que erram, constroem a razão com base no significado parte-todo.

5.3.2. Comparação e ordenação de números racionais

As questões de comparação e ordenação estão distribuídas uniformemente pelos vários significados, verificando-se contudo, algum destaque para o significado medida.

Significado razão

Questões 7 a) (pré-teste) e 7.2 (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que comparem razões, que têm que construir a partir da linguagem verbal do enunciado. No pré-teste os alunos não obtêm um desempenho positivo, o que também se deve ao facto de muitos não conseguirem representar a situação através de razões. No pós-teste os alunos melhoram o seu desempenho, revelando conseguir comparar razões com numeradores e denominadores diferentes. Contudo não é possível identificar as estratégias utilizadas devido à falta de pormenor dos registos efectuados pelos alunos.

Significado medida

Questões 6 (pré-teste) e 6 (pós-teste). Estas questões solicitam que os alunos determinem distâncias entre dois pontos marcados numa recta numérica. Ambas apresentam situações num contexto puramente matemático. Antes da unidade de ensino os alunos mostram um fraco desempenho nesta tarefa, os alunos não fraccionam a unidade para descobrir a fracção unitária que depois devem iterar para descobrir a parte pedida. Depois da unidade de ensino os alunos já mostram um bom desempenho e usam a fracção para representar a distância entre dois pontos marcados na recta numérica.

Questões 10 (pré-teste) e 10 (pós-teste). Na questão 10 do pré-teste, é pedido aos alunos que marquem um conjunto de quatro fracções numa recta numérica. Na questão 10 do pós-teste é pedido aos alunos que marquem quatro números racionais numa recta numérica, os números são apresentados sob a forma de percentagem, numeral decimal, fracção imprópria e numeral misto fraccionário. Ambas as questões apresentam um contexto puramente matemático. Antes da unidade de ensino nenhum aluno consegue marcar as quatro fracções correctamente na recta numérica. Este resultado não surpreende porque os alunos apenas conhecem as fracções como números partitivos, não têm qualquer noção quantitativa de fracção. Depois da unidade de ensino, a turma ainda não mostra um desempenho positivo nesta questão, apesar de ter melhorado substancialmente. Verifica-se que os alunos têm muitas dificuldades na ordenação de números racionais, faltando-lhes a noção quantitativa de número racional (Post et al., 1986).

Questões 14 (pré-teste) e 14 (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que utilizem um segmento de recta como unidade de medida para medir outros segmentos de recta maiores e menores do que a unidade. As questões apresentam um contexto puramente matemático. Na alínea a) do pré-teste os alunos revelam um bom desempenho, o que pode estar relacionado com o facto de ser uma questão simples em que a unidade de medida está contida exactamente no segmento de recta a medir. Na alínea b) quando o segmento de recta a medir é menor do que a unidade de medida os alunos revelam um desempenho mais fraco, resultado que provavelmente se deve ao facto de os alunos terem ainda dificuldade em fraccionar a unidade. No pós-teste os alunos continuam a revelar melhor desempenho na situação em que o segmento de recta a medir é maior do que a unidade de medida.

Questões 18 a) (pré-teste) e 18 a) (pós-teste). Nesta questão é pedido aos alunos que ordenem um conjunto de números decimais, num contexto puramente matemático. No pré-teste os alunos obtêm um desempenho baixo nesta questão, revelando dificuldades na ordenação de números racionais na representação decimal. Esta foi uma questão detectada também na aula de diagnóstico realizada anteriormente, que me fez alterar a proposta inicial para a unidade de ensino e dedicar uma ficha de trabalho quase em exclusivo à representação decimal. Depois da unidade de ensino os alunos já mostram um desempenho bastante melhor na ordenação de números decimais, as dificuldades que continuam a surgir estão relacionadas com o número diferente de casas decimais entre os números apresentados.

Questões 18 b) (pré-teste) e 18 b) (pós-teste). Estas questões pedem aos alunos que ordenem um conjunto de números racionais na representação fraccionária, decimal, números naturais e numerais mistos fraccionários. Antes da unidade de ensino nenhum aluno consegue ordenar com sucesso os seis números apresentados. Depois da unidade de ensino, nota-se uma melhoria substancial, apesar de ainda não chegar a um nível positivo. A maior parte dos alunos apresenta a resposta nas representações indicadas na pergunta. Os alunos que acertam apresentam a conversão dos vários números para a representação decimal, inclusivamente alguns utilizam essa representação na resposta. Mesmo depois da unidade de ensino, alguns alunos continuam a mostrar dificuldades na ordenação de um conjunto de números racionais representados de diversas formas.

Questões 21 (pré-teste) e 21 (pós-teste). Nestas questões é pedido aos alunos que comparem pares de fracções. Os pares apresentados respeitam as seguintes condições: (a) 1 par com denominadores iguais; (b) 1 par com denominadores iguais; (c) 1 par com numeradores e denominadores iguais. No caso dos pares de fracções com denominadores iguais, os alunos têm um desempenho positivo antes da unidade de ensino e melhoram depois da unidade de ensino. No caso dos numeradores iguais os alunos mostram desempenhos bastante bons antes e depois da unidade de ensino. No caso dos numeradores e dos denominadores serem diferentes, os alunos mostram um desempenho bastante fraco antes da unidade de ensino e melhoram bastante depois da unidade de ensino, pelos registos efectuados por alguns alunos junto das fracções, verifica-se que os alunos convertem as fracções em decimais e comparam-nos nessa representação.

5.3.3. Equivalência de fracções

De seguida apresento os resultados obtidos pelos alunos no diagnóstico inicial e no pós-teste nas questões sobre equivalência de fracções. Estas questões são apresentadas nos significados parte-todo e quociente.

Significado parte-todo

Questões 12 (pré-teste) e 12 (pós-teste). Nestas tarefas é pedido aos alunos que indiquem a figura que tem uma determinada fracção pintada. As opções de resposta apenas contêm uma figura que corresponde à fracção, mas que representa uma fracção equivalente. Estas questões apresentam um contexto puramente matemático. No pré-teste nenhum aluno consegue identificar pictoricamente a fracção $\frac{2}{3}$ que na imagem estava representada por $\frac{4}{6}$, revelando que os alunos não têm ainda qualquer conhecimento sobre equivalência de fracções. Após a unidade de ensino os alunos já mostram um desempenho bastante bom nesta tarefa.

Significado quociente

Questões 9 a) (pré-teste) e 9 b) (pós-teste). Estas questões solicitam aos alunos que comparem duas fracções equivalentes, que devem obter através de uma situação de partilha equitativa. As questões são contextualizadas. No pré-teste os alunos mostram um desempenho satisfatório, o que também pode estar relacionado com a simplicidade da tarefa. No pós-teste a tarefa é um pouco mais complexa e os alunos continuam a mostrar um bom desempenho.

5.3.4. Síntese

De um modo geral, verifica-se que o desempenho dos alunos melhora em todos os significados e em todos os tipos de questões. Antes da unidade de ensino o significado que regista melhor desempenho por parte dos alunos é o significado parte-todo, seguindo-se o significado quociente. Os significados onde os alunos obtêm pior desempenho são razão, medida e operador. Depois da unidade de ensino, o significado com melhores desempenhos é o parte-todo, que, de acordo com a literatura é aquele que os alunos melhor compreendem intuitivamente e que serve de base a todos os outros. No entanto, os significados que registam uma maior evolução são os significados operador e medida. Nos significados razão e quociente também se registam bons desempenhos.

5.4. Balanço global das aprendizagens dos alunos

Esta unidade de ensino tem como pressuposto a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, intuitivos e informais, para a partir daí construir conhecimento com significado e chegar às regras formais da Matemática. Outro pressuposto desta unidade de ensino é a articulação entre as diferentes representações dos números racionais e os diferentes significados destes números, com o objectivo de ajudar os alunos a construírem uma compreensão deste conjunto numérico e do sistema de numeração decimal, desenvolvendo o seu sentido de número e usando abordagens flexíveis na resolução de tarefas. Pretendia-se que os alunos desenvolvessem: (i) capacidade de usar diversas representações de número racional: numeral decimal, fracção, percentagem, verbal e pictórica; (ii) apreciação da grandeza dos números racionais, com vista a serem capazes de comparar e ordenar números racionais; (iii) capacidade de inventar uma variedade de estratégias de resolução para o cálculo com estes números; e (iv) confiança geral e fluência na capacidade de pensar sobre números racionais, utilizando valores de referência.

Durante as 12 aulas da unidade de ensino, os alunos trabalharam essencialmente a pares, mas também individualmente, em grupo e em grande grupo. As fichas de trabalho contemplam, de forma equilibrada, as representações indicadas de número racional. Além disso, contemplam uma grande diversidade no que diz respeito aos significados de número racional, sendo que ao longo da unidade de ensino foram trabalhadas tarefas nos significados parte-todo, operador, quociente, razão e medida, embora com maior incidência em tarefas nos significados parte-todo e medida.

De um modo geral, os alunos mostram-se entusiasmados, empenhados e muito participativos no trabalho desenvolvido. No entanto, alguns continuam a mostrar dificuldades na leitura e interpretação dos enunciados das tarefas, principalmente nas tarefas que envolvem conceitos novos, o que pode indiciar que a sua dificuldade não reside apenas na interpretação das "palavras" dos enunciados, mas também na compreensão dos procedimentos e do trabalho a realizar. Na verdade, ao longo de toda a unidade os alunos mostram alguma dificuldade em definir estratégias e em conceber e testar conjecturas, mostram-se ainda muito inseguros a sugerir e testar hipóteses, embora já aceitem bastante bem que uma mesma tarefa possa ter várias soluções ou resoluções. Com o passar do tempo, os alunos vão elaborando cada vez mais as suas explicações e justificações, tanto nas respostas escritas, como nas intervenções orais.

No que diz respeito às representações, antes da unidade de ensino, em situações simples, os alunos mostram ser capazes de converter uma representação pictórica em fracção e vice-versa. O mesmo acontece com a conversão entre a percentagem e a representação pictórica onde os alunos conseguem facilmente identificar as percentagens básicas. Mostram-se à vontade também na conversão da linguagem verbal para a representação pictórica, no significado quociente mas revelam alguma dificuldade na representação em fracção, de uma situação de partilha equitativa, a partir da linguagem verbal. Revelam ainda dificuldade em usar uma fracção não unitária e uma percentagem como operador. Não conseguem construir uma razão a partir da linguagem verbal.

Durante a unidade de ensino os alunos começam por usar essencialmente a representação verbal de número racional, revelando dificuldades na utilização da linguagem matemática em situações desconhecidas ou que não conseguiam representar através de símbolos matemáticos. As suas dificuldades na linguagem específica das fracções vão-se atenuando com o prosseguimento do trabalho. Contudo, alguns alunos, em vez de dizerem "um quarto", dizem "um de quatro".

Os alunos estabelecem diversas relações multiplicativas entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Além disso, mostram facilidade em construir a unidade a partir de diferentes partes, nas representações fraccionária, decimal e pictórica. Contudo, revelam ainda alguma dificuldade em representar fracções impróprias, que exigem a representação de uma nova unidade.

Os alunos usam intuitivamente a multiplicação de um número inteiro por uma fracção para simplificar adições com parcelas iguais. Usam ainda de forma intuitiva a adição e a subtracção de fracções com denominadores iguais. Revelam destreza para determinarem fracções equivalentes adequadas ao contexto do problema e conseguem também simplificar fracções próprias e fracções impróprias, convertendo-as em numerais mistos fraccionários, através da recta numérica.

Inicialmente alguns alunos não compreendem como se podem medir figuras menores do que a unidade de medida. Não fraccionam a unidade, talvez porque as unidades de medida são figuras geométricas e não réguas ou rectas numéricas. Para muitos alunos, os numerais mistos fraccionários constituem um obstáculo, já que consideram a parte inteira separadamente da parte fraccionária.

Os alunos têm dificuldade em usar uma fracção como operador quando esta não é uma fracção unitária. Por exemplo, calculam com facilidade $\frac{1}{4}$ de 60, mas têm dificuldade em determinar $\frac{3}{4}$ de 60. Revelam também dificuldade em compreender a densidade dos números racionais, achando que não existem quaisquer números entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

Inicialmente mostram dificuldade em converter uma fracção para numeral decimal, usando por vezes o denominador como parte decimal (para alguns alunos $\frac{1}{4}$ era 0,4). Mostram dificuldade em determinar metade de 0,25 devido a esse valor envolver mais uma casa decimal. Não conseguem construir a fracção no significado razão para comparar o comprimento do todo e das partes de uma tira de papel.

No início da unidade de ensino, alguns alunos mostram ainda alguma confusão na conversão da representação pictórica (tabela 10x10) para decimal, revelando uma certa fragilidade na compreensão do sistema de numeração decimal. Sabem que 0,5=0,50 mas têm dificuldade em aplicar este conhecimento a novas situações. Têm também dificuldade em usar uma fracção e um decimal como operador, por exemplo, usam bem 0,5 e 25% como operadores através da divisão por 2 e por 4, respectivamente, mas não conseguem usar 0,4 como operador.

Os alunos revelam maior destreza nos significados parte-todo e medida, os mais trabalhados, mas também mostram compreensão do significado quociente, revelando maiores dificuldades nos significados operador e razão. Mostram grande destreza na conversão das várias representações de número racional, mas usam essencialmente o numeral decimal e a fracção como forma de responder às questões, apesar de usarem algumas vezes como apoio a representação pictórica. Numa situação contextualizada no significado quociente (partilhar 3 pizas por 4 amigos), os alunos baseiam-se na representação pictórica para resolver o problema, mas apresentam a resposta em fracção. Os alunos apoiam-se com frequência na representação pictórica para resolver as tarefas, mas não para responder às questões, usando sempre uma representação simbólica (fracção, decimal ou percentagem) ou a representação verbal. Quanto à representação em percentagem, os alunos conseguem relacionar as fracções com as percentagens mais básicas como $\frac{1}{2}$=50%; $\frac{1}{4}$=25%; $\frac{3}{4}$=75%. Os alunos usam a percentagem nas questões onde isso é pedido, mas se é deixado ao seu critério a escolha da representação a utilizar na resposta, não escolhem a percentagem nem a representação pictórica. Quanto à construção das partes e reconstrução da unidade, os alunos mostram destreza nos significados parte-todo e operador com quantidades contínuas e discretas. Durante a unidade de ensino verifica-se que conseguem construir argumentos e justificações mais elaboradas em situações contextualizadas e mais próximas da realidade do que em situações em contextos puramente matemáticos.

A utilização de materiais manipuláveis que permitem a visualização mais concreta de algumas situações e os contextos reais foi uma mais-valia para a iniciação do trabalho com os números racionais, principalmente nos significados parte-todo e quociente. A utilização do modelo 10x10 permitiu trabalhar de forma integrada a representação decimal, a representação fraccionária e a percentagem. Este modelo revelou-se um poderoso meio para introduzir as diferentes representações de número racional, permitindo que os alunos visualizassem e compreendessem as relações entre elas e a forma de as converter de uma forma natural e não apenas abstracta.

Depois da unidade de ensino, os alunos continuam a realizar com desembaraço conversões entre a representação pictórica e a fracção. Contudo, piorou um pouco o seu desempenho na conversão entre a representação em fracção e a pictórica, porque os alunos continuam a ter dificuldade em construir a unidade a partir de fracções impróprias. Revelaram uma boa compreensão da construção das partes no significado parte-todo com fracções próprias. A conversão entre a percentagem e a representação pictórica baixa um pouco numa situação em que têm de reconstruir um todo a partir de uma fracção não unitária mas conseguem com facilidade identificar percentagens numa figura. Evoluem também na construção de uma fracção a partir da linguagem verbal e usam fracções simplificadas como resposta. Numa situação de partilha equitativa os alunos usam a representação pictórica, como apoio, para determinar a fracção. No significado quociente os alunos sentem-se mais à vontade na conversão da linguagem verbal para a representação pictórica do que para fracção. No final da unidade de ensino, os alunos continuam a mostrar dificuldade na representação de uma fracção imprópria no significado quociente. Conseguem usar fracções não unitárias como operador, grande parte deles determinando primeiro a fracção unitária e depois iterando essa parte. Também conseguem usar uma percentagem como operador. Alguns convertem a percentagem em fracção, calculam a fracção unitária e iteram-na. Os alunos conseguem representar uma razão, notando-se que os que erram encaram a razão no significado parte-todo.

No que diz respeito à ordenação e comparação de números racionais, antes da unidade de ensino os alunos conseguem medir um segmento de recta maior do que a unidade de medida, mas têm dificuldade em medir um segmento de recta menor do que a unidade de medida. Conseguem comparar com facilidade pares de números com numeradores iguais e pares de números com denominadores iguais. Contudo, não conseguem comparar pares de fracções com numeradores e denominadores diferentes. Têm dificuldade na representação de uma determinada situação através de uma razão o que se reflecte também no insucesso na comparação de razões. Os alunos não conseguem calcular a distância entre dois pontos marcados numa recta numérica. Nenhum aluno consegue marcar correctamente fracções na recta numérica, revelando ausência da noção quantitativa da fracção. Tal como tinha sido evidenciado na aula de diagnóstico, os alunos mostram dificuldades na ordenação de um conjunto de numerais decimais com um número desigual de casas decimais. Os alunos também não conseguem ordenar um conjunto de números apresentados sob a forma de fracção, decimal e números inteiros. Mostram dificuldade na utilização de uma fracção não unitária e de um numeral decimal como operador. Antes da unidade de ensino os alunos revelam um desempenho não satisfatório nas tarefas de ordenação e comparação de números racionais, verificando-se um tópico onde os alunos mostram poucos conhecimentos anteriores. Inclusivamente, os alunos mostram muitas dificuldades na comparação de números racionais na representação decimal, que é um tema já trabalhado no 1.º ciclo do ensino básico.

Os alunos conseguem comparar uma determinada fracção com a unidade. Representam a unidade através de fracções com numerador igual ao denominador, e usam essas fracções para determinar se uma dada fracção é maior ou menor do que a unidade, por exemplo, dizem que $\frac{3}{4}$ é menor do que a unidade porque a unidade é $\frac{4}{4}$, e assim conseguem também determinar a fracção em falta para completar a unidade.

Em questões simples e contextualizadas, os alunos usam o sentido intuitivo e o conhecimento do dia-a-dia para compararem um par de fracções, o que lhes permite estabelecer relações abstractas entre as fracções $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$, de uma forma significativa. Na ordenação de um conjunto de números representados de diferentes formas, os alunos convertem todos os números para a representação decimal e é nessa representação que os ordenaram. Esta é a estratégia formal que mais usam tanto na ordenação como na comparação de números racionais e a que menos usam é a transformação em fracções equivalentes com denominadores iguais. Verifica-se que os alunos se vão gradualmente afastando das estratégias informais para começarem a valorizar as estratégias formais. Contudo, os que revelam uma maior compreensão de número racional conseguem escolher a representação e a estratégia que lhes dá mais jeito em função da situação e do contexto apresentado. Assim, alguns alunos também se mostram proficientes na utilização de estratégias informais, utilizam a comparação com a metade ou com a unidade e comparam fracções com um dos factores iguais considerando apenas o outro factor. Alguns alunos continuam a mostrar dificuldade na comparação de números decimais com um número diferente de casas decimais.

Depois da unidade de ensino os alunos melhoram o seu desempenho na ordenação e comparação de números racionais, apesar de continuarem a mostrar algumas dificuldades. Os alunos conseguem comparar duas razões, conseguem calcular a distância entre dois pontos marcados na recta numérica usando a fracção para representar essa distância. Continuam a mostrar melhor desempenho na medição de segmentos de recta maiores do que a unidade de medida do que na medição de segmentos de recta menores do que a unidade. Melhoram bastante na ordenação de numerais decimais, contudo, alguns continuam a mostrar dificuldade na ordenação de decimais com um número desigual de casas decimais. Os alunos melhoram, mas continuam com dificuldade na marcação de números racionais, representados de diferentes formas, na recta numérica, mostram dificuldade na noção quantitativa de número racional. Os alunos conseguem comparar com sucesso pares de fracções com os numeradores iguais e pares de fracções com os denominadores iguais e melhoraram bastante na comparação de pares de fracções com os numeradores e os denominadores diferentes, passando a converter as fracções em decimais e a usar esta representação para os comparar. Já conseguem usar uma fracção não unitária como operador, mas preferem converter as fracções para numeral decimal e usam o numeral decimal como operador.

No que se refere à equivalência de fracções, antes da unidade de ensino os alunos conseguem comparar duas fracções equivalentes no significado quociente, numa situação simples. Mas, nenhum aluno consegue identificar a representação pictórica que representa uma fracção equivalente a $\frac{2}{3}$.

Durante a unidade de ensino usam a multiplicação ou a divisão do numerador e do denominador pelo mesmo número inteiro. Para além das tarefas onde é pedido explicitamente aos alunos que determinem fracções equivalentes, os alunos também as usam para resolver outras tarefas. Por exemplo, para representar pictoricamente $\frac{1}{2}$ de uma tira de papel, os alunos dividem-na em quatro partes iguais e depois pintam $\frac{2}{4}$ e num caso de partilha equitativa em que os alunos têm de partilhar 3 pizas por 4 amigos, alguns partem a piza em 8 partes mas depois representam essas partes usando fracções equivalentes simplificas. Conseguem também encontrar fracções equivalentes adequadas ao contexto do problema, por exemplo, quando querem marcar $\frac{3}{4}$ numa recta numérica dividida em 8 partes usam a fracção equivalente, $\frac{6}{8}$. Depois da unidade de ensino, os alunos conseguem identificar sem dificuldade a representação pictórica equivalente a uma dada fracção e continuam a mostrar facilidade em comparar fracções equivalentes no significado quociente, em situações mais complexas. Para decompor uma fracção, os alunos usam essencialmente as operações adição, subtracção e multiplicação e todos decompõem as fracções em fracções unitárias.

Capítulo 6

O caso de Leonor

6.1. Apresentação

Leonor tem 10 anos e nunca ficou retida. É uma menina animada e bem-disposta, sempre pronta para ajudar, que vive com os pais e um irmão mais novo que ainda não frequenta a escola. Gosta da escola no geral, é uma aluna bastante empenhada e trabalhadora e reconhece que é graças a isso que tem bons resultados. A sua disciplina favorita é a Língua Portuguesa e diz que durante o 1.º ciclo também gostava "mais ou menos de Matemática", esforçava-se e tinha boas notas. Gosta muito de estudar esta disciplina com o pai que, segundo diz, "é bom a Matemática".

Refere que este ano gosta das aulas e que se considera uma boa aluna a Matemática porque compreende a matéria e tira boas notas. Contudo, acha que talvez pudesse ser ainda melhor aluna, se conversasse menos e estivesse mais atenta nas aulas. Leonor é muito participativa e boa comunicadora, conseguindo prender a atenção dos colegas nas suas intervenções, pois esforça-se por construí-las com qualidade. Geralmente, é das primeiras alunas a terminar as tarefas e tenta sempre participar, mas não fica aborrecida quando solicito os outros colegas. Gosta que eles também tenham oportunidade de intervir, pois, segundo diz, gosta das aulas onde se faz a discussão das tarefas, para que todos exponham aquilo que fizeram.

Mostrou-se muito entusiasmada com o estudo dos números racionais porque gosta de novos desafios. O facto deste tema ser totalmente novo deixou-a empolgada e, inclusive, conseguiu subir o nível 4 do primeiro período para 5 no segundo período. Revela ter raciocínio lógico, o que a leva muitas vezes a construir o seu conhecimento através de relações intuitivas que estabelece entre aquilo que já sabe e aquilo que tenta descobrir. Revela também um bom desempenho no cálculo mental, usando com destreza as propriedades das operações e a relações entre números.

6.2. Compreensão dos números racionais antes da unidade de ensino

6.2.1. Representações

Vejamos o desempenho de Leonor na primeira entrevista, num conjunto de tarefas relativas à construção de partes e reconstrução da unidade[1].

Questão 7. Nesta questão é dado o "todo" e pede-se para representar a "parte", num contexto puramente matemático. É uma questão que envolve o significado parte-todo, sendo a informação dada na representação pictórica e em fracção e a resposta pedida em representação pictórica.

Leonor não mostrou qualquer dificuldade em responder:

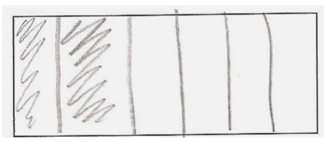
Leonor: Agora temos que fazer 6 risquinhos…

Professora: E isso significa o quê?

Leonor: Vamos pintar 2…

Professora: E a nossa figura vai estar dividida em quantos?

Leonor: Em 6 partes…Iguais… Só pinto 2 e são 6 ao todo.

TD-Q8

Contudo, a aluna não mostra qualquer preocupação em desenhar as partes iguais entre si, apesar de referir na entrevista que o deve fazer. No teste diagnóstico existe uma questão idêntica (Questão 8) e nesse caso a aluna também não mostrou qualquer dificuldade em responder.

Questão 4 b). Esta questão pede para representar em forma de fracção a parte da tarte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação

[1] As tarefas são aqui apresentadas numa ordem diferente da seguida na entrevista.

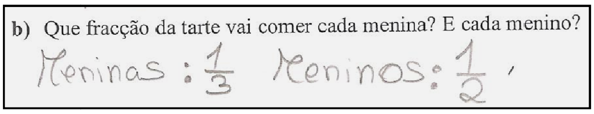
contextualizada, com uma quantidade contínua no significado quociente, a informação é dada na representação pictórica e a resposta pedida em fracção.

Nesta questão, Leonor revela muitas dificuldades no uso da linguagem verbal das fracções, lendo a sua resposta do seguinte modo:

Leonor: As meninas vão comer um de três e os meninos vão comer um de dois.

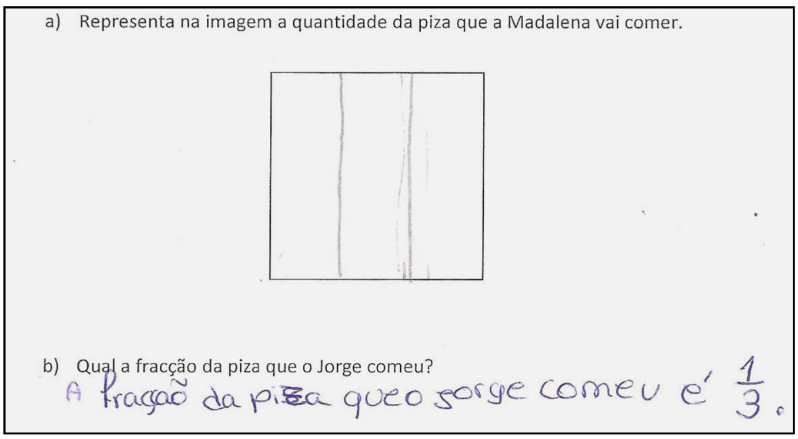
A aluna não diz "um terço" e "um meio" mas sim "um de três" e "um de dois". Aparentemente, não conhece os termos "um terço" e "um meio".

No entanto, a aluna evidencia confiança na representação escrita da fracção, mostrando compreender o significado do numerador e do denominador. Escreve a seguinte resposta:



E1-Q4b)

Na questão 3 do teste diagnóstico, semelhante à anterior, a aluna também representa correctamente a fracção em causa:



TD-Q3

Questão 9. Esta questão pede à aluna que represente a medida de um segmento de recta, utilizando como unidade de medida, outro segmento. Apresenta um contexto puramente matemático, no significado medida. A informação é dada em linguagem pictórica, podendo a resposta ser dada em fracção ou decimal.

A aluna mostra facilidade em compreender que a figura inicial representa a unidade e, com base nisso, compara-a com a figura que pretende medir:

Leonor: Mede 2 do (a).
Professora: Como é que tu chegaste a essa conclusão?
Leonor: Aqui (figura a) vamos ver quantos tracinhos, 1,2,3,4
Professora: A unidade tem…
Leonor: … 4. E isto aqui tem 8, são 2 unidades.

Na questão 9a) Leonor mostra perceber que se a unidade tem 4 "espaços" e se a figura a medir tem 8 "espaços" logo, a segunda figura mede dois e refere, especificamente, que são dois de *a*. Mostra perceber qual a unidade de medida usada e dá a resposta de acordo com essa unidade.

O mesmo acontece em 9b), sendo neste caso a figura a medir mais pequena do que a unidade. A aluna começa por verificar que, se a unidade são os quatro "espaços" e a figura tem apenas 2, então esta é metade da unidade e assim representa a medida do segmento *b* por comparação com o todo:

Leonor: Mede metade do a, que só tem 2 tracinhos.
Professora: Como é que representas isso?
Leonor: 0,5
Professora: 0,5 representa a metade?
Leonor: Sim

Leonor começa por representar a medida do segmento de recta *b* através do numeral decimal, que (tendo em conta o programa actual) terá sido, com grande probabilidade, a representação que mais trabalhou durante o 1.º ciclo. Contudo, como a aluna se estava a mostrar à vontade com a representação em fracção, tentei ir um pouco mais além, e perguntei-lhe como representaria aquele número numa fracção. Mais uma vez mostra ter adquirido ou construído, um "processo" que lhe permite facilmente escrever fracções, mas revela-se insegura no que diz respeito à posição do numerador e do denominador:

Professora: E se eu quisesse representar numa fracção? Como é que eu representava?

Leonor: Metade? 4 de 2.

Professora: Representa lá.

Leonor: Porque aqui são 4 risquinhos e aqui são só 2. Não, é 2 de 4.

Professora: Então representa lá aqui. Achas que isso também é a metade?

Leonor: Sim

Professora: Porquê?

Leonor: Porque isto aqui é 4, é a unidade e aqui são só 2, é a metade da unidade. É como se tivesse 2 pintados e 4 são a unidade.

A aluna usa a expressão “unidade” com frequência. É muito provável que tenha adoptado essa expressão do meu discurso, mas usa-a sempre de forma correcta e adequada.

Questão 1. Esta questão pede à aluna que, dada a parte, construa a unidade, o “todo”. O contexto é puramente matemático, no significado parte-todo. A informação é dada simultaneamente na representação pictórica e em fracção. Esta foi a primeira tarefa da entrevista e eu achei útil verificar como é que ela fazia a leitura da fracção:

Professora: Lê em voz alta.
Leonor: Se a figura seguinte representar um de três da unidade, desenha a figura completa. Está um pintado… São três e está um pintado.

Verifica-se que Leonor faz a leitura da fracção de acordo com a sua compreensão do significado de numerador e denominador.

Para resolver a questão a aluna, começa por considerá-la como a unidade. Tem lugar o seguinte diálogo:

Professora: Quer dizer então que tens de dividir a figura em 3?

Leonor: Sim.

Professora: É assim que tu representas a figura toda?

Leonor: Sim.

Professora: Este círculo é um terço da figura, como é que fica a figura completa?

Leonor: A figura toda são mais 3 “bolas”.

Professora: São mais 3 “bolas”? Então ao todo quantas figuras têm de ficar?

Leonor: 3… Não 4… Não 3, tenho de acrescentar mais 2.

Professora: Então temos de acrescentar mais 2 ou mais 3?

Leonor: Não mais 2.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque é um terço.

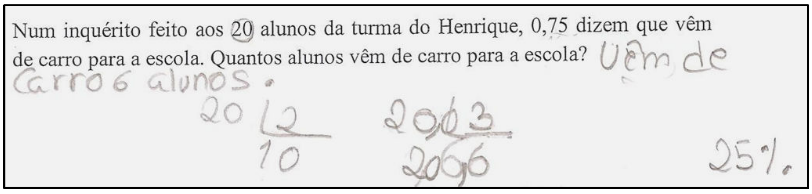
Professora: E o que é que quer dizer um terço?

Leonor: É uma figura e são 3… E está pintada 1

Perante a interpretação da aluna da figura como o todo, pergunto-lhe se é assim que pode obter a figura toda, e nesse momento a aluna percebe que, se se pede para representar a figura toda (completa), a figura apresentada tem de corresponder apenas a uma parte da unidade e altera o seu raciocínio.

Depois de perceber que a figura apresentada é apenas uma parte do todo, Leonor ainda mostra alguma confusão em relação àquilo que tem de acrescentar à figura. Começa por dizer que tem de acrescentar 3 "bolas" parecendo não estar a contar com a parte que já lá está. Depois, percebe que se juntar 3 "bolas" fica com um total de 4, o que não corresponde ao denominador da fracção. Por fim, reformula a resposta e conclui que apenas tem de acrescentar 2 "bolas" para ficar com um total de 3 e dessas, 1 está pintada. A partir daí aplica os seus conhecimentos sobre fracções, em que o todo é o denominador e a parte é o numerador.

Questão 10. Nesta questão é pedido à aluna que use um número decimal como operador para calcular uma parte de um todo. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado operador, envolvendo uma grandeza discreta. A informação é dada em linguagem verbal e a resposta pedida na mesma representação.


Num inquérito feito aos 20 alunos da turma do Henrique, 0,75 dizem que vêm de carro para a escola. Quantos alunos vêm de carro para a escola? Vêm de carro 6 alunos.

25%

E1-Q10

A aluna começa por tentar estabelecer uma relação entre o total de alunos, e aquilo que representa o todo em percentagem (100%). Tenta alvitrar algumas relações entre o operador e o total de crianças, assim Leonor começa por referir:

Leonor: faltam 25 para os 100, mas só metade, quase metade destes alunos é que não vão de carro para a escola, só. Quase todos os alunos é que vão para a escola, não é?

Professora: Os 20 alunos vão todos para a escola, agora uma parte desses vai de carro, outra vai de outros meios de transporte.

Leonor: Acho que vão 15.

Neste seu raciocínio inicial a aluna aparentemente divide a unidade (20 alunos) em quatro partes iguais e retira uma parte, pois refere que faltam 25 para os 100 (para o todo). Chega assim à resposta correcta. Contudo, quando lhe peço para explicar o seu raciocínio a aluna confunde-se e acaba por assumir uma relação incompleta:

Professora: Porquê?

Leonor: Porque metade de 20 é 10, mas não vão 50 (%) vão mais 25 (%)

Professora: Então faz lá um esquema que represente isso que estás a dizer.

Leonor: Eles são 20 e 25 (%) não vão de carro. 25 (%) não vão de carro, dos vinte.

Professora: Dos 20, 25 não vão de carro?

Leonor: 25% não vão de carro.

Professora: Ah! 25% não vão de carro é isso?

Leonor: Sim e os outros 75 (%) vão. E metade de 20 é 10. E eu quero encontrar a terça parte. Por isso já não sei se é assim.

Professora: Quantos 25's é que existem?

Leonor: 3. Então temos de fazer 25:3

Professora: No 100 quantos 25's existem?

Leonor: 4

Professora: E que relação é que tu estavas a fazer aqui quando fizeste a metade? Pensa lá aqui nesta relação que tu estavas a pensar. Se estavas a pensar no 25 estavas a comparar com "quem" para ires fazer a metade? Porque é que tu foste fazer a metade?

Leonor: Porque pensei na metade para chegar aos 75, mais os 25 que vão. Porque metade de 20 é 10. 75 é mais 25. 50 é metade. 50+25=75, fica a terça parte.

Professora: Então vê lá que caminho seguir…

Leonor: É melhor a terça parte…

Professora: Então pensando na terça parte, o que é que tu fizeste?

Leonor: Fiz 20 a dividir por 3.

Leonor reconhece que 50% representa a metade e percebe que um caminho a seguir seria perceber quantas vezes é que 25 cabe em 100. Apesar de ter alguma ideia sobre como resolver o problema, não consegue executar com sucesso a estratégia, pois usa 75% como unidade em vez de 100%, perde o 100 como referência e acaba por usar apenas 75. Assim, acaba por dividir o todo em três partes e não em quatro como seria correcto. Note-se que nunca usa a linguagem dos números decimais. Apesar de não o verbalizar, a aluna converte os decimais em percentagem, provavelmente porque lhe facilita os cálculos, o que significa que compreende que o mesmo número racional pode ser representado de diferentes formas e que consegue escolher aquela que mais lhe convém.

Síntese. Leonor revela uma compreensão básica do número racional, nos significados parte-todo, quociente, medida e operador. Dada uma unidade simples, consegue representar pictoricamente e em fracção uma parte dessa unidade, consegue também representar pictoricamente um todo a partir de uma das suas partes, apesar de se mostrar ainda um pouco insegura nesse processo. No entanto, embora consiga usar correctamente a representação em fracção, não conhece a forma convencional de ler essa representação. Assim, em vez de "um terço" diz "um de três". Revela compreender o significado do numerador, e do denominador. Consegue representar com sucesso uma fracção no significado quociente, numa situação simples de partilha de uma tarte por um grupo de pessoas, sem recorrer a outra representação como apoio.

A aluna mostra-se capaz de definir um segmento de recta como unidade de medida e usa-o com destreza para medir outro segmento de recta. Representa essa medida com facilidade na representação decimal e em fracção, usa o segmento de recta de apoio para imaginar o número de partes em que o todo pode estar dividido.

Mostra ainda compreender que um número racional pode ser representado de diferentes formas, percebendo, por exemplo, que 0,25 pode ser representado em percentagem como 25% e usa a representação que lhe dá mais jeito, ou que lhe facilita os cálculos, revelando algum sentido de número.

A aluna mostra dificuldade na utilização do operador decimal 0,75, não efectuando a operação multiplicação para determinar uma parte de um todo dado. Além disso, também não consegue executar correctamente a estratégia informal que delineou para resolver o problema, já que não consegue estabelecer a relação correcta entre o todo (20 e 100%) e a parte que quer encontrar (0,75, 75% ou $\frac{3}{4}$).

6.2.2. Comparação e ordenação de números racionais

Seguidamente apresento a análise do desempenho da aluna na resolução de tarefas de comparação e ordenação de números racionais, da primeira entrevista.

Questão 2 b). Esta questão pede que a aluna represente a distância entre duas fracções com o mesmo denominador. Apresenta uma situação contextualizada, com uma quantidade contínua no significado parte-todo, a informação é dada sob a forma de fracção, não existe nenhuma indicação sobre a representação a utilizar na resposta.

Leonor imagina um percurso com 6 etapas e assim consegue comparar com facilidade as fracções apresentadas. Utiliza o processo de construção de fracções onde se sente confiante, em que o denominador é o número total de partes do todo e o numerador representa as partes que se tomam do todo. Contudo, apresenta alguma dificuldade inicial na representação da distância sob a forma de fracção que se dissipam com a minha pergunta:

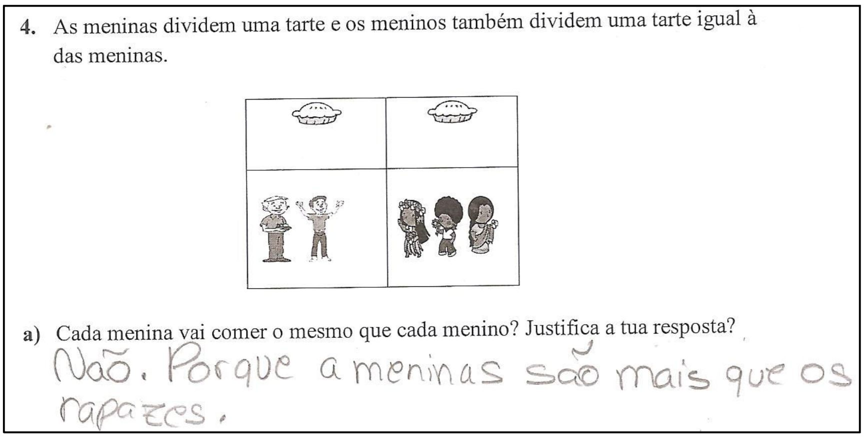
> **Leonor:** Aqui diz: indica a distância entre o Filipe e o Bernardo. Posso imaginar que são seis etapas?! E ele vai à frente por uma etapa.
>
> **Professora:** Uma etapa de quantas?...
>
> **Leonor:** Das 6…
>
> **Professora:** Como é que podemos representar isso com um número?
>
> **Leonor:** Uma das seis? São 6 etapas (escreve o denominador) e ele vai à frente uma (escreve o numerador).

A aluna apresenta apenas a reposta em fracção e em nenhum momento mostra estar a fazer alguma relação com outra representação. Este facto pode dever-se também ao facto de os dados serem apresentados em fracção.

Questão 4 a) e c). Esta questão pede para partilhar duas pizas iguais de duas maneiras diferentes, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, e comparar em que situação as fatias são maiores. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente. A informação é dada na representação pictórica e a resposta não é dada qualquer informação sobre a representação a utilizar na resposta.

Na questão 4 a), tal como já tinha mostrado em questões anteriores, Leonor mostra-se à vontade nas tarefas que envolvem fracções unitárias:

Leonor: Eu acho que não porque eles são só dois, eles aqui só têm que partir ao meio, e elas são três têm que se partir em 3 partes. Eu acho que não.


4. As meninas dividem uma tarte e os meninos também dividem uma tarte igual à das meninas.

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?

Não. Porque a meninas são mais que os rapazes.

E1-Q4a)

Resolve esta questão usando um raciocínio do dia-a-dia. Pela sua resposta parece uma questão de lógica, que as fatias da tarte ficam maiores se for partilhada apenas por 2 pessoas, em vez de 3. Leonor explica por um raciocínio análogo que $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, na questão 4 c):

Leonor: Quem come mais é o menino…são os meninos, porque só têm que dividir a metade.

Professora: E qual é que é a diferença entre dividir a metade e dividir em 3?

Leonor: A metade são em 2 e a terça parte temos que dividir em 3 e ficam mais pequenas, as fatias.

Nesta justificação, Leonor mostra perceber que, à medida que aumentamos o número de partes em que partimos o todo, as partes ficam mais pequenas, mostrando assim compreender a relação inversa entre o numerador e o denominador.

Questão 12. Nesta questão de comparação é pedido à aluna que escolha a maior fracção, entre o par apresentado. A questão apresenta um contexto puramente matemático, no significado medida, sendo a informação dada em fracção e a resposta pedida na mesma representação.

Leonor começa por tentar comparar mentalmente as fracções $\frac{3}{8}$ e $\frac{7}{8}$, hesita bastante e começa por fazer confusão entre o numerador e o denominador:

Professora: $\frac{3}{8}$ ou $\frac{7}{8}$ (Qual é o maior?)

Leonor: Sete… $\frac{3}{8}$.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque se formos dividir comemos mais porque está partido em menos.

Quando me apercebo que está a fazer confusão entre o numerador e o denominador, faço-lhe algumas perguntas com o propósito de verificar se é apenas um lapso de linguagem ou se tem alguma concepção errada:

Professora: O bolo aqui ($\frac{3}{8}$) está dividido em quantas fatias?

Leonor: Em 8

Professora: Quantas é que eu comi?

Leonor: 3

Professora: E aqui?

Leonor: Não aqui é maior ($\frac{7}{8}$)…

Professora: Porquê?

Leonor: Porque come-se mais

Professora: O bolo está partido em quantas partes?

Leonor: Em 8 também, mas come-se mais.

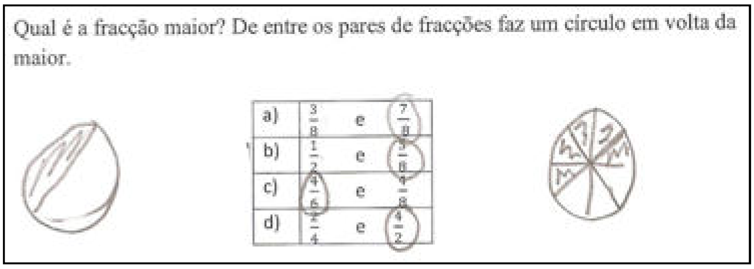
Verifica-se então que Leonor começa por fazer confusão entre a posição e o significado de numerador e de denominador. Após as várias perguntas que lhe faço, a aluna acaba por perceber que em ambos os casos o todo está partido no mesmo número de partes e aquilo que varia é o número de partes que se tomam.

Quando passa à questão seguinte, 12b), que é uma situação de comparação de duas fracções com numerador e denominador diferentes, e após um momento de análise a aluna acaba por usar a sugestão que lhe tinha feito na questão 5 b) e pergunta-me:

Leonor: Posso fazer aqui só para ver qual é o maior?

A aluna toma assim a iniciativa de usar como estratégia mudar para a representação pictórica, cada uma das fracções e assim compara-as com sucesso.

Na questão 12 b) Leonor usa desde logo a representação pictórica para comparar as duas fracções. Talvez, devido à falta de rigor na representação pictórica, começa por dizer que são iguais, que ambas representam a metade, mas depois acaba por concluir, por comparação com a metade, que a maior é $\frac{5}{8}$:



E1-Q12b)

Professora: E agora, ½ ou 5/8, qual é que é maior?

Leonor: Posso fazer aqui só para ver qual é o maior?

Professora: Sim

Leonor: São iguais

Professora: Pinta lá os $\frac{5}{8}$

Leonor: São iguais!

Professora: São iguais?

Leonor: Sim. Aqui é metade e aqui também é metade.

Professora: Aqui é metade? (apontei para $\frac{5}{8}$)

Leonor: Não aqui não é, aqui é que é metade ($\frac{1}{2}$)

Professora: Aqui ($\frac{5}{8}$) quantos é que tinham de estar pintadas para ser a metade?

Leonor: Mais… Menos uma

Professora: E então?

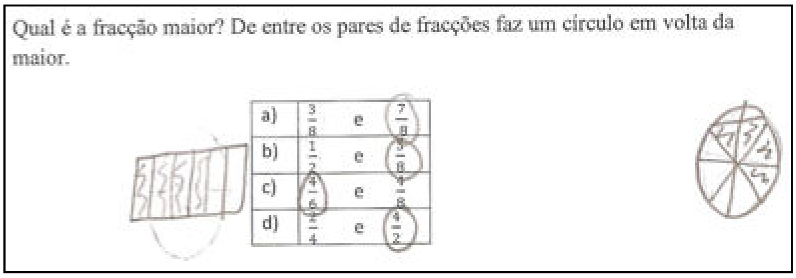
Leonor: A maior é esta ($\frac{5}{8}$)

Professora: Porquê?

Leonor: Porque está mais de metade pintada.

A aluna usa como referência a metade, mas este facto pode dever-se a uma das fracções envolvidas representar a metade. Contudo, mostra ainda perceber o que seria a metade numa divisão em 8 partes, mostra uma noção intuitiva de equivalência de fracções, neste caso particular entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$. Pode ainda inferir-se, perante estas relações, que a aluna pode estar a pensar na fracção como a relação entre o numerador e o denominador e não apenas como dois números inteiros separadamente.

A questão 12c) representa um par de fracções com o mesmo numerador e com denominadores diferentes. Neste caso, Leonor volta a mostrar dificuldades com a representação pictórica circular. Desde o início evidencia perceber que $\frac{4}{6}$ é maior, só que mostra necessidade de representar como forma de provar aquilo que está a pensar:



E1-Q12c)

Professora: E agora: $\frac{4}{6}$ ou $\frac{4}{8}$?

Leonor: $\frac{4}{6}$

Professora: Porquê?

Leonor: Porque se partirmos assim em 6…não é assim

Professora: Pois assim é em 8 e não em 6…aproveita esse fazer o $\frac{4}{8}$

Leonor: Posso apagar esta? ($\frac{1}{2}$)

Professora: Não apagues

Leonor: Então faço aqui mais pequeno.

Professora: Ok, mas aproveita esta já para fazeres os $\frac{4}{8}$. E depois faz noutro sítio os "sextos". (perante a dificuldade da aluna em dividir um círculo em 6 partes) podes não usar "pizas" podes usar outra figura.

Leonor: Um quadrado… vou experimentar um quadrado. Assim…

Professora: Agora aqui tens de pintar… 4 e aqui também… E então, onde é que pintámos mais?

Leonor: Aqui, pinto metade ($\frac{4}{8}$)…

Professora: E aqui ($\frac{4}{6}$) pintámos mais ou menos que a metade?... Faz lá uma marca na metade…

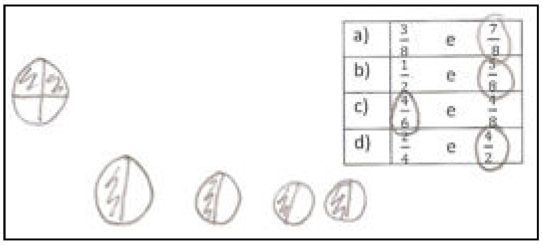
Leonor: Ah! Pintámos mais, pintámos mais que a metade aqui ($\frac{4}{6}$) e aqui ($\frac{4}{8}$) pintámos a metade.

Professora: Então, qual e a maior?

Leonor: Este ($\frac{4}{6}$).

Nesta questão, Leonor volta a usar a metade como referência apesar dessa fracção já não fazer parte das fracções a comparar. Usa uma estratégia informal de comparação de fracções definida por Post, Behr e Lesh (1986) como *comparação com sistemas de referência*, porque compara as fracções com a metade verificando na representação pictórica que $\frac{4}{6}$ é maior do que a metade e que $\frac{4}{8}$ é menor do que a anterior porque é igual à metade.

Na questão 12d) em que é apresentada uma fracção própria equivalente à metade ($\frac{2}{4}$) e uma fracção imprópria ($\frac{4}{2}$) a aluna usa a estratégia anterior e representa pictoricamente cada uma das fracções:



E1-Q12d)

Professora: E agora o último: $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$.

Leonor: Aqui come 2 de quatro fatias de uma piza. Aqui come metade de cada piza, metade de 4 pizas.

Professora: Quantas pizas come ($\frac{4}{2}$)? Se juntássemos as metades quantas pizas tinha?

Leonor: 2 pizas. E aqui só come metade… de uma (conclui que a maior é $\frac{4}{2}$)

Nesta questão a aluna não mostra qualquer dificuldade com a fracção imprópria, percebe com facilidade que $\frac{4}{2}$ são 4 metades de piza, representa quatro pizas e pinta a metade de cada uma. Quando pergunto quantas pizas completas representa, rapidamente afirma que 4 metades correspondem a 2 pizas e assim conclui que $\frac{4}{2}$ é maior do que $\frac{2}{4}$. Não mostra estranheza em relação à fracção imprópria. Essa facilidade pode dever-se ao facto de estar envolvida a noção de metade que parece ser algo muito familiar para a aluna.

Questão 2 a). Esta questão pede para ordenar um conjunto de fracções. Apresenta uma situação contextualizada, no significado parte-todo, a informação é dada em fracção e a resposta pode ser dada em qualquer representação de número racional.

Leonor, começa por imaginar um percurso total repartido em 6 etapas, o que significa que consegue interpretar o denominador como o número total de partes em que o todo está dividido e depois compara apenas os numeradores, como sendo as partes que cada um já tinha percorrido do total:

Leonor: (…) Quem vai em primeiro é o Filipe porque já percorreu mais do que o Bernardo e do que a Inês. Quem vai em segundo é…não quem vai em primeiro é a Inês, quem vai em segundo é o Filipe.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui são seis e ela já percorreu 5, aqui são 6 e ele já percorreu 4. Então quem já percorreu mais foi a Inês e a seguir o Filipe. (em seguida escreve a resposta)

Como se pode verificar no diálogo, para decidir quem vai em primeiro, Leonor compara os numeradores, dizendo que são 6 etapas e eles já percorreram 5 e 4 respectivamente. Apesar de ainda não a conhecer formalmente, acaba por usar a estratégia mais adequada para comparar facções com o mesmo denominador, percebendo que nestes casos apenas tem de comparar os numeradores.

Questão 5. As questões 5 a) e b) são questões de ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária, respectivamente. Trata-se de uma tarefa colocada num contexto puramente matemático, no significado medida.

Na questão 5a), Leonor começa por mostrar bastante à vontade na comparação dos dois números mais pequenos:

Leonor: o maior… É crescente… O mais pequeno… É o 0,45

Professora: Porquê?

Leonor: Porque se nós acrescentarmos mais um zero, fica 0,450 e este não, (este) fica 0,500… A seguir é o 0,5… Depois é o 2,29… Depois é o 2,200…

Contudo, mostra alguma confusão com os números 2,29 e 2,200. Começa por dizer que 2,200 é maior revelando alguma confusão entre 200 milésimas e 29 centésimas. Mas quando lhe peço que explique como está a pensar, a aluna consegue auto-corrigir-se percebendo que o maior número é 2,29 e não 2,200:

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui já estão os 2 zeros e aqui se acrescentar um zero aqui fica 290 e aqui está só 200

Professora: Então qual é o maior desses dois números?

Leonor: O maior destes dois números é este (2,29), não é este (2,200)… Tenho que trocar isto!

Professora: Não sei… Tens?

Leonor: Sim, porque o mais pequeno destes dois é este (2,200)… E depois é o 5,02.

Como estratégia para ordenar os números na representação decimal Leonor completa os números com zeros à direita até às milésimas e depois compara os números com a mesma quantidade de casas decimais. Parece já ter adquirido o processo mas por vezes ainda se confunde, o que pode significar que ainda não o compreendeu completamente.

A questão 5b) revela-se um problema difícil para a aluna já que esta não consegue fazer uma leitura correcta de números expressos nesta representação. Começa por dizer que a maior fracção é $\frac{1}{2}$ porque se fosse, por exemplo, um bolo isso significava que comeria a metade e, segundo ela, metade "é muito". Em contrapartida, $\frac{7}{8}$ não é tanto porque está "partido" em 8 partes. Ou seja, a aluna, aparentemente, está a comparar apenas o tamanho de uma fatia em cada caso e não está a tomar em consideração o facto de serem tomadas 7 fatias, como se pode verificar no seguinte diálogo:

Leonor: E agora tenho de por em [ordem] crescente estas, não é?

Professora: Sim. Essas quê?

Leonor: As fracções.

Professora: Qual é que é o mais pequenino?

Leonor: É o sete por oito.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui no um por dois, só temos 2 é a metade e aqui temos a quarta parte e aqui temos a oitava parte… Temos a sétima parte só temos que dividir… Por oito, são oito fatias e ele só come sete.

Professora: Só?

Leonor: Sim, e come menos. Muito menos do que se comesse um de dois.

Professora: Muito menos?

Leonor: Sim.

Professora: Quantas fatias me sobram?

Leonor: Uma.

Professora: Grande ou pequenina?

Leonor: Pequena

Professora: Então eu comi mais ou comi menos?

Leonor: Menos do que se comesse esta ($\frac{1}{2}$), porque (aqui) comia metade.

Professora: Mas se eu tenho 8 fatias e como sete e só me sobra uma pequenina eu como mais ou como menos do que se comer só uma que é a metade?

Leonor: … Menos (já com pouca convicção)

Professora: Menos?

Leonor: Acho que sim…

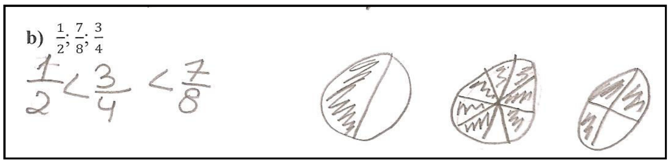
Professora: Porquê?

Leonor: Porque se comer esta come a metade e se comer esta come 7… Não assim come mais…

Leonor considera assim que $\frac{1}{2}$ é maior porque é uma fatia grande, enquanto aquilo que chama a "oitava parte" é mais pequeno. Na forma como faz a leitura da fracção percebe-se que compara apenas a fracção unitária em cada situação e não toma em consideração o numerador, ou seja, o número de partes do todo que se toma.

Eu fui fazendo perguntas à aluna no sentido de lhe dar contra-exemplos que a levassem a compreender o seu erro, e, por fim, quando a aluna já estava em contradição sugeri-lhe que representasse cada uma das fracções numa imagem, pois presumi que assim pudesse visualizar o tamanho de cada fracção e concluir que estava errada. A observação das imagens que representam as diferentes fracções leva a aluna a ordenálas correctamente. Neste caso, a mudança para a representação pictórica ajuda claramente a aluna na ordenação das fracções:

> **Professora:** Olhando agora para as imagens vê lá onde é que tu achas que se come menos e ordena.
>
> **Leonor:** Aqui come 7 fatias do bolo, aqui come uma que é a metade do bolo e aqui come a terça parte do bolo
>
> **Professora:** A terça parte?
>
> **Leonor:** A quarta…
>
> **Professora:** Quantas quartas partes?
>
> **Leonor:** Três quartas partes
>
> **Professora:** Então agora ordena lá as imagens. Neste caso ordenas as fracções olhando para as imagens. Qual é que tu achas que é a mais pequenina? Em qual é que tu achas que comes menos?
>
> **Leonor:** Em um por dois … e a seguir é 3 por 4… e depois o 7 por 8.
>
> **Professora:** Então? Mudámos de perspectiva? Aquele que era o mais pequenino passou a ser o maior?
>
> **Leonor:** Sim, porque come sete…
>
> **Professora:** O que é que mudou aqui? O que é que mudou em cada uma dessas imagens?... para além da quantidade que eles comeram à outra coisa que mudou. Tu partiste o bolo sempre da mesma maneira?
>
> **Leonor:** Não



E1-Q5b)

Esta discussão mostra-se muito produtiva, pois a aluna através da representação pictórica das fracções, tem contacto com a equivalência de duas representações diferentes de um número racional.

Síntese. Em situações simples, Leonor consegue interpretar comparar e ordenar uma fracção no significado parte-todo, quociente e medida. Mostra compreender o significado de numerador como o número de partes que se tomam de um todo e o denominador como o número de partes que constituem o todo, numa situação contextualizada. Mostra facilidade em comparar fracções próprias e impróprias quando as passa para a representação pictórica.

Para comparar dois números racionais com o mesmo denominador, compara apenas os numeradores, mostrando perceber que o todo tem o mesmo número de partes em cada caso. Inicialmente Leonor mostra ainda dificuldade na comparação de números racionais representados na forma de numeral decimal, quando estes têm um número diferente de casas decimais, por exemplo, 2,29 e 2,200. Mas, durante a realização da tarefa, lembra-se que para comparar números racionais representados na forma de numeral decimal, "acrescenta zeros", para que os números fiquem todos com o mesmo número de casas decimais (no caso milésimas) e depois compara-os. Esta dificuldade da aluna pode evidenciar que ela "adquiriu" um processo para resolver este tipo de exercício, mas que poderá não ter, ainda, desenvolvido totalmente a compreensão do sistema de numeração decimal e do significado deste processo.

Para comparar fracções, no caso, destas terem o mesmo denominador, compara apenas os numeradores. Neste caso, usa uma estratégia adequada e facilitadora, e um raciocínio intuitivo e informal já que nunca trabalhou formalmente a ordenação de fracções.

Apresenta dificuldades na ordenação e comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes, porque compara apenas os denominadores, apesar de ter mostrado compreender o significado de numerador e de denominador em casos anteriores. Mostra grandes dificuldades na leitura das fracções e isso, parece condicionar a forma como as compara e ordena. Por exemplo, lê "oitava parte" em vez de sete oitavos e depois considera esta fracção como a fracção unitária $\frac{1}{8}$ e não a fracção dada $\frac{7}{8}$. Contudo, após algum esforço, a aluna, socorre-se da representação pictórica de cada uma das fracções e, assim, consegue compará-las com sucesso.

6.3 Compreensão dos números racionais durante a unidade de ensino

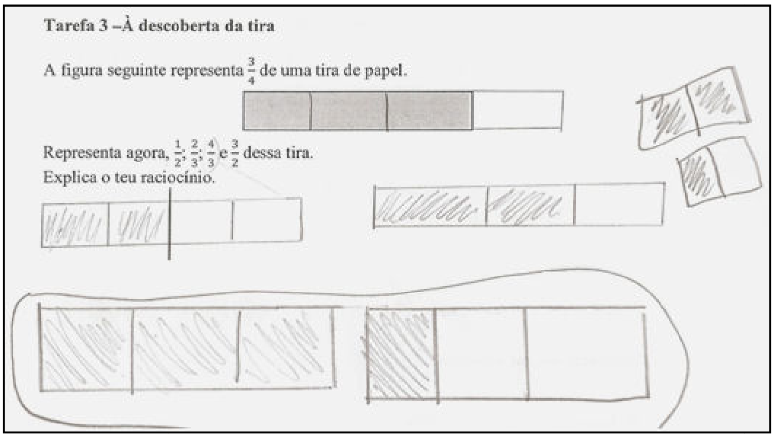
Tal como acontece na maioria das disciplinas, durante a unidade de ensino, Leonor é bastante participativa. Colabora nas discussões, atenta ao que os outros apresentam, mas mostrando sempre sentido crítico. Tenta compreender as resoluções dos colegas e quando não está de acordo intervém de modo a clarificar as situações.

Quando tem uma resolução ou estratégia diferente das apresentadas, pede sempre para apresentar a sua, como se viu no capítulo anterior. Mostra-se muito empenhada, tanto na realização das tarefas, como na sua discussão. Durante a unidade de ensino, na maioria das aulas, trabalha com a colega Amélia, que, tal como ela, é uma aluna com um bom aproveitamento, mas com um raciocínio lógico-abstrato menos desenvolvido. De seguida apresento algumas situações vividas durante estas aulas e que me parecem significativas no seu percurso, pelo seu potencial contributo na evolução da sua compreensão de número racional, das suas diferentes representações, da construção dos conceitos de todo e de parte, na comparação e ordenação de números racionais e na equivalência de fracções.

6.3.1. Representações

Na primeira entrevista Leonor não mostra dificuldade em construir as partes a partir do todo, mas tem alguma dificuldade em reconstruir a unidade a partir de uma parte ($\frac{1}{3}$), apesar de esta representar uma situação relativamente simples.

Durante a unidade de ensino a aluna não mostra dificuldades na reconstrução da unidade, na construção de partes, nem na construção de agregados de partes maiores do que a unidade. Vejamos o seu trabalho na Tarefa 3:

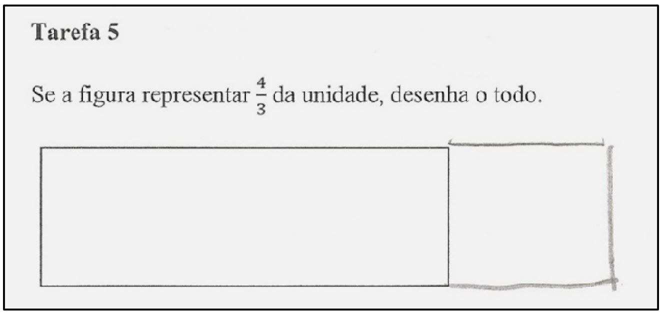


Leonor e Amélia, T3-FT3

Leonor, à semelhança de Amélia, começa por reconstruir a unidade a partir da fracção própria dada. Divide a parte apresentada em 3 partes e depois acrescenta uma parte para fazer o todo, que tem 4 partes. Posteriormente, volta a representar a tira de papel e a dividi-la de acordo com as fracções apresentadas, usando a divisão em 4 partes para representar $\frac{1}{2}$, apresentando assim a representação equivalente $\frac{2}{4}$. A partir da unidade consegue ainda representar pictoricamente fracções impróprias. Também é capaz de reconstruir a unidade usando a representação pictórica e a percentagem, partindo de uma parte da unidade, como se verifica na Tarefa 4:

Leonor e Amélia, T4-FT3

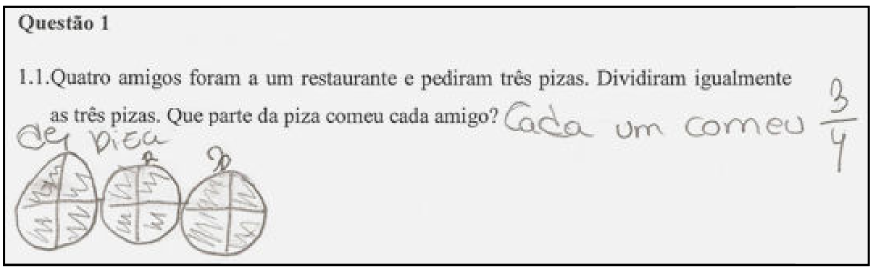
Contudo, as alunas não conseguem representar a unidade quando têm de partir de uma fracção imprópria:



Leonor e Amélia, T5-FT3

As alunas parecem ter transferido a estratégia usada anteriormente para esta nova situação. No entanto, talvez por se tratar de uma fracção imprópria, não compreendem que o todo está contido dentro do agregado das partes. Não percebem que neste caso, têm $\frac{1}{3}$ para além da unidade e que teriam de dividir a figura apresentada em 4 partes e pintar apenas 3.

Numa situação de partilha de três pizas por quatro amigos as alunas recorrem à representação pictórica para conseguirem representar a parte que cabe a cada amigo:



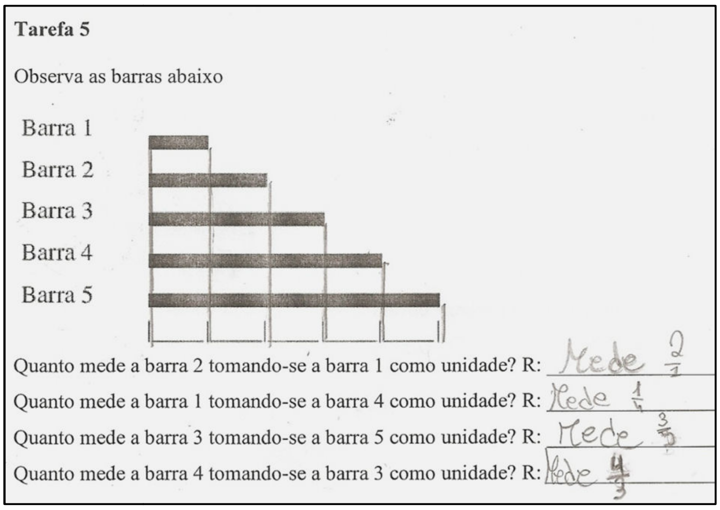
Leonor e Amélia, T1.Q1-FT4

Na discussão colectiva da tarefa as alunas referem que contaram as fatias a partir da imagem:

> **Leonor:** Nós contámos logo. Três do A, três do B…cada um comia 3 partes, então comia $\frac{3}{4}$.
>
> **Professora:** Então compreenderam logo que cada fatia correspondia ao tamanho…
>
> **Turma:** um quarto.
>
> **Amélia:** Oh professora, mas se cada um comia 3 partes era logo $\frac{3}{4}$.

Numa questão mais simples apresentada na primeira entrevista, Leonor consegue representar através de uma fracção unitária a parte de uma tarte que caberia a cada um de três meninos, mas em situações mais complicadas precisa de se apoiar na representação pictórica para conseguir determinar a parte que cabe a cada amigo.

Numa situação de medida, em que têm de medir quatro barras utilizando outras como unidade de medida, as alunas obtêm sucesso tanto com fracções próprias como com fracções impróprias:


Tarefa 5

Observa as barras abaixo

Barra 1
Barra 2
Barra 3
Barra 4
Barra 5

Quanto mede a barra 2 tomando-se a barra 1 como unidade? R: Mede $\frac{2}{1}$
Quanto mede a barra 1 tomando-se a barra 4 como unidade? R: Mede $\frac{1}{4}$
Quanto mede a barra 3 tomando-se a barra 5 como unidade? R: Mede $\frac{3}{5}$
Quanto mede a barra 4 tomando-se a barra 3 como unidade? R: Mede $\frac{4}{3}$

Leonor e Amélia, T5-FT4

Durante a discussão colectiva Amélia diz que a barra 2 mede "dois por um" da barra 1:

> **Professora:** Então vamos lá medir as barrinhas: "Quanto mede a barra 2 tomando a barra 1 como unidade?"
>
> **Amélia:** dois por um

Professora: explica

Amélia: Porque é dois da (barra) um.

Professora: Isto ($\frac{2}{1}$) representa que número?

Filipe: Oh professora eu pus aí 2 só.

Luís: É a metade, mas ao contrário.

Professora: Então mas isso ($\frac{2}{1}$) é que número? Qualquer número a dividir por um é?...

Aluno 1: um

Professora: é ele próprio, por isso não usamos a divisão por um. É apenas 2.

Na primeira entrevista, numa situação semelhante, Leonor diz que o segmento de recta c "Mede 2 unidades de a", usando um número inteiro para representar a medida de um segmento de recta. Como podemos ver na figura, as alunas dividem as barras de acordo com a grelha de apoio que existe por baixo e depois, ao representar o comprimento da barra, tentam usar a fracção indiscriminadamente.

Na questão seguinte, Leonor intervém na discussão indicando como determinou a medida da barra 1 tomando a barra 4 como unidade de medida:

Leonor: Eu sei. É um quarto…

Professora: É um quarto porquê?

Leonor: Porque são 4 e ele só cobre numa das partes.

Continuando a usar a divisão das barras para se apoiar na medição, Leonor revela então compreender a forma de medir uma parte da unidade.

A sua intervenção na última questão revela também a sua compreensão na medida de barras maiores do que a unidade:

Leonor: Nós temos $\frac{4}{3}$. Porque depois passa para outra barra. Eram $\frac{3}{3}$ e depois mais um.

A aluna consegue determinar a unidade dizendo que tem $\frac{3}{3}$ e depois mostra compreender que é maior do que a unidade e, por isso, tem mais $\frac{1}{3}$.

Numa situação em que têm de usar uma fracção como operador, apesar de já terem trabalhado anteriormente esta situação, as alunas optam por transformar a fracção em decimal e usar o valor obtido como operador.

> 1.2. Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.
>
> $4 : 10 = 0,4$
>
> $4 \times 0,4 = 1,6$
>
> das duas da yoana e da Maria

Leonor e Amélia, T1.Q1-FT6

Leonor, na primeira entrevista, não tinha conseguido usar um numeral decimal como operador e tentou encontrar uma estratégia informal, mas não a conseguiu concluir com sucesso. Nesta fase já consegue usar um numeral decimal como operador, mas não usa a fracção.

6.3.2. Comparação e ordenação de números racionais

Quando solicitadas a comparar a fracção $\frac{3}{8}$ com a unidade, as alunas (Leonor e Amélia) começam por determinar a fracção que representa a unidade:

> 2.2. Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio. Cada amigo ... Comeu menos do que ume piza. Porque a pita tem oito oitavos e cada amigos só comeu três oitavos.

Leonor e Amélia, T1.Q2-FT4

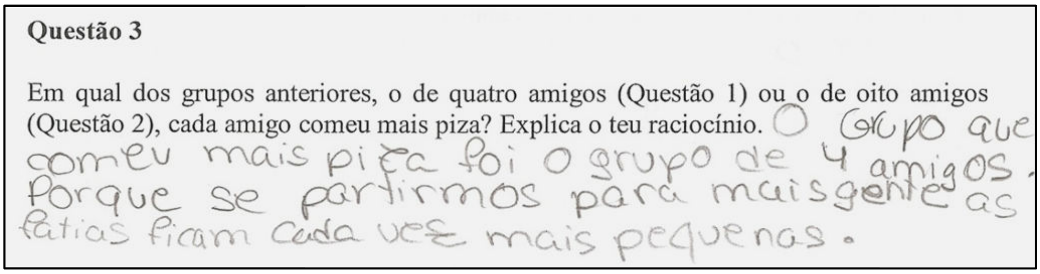
Amélia: Comeu menos do que uma piza porque uma piza tem oito oitavos e eles só comeram 3 oitavos.

Professora: Então $\frac{3}{8}$ é menor do que $\frac{8}{8}$.

Amélia: Sim isso é uma unidade os oito oitavos

Assim, como explica Amélia, para comparar uma fracção com a unidade, as alunas convertem a unidade numa fracção com denominador 8 e concluem que $\frac{3}{8}$ é menor do que $\frac{8}{8}$, por comparação dos numeradores. Já na primeira entrevista, Leonor tinha usado esta estratégia para comparar fracções com denominadores iguais.

Como já foi referido no capítulo anterior, para comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$, as alunas usam um raciocínio informal, do dia-a-dia:


Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio. O grupo que comeu mais piza foi o grupo de 4 amigos. Porque se partirmos para mais gente as fatias ficam cada vez mais pequenas.

Leonor e Amélia, T1.Q3-FT4

Professora: Em qual dos grupos anteriores, cada amigo comeu mais piza?

Nuno: Eu acho que foi na questão 1, porque na 2 tínhamos que dividir as pizas para 8 pessoas e na 1 só tínhamos 4 pessoas.

André: Pois tínhamos menos pessoas para distribuir.

Professora: E a quantidade de piza é sempre a mesma, não é?

Amélia e Leonor: Pois nós também pensámos assim, só que dissemos que as fatias assim ficavam cada vez mais pequeninas.

Amélia: Podemos concluir que comem o mesmo número de fatias, mas como partimos por menos pessoas (na questão 1) as fatias são maiores.

As alunas concluem que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{3}{8}$ porque em ambos os casos o número de fatias é igual, mas na primeira situação ($\frac{3}{4}$) as fatias são maiores porque dividem as pizas por menos pessoas, usando, por isso, uma estratégia informal. Reconhecendo assim a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que a unidade está dividida.

A Tarefa 3 da Ficha de Trabalho 4, solicita aos alunos que ordenem um conjunto de 4 números racionais representados sob a forma de fracção, percentagem e numeral decimal. Após Miguel apresentar a sua resolução da tarefa, Leonor intervém para discordar da resposta do colega:

Miguel: O primeiro é 1 de 4.

Professora: Porquê?

Miguel: Porque $\frac{1}{4}$ é igual a 0,25.

Professora: Que é igual a 25%? Ok

Miguel: A seguir é o 0,267

Professora: E a seguir?

Miguel: 26%.

Professora: E a seguir?

Miguel: Sete décimos.

Leonor: Eu acho que está mal. $\frac{1}{4}$ está certo, mas o outro dava 26,7%.

Professora: Se tu fosses transformar isto em percentagem…

Leonor: Dava 26,7%.

Professora: E então concordam?

Turma: sim

Leonor: Temos de trocar o 0,267 com o 26%.

Professora: Mas também podíamos transformar o 26% em decimal, como é que ficava?

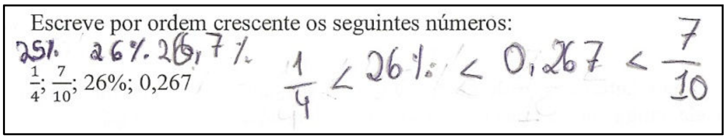
Leonor: 0,260.

Professora: Então comparando as percentagens ou os decimais chegamos à mesma conclusão. Então e o $\frac{7}{10}$, fica ali porquê?

Aluno: É como se fosse 0,700.

Professora: E em percentagem?

Leonor: 70%.


Escreve por ordem crescente os seguintes números:

25% 26% 26,7 %

$\frac{1}{4}$; $\frac{7}{10}$; 26%; 0,267 $\quad \frac{1}{4} < 26\% < 0,267 < \frac{7}{10}$

Leonor, T3-FT4

Neste caso, para comparar os números apresentados, a aluna transforma todos os números em percentagem, compara-os nesta representação, e apresenta a resposta nas representações indicadas na pergunta. Na primeira entrevista a aluna tinha usado essencialmente a representação pictórica para comparar fracções e nesta fase já consegue converter, com destreza, fracções e decimais em percentagens e usar essa representação na respectiva ordenação.

Na Tarefa 3 da Ficha de Trabalho 5, a aluna é solicitada a comparar cinco pares de fracções. No primeiro caso é pedido que compare $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$, a aluna e a colega (Diana) cometem um erro ao considerar $\frac{3}{4}$ maior do que $\frac{4}{5}$:

Professora: Então qual é que é o maior?

Leonor e Diana: $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Diana: Professora, deixe-me explicar porque é que é o $\frac{3}{4}$.

Professora: Então diz lá.

Diana: Porque se nós dividirmos a piza em…

Leonor: Em $\frac{3}{4}$**.**

Diana: Em $\frac{3}{4}$…

Leonor: As fatias são maiores.

Diana: Em $\frac{3}{4}$ ficam as fatias maiores.

Leonor: Pois é, são maiores do que se dividíssemos em $\frac{4}{5}$.

As alunas referem que $\frac{3}{4}$ é a fracção maior porque comparam apenas as fracções unitárias, não consideram a fracção composta, por isso, referem que em $\frac{3}{4}$ as fatias são maiores. Neste caso não recorrem à representação pictórica para resolver a tarefa ou como forma de provar os resultados, ao contrário do que Leonor fez na primeira entrevista e que lhe permitiu ter sucesso nessa fase. Neste caso mais abstracto, as alunas não compreenderam a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que o todo está dividido.

Ainda na Ficha de Trabalho 5, na Tarefa 6, Leonor compara 3 fracções usando apenas estratégias informais:

Leonor: $\mathbf{\frac{3}{8}}$ sabemos que é menos do que a metade, porque $\frac{4}{8}$ é que é a metade, porque 4 é metade de 8.

Professora: Então dizemos que este ($\frac{3}{8}$) é do:

Leonor: André… Não é o Luís, é o Luís. O André diz que comeu mais do que a metade. 2,5 é metade de 5

Professora: 3 é maior do que 2,5 logo

Leonor: É mais do que a metade, esse ($\frac{3}{5}$) é do André. E o Diogo não comeu quase nada, é esse ($\frac{2}{20}$).

Para comparar $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{20}$, a aluna usa como referência a metade e o zero. Imagina o que seria a metade em cada uma das fracções e depois determina se a fracção está acima ou abaixo dessa fracção, obtendo sucesso em todas as situações.

Na Ficha de Trabalho 6, entre outras tarefas de ordenação de números racionais na recta numérica, é pedido aos alunos, na Questão 4, que assinalem dois números entre 2 e $2\frac{1}{2}$:

Professora: Assinala dois números que estejam entre A e B.

Leonor: Podemos transformar em decimais…

Professora: Sim podes, isto é o 2 e isto o dois e meio. E podes dizer dois números decimais que estejam entre eles…

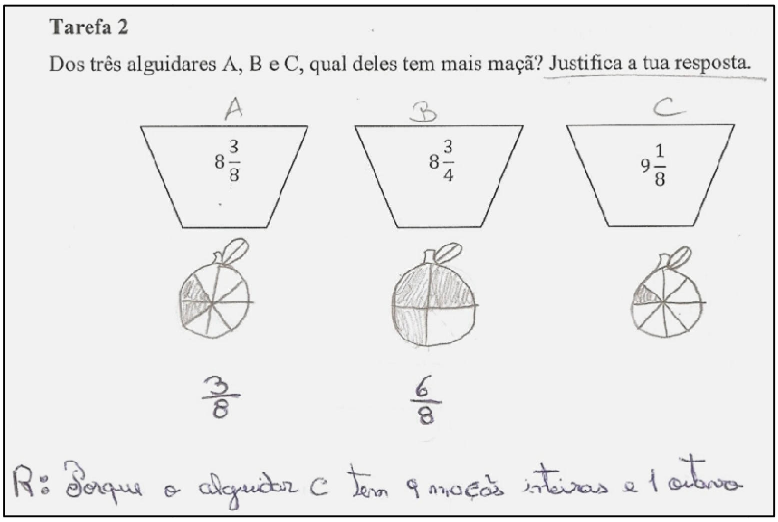
Leonor: Sim o 2,1 e o 2,4.

Professora: E fracções que estejam ali no meio?

Nesta tarefa já se começa a notar Leonor mais presa às estratégias formais, pois sugere que se transforme $2\frac{1}{2}$ em decimal e se assinalem números decimais em vez de numerais mistos fraccionários, revelando-se mais à vontade com esta representação, apesar de mostrar compreender as restantes.

6.3.3. Equivalência de fracções

Nas tarefas sobre equivalência de fracções, Leonor não se mostra especialmente participativa, o que pode sugerir alguma falta de confiança na sua utilização. Contudo, usa a equivalência na comparação de numerais mistos fraccionários:



Leonor e Amélia, T2-FT3

A aluna compara os números inteiros e as partes fraccionárias em cada um dos casos. Transforma $\frac{3}{4}$ numa fracção equivalente ($\frac{6}{8}$) com o mesmo denominador das restantes fracções para se certificar que o maior número é efectivamente $9\frac{1}{8}$.

Na segunda questão da Tarefa 2 da Ficha de Trabalho 4, a aluna apesar de não ter conseguido concluir na sua resolução que $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, revela compreender a explicação de Miguel e acaba por ajudá-la a explicar aos outros colegas:

Miguel: Isso ai é como se fizéssemos 3+3+3+3. Ele deu 9 e depois ainda sobraram mais 3 tampas. É como se fosse 3 de 4.

Professora: Então isto (3 tampinhas) representa que parte do todo?

Turma: A quarta parte.

Leonor: Sim, é como se fosse 3 tampinhas $\frac{1}{4}$, 6 tampinhas $\frac{2}{4}$ …

Professora: Isto tudo (9 tampinhas) $\frac{3}{4}$.

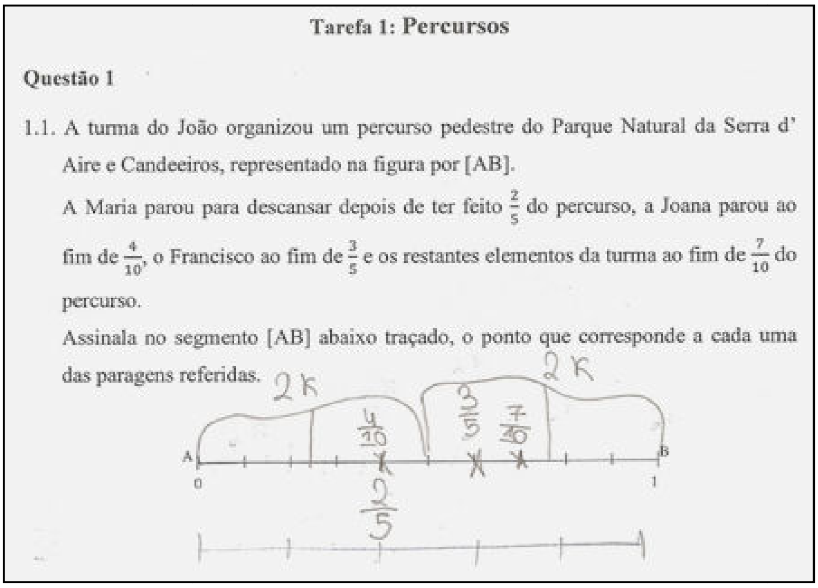
Leonor: O que ele deu, as nove tampinhas, representam $\frac{3}{4}$.

Professora: $\frac{3}{4}$ das …

Leonor: Das 12 tampinhas.

Leonor revela compreender a equivalência de fracções utilizando conjuntos de quantidades discretas através da fracção unitária.

Na Ficha de Trabalho 6, utiliza a equivalência de fracções para marcar pontos na recta numérica:


Tarefa 1: Percursos

Questão 1

1.1. A turma do João organizou um percurso pedestre do Parque Natural da Serra d' Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB].

A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.

Leonor e Amélia, T1.Q1-FT6

Como é possível verificar na imagem, a aluna utiliza a recta numérica dada para marcar as fracções com denominador é 10 e marca uma segunda recta numérica de apoio dividida em 5 partes. Através destas duas rectas a aluna determina fracções equivalentes, concluindo que a Maria e a Joana percorreram a mesma parte do percurso e que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

6.4. Compreensão dos números racionais após a unidade de ensino

6.4.1. Representações

De seguida apresento a análise da resolução de tarefas relativas à construção de partes e reconstrução da unidade, da segunda entrevista.[2]

Questão 6. Nesta questão é dado o "todo" e pedida a parte, surgindo nas alíneas a) e b) fracções próprias e na alínea c) uma fracção imprópria. Apresenta um contexto puramente matemático, no significado parte-todo, a informação é dada na representação pictórica e em linguagem verbal e a resposta é pedida na representação pictórica.

[2] À semelhança do que aconteceu no ponto anterior, as tarefas são apresentadas numa ordem diferente da seguida na entrevista.

A aluna não mostra qualquer dificuldade, tanto na representação de fracções próprias como na situação em que tem de representar uma fracção imprópria:

Professora: Se a figura seguinte representar a unidade, pinta: a) Um quarto.

Leonor: Dividimos em 4 partes e pintamos uma.

Professora: As partes são todas iguais?

Leonor: Acho que sim

Professora: Têm de ser ou podem não ser?

Leonor: Têm de ser.

Professora: Então?

Leonor: Temos de usar a régua.

Professora: E agora: dois terços.

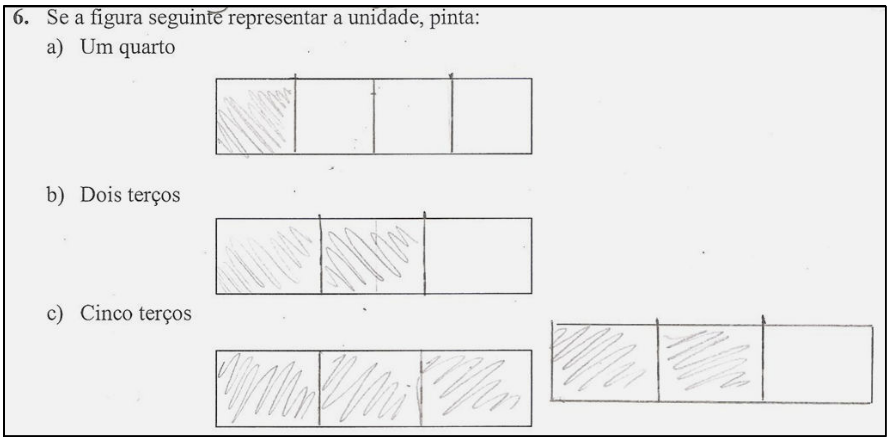
Leonor: Dividimos em 3 e pintamos 2

Professora: Então o que é que já estás a fazer?

Leonor: Estou a fazer este são cinco terços, temos que acrescentar mas temos que dividir também em 3. Mas não chega, faltam mais. Vamos acrescentar podemos fazer outra barra com 3, dividimos também em 3. Aqui pintamos 3 (1.ª barra) e aqui (2.ª barra) pintamos mais 2.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui são 3 terços e aqui ($\frac{5}{3}$) já passa da unidade, temos que fazer outra barra igual e acrescentar mais 2 para chegar aos 5.



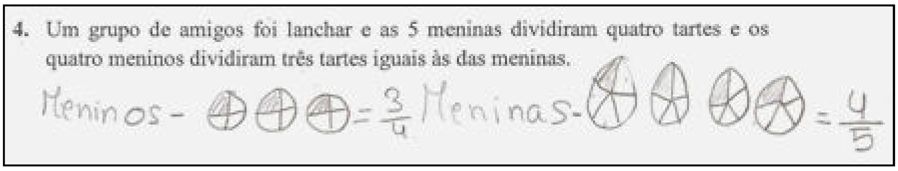
E2-Q6

Nas alíneas a) e b), Leonor percebe facilmente que tem apenas de "dividir" as barras, em quatro e três partes, respectivamente, e depois só pinta o número de partes indicadas pelo numerador.

Na alínea c) a aluna começa por desenhar uma segunda barra e, quando lhe perguntei porquê, mostra prontamente que percebe o que está a fazer, pois refere que $\frac{5}{3}$ é maior do que a unidade e que, por isso, tem de representar outra unidade igualmente dividida em 3 partes. Mostra perceber que o denominador define o "tamanho" das partes independentemente da quantidade de unidades. Por fim, explica que tem uma unidade inteira que são $\frac{3}{3}$ e na outra unidade que desenhou devem estar os restantes $\frac{2}{3}$.

Questão 4 b). Esta questão requer que a aluna partilhe 4 tartes por 5 meninas e 3 tartes por 4 meninos e represente em forma de fracção a parte da tarte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente, sendo a informação dada em linguagem verbal.

A aluna responde a esta tarefa com base na alínea anterior, pois, para responder à questão: "Cada menina vai comer o mesmo que cada menino?" Leonor começa por representar a fracção da tarte que cabe a cada um. Em primeiro lugar recorre à representação pictórica para representar a situação e de seguida conclui, ainda na alínea a), que a fracção da tarte que cabe a cada menino é $\frac{3}{4}$ e a cada menina $\frac{4}{5}$:


4. Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

Meninos - $= \frac{3}{4}$ Meninas - $= \frac{4}{5}$

E2-Q4a)

Leonor: Aqui podemos fazer 4 tartes, este é o caso das meninas…

Professora: Então tens de identificar aqui: meninas.

Leonor: E pintávamos $\frac{1}{5}$ de cada tarte

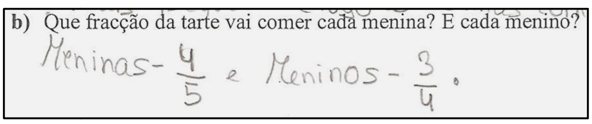
Professora: E cada um comia…

Leonor: Comia 4 quintos

Professora: (…) agora os meninos…

Leonor: E eles comeram 3 quartos

Leonor: Já sei esta, cada menina vai comer $\frac{4}{5}$ e cada menino vai comer $\frac{3}{4}$.

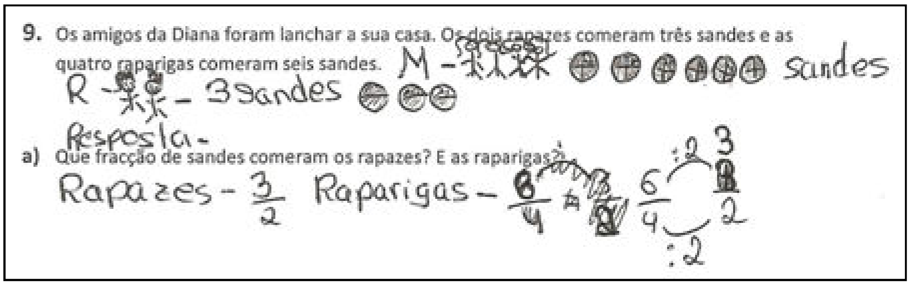

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

Meninas - $\frac{4}{5}$ e Meninos - $\frac{3}{4}$.

E2-Q4b)

Leonor não mostra qualquer dificuldade na representação em fracção da parte da tarte que cabe a cada menina e a cada menina, mas, aparentemente, ainda se socorre da representação pictórica para chegar à representação em fracção.

Também no pós-teste, na questão 9, é pedido à aluna que represente na forma de fracção a parte das sandes que os meninos e as meninas vão comer:


9. Os amigos da Diana foram lanchar a sua casa. Os dois rapazes comeram três sandes e as quatro raparigas comeram seis sandes.

M – 6 sandes

R – 3 sandes

Resposta -

a) Que fracção de sandes comeram os rapazes? E as raparigas?

Rapazes – $\frac{3}{2}$ Raparigas – $\frac{6}{4}$ $\frac{6}{4} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{3}{2}$

PT-Q9

Neste caso a aluna tem igualmente necessidade de recorrer à representação pictórica para representar a situação, o que pode evidenciar que ainda se sente insegura e recorre a esta representação para justificar e certificar-se da sua resposta, procurando consistência na representação com que tem mais à vontade.

Questão 8. Esta questão pede à aluna que represente a medida de uma barra, utilizando outra barra como unidade de medida. O contexto é puramente matemático, no significado medida. A informação é dada em linguagem pictórica e a resposta é pedida em fracção ou decimal.

A aluna usa o segmento de recta de apoio que existe e imagina as partições na barra:

Professora: Observa a figura seguinte: Utilizando como unidade de medida a barra A, quanto mede a barra B?

Leonor: $\frac{3}{5}$.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque ao todo está dividido em 5 partes, é como se estivesse dividido em 5 partes, como aqui em baixo e depois ele é como se só estivesse pintado 3 e por isso são $\frac{3}{5}$.

Professora: O seguinte: Utilizando como unidade de medida a barra B, quanto mede a barra A?

Leonor: 5 de 3

Professora: Porquê?

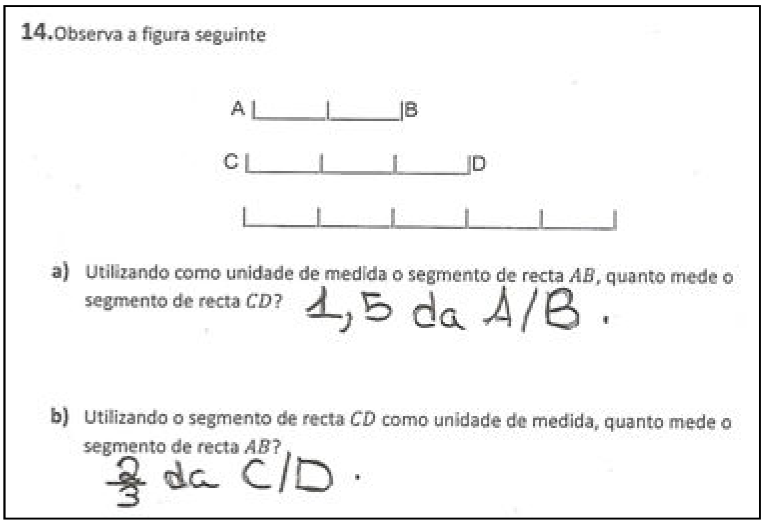
Leonor: Porque a unidade é como se fosse 3 e já passou da unidade, está pintado mais do que a unidade por isso temos que acrescentar. Podemos fazer mais outro e pintar mais 2.

Na alínea a), a aluna apoia-se no segmento de recta e imagina a barra A "dividida" em 5 partes e considera-a a unidade. Depois, verifica que a barra B tem apenas 3 partes, e dá a resposta correcta $\frac{3}{5}$. No entanto, não faz referência à unidade na resposta ao contrário do que tinha feito na primeira entrevista.

Na alínea b), a aluna verifica que a barra A é maior do que a unidade. Então, como ela própria diz, "acrescentou mais uma unidade".

A aluna usa sempre a representação em fracção para resolver as questões e não mostra em algum momento estar a estabelecer relações com a representação decimal, ao contrário do que aconteceu na primeira entrevista, onde usa sempre a representação decimal. Este facto pode dever-se à natureza dos números envolvidos, pois, enquanto na primeira entrevista os números são 2 e 0,5, na segunda são $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$. Os primeiros estão mais relacionados com a representação decimal e os segundos são mais fáceis de representar em fracção. Para além disso, a existência do segmento de recta divido em 5 partes pode ter influenciado a aluna a utilizar a representação em fracção.

A aluna parece conseguir adequar a representação aos números envolvidos e à situação. Na questão 14 do pós-teste, semelhante às anteriores, na alínea a), a aluna utiliza a representação decimal para lidar com 1,5 (um número bastante familiar nesta representação) e na alínea b) usa a representação em fracção, o que revela alguma capacidade para decidir sobre a melhor representação para responder a um problema.



14. Observa a figura seguinte

A |____|____| B

C |____|____|____| D

|____|____|____|____|____|

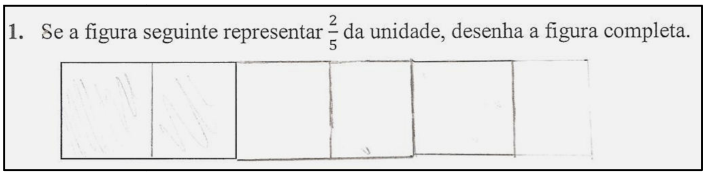
a) Utilizando como unidade de medida o segmento de recta AB, quanto mede o segmento de recta CD? 1,5 da A/B.

b) Utilizando o segmento de recta CD como unidade de medida, quanto mede o segmento de recta AB?
$\frac{2}{3}$ da C/D.

PT-Q14

Verifica-se ainda que, no pós-teste, a aluna faz referência à unidade de medida utilizada, tal como fez na primeira entrevista, mas não fez na segunda entrevista.

Questão 1. Nesta questão é dada a parte e pedida a construção da unidade, o "todo". A questão é apresentada um contexto puramente matemático, no significado parte-todo, sendo a informação dada simultaneamente na representação pictórica e em fracção e o resultado é pedido na representação pictórica.



E2-Q1

A aluna não mostra qualquer dificuldade na resolução desta questão.

Leonor: Se a figura seguinte representar $\frac{2}{5}$ da unidade, desenha a figura completa. (Leonor desenhou em silêncio durante algum tempo)

Professora: Então isso é o todo? Explica lá como é que fizeste?

Leonor: Fiz que, eram dois quintos tínhamos que dividir em 2… Se temos $\frac{2}{5}$ temos que dividir em 2… Mas tínhamos que acrescentar porque só estavam os 2 e não estavam os 5

Professora: Porque o todo é o quê?

Leonor: 5… Este podia-se apagar… E aqui só pinto 2.

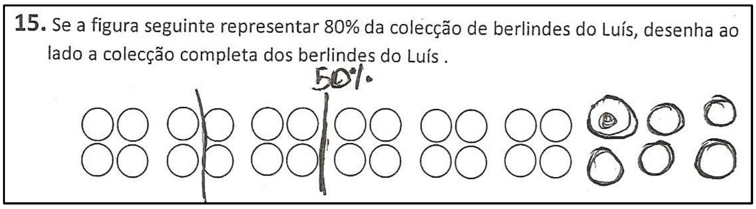
Professora: Mas a questão diz para representar o todo… "Desenha a figura completa".

Leonor: Então não preciso de pintar nenhuma.

Professora: Era só representar a figura toda.

Começa por dividir a figura que lhe é dada em duas partes iguais, mostrando compreender que a figura representa duas partes do todo. Depois, desenha 3 figuras iguais à dada, divide cada figura em 2 partes e obtém 6 partes. Verifica que o todo tem apenas 5 partes, e que lhe sobra uma parte e apaga a parte que lhe sobra. Assim, a aluna mostra compreender o significado do numerador e do denominador e não mostra qualquer dificuldade com a construção da unidade a partir das suas partes.

Questão 15 do Pós-Teste. Esta questão pede à aluna que, dada a parte, construa a unidade, o "todo". Trata-se de uma situação contextualizada, com quantidades discretas no significado parte-todo. A informação é dada simultaneamente na representação pictórica e em percentagem, a resposta é pedida na representação pictórica.

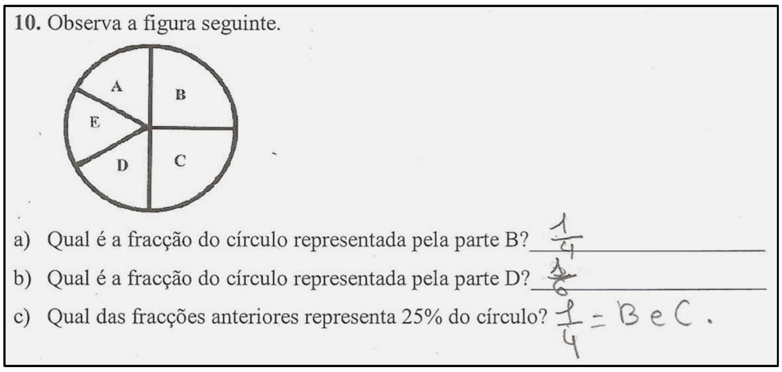

15. Se a figura seguinte representar 80% da colecção de berlindes do Luís, desenha ao lado a colecção completa dos berlindes do Luís .

50%

PT-Q15

A aluna resolve esta questão com sucesso e, pelos registos apresentados, começa por perceber que faltam 20% para o final e decide dividir 80% em 4 partes iguais que representam esses 20%. Depois, acrescenta uma parte igual à encontrada (20%) e completa a unidade. A aluna mostra assim à vontade na construção da unidade não só na representação em fracção, mas também na representação pictórica tendo por base a representação em percentagem.

Questão 10. Esta questão pede à aluna que, dada uma figura com diferentes partes, represente em fracção duas dessas partes, 10 a) e b) e que identifique a percentagem (25%) numa dessas partes. O contexto é puramente matemático, no significado parte-todo. A informação é dada pictoricamente e a resposta é pedida em fracção.


10. Observa a figura seguinte.

a) Qual é a fracção do círculo representada pela parte B? $\frac{1}{4}$

b) Qual é a fracção do círculo representada pela parte D? $\frac{1}{6}$

c) Qual das fracções anteriores representa 25% do círculo? $\frac{1}{4}$ = B e C .

E2-Q10

Nas questões a) e b) a aluna mostra facilidade em abstrair-se das linhas e do facto de as partes estarem divididas de formas diferentes. Como ela própria afirma “se partisse assim ficavam todos iguais”. Imagina uma figura onde as partes são todas iguais à B e depois à D e a partir daí representa a fracção com sucesso.

Professora: Observa a figura seguinte. Qual é a fracção do círculo representada pela parte B?

Leonor: É $\frac{1}{4}$, porque se agente partisse isto assim ficava este assim e ficavam todos iguais.

Professora: E a seguir: Qual é a fracção do círculo representada pela parte D?

Na questão b), a aluna considera em primeiro lugar a divisão que representa a metade. Depois, considera a existência de 3 fatias em cada metade e, por fim, conclui que o "todo" tem 6 fatias e que a parte D representa apenas $\frac{1}{6}$ da figura:

Leonor: Se nós partíssemos as metades ficava 3 mais 3 deste lado 6, $\frac{3}{3}$… $\frac{3}{6}$

Professora: A D representa $\frac{3}{6}$?

Leonor: Não é $\frac{1}{6}$, porque é só um.

Na questão c), Leonor inicialmente mostra alguma confusão com a resposta a dar, mas mostra conhecer e saber relacionar as representações pictórica, percentagem e fracção de um número racional de referência (25%). Evidencia destreza na conversão.

Professora: Qual das fracções anteriores representa 25% do círculo?

Leonor: $\frac{1}{4}$

Professora: Que é? …

Leonor: 25%

Professora: Mas entre a A, B, C, D ou E?

Leonor: É a B

Professora: Só?

Leonor: E a C também.

Questão 9. Nesta questão é pedido à aluna que use uma fracção e uma percentagem como operadores para calcular partes de um todo. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado operador, envolvendo grandezas discretas. A informação dada em linguagem verbal, fracção, numeral decimal e percentagem e a resposta pedida é um número inteiro.

9. Numa escola básica com 600 alunos, $\frac{2}{3}$ são rapazes e destes, 50% tem mais de 12 anos. Quantos rapazes com mais de 12 anos há nesta escola?

2 : 3 = 0,66   600 x 0,66 = 396   396 : 2 : 198

Há 198 rapazes com mais de 12 anos.

E2-Q9

A aluna começa por fazer os cálculos na calculadora, ao mesmo tempo que explica oralmente e depois é que faz o registo escrito. Mostra compreender o enunciado e começa desde logo por delinear uma estratégia adequada que depois operacionaliza:

Professora: Numa escola básica com 600 alunos, $\frac{2}{3}$ são rapazes e destes, 50% tem mais de 12 anos. Quantos rapazes com mais de 12 anos há nesta escola?

Leonor: 600 alunos, tenho que saber quanto é que é $\frac{2}{3}$, podemos dividir $\frac{2}{3}$ que dá 0,66. Vamos fazer… É 300 a metade.

Professora: Então mas espera lá, Numa escola básica com 600 alunos, $\frac{2}{3}$ são rapazes e desses $\frac{2}{3}$ só 50% é que têm mais de 12 anos. Então tens de saber primeiro

Leonor: $\frac{2}{3}$ de 600. Então fazemos 600 vezes… Nós já tínhamos dividido (2:3) por isso é o que deu aqui.. 396. Agora nós queremos saber… Já sabemos quantos rapazes é que existem e agora temos que saber a metade de 396.

Professora: Espera representa primeiro tudo o que já fizeste.

Leonor: (pensa alto, enquanto escreve) 2:3 que é 0,66 e depois 600 vezes 0,66 dá 396…

(…)

Leonor: Professora, já fiz. Então fiz 2:3 é igual a 0,66, escrevi aqui os meus cálculos todos. Depois fiz 600 alunos vezes 0,66 que vai dar 396 e depois 396 a dividir por 2 que é para saber a metade que dá 198 e até fiz para saber se é mesmo e se não me tinha enganado, 198x2 e depois escrevi há 198 rapazes com mais de 12 anos.

Para responder à questão, a aluna primeiro transforma a fracção num numeral decimal e de seguida usa-o como operador decimal. Depois de descobrir a parte dos alunos que são rapazes, reconhece que 50% representa a metade e divide 396 por 2 obtendo assim a parte da parte. Acaba por chegar a um valor aproximado porque também usa um valor aproximado para $\frac{2}{3}$. Mostra facilidade em usar um número decimal e uma percentagem como operadores, mas não usa a fracção como operador.

Síntese. Leonor revela compreensão e sentido de número racional, mostrando "apetência para usar a representação ou o método mais eficiente" (McIntosh et al. 1992, p. 4), nos significados parte-todo, quociente, medida e operador. Mostra agora destreza na leitura das fracções. Revela compreender que um número racional pode representar-se de diferentes formas e apresenta facilidade em relacionar as diferentes representações (pictórica, fracção, decimal e percentagem). Consegue também representar pictoricamente fracções próprias e fracções impróprias.

Mostra que continua a compreender o significado do numerador e do denominador. Revela compreender a construção da unidade a partir das partes e mostra igualmente conseguir construir as partes a partir de um todo, na representação pictórica, em fracção e em percentagem. A aluna consegue abstrair-se das linhas que dividem um todo em partes de tamanhos diferentes e consegue identificar correctamente a fracção que representa cada uma das partes. Para construir uma unidade a aluna começa por construir as partes.

Consegue definir a unidade e usá-la como medida. Representa com facilidade a medida de uma barra na representação decimal e em fracção adequando a representação à situação. Para medir uma barra ou um segmento de recta usa sempre o segmento de recta de apoio para imaginar as partes com compõem a unidade e a parte.

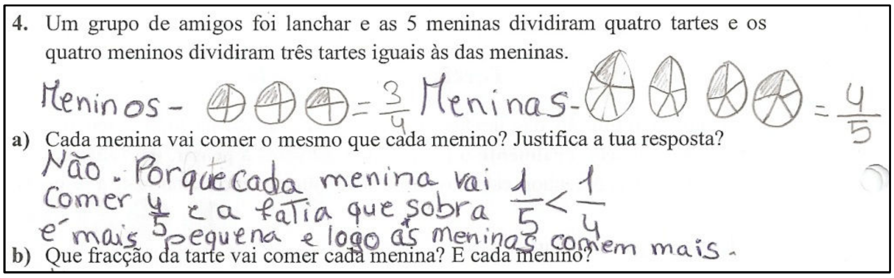
Na situação em que uma fracção surge como operador, transforma a fracção em decimal e usa o decimal como operador e não a fracção, revelando alguma insegurança com o uso da fracção neste significado. Usa o operador 50% como a divisão por 2.

Para representar uma fracção no significado quociente a aluna utiliza a representação pictórica como estratégia para conseguir determinar a fracção. Assim, consegue com sucesso representar uma situação de partilha com quantidades contínuas.

6.4.2. Comparação e ordenação de números racionais

Seguidamente apresento a análise do desempenho de Leonor na realização de tarefas de comparação e ordenação de números racionais depois da unidade de ensino.

Questão 4 a). Esta questão pede que a aluna partilhe 4 tartes por 5 meninas e 3 tartes por quatro meninos e compare a parte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente. A informação é dada em linguagem verbal e não são dadas indicações sobre as representações a utilizar na resposta.


4. Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

Meninos - $= \frac{3}{4}$ Meninas- $= \frac{4}{5}$

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?

Não. Porque cada menina vai comer $\frac{4}{5}$ e a fatia que sobra $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ é mais pequena e logo as meninas comem mais.

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

E2-Q4a)

Leonor: Aqui podemos fazer 4 tartes, este é o caso das meninas…

Professora: Então tens de identificar aqui: meninas.

Leonor: E pintávamos $\frac{1}{5}$ de cada tarte

Professora: E cada um comia…

Leonor: Comia 4 quintos

(…)

Leonor: E eles comeram 3 quartos

Deste modo, Leonor começa por representar pictoricamente a situação e conclui que cada menina come $\frac{4}{5}$ e cada menino $\frac{3}{4}$ de uma tarte. Não revela qualquer dificuldade na representação das fracções.

A aluna consegue representar correctamente as fracções da tarte que cada menino e que cada menina vai comer, recorrendo à representação pictórica da situação. Contudo, para comparar essas duas fracções, começa por tentar usar o pensamento residual:

Professora: E agora a pergunta: Cada menino vai comer o mesmo que cada menina?

Leonor: Sim.

Professora: Sim? Então isso quer dizer que $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{4}{5}$?

Leonor: Só falta um, aqui só falta $\frac{1}{5}$ para chegar à unidade e aqui só falta $\frac{1}{4}$ para chegar à unidade, mas aqui ($\frac{3}{4}$) as fatias são maiores, porque só está dividido em 4

Leonor comete um erro, designado por Post et al (1986) por *gap thinking,* ao considerar que as fracções são iguais porque em ambas "só falta um" para chegar à unidade. Considera apenas o facto de faltar uma parte para formar a unidade e não considera o denominador, ou seja, o tamanho de cada fatia, que é diferente, não considera o tamanho real das fracções, não considera a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que a unidade está dividida. Esta é uma forma de pensar nos números inteiros.

A aluna continua a reflectir sobre os dois números e introduz um novo elemento de análise ao perceber que as fatias não são iguais ("não são do mesmo tamanho"), porque cada uma está dividida de maneira diferente.

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Os meninos, porque a piza está dividida em menos partes e as fatias são maiores.

Professora: Então a fatia que sobra, ai sobra $\frac{1}{4}$, e aqui sobra quanto?

Leonor: $\frac{1}{5}$

Professora: Então, qual é que é a fracção maior?

Leonor: $\frac{1}{5}$

Professora: $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: Sim.

(…)

Leonor: $\frac{1}{5}$ é mais pequeno que o outro ($\frac{1}{4}$)

Professora: Então o que sobra aqui ($\frac{1}{5}$) é maior ou mais pequeno?

Leonor: É mais pequeno

Professora: Então o que é que sobra aqui ?

Leonor: $\frac{1}{4}$

Professora: Que é…

Leonor: Maior e aqui sobra $\frac{1}{5}$ que é mais pequeno

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Aqui onde sobra menos e as fatias são mais pequenas, aquela que sobra ($\frac{1}{5}$) também é mais pequena do que a outra ($\frac{1}{4}$)

Professora : Então como é que fica, qual é que é maior? Quem é que come mais?

Leonor: As meninas.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque a fatia que sobra é mais pequena.

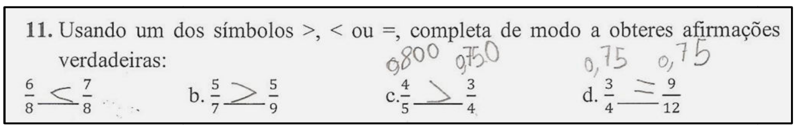
Professora: De certeza?

Leonor: Sim

Tendo por base essa nova análise a aluna comete um novo erro ao referir que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{4}{5}$ porque no primeiro a tarte está dividida em menos partes e por isso cada parte é maior do que na segunda. Ou seja, a aluna compara apenas a fracção unitária e generaliza. Não mostra conhecer que existe uma relação inversa entre o tamanho da fatia que sobra e o tamanho da parte que se come. Leonor não consegue concluir com facilidade que quanto maior é a fatia que sobra, menor é a parte que eles comeram. Revela ter uma ideia sobre a estratégia informal de *pensamento residual*, mas mostra-se insegura na sua utilização e comete erros.

No final, depois de alguma reflexão e de algumas perguntas e organização das ideias com a minha ajuda, a aluna consegue concluir correctamente a relação entre a parte que sobra e a parte que eles comem, mas mostrou pouco à vontade e bastantes dificuldades.

Questão 11. Esta questão apresenta um contexto puramente matemático, no significado medida. É uma tarefa de comparação, em que é pedido à aluna que verifique, entre os pares de fracções apresentados, as relações de grandeza. A informação é dada em fracção.


11. Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras:

0,800 0,750 0,75 0,75

$\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ b. $\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$ c. $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ d. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

E2-Q11

No primeiro par de fracções a aluna verifica e verbaliza com clareza, que os denominadores são iguais e por isso compara apenas os numeradores:

Professora: Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras: a) $\frac{6}{8}$ e $\frac{7}{8}$.

> **Leonor:** $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$ é maior porque estão em unidades iguais e 6 é menos do que 7.

No segundo par de fracções, a aluna verifica que os numeradores são iguais. Refere que neste caso se toma a mesma quantidade de fatias, mas as fatias são menores quando são divididas em mais partes:

> **Professora:** $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ e $\frac{5}{9}$?
>
> **Leonor:** $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ porque são 5 fatias que nós comemos mas estas são mais pequenas ($\frac{5}{9}$) porque está dividido em mais partes e estas são maiores ($\frac{5}{7}$)

Os últimos dois pares apresentam os numeradores e os denominadores diferentes. Para os comparar, Leonor, converte-os em decimais e compara os decimais obtidos:

> **Leonor:** $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$ e $\frac{3}{4}$ podemos fazer 4:5 que dá 0,8 e 3:4 que dá 0,75. Se nós acrescentássemos dois zeros aqui (0,8) e um zero aqui (0,75), este era mais pequeno e este era maior, acho que o maior é $\frac{4}{5}$.
>
> Aqui também podemos fazer o mesmo que fizemos aqui, 3:4 que era 0,75 e agora 9:12 que dá 75 é igual.

Leonor revela destreza na comparação de fracções, revelando flexibilidade para escolher o processo mais adequado a cada situação, o que mostra que a aluna não só adquiriu os processos como os compreende.

Questão 2. Esta questão pede para ordenar três fracções com denominadores diferentes. Apresenta uma situação contextualizada, no significado parte-todo, sendo a informação dada em fracção.

2. No último dia do primeiro período os alunos do 5.º ano organizaram uma gincana. O percurso da gincana foi feito da seguinte forma:

$\frac{1}{6}$ a correr ao pé coxinho;

$\frac{2}{12}$ a segurar, com a boca, uma colher com um ovo;

$\frac{2}{3}$ enfiados dentro de um saco de batatas;

Qual foi o maior trajecto? Justifica a tua resposta.

O Maior trasecto foi o $\frac{2}{3}$ porque só falta $\frac{1}{3}$ para a unidade:
Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{6}$ e $\frac{10}{12}$

E2-Q2

Para decidir o maior trajecto e ordenar as três fracções com denominadores diferentes Leonor usa a estratégia definida por Post et al. (1986), por *pensamento residual*, que se refere à quantidade que é necessária para fazer o todo:

Leonor: Eu acho que foi os dois terços porque só falta um terço para chegar à unidade e nos outros não, aqui faltam $\frac{5}{6}$ (em $\frac{1}{6}$), aqui faltam $\frac{10}{12}$ (em $\frac{2}{12}$) e aqui só falta $\frac{1}{3}$.

Professora: Representa lá isso que me estás a dizer.

Leonor: Preciso de fazer $\frac{2}{3}$ e…

Professora: Tens de fazer tudo, tens de justificar porque é que dizes que o maior é o $\frac{2}{3}$.

Leonor: (lê a resposta que escreveu) O maior trajecto foi $\frac{2}{3}$ porque só falta $\frac{1}{3}$ para a unidade.

Professora: E isso quer dizer então que $\frac{1}{3}$ que é aquilo que falta…

Leonor: … Para a unidade

Professora: É maior ou mais pequeno que os outros?

Leonor: É…é maior

Professora: Aquilo que falta para chegar ao fim é maior?

Leonor: Não é mais pequeno…

Professora: Então quer dizer que $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que

(…)

Leonor: $\frac{5}{6}$. Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{6}$.

Professora: E também do que…

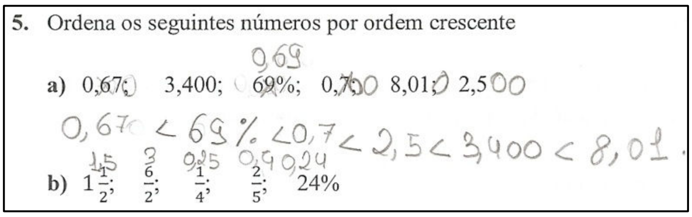
Leonor: $\frac{10}{12}$, Ah, sim $\frac{10}{12}$.

Professora: Então se aquilo que falta para chegar ao todo é mais pequeno ai então os outros são pequenos.

Leonor: Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{6}$ e $\frac{10}{12}$.

Assim, em vez de comparar $\frac{1}{6}; \frac{2}{12}$ *e* $\frac{2}{3}$ compara as fracções complementares $\frac{5}{6}; \frac{10}{12}$ *e* $\frac{1}{3}$. Mostra alguma confusão e indecisão na explicação do facto de a maior fracção ser aquela cuja parte que falta para fazer o todo é a mais pequena, mas depois de um ponto da situação, consegue concluir e explicar qual a maior fracção. Mostra conhecer a linguagem convencional para representar as fracções, usa a linguagem específica das mesmas e usa uma estratégia informal para ordenar e comparar as fracções com denominadores diferentes.

Questão 5. As questões 5 a) e b) são questões de ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária, respectivamente. Trata-se de uma tarefa colocada num contexto puramente matemático, no significado medida.


5. Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) 0,670; 3,400; 69%; 0,700 8,010 2,500

0,670 < 69% < 0,7 < 2,5 < 3400 < 8,01.

b) $1\frac{1}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 24%

E2-Q5

Na questão 5 a), a aluna começa por referir que existem números em representações diferentes e que devemos transformá-los todos na mesma representação.

Leonor: E agora este aqui, podemos transformar tudo em percentagem ou então tudo em decimal. Podemos pôr tudo em milésimas

Professora: Porquê?

Leonor: Porque com os zeros não temos que… se andarmos para a direita com os zeros eles não contam, e então é mais fácil.

Professora: Acrescentamos os zeros porque não contam ou porque lhes temos de dar o mesmo "nome" para os comparar?

Leonor: É para lhes dar o mesmo nome, porque se tiverem diferentes não as conseguimos comparar.

Mostra perceber que podemos representar os números todos em numeral decimal ou todos em percentagem mas opta por transformar a única percentagem em decimal. Explica ainda que deve acrescentar zeros em todos para ficarem com milésimas porque segundo diz: "assim é mais fácil" e afirma ainda que, se tiverem com "nomes" diferentes não os conseguimos comparar.

Apesar de a aluna ter escrito logo no início 0,69 por cima de 69% pedi-lhe que me explicasse como é que o tinha feito:

Leonor: Ando uma casa para a frente…Acrescento zeros…

Professora: Então mas como é que tu fizeste?

Leonor: Aqui acrescentei um zero (0,670) (não percebeu a minha pergunta e começou a explicar tudo de novo)

Professora: Não estou só a perguntar aqui do 69%, como é que transformaste em decimal?

Leonor: Acrescento zeros

Professora: Acrescento zeros? Então fica 6900? 690? O que é que tu tinhas escrito lá em cima?

Leonor: Tinha 0,69

Professora: Eu não disse que estava mal, só quero saber como lá chegaste.

Leonor: Andei uma casa para a esquerda, não duas, duas

Professora: Porquê?

Leonor: Para transformar em decimal

Professora: E porque é que andas 2 e não andas 1 ou 3? Porquê 2? Sabes explicar?

Leonor: (mostra um ar de dúvida)

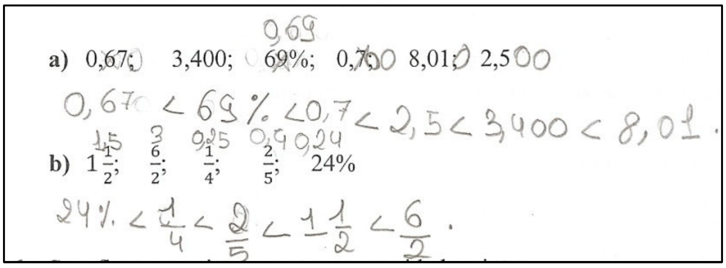
Professora: Porquê? Multiplicas ou divides por algum número em especial?

Leonor: Sim por 0,01

Professora: Divides por 0,01?

Leonor: Sim (…)

Leonor converte com sucesso uma percentagem em decimal mas mostra dificuldade em explicar correctamente esse processo. Diz que divide o 69 por 0,01, quando na realidade divide por 100. Revela que consegue usar o processo mas parece não o compreender. Usa a conversão para decimal apenas como passo intermédio na ordenação, porque na resposta usa a representação em percentagem.



E2-Q5b)

Na questão 5 b) a aluna refere que pode fazer o mesmo que na alínea anterior e para isso transforma as fracções em decimais e depois "acrescenta zeros" para que todos os números fiquem com milésimas. Mostra compreender o numeral misto fraccionário apresentado e transforma-o em decimal sem recorrer a qualquer algoritmo. Nas restantes fracções divide o numerador pelo denominador. Na fracção $\frac{2}{5}$ começa por confundir as operações e multiplica o numerador pelo denominador, mas rapidamente se auto-corrige. Também aqui usa a representação decimal apenas como apoio à ordenação e na resposta usa as representações apresentadas, fracção e percentagem.

Leonor: Aqui podia ser o mesmo, praticamente o mesmo. Aqui podia ser 1,5 ($1\frac{1}{2}$), aqui podíamos dividir ($\frac{6}{2}$) para saber quanto é que era.

Professora: Fazíamos 6:3?

Leonor: Sim, 6:2

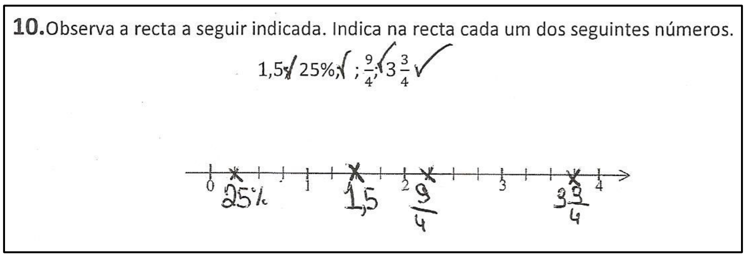
Professora: E quanto é que dá 6:2?

Leonor: Dá 3. (Pensa alto à medida que vai fazendo as conversões) aqui é 0,25 ($\frac{1}{4}$), aqui dá 10 (5x2), não aqui dá 0,4 ($\frac{2}{5}$) e aqui 24% é 0,24. Primeiro é 0,24 que é 24%, depois 0,25, um quarto; depois $\frac{2}{5}$.

Professora: Depois o $\frac{2}{5}$ que é quanto? Como é que comparaste com o 0,25?

Leonor: Acrescentei zeros aqui, se acrescentar zeros aqui vamos ver que é maior. Agora o um e uma metade e o 3, 6 metades.

Na questão 10 do pós-teste, a aluna tem de ordenar um conjunto de números racionais representados em fracção, em percentagem e um numeral misto fraccionário, numa recta numérica.



PT-Q10

Nesta questão Leonor consegue ordenar todos os números com sucesso, lidando bem com as diferentes representações de número racional, percentagem, numeral decimal, fracção e numeral misto fraccionário.

Síntese. A aluna, apesar das dificuldades, consegue comparar e ordenar fracções nos significados parte-todo, medida e quociente.

Leonor compreende a necessidade de comparar os números, todos, na mesma representação mostrando destreza na conversão de fracções e percentagens em decimais. Mostra-se mais à vontade na ordenação de números na representação decimal do que na representação em fracção, para os comparar "acrescenta zeros" em todos os números para ficarem todos com milésimas, referindo que se tiverem "nomes" diferentes não os podemos comparar. A aluna revela compreender o significado de um numeral misto fraccionário e consegue convertê-lo para a representação decimal.

Utiliza estratégias informais para comparar fracções com o mesmo numerador ou com o mesmo denominador. Para comparar um par de fracções com o mesmo numerador a aluna compara apenas os denominadores. Age de forma semelhante no caso dos pares de fracções como o mesmo denominador, comparando apenas os numeradores. Revela compreender o significado de cada termo, pois, no caso de os numeradores serem iguais, refere que em ambos os casos tomamos o mesmo número de partes e o que muda é o tamanho das partes. No caso de serem os denominadores iguais, mostra compreender que as partes são iguais e o que muda é o número de partes que se tomam. Para comparar fracções com o numerador e o denominador diferentes, utiliza estratégias formais convertendo as fracções em decimais e compara os decimais.

Leonor consegue identificar fracções complementares e usa-as com desembaraço na comparação/ordenação de fracções. Para comparar números decimais a aluna "acrescenta zeros" à direita do número para que todos fiquem com o mesmo número de casas decimais (no caso, milésimas) e depois compara-os. Para comparar um conjunto de números dados em diferentes representações, converte-os todos em decimais, compara-os e depois dá a resposta na representação que lhe é apresentada na pergunta. Na situação que envolve o significado quociente, na partilha de tartes, onde os dados são apresentados apenas na linguagem verbal, a aluna recorre à representação pictórica para escrever as fracções, e usa a representação em fracção para comparar as partes da tarte que cabem a cada menino/a.

Leonor tenta usar o pensamento residual para comparar pares de fracções mas comete o erro denominado por *gap thinking* (Post e al, 1986), quando refere que $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ são iguais porque em ambos falta "um" para a unidade. Foca-se na diferença entre 4 e 5 e entre 3 e 4, mas não considera o tamanho real da fracção. Esta é uma forma de pensar nos números inteiros. A aluna mostra ainda dificuldade em estabelecer relações flexíveis entre o tamanho de cada parte e o tamanho real da fracção. Esta dificuldade verifica-se quando a aluna diz que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{4}{5}$ porque $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$. Revelando ainda não ter compreendido a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que a unidade está dividida, em fracções que não são unitárias.

Apesar de usar o pensamento residual, de forma natural, não consegue verbalizar a relação entre a parte que "sobra" e o verdadeiro tamanho da fracção. Não consegue também explicar correctamente um processo formal ou informal para converter a percentagem em decimal, fá-lo correctamente mas parece não compreender completamente o processo.

6.4.3. Equivalência de fracções

Questão 13. Esta questão é uma tarefa de equivalência, sendo pedido para representar em fracção a parte dos círculos que está pintada de preto e que escreva fracções equivalentes à primeira. Apresenta um contexto puramente matemático, no significado parte-todo com quantidades discretas. A informação é dada pictoricamente e a resposta é pedida em fracção.

Na primeira parte da questão a aluna representa a parte dos círculos pintados de preto recorrendo ao significado parte-todo: $\frac{12}{18}$.

Professora: Que fracção dos círculos é preta?

Leonor: 12 de 18.

Na segunda parte da questão a aluna revela compreender a pergunta. Quando lhe pergunto se existe outro "nome" para a fracção Leonor responde imediatamente: "Sim uma fracção equivalente", revelando compreender que as fracções equivalentes representam o mesmo número mas como muda o denominador, muda o "nome" da fracção. Explica ainda com clareza como podemos obter fracções equivalentes usando as operações multiplicação e divisão. Obtém assim, três fracções equivalentes a $\frac{12}{18}$ utilizando a divisão: $\frac{6}{9}$ e $\frac{4}{6}$ e a multiplicação: $\frac{24}{36}$.

Professora: Existe outro "nome" para a fracção?

Leonor: Sim uma fracção equivalente, podemos fazer 12:2 que é 6 e depois 18:2 que é 9 que era $\frac{6}{9}$.

Professora: Sim, essa é uma

Leonor: Também podemos fazer mais…

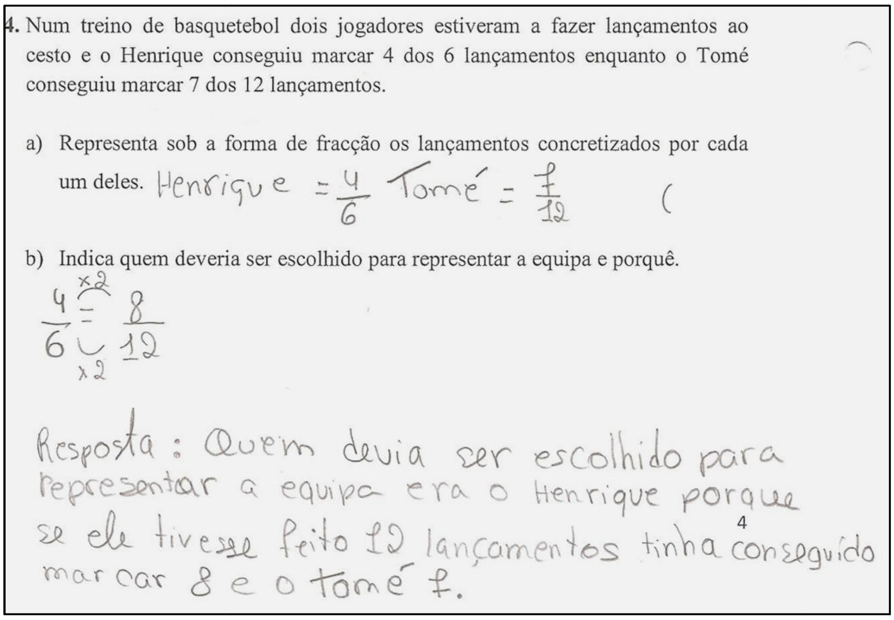
Professora: Sim podes fazer as que quiseres…

Leonor: Sim posso fazer a dividir, vezes. Aqui 12:3 que dá 4 e 18:3 que dá 6 que dá 4/6 e a multiplicar também conseguimos que era 12x2 que dá 24 e 18x2 que é 36 ($\frac{24}{36}$).

Outras situações em que a aluna usa a equivalência de fracções (Entrevista: 14 b); Pós-Teste: 7.2; 9; 23)

Na análise da segunda entrevista e do pós-teste verifiquei que a aluna usa diversas vezes conhecimento e destreza que tem na equivalência de fracções, essencialmente, para comparar fracções.

Por exemplo, na Questão 14 b) da 2.ª entrevista,


4. Num treino de basquetebol dois jogadores estiveram a fazer lançamentos ao cesto e o Henrique conseguiu marcar 4 dos 6 lançamentos enquanto o Tomé conseguiu marcar 7 dos 12 lançamentos.

a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles. Henrique $= \frac{4}{6}$ Tomé $= \frac{7}{12}$ (

b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

$$\frac{4}{6} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{8}{12}$$

Resposta: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque se ele tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o Tomé 7.

E2-Q14b)

Para comparar as fracções $\frac{4}{6}$ e $\frac{7}{12}$ a aluna utiliza a equivalência de fracção. Refere que, se ambos fizessem 12 tentativas o Henrique concretizaria mais golos. Justifica esta estratégia, dizendo que assim ambos estão na mesma "unidade" e depois compara apenas os numeradores.

Leonor: Porque ele está mais perto da unidade. E se nós fizéssemos fracções equivalentes 6x2=12 e era igual. 4x2 é 8 e 6 x2 é 12

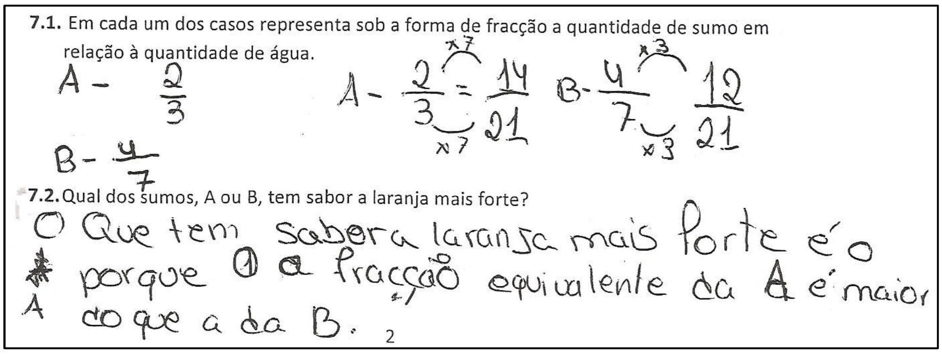
Professora: E isso quer dizer o quê?

Leonor: Que esta é maior ($\frac{8}{12}$) porque são os 2 da mesma unidade e 7 é mais pequeno do que 8.

Professora: Isso que dizer que se fizessem os dois 12 lançamentos…

Leonor: Era o Henrique que devia ser escolhido … Eu pus assim: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque ele se tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o Tomé 7.

No pós-teste, a aluna usa a mesma estratégia em situações de comparação de duas fracções com numeradores e denominadores diferentes. Na questão 7.2, para comparar as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$, a aluna encontra o mínimo múltiplo comum entre os denominadores e chega às fracções equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ e $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ e depois compara as fracções equivalentes com o mesmo denominador.


7.1. Em cada um dos casos representa sob a forma de fracção a quantidade de sumo em relação à quantidade de água.

A − $\frac{2}{3}$ A − $\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ ($\times 7$) B − $\frac{4}{7}$ $\frac{12}{21}$ ($\times 3$)

B − $\frac{4}{7}$

7.2. Qual dos sumos, A ou B, tem sabor a laranja mais forte?

O Que tem sabera laranja mais forte é o A porque a fracção equivalente da A é maior do que a da B.

2

PT-Q7.2

Síntese. Leonor revela um bom desempenho no que diz respeito à equivalência de fracções, mostra perceber o processo formal para encontrar fracções equivalentes a uma dada fracção usando as operações multiplicação e divisão. Utiliza as fracções equivalentes como estratégia na comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes, consegue encontrar o mínimo múltiplo comum entre dois denominadores, calcular fracções equivalentes às dadas com denominadores iguais e assim compara as fracções.

6.5. Síntese Global

De um modo geral, Leonor apresenta grande empenho e motivação no trabalho desenvolvido, tendo sido notória a sua persistência na procura de estratégias para resolver as tarefas propostas. Salienta-se também o seu raciocínio lógico e abstracto e a sua capacidade para resolver problemas. Antes da unidade de ensino, no que diz respeito à construção de partes e reconstrução da unidade, a aluna mostra uma compreensão básica de número racional nos significados: parte-todo, quociente e medida e revela algumas dificuldades no significado operador. No significado parte-todo, em situações simples, mostra-se capaz de construir pictoricamente e em fracção uma parte de um todo, mas também consegue representar pictoricamente um todo a partir de fracções unitárias, embora, neste caso, mostrando-se pouco à vontade. Consegue representar uma fracção no significado quociente e representa uma situação simples de partilha através de uma fracção sem usar outra representação de apoio. Consegue usar um segmento de recta como unidade de medida para determinar a medida de outros segmentos maiores ou menores do que a unidade fazendo sempre referência à unidade de medida que utiliza. Revela ainda compreender que um número racional pode ser representado de diversas formas e usa a que mais se adequa ao contexto do problema ou à sua resolução. O significado operador é aquele em que revelou maior dificuldade, já que não consegue usar o operador decimal 0,75, apesar de tentar encontrar uma estratégia informal, que não consegue concluir com sucesso. Durante toda a entrevista a aluna revela não conhecer a linguagem das fracções apesar de reconhecer o significado do numerador e do denominador.

Durante a unidade de ensino, Leonor continua a mostrar-se à vontade na reconstrução da unidade, na construção de partes e na construção de agregados de partes maiores do que a unidade. Para determinar pictoricamente partes de um todo a partir de uma tira que representava $\frac{3}{4}$ da unidade, a aluna começa por construir a unidade e a partir daí representa as outras partes solicitadas. Contudo, quando lhe é pedido que construa o todo partindo de uma representação pictórica de $\frac{4}{3}$, não consegue compreender que o todo está contido dentro do agregado das parte por se tratar de uma fracção imprópria e acaba por acrescentar em vez de retirar uma parte. Consegue também construir a unidade através da representação pictórica e da percentagem. Para representar uma situação de partilha um pouco mais complexa, usa a representação pictórica como apoio para representar a fracção. No significado medida, obtém sucesso em todas as tarefas, mas usa a fracção indiscriminadamente, mesmo quando anteriormente tinha usado números inteiros, por exemplo, para representar um segmento de recta que era o dobro da unidade de medida usa a fracção $\frac{2}{1}$. Quanto ao significado operador, passa a usar o operador decimal com destreza e acaba por o usar em detrimento da fracção, transformando as fracções em numerais decimais para depois os usar como operadores.

Após a unidade de ensino, Leonor mostra-se mais confiante na construção de agregados de partes maiores do que a unidade, na representação pictórica. Mantém o à vontade mostrado inicialmente, na construção do todo, nas representações fraccionária, pictórica e percentagem, revelando ainda capacidade para justificar oralmente os seus raciocínios. Em situações de partilha mais complexas, envolvendo o significado quociente a aluna continua a utilizar a representação pictórica como auxílio à representação em fracção, ou seja, usa a representação pictórica para resolver a questão e responde utilizando a fracção. No significado medida, consegue definir uma unidade de medida e usá-la para medir segmentos de recta maiores ou menores do que a unidade, mas volta a fazer referência à unidade de medida na resposta, tal como tinha feito na primeira entrevista. No entanto, neste caso já consegue utilizar a representação mais adequada à situação, utilizando fracções, numerais decimais e números inteiros. Quanto ao significado operador, a aluna não usa a fracção como operador. Nestas situações converte a fracção em decimal e usa-o como operador. Mostra compreender o sentido de número racional, revelando ser capaz de usar a representação mais eficiente e adequada ao problema. Além disso, revela conhecer a linguagem das fracções e o significado do numerador e do denominador.

Quanto à comparação e ordenação de números racionais, antes da unidade de ensino, Leonor consegue resolver situações simples nos significados parte-todo, quociente e medida. Consegue comparar fracções com denominadores iguais e, para isso, compara apenas os numeradores, reconhecendo que o todo está dividido no mesmo número de partes. Mostra compreender o significado de numerador e denominador. Sempre que é solicitada a ordenar um conjunto de números, mesmo que use outra representação de apoio, apresenta a resposta final na representação apresentada na pergunta. Usa o conhecimento informal para comparar fracções unitárias, por exemplo para comparar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, afirmando que $\frac{1}{2}$ é maior porque se divide em menos partes, logo estas são maiores. Usa intuitivamente a metade como referência. Mostra dificuldade em comparar fracções com numeradores e denominadores diferentes porque se fixa nas fracções unitárias, por exemplo, considera que $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{7}{8}$ porque as fatias em $\frac{1}{2}$ são maiores. Ao longo da primeira entrevista opta por representar pictoricamente cada fracção, conseguindo assim comparar fracções próprias e impróprias com sucesso. Mostra alguma confusão na ordenação de números decimais ao dizer que 2,200 é maior do que 2,29, acabando depois por acrescentar zeros à direita do número e reformular a sua resposta. Esta fragilidade da aluna na ordenação de números decimais indicia que pode ter adquirido algumas regras para a comparação de decimais, mas ainda não as compreendeu completamente.

Durante a unidade de ensino Leonor continua a usar o conhecimento informal para comparar fracções em contextos familiares. Por exemplo, numa situação de partilha a aluna diz que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{3}{8}$, porque em ambas as situações se tomam a mesma quantidade de fatias, mas no primeiro caso essas fatias são maiores porque se dividiu por menos pessoas. Para comparar uma fracção com a unidade, começa por representar a unidade numa fracção com o numerador igual ao denominador, onde o denominador é igual ao denominador da fracção dada, ou seja para comparar $\frac{3}{8}$ com a unidade usa a fracção $\frac{8}{8}$ como unidade, e depois compara apenas os numeradores. Para comparar 3 fracções, e de acordo com o contexto do problema, usa a metade e o zero como referência. Continua a mostrar dificuldade em comparar fracções com numeradores e denominadores diferentes, pois continua a fixar-se nas fracções unitárias, por exemplo, ao comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ diz que $\frac{3}{4}$ é maior porque as fatias são maiores, não considerando a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguai em que o todo está dividido. Mostra destreza na conversão de fracções e decimais para percentagem. Quando lhe é pedido que ordene um conjunto de números racionais apresentados sob a forma de fracção, decimal e percentagem, a aluna converte todos os números para percentagem, compara-os nessa representação, mas depois apresenta a resposta nas representações apresentadas na pergunta. Já na representação de números entre 2 e $2\frac{1}{2}$ na recta numérica, opta pela representação em numeral decimal, isto é, transforma $2\frac{1}{2}$ em decimal e apresenta dois números decimais como resposta.

Após a unidade de ensino, Leonor consegue ordenar fracções nos significados parte-todo, medida e quociente, em situações mais complexas. Para comparar fracções com o mesmo numerador, compara apenas os denominadores e faz o inverso nos casos de fracções com o mesmo denominador. Para comparar fracções em que ambos os termos são diferentes a aluna opta por convertê-las em decimais e compara-os nessa representação, apesar de continuar a responder na representação apresentada na pergunta. Mostra-se com maior à vontade na ordenação de decimais do que de fracções e agora, para comparar numerais decimais, acrescenta zeros à direita dos números para que fiquem todos com o mesmo número de casas decimais. Percebe a necessidade de comparar os números todos na mesma representação e revela destreza na conversão de fracções e percentagens em numerais decimais. Quando não transforma as fracções em decimais continua a mostrar algumas dificuldades na comparação de fracções com ambos os termos diferentes. Por exemplo, na comparação entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ comete dois erros, primeiro considera que as fracções são iguais porque em ambas falta apenas uma parte para a unidade e depois comete um novo erro ao considerar que $\frac{3}{4}$ é maior porque as fatias são maiores, ou seja, tal como fez durante a unidade de ensino volta a fixar-se nas fracções unitárias. Também mostra compreender os numerais mistos fraccionários e consegue convertê-los para numeral decimal.

Durante a unidade de ensino Leonor usou a equivalência de fracções para resolver algumas das tarefas apresentadas, nomeadamente para comparar fracções com denominadores diferentes ou para marcar fracções na recta numérica. Após a unidade de ensino a aluna reconhece o que é determinar fracções com outro nome e mostra destreza na obtenção de fracções equivalentes utilizando a multiplicação ou a divisão de ambos os termos pelo mesmo número inteiro. Usa ainda fracções equivalentes para comparar fracções no significado razão.

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo. De seguida, analiso os seus principais resultados no que diz respeito à aprendizagem da noção, representação, ordenação, comparação de números racionais e equivalência de fracções, envolvendo as diferentes representações e significados de número racional, em função das questões da investigação. Faço também uma reflexão pessoal sobre o significado deste estudo para mim enquanto professora e investigadora, bem como os possíveis contributos para a comunidade profissional dos professores de Matemática e das suas limitações e apresento algumas recomendações para futuros estudos.

7.1. Síntese do estudo

O conceito de número racional é um dos mais complexos e importante do ensino básico. Os inúmeros estudos feitos sobre este tema mostram que os alunos têm dificuldades de aprendizagem significativas neste domínio (Post, Behr & Lesh, 1986). Em Portugal, vive-se uma mudança curricular importante com a generalização de um novo *Programa de Matemática* (ME, 2007) que valoriza muito mais do que o anterior programa a noção e as diferentes representações de número racional. Segundo este documento e a literatura existente sobre o tema, para desenvolver o conceito de número racional é importante trabalhar de forma integrada as diferentes representações e significados de número racional. Assim, através deste estudo, pretendo perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, em alunos do 5.º ano.

O quadro teórico desta investigação aborda aspectos relacionados com a aprendizagem dos números racionais: (i) o conceito de número racional; (ii) representações de número racional; (iii) a construção das partes e a reconstrução da unidade; (iv) a ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções.

Este estudo tem por base uma unidade de ensino sobre a noção, representação, comparação e ordenação de números racionais e equivalência de fracções. Esta unidade segue as orientações do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (DGIDC, 2007) e das *Normas* do NCTM (2007) e sofre também influência da revisão da literatura que realizei sobre o tema e contempla uma grande diversidade de tarefas, incluindo problemas, exercícios e explorações.

A metodologia usada é de natureza qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo e tendo por base estudos de caso. A recolha de dados decorreu no ano lectivo de 2009/2010, sendo os participantes do estudo os meus alunos de uma turma de 5.º ano de escolaridade. Dessa turma foi seleccionada uma aluna que é objecto de análise aprofundada num estudo de caso. A principal fonte de dados foram as entrevistas realizadas individualmente, mas foram também recolhidos dados através de dois testes, um de diagnóstico e outro final, das produções escritas dos alunos durante a unidade de ensino e de um diário de bordo.

7.2. Conclusões do estudo

Neste ponto apresento as principais conclusões do estudo em função das questões de investigação, indicando (i) as dificuldades e erros mais significativos que os alunos cometem na utilização das várias representações de número racional (pictórica, decimal, fracção e percentagem); (ii) as estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos na comparação, ordenação de números racionais; e (iii) as estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos na equivalência de fracções.

7.2.1. Representações

1. Antes da unidade de ensino. Na aula de diagnóstico os alunos usaram preferencialmente a representação verbal e a decimal, mostrando-se pouco à vontade com a fracção. Mostram algum conhecimento informal sobre percentagens e conseguem relacionar percentagens básicas de referências com a sua representação fraccionária. Conseguem usar uma fracção unitária como operador, revelando conhecimento dos números partitivos possivelmente trabalhados no 1.º ciclo do ensino básico, mas têm dificuldade com a linguagem verbal das fracções. O que significa que os alunos desenvolveram um significado essencialmente numérico dos números partitivos, relacionado com a ideia de divisão cujo divisor é o denominador da fracção unitária. Os alunos associam $\frac{1}{3}$ a uma divisão cujo divisor é o número 3, mas este 3 representa para eles 3 "unidades" e não a divisão de um todo em 3 partes iguais. Assim, a compreensão do significado parte-todo fica limitada e fortemente condicionada por uma ideia muito vincada – a ideia de fracção como "operação de dividir". A dificuldade dos alunos na linguagem verbal das fracções associada à excessiva ênfase nos processos, parece levar os alunos para uma aprendizagem processual, levando-os a realizar mecanicamente um conjunto de procedimentos que não compreendem e que não sabem explicar.

Em situações simples, no teste diagnóstico, os alunos conseguem converter a representação pictórica em fracção, a fracção em representação pictórica e uma percentagem numa representação pictórica e conseguem identificar facilmente as percentagens básicas de referência. Conseguem também converter a linguagem verbal em representações pictóricas, em situações de partilha equitativa. Contudo, na mesma situação de partilha, mostram dificuldade em converter a linguagem verbal em fracção, e não conseguem representar uma determinada situação através de uma razão. Revelam dificuldade em usar uma fracção não unitária e um numeral decimal como operadores.

No que diz respeito à construção de partes e reconstrução da unidade, a turma, bem como Leonor já conseguem, em situações simples, construir pictoricamente e em fracção uma parte de um todo e conseguem também representar pictoricamente um todo a partir de uma fracção unitária. Mostram assim, uma compreensão básica de número racional na construção de partes e reconstrução da unidade em situações que envolvem o significado parte-todo.

Durante a primeira entrevista Leonor, revela não conhecer a linguagem verbal das fracções, mas mostra reconhecer o significado do numerador e do denominador. Consegue usar a representação em fracção para representar uma situação de partilha equitativa no significado quociente. Consegue também representar em fracção, em numeral decimal e através de um número natural, o comprimento de um segmento de recta usando outro segmento como unidade de medida. Representa, sem dificuldade, uma representação pictórica através de uma fracção, bem como, uma fracção através de uma representação pictórica. Consegue identificar uma dada percentagem numa representação pictórica e não comete erros na conversão entre representações. Revela compreender que um número racional pode ser representado de diversas formas e já mostra alguma facilidade em usar a representação que mais se adequa ao contexto do problema ou à sua resolução. A aluna revela dificuldade na utilização do operador decimal 0,75 na resolução de uma questão, ainda inicia uma estratégia informal através da decomposição de 75%, mas não a consegue concluir.

2. Durante a unidade de ensino. Durante a unidade os alunos da turma representam, a partir de uma parte de uma tira, outras partes menores do que a unidade e agregados de partes maiores do que a unidade e conseguem reconstruir a unidade a partir de fracções não unitárias da tira. Também Leonor mostra um bom desempenho nesta área conseguindo, tal como os outros alunos, reconstruir a unidade e construir partes pictoricamente, a partir de outra representação pictórica e de fracções. Tanto a turma como Leonor conseguem também representar a unidade a partir das suas partes usando a representação pictórica, representação decimal e a percentagem, partindo de fracções próprias.

As dificuldades surgem, tanto para a turma como para Leonor, quando têm de representar a unidade a partir de uma representação pictórica (tira) da fracção imprópria $\frac{4}{3}$. Durante a discussão colectiva, apenas André consegue explicar aos colegas que na figura existe "um bocadinho", um $\frac{1}{3}$, para além do todo. Na resolução a pares, a maior parte dos alunos resolvem a questão incorrectamente, não compreendendo que o todo está contido no agregado de partes, por se tratar de uma fracção imprópria. Leonor e a colega cometem o mesmo erro. A turma mostra maior destreza na construção de partes e reconstrução da unidade nos significados parte-todo e operador.

Para representar situações de partilha um pouco mais complexas, tanto a turma, como Leonor usam a representação pictórica como auxílio para chegarem à representação em fracção. Ou seja, apoiam-se na representação pictórica para resolver as questões, mas não a usam como forma de resposta, apresentando sempre o resultado na forma de representação simbólica (fracção, decimal ou percentagem) ou representação verbal. Isto pode indicar que os alunos não estão habituados a usar representações idiossincráticas ou não numéricas como resposta em Matemática.

Quanto ao significado operador, a turma mostra algumas dificuldades na utilização da fracção como operador. Na verdade, os alunos conseguem usar uma fracção unitária como operador, mas não conseguem usar fracções não unitárias, e a estratégia que mais usam é a conversão da fracção para numeral decimal e usam este como operador.

Inicialmente, grande parte dos alunos da turma revelam muitas dificuldades com a linguagem específica das fracções. Muitos alunos em vez de lerem "um quarto" liam "um de quatro". Mesmo assim, inicialmente, os alunos preferem usar a linguagem verbal em detrimento das outras representações, revelando dificuldades na utilização da linguagem simbólica específica dos números racionais, principalmente, em situações desconhecidas. Esta dificuldade inicial foi-se dissipando ao longo da unidade de ensino.

Na primeira tarefa, um grupo de alunos mostra dificuldade em converter uma fracção para numeral decimal, ao usar o denominador como parte decimal, quando converteram $\frac{1}{4}$ para numeral decimal e obtiveram 0,4. Nessa tarefa, os alunos também não conseguem construir uma fracção no significado razão para comparar duas medidas. No que diz respeito ao significado medida, muitos alunos mostram dificuldade em compreender como é que podem medir figuras menores do que a unidade de medida. Os numerais mistos fraccionários também trazem algumas dificuldades aos alunos, já que estes, frequentemente, consideram a parte inteira separadamente da parte fraccionária.

Os alunos da turma revelam também alguma dificuldade na conversão da representação pictórica (tabela 10x10) para o numeral decimal, revelando alguma fragilidade na compreensão no sistema de numeração decimal. No que se refere à representação em percentagem, os alunos conseguem relacionar e converter com facilidade as fracções e as percentagens de referência ($\frac{1}{2} = 50\%$; $\frac{1}{4} = 25\%$ e $\frac{3}{4} = 75\%$). Contudo, verifica-se que os alunos só usam a representação em percentagem quando esta é pedida explicitamente na pergunta. Os alunos mostram destreza na conversão das várias representações de número racional, mas usam essencialmente o numeral decimal e a fracção para responder às questões, verificando-se que, por vezes, usam a representação pictórica como passo intermédio na resolução de algumas tarefas. Conseguem converter as fracções impróprias em numerais mistos fraccionários, através da recta numérica.

3. Depois da unidade de ensino. A generalidade dos alunos consegue converter uma representação pictórica numa fracção e uma fracção própria numa representação pictórica. Os alunos conseguem identificar facilmente fracções em representações pictóricas e relacionar as percentagens básicas com a sua representação pictórica, em fracção e em decimal. Já conseguem com facilidade representar uma fracção a partir da linguagem verbal e usar uma fracção simplificada para responder às questões. Numa situação de partilha equitativa, mostram-se mais capazes para representar a situação pictoricamente do que através de uma fracção, usando a representação pictórica como apoio à representação em fracção.

No que diz respeito ao significado operador, os alunos, no final da unidade de ensino, conseguem usar fracções unitárias e fracções não unitárias como operador. No caso das fracções não unitárias, conseguem determinar a fracção unitária e depois fazem a iteração dessa parte. Também conseguem usar uma percentagem como operador e neste caso, alguns alunos convertem a percentagem em fracção e usam a fracção como operador. Os alunos nesta altura já conseguem representar uma razão e verifica-se que aqueles que não o conseguem fazer, assumem a fracção no significado parte-todo.

Os alunos mostram dificuldade em representar uma fracção imprópria através de uma representação pictórica, não conseguem perceber que o todo está contido no agregado das partes. Apesar de terem conseguido reconstruir um todo e construir partes a partir de uma fracção não unitária durante a unidade de ensino, no teste final os alunos mostram dificuldade em fraccionar a unidade para obter a fracção unitária que depois devem iterar para construírem partes ou o todo.

Depois da unidade de ensino, Leonor continua a mostrar-se proficiente na reconstrução da unidade e na construção de partes nas representações fraccionária, pictórica e percentagem. Mas nesta altura também já se mostra capaz de construir agregados de partes maiores do que a unidade e de reconstruir a unidade a partir de fracções impróprias. Além disso, continua a usar a representação pictórica como apoio à resolução das tarefas no significado quociente, mas dá a resposta em fracção. No significado medida, consegue medir segmentos de recta maiores e menores do que a unidade e usar a representação mais adequada correctamente. A aluna continua a não usar a fracção como operador, converte-a em decimal e usa-o como operador. Mostra compreender o sentido de número racional e flexibilidade para escolher a representação mais eficiente e adequada ao problema e já não mostra dificuldade na linguagem verbal das fracções.

4. Síntese. Os alunos conseguiram ultrapassar as dificuldades de linguagem que evidenciam no início da unidade, o que lhes permitiu melhorar o seu desempenho nas tarefas no significado quociente, onde mostravam grande dificuldade. A generalidade dos alunos, mostra-se capaz de construir partes e reconstruir a unidade em qualquer representação, com fracções próprias mas mostra alguma dificuldade em construir a unidade a partir de fracções impróprias, revelando dificuldade em compreender que o todo está contido no agregado das partes. Os alunos também mostram dificuldades na construção de partes e do todo quando têm de partir de fracções não unitárias. Também têm dificuldade em fraccionar o todo ou as partes em fracções unitárias que depois devem iterar para reconstruir a unidade ou uma parte não unitária do todo (tal como assinalado por McCloskey & Norton, 2009). Esta dificuldade dos alunos reforça a necessidade de os alunos trabalharem com diferentes tipos de unidades e quantidades (Monteiro & Pinto, 2007)

No final da unidade de ensino, os alunos da turma conseguem usar fracções não unitárias como operador. Leonor, no entanto, não usa a fracção como operador – converte a fracção em decimal e usa o operador decimal em vez da fracção. A utilização concomitante da representação decimal e fraccionária (Owens, 1993) permite à aluna ter sucesso, utilizando para isso a representação com que mais se sente à vontade. No final do estudo é notório que os alunos compreendem que os números racionais podem ser representados de diferentes formas e mostram flexibilidade para converter e relacionar essas diferentes representações o que, segundo Post et al. (1993), é importante para a compreensão de número racional. Revelam uma boa compreensão da representação pictórica, conseguem representá-la a partir de qualquer outra representação e conseguem também convertê-la nas outras representações, à excepção da fracção imprópria. Ao longo da unidade de ensino os alunos vão-se afastando da representação pictórica, deixando de a usar para responder às questões, e usando-a apenas como apoio à resolução de tarefas no significado quociente. Mostram-se muito presos às representações simbólicas formais. Mostram também uma boa compreensão da percentagem, embora muito relacionada com os valores de referência 25%, 50%, 75% e 100%. Mostram uma boa compreensão da fracção própria em qualquer significado, mas mostram dificuldades na compreensão de fracções impróprias. No que diz respeito à representação decimal, no final da unidade de ensino, os alunos mostram-se bastante à vontade na sua utilização nos diferentes significados.

7.2.2. Comparação e ordenação de números racionais

1. Antes da unidade de ensino. Na aula de diagnóstico os alunos revelam alguma dificuldade na ordenação de numerais decimais com um número desigual de casa decimais, mostrando dificuldade na compreensão do sistema de numeração decimal. Quanto à ordenação de fracções, os alunos mostram muitas dificuldades e recorrem ao conhecimento que têm sobre números naturais. Assim, ordenam as fracções considerando apenas os numeradores. Também mostram dificuldade na ordenação de um conjunto de números apresentados em fracção e em numeral decimal, separando as fracções dos numerais decimais e ordenando-os cada um por si.

No teste diagnóstico os alunos conseguem usar um segmento de recta para medir um segmento de recta maior do que a unidade de medida, mas mostram dificuldade em medir um segmento de recta menor do que a unidade. Não conseguem calcular a distância entre dois pontos numa recta numérica e não conseguem marcar um conjunto de fracções na recta numérica, revelando falta de noção quantitativa de número racional. Os alunos conseguem comparar pares de fracções com numeradores iguais e pares de fracções com denominadores iguais mas não conseguem comparar fracções com numeradores e denominadores diferentes. Revelam dificuldade na ordenação de números racionais, têm dificuldade em comparar numerais decimais com diferente quantidade de casas decimais e não conseguem ordenar um conjunto de números representados de diferentes formas.

No que diz respeito à comparação e ordenação de número racionais, antes da unidade de ensino, Leonor, consegue, em situações simples, comparar e ordenar fracções nos significados parte-todo, quociente e medida. Quando lhe solicito que compare fracções com denominadores iguais, a aluna compara apenas os numeradores, compreendendo que o todo tem o mesmo número de partes. Para comparar fracções unitárias simples, a aluna usa o conhecimento informal, mostrando compreender que "toma" apenas uma parte e que essa parte é menor, quanto maior for o denominador. Refere que $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$ porque se divide em menos partes, logo cada uma destas é maior.

Leonor mostra dificuldade em comparar fracções com os numeradores e os denominadores diferentes, porque considerou apenas as fracções unitárias para cada denominador. Ao longo da primeira entrevista a aluna começa a representar pictoricamente as fracções, e a partir daí compara com sucesso fracções próprias e impróprias. Usou intuitivamente a metade como referência. A aluna mostra alguma confusão na ordenação de números racionais na representação decimal com um número diferentes de casas decimais (décimas e centésimas). Esta dificuldade da aluna, pode indicar que a aluna adquiriu um método para comparar numerais decimais, mas não o compreendeu.

2. Durante a unidade de ensino. Durante a unidade de ensino, os alunos da turma conseguem comparar uma determinada fracção com a unidade, representando a unidade como uma fracção com o numerador igual ao denominador. Em situações contextualizas os alunos também usam a intuição para comparar fracções com numeradores iguais. Quando lhes é pedido que ordenem um conjunto de números apresentados em diferentes representações (decimal, fracção e percentagem), os alunos optam por converter todos os números para numeral decimal e ordenam-nos nessa representação. Esta situação parece bastante natural, pois a representação decimal é aquela com os alunos mais trabalharam durante toda a sua escolaridade. Contudo, alguns alunos continuam a mostrar dificuldades na comparação de numerais decimais com um número diferentes de casas decimais. Para comparar um par de fracções alguns alunos também usam a metade e a unidade como referência. Ao longo da unidade de ensino os alunos vão gradualmente afastando-se das estratégias mais informais e começam a valorizar as estratégias mais formais e a representação que melhor conhecem. A estratégia menos utilizada é a transformação em fracções equivalentes com denominadores iguais. Os alunos mostram também dificuldade em compreender a densidade dos números racionais, pois acham que não existem números racionais entre $\frac{3}{5} e \frac{4}{5}$.

Durante a unidade, Leonor continua a usar o conhecimento informal para comparar fracções. Para comparar um par de fracções com numeradores iguais e denominadores diferentes a aluna compara apenas os denominadores, deduzindo que aquele que apresenta o maior denominador é o menor porque cada uma das partes é menor. Usa a unidade a metade e o zero como referências, para determinar a relação de ordem entre fracções. Continua a mostrar dificuldades na comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes, pois continua a comparar apenas as fracções unitárias. Quando lhe é pedido que ordene um conjunto de números racionais apresentados em diferentes representações (decimal, fracção e percentagem) a aluna converte todos os números para percentagem, compara-os nessa representação, e, no final, dá a resposta utilizando as representações apresentadas na pergunta. Para representar na recta numérica, números entre 2 e $2\frac{1}{2}$, prefere usar a representação decimal. Desta forma mostra flexibilidade na utilização das diferentes representações de número racional e na conversão de fracções e decimais para percentagem.

3. Depois da unidade de ensino. Depois da unidade de ensino, os alunos revelam melhor desempenho na comparação e ordenação de números racionais, apesar de continuar a ser um tópico onde evidenciam dificuldades. Já nesta altura se mostram bastante mais eficazes na ordenação de numerais decimais (com um número desigual de casas decimais). Conseguem comparar, com facilidade, pares de fracções com numeradores iguais e pares de números com denominadores iguais. Também melhoram bastante na comparação de pares de fracções com os numeradores e os denominadores diferentes, e para comparar fracções preferem geralmente transformá-las em decimais. Os alunos conseguem calcular a distância entre dois pontos marcados na recta numérica e usam uma fracção para representar essa distância. Os alunos melhoram no uso da recta numérica, mas continuam com dificuldades em representar nela um conjunto de números apresentados em diferentes representações. Continuam a mostrar melhor desempenho na medição de segmentos de recta maiores do que a unidade de medida do que na medição de segmentos de recta menores do que a unidade de medida

Depois da unidade de ensino Leonor, consegue comparar, sem dificuldades, fracções nos significados parte-todo, medida e quociente, em situações um pouco mais complexas. Para comparar fracções com numeradores iguais, compara apenas os denominadores. Para comparar fracções com denominadores iguais, compara apenas os numeradores. No caso das fracções com numeradores e denominadores diferentes a aluna converte-os em decimais e ordena-os nessa representação, contudo, continua a usar a representação apresentada na pergunta para responder. Mostra-se com maior destreza na ordenação de numerais decimais e adopta a estratégia de acrescentar sempre zeros à direita dos números para que fiquem todos com o mesmo número de casas decimais. Compreende a necessidade de comparar os números todos na mesma representação e mostra destreza na conversão de fracções e percentagens para decimais. Quando não transforma as fracções em decimais, a aluna continua a mostrar dificuldades na comparação de fracções com numeradores e denominadores diferentes. Neste caso comete dois erros distintos, o primeiro é aquele que já fazia anteriormente quando compara apenas as fracções unitárias. O segundo provém da utilização de uma nova estratégia, *gap thinking* (Post et al., 1986), que a conduz ao erro, onde a aluna compara apenas o que falta para completar a unidade, verifica que em ambos falta uma parte e assume que as fracções são iguais, sem comparar o tamanho dessa parte que falta para completar o todo.

4. Síntese. Quando iniciam o estudo dos números racionais, os alunos conhecem bem os números naturais e é com base nesse conhecimento que procuram interpretar as fracções. No entanto, durante a unidade de ensino esta influência dos números naturais, não é muito visível, pois rapidamente os alunos começam a interpretar as fracções como números, o que segundo Post et al. (1986) pode ser um avanço importante na construção da noção quantitativa de número racional. Esta rápida interpretação de uma fracção como número pode estar relacionada com o facto de serem trabalhadas em simultâneo as várias representações de número racional.

Os alunos melhoram bastante na ordenação de numerais decimais com um número desigual de casas decimais. Mantêm um bom desempenho na comparação de pares de fracções com numeradores iguais e de pares de fracções com denominadores iguais. No que diz respeito a pares de fracções com numeradores e denominadores diferentes, os alunos não usam fracções equivalentes para os comparar, preferindo geralmente transformar as fracções em numerais decimais e ordená-los nessa representação.

Mostram ainda alguma dificuldade na ordenação de números racionais apresentados em diversas representações na recta numérica, o que pode indicia ainda alguma falta de noção de grandeza e densidade dos números racionais (Monteiro & Pinto, 2007). Além disso, continuam a mostrar dificuldade em medir um segmento de recta menor do que a unidade de medida, o que indica também alguma dificuldade no fraccionamento da unidade.

7.2.3. Equivalência de fracções

1. *Durante a unidade de ensino*. Antes da unidade de ensino os alunos não conhecem o conceito de equivalência de fracções, mas, ainda assim, conseguem reconhecer duas fracções equivalentes no significado quociente. No entanto, não conseguem identificar a representação pictórica de uma fracção equivalente a $\frac{2}{3}$. Durante

a unidade de ensino, os alunos revelam destreza para determinarem fracções equivalentes adequadas ao contexto do problema e também conseguem simplificar fracções próprias e impróprias. Para obterem fracções equivalentes, os alunos usam a multiplicação ou a divisão do numerador e do denominador pelo mesmo número natural consoante o contexto do problema. Para além das situações em que é pedido explicitamente que os alunos determinem fracções equivalentes, estes também as usam para resolver outras tarefas, como representar fracções pictoricamente ou representar fracções numa recta numérica com divisões diferentes do denominador. Durante a unidade de ensino Leonor usa fracções equivalentes pontualmente para comparar fracções e para marcar pontos na recta numérica.

2. Depois da unidade de ensino. A turma consegue, sem dificuldade, identificar a representação pictórica equivalente a uma fracção dada. Continuam a revelar à vontade na comparação de fracções equivalentes no significado quociente, em situações mais complexas. Leonor mostra destreza na obtenção de fracções equivalentes e na simplificação de fracções e utiliza esta estratégia para comparar fracções no significado razão.

3. Síntese. Os alunos, de um modo geral, mostram alguma compreensão de fracção equivalente, conseguem identificar pictoricamente fracções equivalentes, conseguem representar fracções equivalentes e simplificar fracções. Usam fracções equivalentes para marcar pontos numa recta numérica e pontualmente para comparar razões. Verifica-se contudo, que os alunos não usam as fracções equivalentes como uma estratégia para compara fracções, ao contrário do que referem Kamii e Clark (1995). Optam pela representação decimal, talvez por ser aquela onde se sentem mais à vontade. Em termos globais, antes da unidade de ensino os significados onde os alunos revelam melhor desempenho são o parte-todo e o quociente. Depois da unidade de ensino os alunos continuam a mostram maior destreza no significado parte-todo e os significados onde evidenciam maior evolução são os significados operador e medida.

7.3. Reflexão final

Para além das conclusões já apresentadas, durante a aplicação da unidade de ensino foi possível verificar que os alunos intuitivamente já sabem muitas coisas sobre números racionais, por exemplo, usam intuitivamente e correctamente a multiplicação de um número natural por uma fracção para simplificar adições de parcelas iguais.

Usam também, intuitivamente, a adição e a subtracção de fracção com denominadores iguais. Conseguem usar todas estas operações para decompor fracções.

A realização desta investigação constituiu um importante momento de aprendizagem para mim. Enquanto investigadora tive a possibilidade de viver e experimentar todos os momentos, fases e dificuldades intrínsecas à realização de uma investigação e permitiu-me também a experiência de procurar resposta às minhas questões, junto dos meus alunos. Com a realização desta investigação, tive oportunidade de perceber a importância de preparar com pormenor todos os momentos de um estudo desta natureza. Comecei a ter essa consciência quando realizei um estudo piloto sobre este tema no ano curricular do mestrado. Esse estudo foi muito importante porque me fez reflectir e ler sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais, permitiu-me compreender melhor as dificuldades usuais dos alunos, como aprendem e o que a literatura diz sobre esse processo de ensino-aprendizagem.

A realização desta investigação permitiu-me compreender como formular questões de investigação, como elaborar um plano de investigação, como analisar a literatura, como organizar a metodologia de investigação, como definir os instrumentos a recorrer tendo em conta os objectivos do estudo. Permitiu-me ainda compreender os processos de análise dados, que são bastante complexos, e a utilizá-los para elaborar as conclusões do estudo.

No decorrer desta investigação, tive oportunidade de realizar, com o meu orientador e com a minha colega Maria João Costa, duas comunicações em encontros nacionais de investigação em educação matemática. Estas comunicações tiveram como base os diagnósticos feitos para a elaboração das unidades de ensino e foram momentos importantes de reflexão a vários níveis. Na verdade, permitiram-nos reflectir nos momentos em que analisávamos com grande profundidade os dados obtidos, no momentos em que buscávamos respostas na literatura para os resultados, nas discussões com outros colegas que nos chamavam a atenção para outros pontos de vista diferentes dos nossos ou aos quais ainda não tínhamos chegado. Todos estes momentos de reflexão ajudaram-me também a interpretar os dados que ia obtendo ao longo da unidade de ensino, na análise final dos dados e na elaboração das conclusões do estudo.

A maior dificuldade que senti na realização deste estudo diz respeito ao processo de análise dos dados, mais especificamente na definição de dimensões de análise e a inclusão dos dados nessas dimensões, já que, devido à complexidade do tema, todas as dimensões estão ligadas, sendo por isso complicado limitar-me apenas a uma dimensão.

Na maior parte das vezes percebia que, por exemplo, uma tarefa de ordenação também podia ser incluída na representação, e esta situação gerou uma grande quantidade de dados que nem sempre foi fácil de gerir.

A recolha de dados também levantou problemas. Por exemplo, a gestão do tempo e dos espaços para a realização das entrevistas nem sempre fácil foi, tendo sido necessário algumas vezes mudar de sala a meio de uma entrevista. Outra dificuldade que senti foi na realização de um diário de bordo pormenorizado. No final de cada aula tentei fazer um registo fiel das observações mais relevantes. No entanto, dentro da sala o meu papel principal era o de professora, ficando o papel de investigadora, geralmente, para segundo plano, e, por isso, podem-me ter escapado observações eventualmente importantes.

Este estudo constituiu, sem dúvida, uma grande mais-valia para o meu desempenho enquanto professora, por me ter permitido compreender e reflectir mais profundamente sobre as estratégias e dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conceitos de número racional. Além disso, aumentou a minha curiosidade para desenvolver uma compreensão mais profunda da aprendizagem dos alunos noutros temas, para assim os poder ajudar também a desenvolver uma maior compreensão da Matemática. A realização deste estudo tornou-me uma professora mais reflexiva e, sobretudo mais atenta à actividade realizada pelos meus alunos.

Embora os dados não possam ser generalizados, esta investigação contribui para o aumento do conhecimento da aprendizagem do conceito de número racional pelos alunos, e por isso, de interesse para professores de Matemática e investigadores em Educação Matemática. O estudo sugere uma abordagem dos números racionais que dá uma atenção especial à compreensão dos conceitos, em vez de se centrar apenas nas operações com fracções, como tantas vezes acontece, o que tem implicações muito positivas para a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2007). É enfatizada a necessidade de valorizar as diferentes representações de número racional, e sobretudo, as relações entre elas e a flexibilidade de escolher a representação mais adequada a um determinado contexto ou situação problemática (Poste t al., 1989,1993). Sugere ainda que os alunos conseguem ter maior sucesso em algumas questões, como por exemplo na comparação de fracções, quando usam em simultâneo a representação decimal. A tendência para a valorização das representações de número racional espartilhadas ao longo do ensino básico pode retirar aos alunos a possibilidade de uma compreensão aprofundada de número racional e até alguma possibilidade de sucesso.

Penso que seria importante desenvolver estudos sobre a noção e representação de número racional envolvendo os diferentes significados e as diversas representações com alunos do 1.º ciclo, à luz das orientações do novo P*rograma de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), uma vez que indica que este tema deve ser desenvolvido a partir do 2.º ano, tal como inúmeros estudos efectuados internacionalmente com alunos mais novos.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

Anderson, G., & Arsenault, N. (2002). *Fundamentals of educational research* (2.ª edição). London: The Falmer Press.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal of Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T., & Lesh R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15(5), 323-341.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (*NCTM 1989 Yearbook,* pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bishop, A. J. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., Rocha, I., Mendes, F., Menino, H., & Ferreira, E. (2008). *Um projecto centrado no sentido do número*. Retirado em 2 de Julho de 2009 de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Apo3Brocardo.pdf

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988, May). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education.,* 19(3), 215-232.

Burgess, R. G. (1984). *A pesquisa de terreno: Uma introdução*. Oeiras: Celta.

Carmo, H., & Ferreira, M. F. (1998). *Metodologia da investigação: Guia para a auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Castro, J., Rodrigues, M. (2008). O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática.* Lisboa: Escolar Editora (publicação em 2008).

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Clark, C., Roche, A. (2009). Student's fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 72, 127-138.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. L*earning and Instruction*. V.9, 343- 363.

Duval, R. (2003). *Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.* In: Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Organização de Silvia Dias Alcântara Machado, p.11-33. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

Duval, R. (2004). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Suisse: Peter Lang S. A.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la ensenanza. In M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la ensenanza, II: Métodos cualitativos y de observación.* Madrid: Padiós Ibérica. (trabalho original em inglês, publicado em 1896).

Gay, L. R., Mills, G. E., & Airasian, P. (2006). *Educational research: Competencies for analysis and applications* (8.ª edição). Upper Saddle River: Pearson.

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 5 de Novembro de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E. Batanero, C. y Font, V. (2004). *Matemáticas para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Retirado em 5 de Novembro de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 71-87.

Kamii, C., & Clark, F.B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 365-378.

Keijer, R., & Terwel, J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case of study into learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(1), 53-73.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (ed.), *Number and measurement:* Paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p. 101-144.

Kieran, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive an formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. (2002). Part – Whole Comparisions with Unitizing. Em Litwiller, B. e Bright, G. (Eds): *Making Sense of fractions, Ratios, and Proportions.*NCTM, 2002 yearbook, Reston VA.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lessard-Hébert, M. (1996). *Pesquisa em educação*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Pesquisa qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), 19-53.

McCoskey, A., Norton, A. (2009). Using Steffe's fraction: Recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15 (1), 44-50.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics , 12(3)*, 2-8 & 44.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano* (Materiais de apoio ao professor). Lisboa: DGIDC

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem, 2.º ciclo do ensino básico* (Vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional da Casa da Moeda.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Monteiro, C., Lobo, E., Veloso, G., Sousa, H., Moura, I., & Ribeiro, S. (2006). Cadeia de Tarefas para o ensino dos decimais. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º ciclo - Ese Lisboa.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Moss, J., e Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,*30, 122-147

Moss, J. (2002). Percents and Proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In Litwiller, B. e Bright, G. (eds): *Making sense of frations, ratios, and proportions.* NCTM, 2002 Yearbook (pp. 109-120), Reston, VA: NCTM.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1985). *Agenda para a acção.* Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, L., Pereira, A., & Santiago, R. (2004). *Investigação em educação: Abordagens conceptuais e práticas*. Porto: Porto Editora.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 3, 63-75.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas: Um aspecto novo do método matemático.*Lisboa: Gradiva (publicado originalmente em inglês em 1945).

Ponte, J. P. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES-ME.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-Based Observations About Children's Learning of Rational Number Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39-48.

Post, T., & Cramer, K. (1989). Knowledge, Representation and Quantitative Thinking. In M. Reynolds (Ed.) *Knowledge Base for the Beginning Teacher - Special publication of the AACTE* (pp. 221-231). Oxford: Pergamon Press.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In T. Carpenter, E. F& Harel, G. (In press). Designing instructionally relevant assessment reports. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts.* Lawrence Erlbaum and Associates.

Post T., Wachsmuth I., Lesh R., & Behr M. (1985, January). Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(1), 18-36.

Simon. M. A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivistist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Smith, S. (2003). Representation in school mathematics: Children's representation of problems. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 263-274). Reston, VA: NCTM

Stake, R. E. (1999). *Investigación com estúdio de casos*. Madrid: Morata.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso* (1.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Webb, D., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Anexos

Anexo 1

Balanço do diagnóstico tendo em vista a elaboração da unidade de ensino

No dia 24 de Novembro de 2009, num bloco de 90 minutos, apliquei aos alunos um conjunto de tarefas, com carácter diagnóstico, sobre noção, ordenação, comparação e equivalência de números racionais representados de diferentes formas – fracção, decimal, pictórica, verbal e percentagem (ver as tarefas no Anexo 10). Os alunos trabalharam em grupos durante cerca de 45/50 minutos, enquanto eu circulei pelos vários grupos a fim de tirar dúvidas e perceber as suas dificuldades. Após esta fase de trabalho em pequenos grupos, dinamizei uma discussão das tarefas em grande grupo, como forma dos alunos partilharem e discutirem com os colegas os resultados obtidos. Esta aula foi gravada em vídeo, primeiro, incidindo no trabalho de um grupo de alunos, depois na discussão colectiva. De uma forma geral, o trabalho em grupo revelou-se bastante positivo já que os alunos se ajudaram bastante.

O trabalho da turma nesta aula superou largamente as minhas expectativas, já que os alunos nunca tinham trabalhado formalmente os conteúdos abordados no diagnóstico e mostraram-se sempre muito empenhados em resolver as tarefas, foram persistentes e tentaram encontrar estratégias para resolver as tarefas. O facto que os alunos não tinham conhecimento formal sobre números racionais representados sob a forma de fracção, é visível no trabalho do grupo que foi gravado em vídeo. Quando um dos alunos lê para os colegas o enunciado da questão 1 e lhe surge numera fracção $\frac{1}{4}$ e, não a consegue ler. Esta dificuldade com linguagem própria das fracções revelou-se na generalidade dos alunos que recorrentemente diziam "a segunda parte" para se referir a um meio, ou "a terceira parte" para se referir a um terço. No decorrer da tarefa e à medida que os alunos me colocavam questões fui introduzindo a linguagem correcta e os alunos rapidamente começaram a usá-la também.

Na tarefa 1, a turma não mostrou dúvidas. Os alunos mostraram-se bastante à vontade nesta questão, que envolve o significado operador, revelando recordar o trabalho desenvolvido durante o 1.º ciclo com este significado. Resolveram a tarefa realizando a operação 12:4=3, conseguindo relacionar $\frac{1}{4}$ com os números partitivos e assim obtiveram aquilo que designavam como a "quarta parte". O grupo que foi ao quadro conseguiu ainda estabelecer uma relação entre a metade e a quarta parte, mostrando perceber que a quarta parte é a metade da metade, embora no quadro não o conseguisse explicar de uma forma clara.

A tarefa 2 não levantou muitas dúvidas à generalidade da turma, o que confirma o conhecimento dos alunos em tarefas com o significado operador. Todos conseguiram realizar com sucesso a questão a) onde era pedido $\frac{1}{2}$ dos bombons e apenas dois grupos não conseguiram interpretar a fracção $\frac{1}{3}$ e, por isso, não resolveram correctamente a alínea b). Isto revela que os alunos já conseguiram interiorizar algumas relações básicas das fracções com números partitivos, no caso das fracções unitárias.

Na tarefa 3, na questão a) os alunos tiveram alguma dificuldade em ordenar números decimais com um número diferente de casas decimais. As questões b) e c), onde era solicitada a ordenação de números representados sob a forma de fracção, revelaram-se mais complicadas, pois os alunos não conheciam os números apresentados. No entanto, não desistiram e encontraram estratégias para resolver o problema. Todos os grupos começaram a ordenar as fracções comparando apenas ou o numerador ou o denominador, obtendo a seguinte ordenação $\frac{1}{4} < \frac{1}{8} < \frac{1}{25} < \frac{2}{5} < \frac{3}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4}$. Na discussão em grande grupo, os alunos explicaram ter comparado em primeiro lugar os numeradores e depois, daqueles que tinham os mesmos numeradores compararam os denominadores, como se de números inteiros independentes se tratasse.

Na questão c) existiam números representados na forma decimal e fraccionária o que suscitou mais dúvidas aos alunos, pois já não conseguiam aplicar nenhuma das estratégias anteriores. Em alguns casos, e após algumas perguntas da minha parte, alguns alunos decidiram transformar todos os números para a representação decimal. Mas a maior parte acabou por separar os números, ordenando os decimais de acordo com as estratégias utilizadas em a) e ordenando as fracções de acordo com as estratégias utilizadas em b). Na discussão em grande grupo os alunos que fizeram a transformação das fracções em decimais nas questões b) e c) verificaram que a ordenação apresentada pela maioria dos colegas não estava correcta, mas não conseguiram compreender e explicar porquê.

Na tarefa 4 os alunos conseguiram sem dificuldade encontrar uma representação para a região sombreada, tendo a maioria utilizado a linguagem verbal ("metade" e "terça-parte"). Verificou-se uma conclusão muito interessante de um grupo que revela grande compreensão da tarefa, tendo na discussão em grande grupo dito que a representação não devia ser aquela (verbal) porque era pedida a fracção e, por isso, devia ser $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e na última $\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{10}$. Estes alunos revelaram compreender o significado parte-todo e até fazer relações de equivalência, mas a maior parte da turma revelou bastantes dificuldades no significado parte-todo que se traduziu na sua dificuldade na linguagem das fracções e em compreender a fracção como um número.

No que diz respeito à tarefa 5 os alunos revelaram facilidade entre a representação em fracção e a representação em percentagem. Na sua maioria conseguiram perceber que $\frac{1}{2}$ é igual a 50% e que $\frac{1}{4}$ como é metade da metade, sendo então 25%, o que revela que a representação em percentagem pode ser importante como recurso para a compreensão dos números racionais.

Deste modo, na resolução das tarefas os alunos utilizaram preferencialmente as representações decimal e verbal, revelando-se pouco à vontade com a representação em fracção. Apesar de só utilizarem a representação em percentagem nas questões que o solicitavam, mostraram algum conhecimento desta representação. Revelaram ter desenvolvido durante o 1.º ciclo o significado operador. Além disso, revelaram total falta de conhecimento da representação em fracção, como se evidenciou na dificuldade com a linguagem das fracções.

Anexo 2

Planificação da Unidade de Ensino

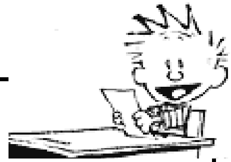
Aulas previstas: 10 blocos de 90 minutos								
Fichas de Trabalho	**Tópicos**	**Objectivos/Capacidades a desenvolver**	**Natureza das tarefas**	**Representações**	**Significados**	**Modo de trabalho**	**Duração em min.**	**Blocos**
Teste Diagnóstico	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	• Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre antes da unidade de ensino.	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal, fracção, pictórica	Parte-todo, medida, quociente, operador e razão	Individual	45	0,5
Ficha de trabalho 1	Noção e representação de número racional.	• Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas; • Representar sob a forma de fracção, númeral decimal e percentagem um número racional não negativo; • Comparar números representados de diferentes formar; • Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes; • Compreender e usar um número racional na relação parte-todo, razão e medida.	Tarefas de exploração	Percentagem, numeral decimal e fracção	Parte-todo, medida, e razão	Em pares	90	1
Ficha de trabalho 2	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais.	• Compreender e usar um número racional como parte-todo, medida e operador: • Comparar e ordenar números racionais representados na forma de numeral decimal; • Reconstruir a unidade a partir das suas partes; • Ler e escrever na representação decimal e relacionar diferentes representações de racionais não negativos.	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal e fracção	Parte-todo, medida, e operador	Em pares	90+45	1,5
Ficha de trabalho 3	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais.	• Compreender e usar um número racional como parte-todo, operador e medida; • Reconhecer fracções que representam números maiores do que a unidade; • Escrever fracções impróprias na forma de numeral misto fraccionário; • Comparar números racionais; • Reconstruir a unidade a partir das suas partes; • Reconstruir as partes a partir da unidade: • Compreender e utilizar um número racional nas representações: numeral decimal, numeral misto fraccionário, percentagem e pictórica.	Tarefas de exploração e exercícios	Percentagem, numeral decimal, pictórica e numeral misto fraccionário	Parte-todo, medida, e operador	Em pares	45+90	1,5

Ficha de trabalho 4	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	• Compreender e usar um número racional como quociente, operador e medida; • Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; • Reconstruir a unidade e as partes; • Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade de medida; • Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas.	Tarefas de exploração, problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal, fracção, pictórica	Quociente, operador e medida	Em pares	90+45	1,5
Ficha de trabalho 5	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes.	• Compreender e usar um número racional como relação parte-todo, medida, razão e operador; • Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; • Reconstruir as partes • Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; • Comparar números racionais apresentados sob a forma de fracção; • Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; • Decomposição de fracções.	Tarefas de exploração e problemas	Fracção	Parte-todo, medida, operador e razão	Em pares	45+90	1,5
Ficha de trabalho 6	Noção e representação de número racional e comparação e ordenação de números racionais. Fracções equivalentes	• Compreender e usar um número racional como medida e operador; • Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; • Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; • Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; • Reconstruir as partes; • Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade.	Problemas e exercícios	Fracção e decimal	Medida e operador	Em pares	90	1
Ficha de trabalho 7	Noção e representação de número racional e percentagem	• Compreender e utilizar um número racional nas representações: fracção, numeral decimal e percentagem; • Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível; • Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; • Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100; • Calcular e usar percentagens.	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal e fracção	Parte-todo e operador	Em pares	90	1
Avaliação de conhecimentos	Noção e representação de número racional, Comparação e ordenação Fracções equivalentes.	• Avaliar as aprendizagens desenvolvidas durante a unidade de ensino.	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal, fracção, pictórica e verbal	Parte-todo, medida, quociente, operador e razão	Individual	45	0,5

Anexo 3[3]

<u>Ficha de Trabalho N.º 1</u>

TAREFA: <u>DOBRAS E MAIS DOBRAS</u>



1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:

- a primeira em duas;
- a segunda em quatro;
- a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Regista as tuas conclusões.

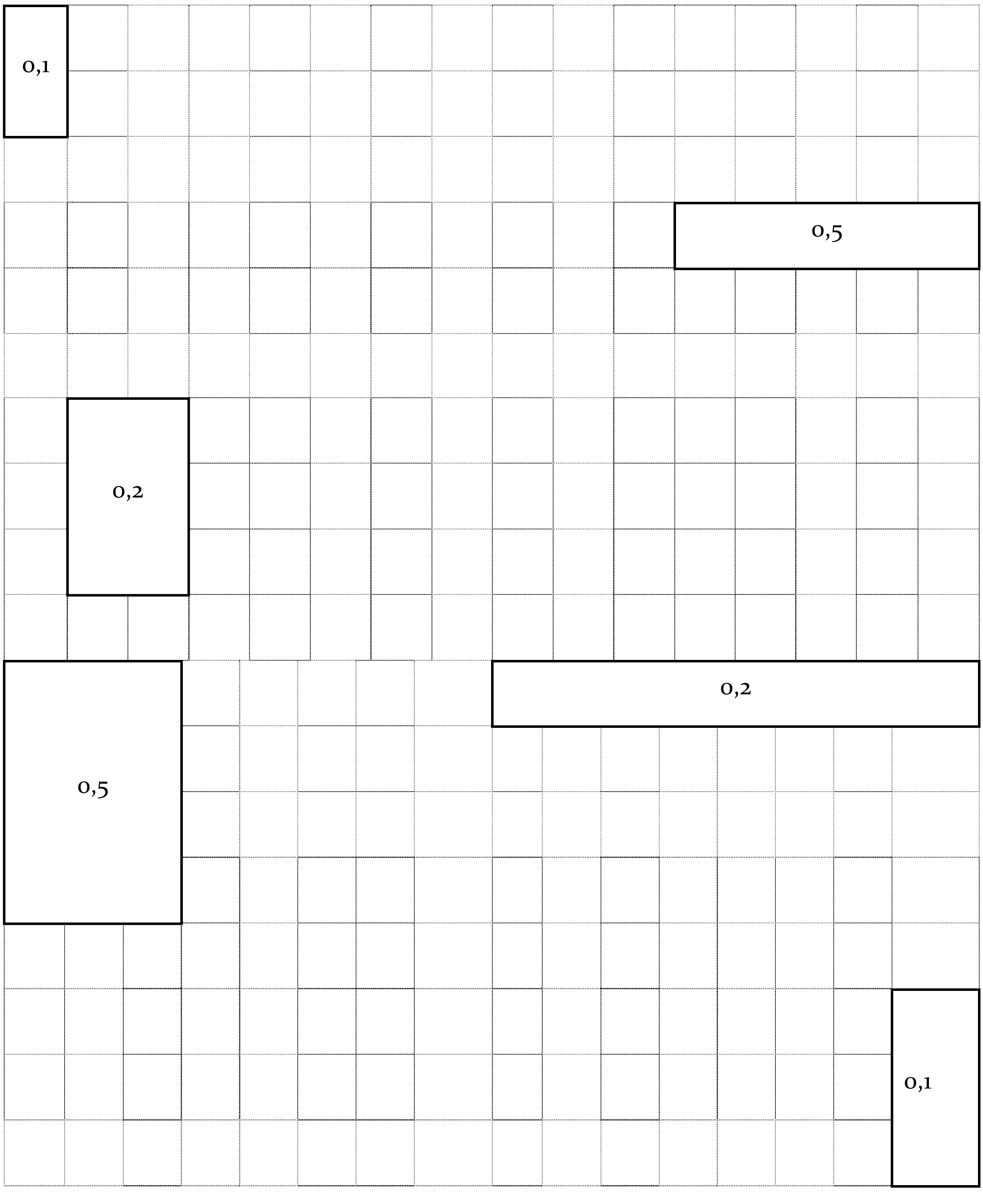
[3] Tarefas adaptadas de Menezes et al. (2008).

Anexo 4[4]

Ficha de Trabalho N.º 2

Tarefa 1

Constrói as unidades (as figuras inteiras) a partir das porções indicadas.



[4] Tarefas adaptadas de Monteiro et al. (2006).

Tarefa 2: As toalhas da Joana

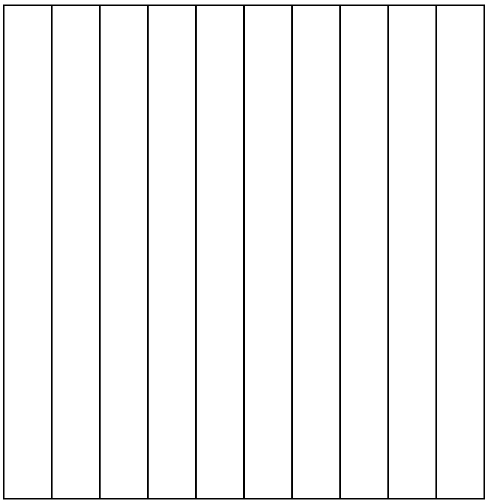
A Joana queria pôr na mesa da sua festa dos anos uma toalha bonita.

Tinha duas hipóteses: uma toalha às barras e outra toalha aos quadradinhos. Qual das duas escolherias: a que está dividida em décimas ou a que está dividia em centésimas?

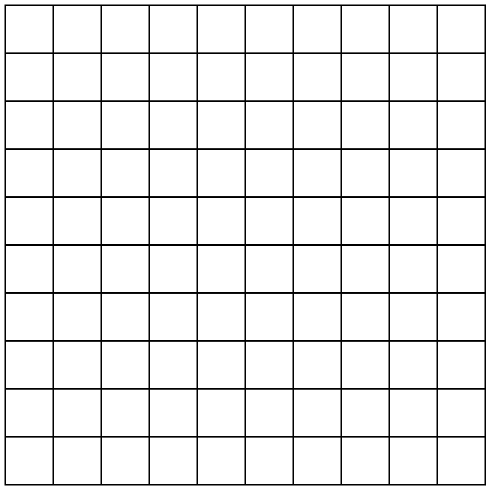
Questão 1

1. Pinta metade da toalha A de uma cor e metade da toalha B de outra cor.

Toalha A



Toalha B



2. Quantas décimas da toalha A pintaste?

3. Quantas centésimas da toalha B pintaste?

4. Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações?

5. Que percentagem das toalhas está pintada?

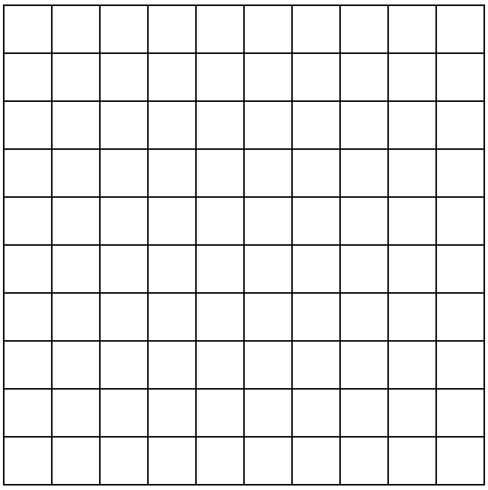
6. Que conclusões podes tirar?

7. Ordena por ordem crescente os seguintes números

0,259; 1,2; 0,26; 1,15; 1,179; 5,3

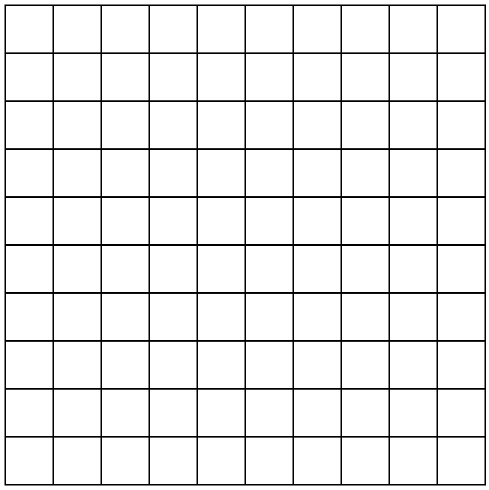
Questão 2: Pinta a quarta parte da toalha C de uma cor

Toalha C



Pinta 25 centésimas da toalha D de outra cor

Toalha D

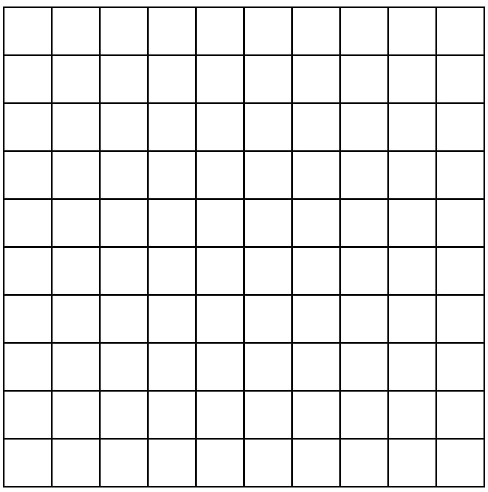


1. Pintaste a mesma quantidade de toalha nas duas situações?

2. Que percentagem das toalhas está pintada?

3. Que conclusões podes tirar?

Toalha E



4. Na toalha E pinta 0,02 de uma cor e 0,20 de outra cor.

5. Que parte da toalha ficou em branco?

6. Calcula Mentalmente:

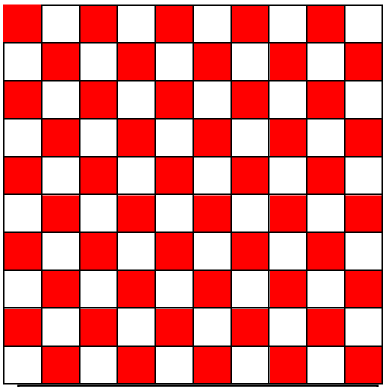
4x0,25=

8x0,25=

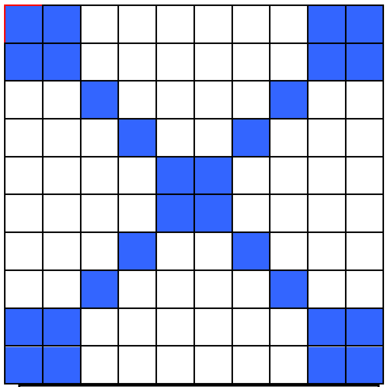
Questão 3: Se cada figura representar 1 toalha, que parte da toalha está pintada?

Escreve em numeral decimal, em percentagem e em fracção.

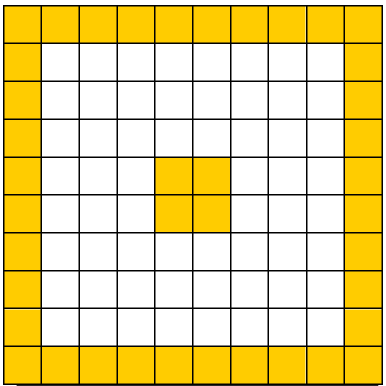
Toalha 1



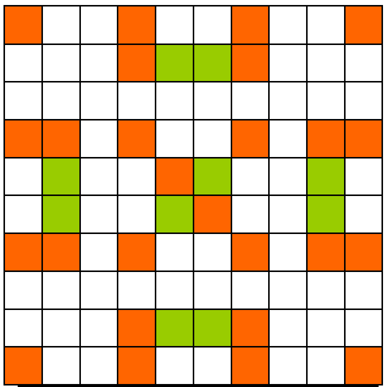
Toalha 2



Toalha 3



Toalha 4



4. Encontra maneiras diferentes de decompor os seguintes números:

a) 0,2

b) 0,6

c) 0,5

d) 0,75

e) 0,55

f) 0,255

g) 0,324

5. A Ana gastou 0,50 da sua mesada na compra de uma prenda para o aniversário da mãe. Tinha 25€, quanto gastou?

6. O Rui deu 25% dos seus berlindes ao Tiago. Sabendo que o Rui tinha 20 berlindes. Quantos berlindes deu o Rui ao Tiago?

7. Num inquérito feito a 30 alunos, 0,4 disseram nunca ter andado de comboio. Indica o número de alunos que nunca andaram de comboio.

8. A mãe da Luísa queria fazer um colar para o qual necessitava de 21 peças. Reparou que tinha apenas $\frac{2}{3}$ das peças que necessitava. Quantas peças teve de comprar a mãe da Luísa para terminar o colar?

Anexo 5

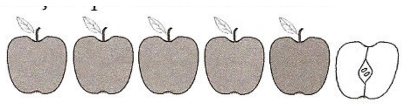
Ficha de Trabalho N.º 3

As maçãs

Tarefa 1[5]

1.1. Quando a Sara e a irmã foram lanchar havia na fruteira cinco maçãs e meia. Escreve uma fracção que represente o número de maçãs que havia na fruteira.

1.2 Quando terminaram de lanchar ficaram na fruteira $\frac{9}{4}$ de maça.

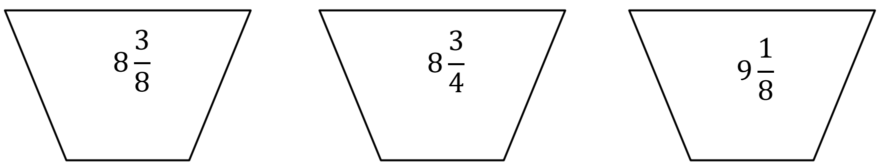


Quantas maçãs inteiras sobraram?

1.3. Desenha uma figura que possa representar o que sobrou das maçãs.

Tarefa 2

Dos três alguidares A, B e C, qual deles tem mais maçã? Justifica a tua resposta.



[5] Tarefas adaptadas de Monteiro e Pinto (2007).

Tarefa 3[6] –À descoberta da tira

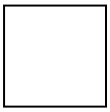
A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

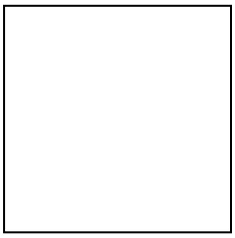
Explica o teu raciocínio.

Tarefa 4

a) Se a figura seguinte representar 10% do todo, desenha a figura completa.

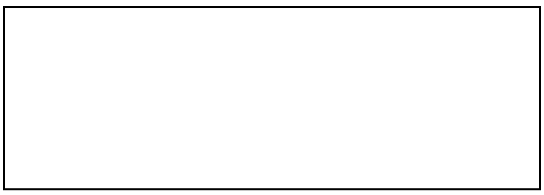


b) Representa 25% da figura.



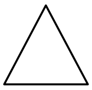
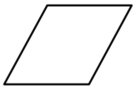
Tarefa 5

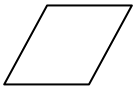
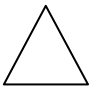
Se a figura representar $\frac{4}{3}$ da unidade, desenha o todo.

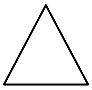
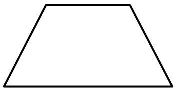


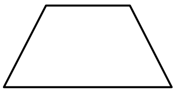
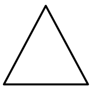
[6] Tarefas adaptadas de Menezes et al. (2008).

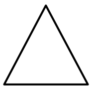
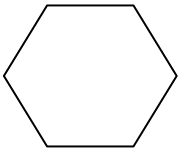
Tarefa 6[7]

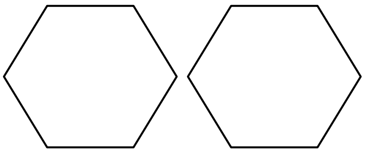
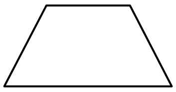
1. Se  = 1, o que representa  ?

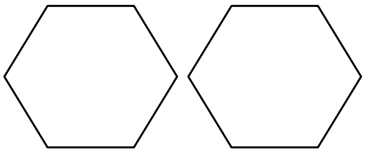
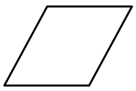
2. Se  = 1, o que representa ?

3. Se  = 1, o que representa ?

4. Se  = 1, o que representa ?

5. Se  = 1, o que representa  ?

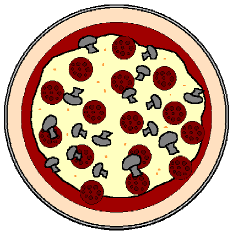
6. Se  = 1, o que representa ?

7. Se  = 1, o que representa  ?

[7] Tarefa adaptada de Lamon (2002)

Anexo 6[8]

Ficha de Trabalho N.º 4



Tarefa 1: Partilhando pizas

Questão 1

1.1. Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as três pizas. Que parte da piza comeu cada amigo?

1.2. Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Questão 2

2.1. Se em vez de quatro amigos fossem oito amigos, pedissem três pizas e as dividissem igualmente, que parte de pizza comeria cada um?

2.2. Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza? Explica o teu raciocínio.

Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio.

Tarefa 2: Coleccionando

Questão 1

O Carlos colecciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu dois sextos das tampinhas. Quantas tampinhas perdeu?

Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

[8] Tarefas adaptadas de Monteiro e Pinto (2007).

Questão 2

O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fracção das suas 12 tampinhas deu ao Carlos?

Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Questão 3

O Carlos continuou a coleccionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua colecção. Quantas tampinhas já tinha o Carlos?

Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Tarefa 3

Escreve por ordem crescente os seguintes números:

$\frac{1}{4}$; $\frac{7}{10}$; 26%; 0,267

Tarefa 4

Tenho de comprar 2 quilos e $\frac{1}{4}$ de café. No supermercado há pacotes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e 1 quilo. Que pacotes devo levar? Quais as possibilidades? Quais escolho para levar a menor quantidade de pacotes?

Tarefa 5

Observa as barras abaixo

Quanto mede a barra 2 tomando-se a barra 1 como unidade? R: ____________________

Quanto mede a barra 1 tomando-se a barra 4 como unidade? R: ____________________

Quanto mede a barra 3 tomando-se a barra 5 como unidade? R: ____________________

Quanto mede a barra 4 tomando-se a barra 3 como unidade? R: ____________________

Tarefa 6

Um minuto que fracção de hora é?

E dez minutos?

E 15 minutos?

Um mês que fracção do ano é?

E 3 meses? (Apresenta o resultado na forma de decimal).

Tarefa 7

Ordena por ordem decrescente os seguintes números

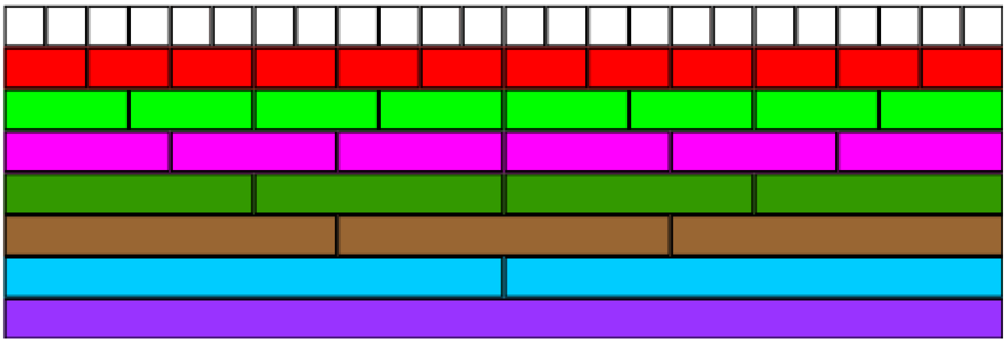
a) 0,99 0,1 0,458 0,5 0,05

b) 0,3 0, 15 0,03 0,9 0,77 0, 99

Anexo 7

<u>Ficha de Trabalho N.º 5</u>

Tarefa 1 - Muro das Fracções



1. Usando a imagem anterior diz quantos caminhos diferentes podes utilizar para escrever $\frac{1}{2}$.

2. Quantas fracções equivalentes consegues encontrar no muro para perfazer $\frac{1}{3}$?

3. Usando novamente o muro das fracções, de quantos modos podes escrever $\frac{3}{4}$?

4. Que outras fracções conheces que sejam equivalentes a $\frac{1}{2}$?

5. Conheces outras fracções equivalentes a $\frac{3}{4}$?

Tarefa 2 – Cálculo Mental

Encontra maneiras diferentes de decompor os seguintes números:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{6}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{9}{12}$

Tarefa 3

1. Compara os seguintes números:

$\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{7}$ $\qquad$ $\frac{8}{9}$ e $\frac{9}{10}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{9}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$

Tarefa 4

a) Determina duas fracções entre $\frac{7}{8}$ e $\frac{9}{10}$

b). Determine três fracções entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$

Tarefa 5

Num treino de futebol os dois pontas de lança estiveram a treinar remates à baliza. O Manuel concretizou 5 dos 12 remates que fez, enquanto que o Carlos concretizou 4 dos 9 remates.

a) Representa sob a forma de fracção os remates concretizados por cada um deles.

b) Indica quem deveria ser escolhido e porquê?

Tarefa 6

O André, o Luís e o Diogo compraram chocolates iguais de manhã. À tarde tiveram a seguinte conversa:

André: Eu já comi mais de metade do meu chocolate.

Luís: Eu já comi quase metade, mas não chegou

Diogo: Eu não comi quase nada, só um bocadinho.

Sabemos que um deles comeu $\frac{3}{8}$ do chocolate, outro $\frac{3}{5}$ e o outro $\frac{2}{20}$ do chocolate.

Escreve o nome do menino que comeu:

$\frac{3}{8}$ ____________________

$\frac{3}{5}$ ____________________

$\frac{2}{20}$ ____________________

Tarefa 7

Se uma equipa de natação vender 400 bilhetes de uma rifa haverá dinheiro suficiente para pagar T-shirts novas. Mas os nadadores só têm $\frac{5}{8}$ dos bilhetes vendidos. Quantos bilhetes mais têm ainda que vender?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo usando palavras esquemas ou cálculos.

Tarefa 8

Na sala do Manuel há 16 mesas, 14 delas têm duas cadeira e 2 têm apenas uma cadeira.

a) Escreve sobre a forma de fracção o número de mesas que têm uma cadeira?

b) Escreve sobre a forma de fracção o número de mesas que têm duas cadeiras?

Tarefa 9

O número de rapazes e raparigas de uma turma estão numa razão de 2 para 3. Quantos rapazes tem a turma sabendo que há 15 raparigas?

Tarefa 10

Se $\frac{6}{7}$ da capacidade de um recipiente é 42 litros, qual é a capacidade total do recipiente?

Anexo 8[9]

<u>Ficha de Trabalho N.º 6</u>

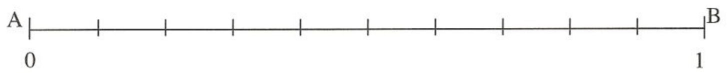
Tarefa 1: Percursos

Questão 1

1.1. A turma do João organizou um percurso pedestre do Parque Natural da Serra d' Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB].

A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



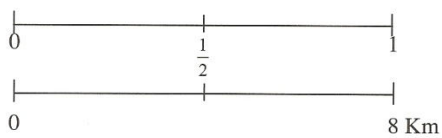
1.2. Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

1.3. O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido $\frac{5}{6}$ do percurso feito pelo Franscisco antes de parar. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João?

Questão 2

2.1. Quatro amigos tentaram ir ao "pé cochinho" de um ponto A a um ponto V marcado no chão. O Luís conseguiu fazer $\frac{5}{8}$ do percurso total, o Fernando $\frac{2}{8}$, a Inês $\frac{1}{2}$ e a Marta $\frac{3}{4}$.

Quem fez o maior percurso? Justifica a tua resposta.



2.2 Quantos metros percorreu o Luís? Justifica a tua resposta.

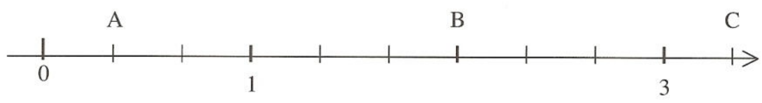
---

9 Tarefas adaptadas de Monteiro e Pinto (2007).

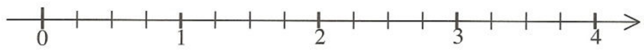
Questão 3

3.1. Já conheces a linha numérica e sabes que ela te pode ajudar na comparação de números.

Regista o número que corresponde a cada um dos pontos, A, B e C, assinalados na linha numérica que se segue:

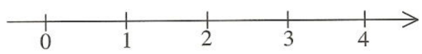


3.2. Na linha numérica representada abaixo, assinala os pontos correspondentes a: $\frac{5}{2}$; 1,5; $3\frac{1}{2}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{3}{4}$



Questão 4

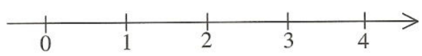
4.1. Assinala na recta numérica os números A-2 e B- $2\frac{1}{2}$



4.2. Assinala dois números entre A e B.

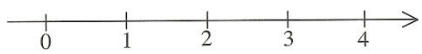
Questão 5

Assinala na recta numérica três números entre 0 e 1.



Questão 6

Escolhe dois números C e D e assinala-os na recta. Entre esses dois números que escolheste, quantos números te parece que existam?



Anexo 9

Ficha de Trabalho N.º 7

Tarefa 1 – Conversões: Percentagem, Fracção e Decimal

Percentagem	Fracção	Decimal
50%		0,5
	$\frac{1}{4}$	
		0,1
1%		
	$\frac{1}{5}$	
5%		
		0,75

Tarefa 2 – Cálculo Mental

Calcula mentalmente:

a) 50% de 500
b) 5% de 640
c) 20% de 2400
d) 10% de 240
e) 100% de 690
f) 1% de 200
g) 25% de 320
h) 75% de 320

Tarefa 3[10] – Desconto de desconto

Será que…

Um desconto de 30% sobre o preço inicial de um MP3 seguido de um novo desconto de 50% equivale a efectuar um desconto de 80% sobre o preço inicial?

[10]Tarefa adaptada de Menezes et al. (2008).

Tarefa 4[11] – Descontos na *Bit-@-byte*

Na loja Bit-@-byte um computador custa 800€. No 1.º dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior.

Questão 1

1. Ao fim de quantos meses o preço do computador passa a ser inferior a metade do inicial?

[11] Tarefa adaptada de Menezes et al. (2008).

Anexo 10

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmº(ª) Sr(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Educação na Especialidade de Didáctica da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um estudo que tem como objectivo perceber de que modo o trabalho com as diferentes representações dos números racionais pode contribuir para a compreensão destes números pelos alunos do 5.º ano.

Para o efeito necessito de observar e recolher dados sobre o trabalho dos alunos durante oito aulas sobre o tema "Números Racionais", que decorrerão no 1.º e 2º período. A recolha de dados basear-se-á na gravação em vídeo e áudio das aulas, bem como em entrevistas a alunos, feitas em horário extracurricular, de modo a compreender melhor o que os alunos sentiram face às tarefas propostas e tentando clarificar algum aspecto menos explícito das gravações.

Face ao exposto solicito autorização para proceder à recolha de dados, junto do seu educando, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos que serão utilizados apenas no âmbito da referida investigação, por mim e pelo meu supervisor, e para divulgação de resultados em encontros de natureza científica.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, apresento os meus melhores cumprimentos.

___________, ____ de Novembro de 2009

A professora de Matemática

____

(Marisa Quaresma)

✂---

Autorizo/ Não Autorizo que meu (inha) educando(a)___________________________ nº ___ turma ___ 5º ano, a participar na recolha de dados dirigida pela professora Marisa Quaresma, no âmbito do seu estudo de Mestrado.

Data: _______________________________

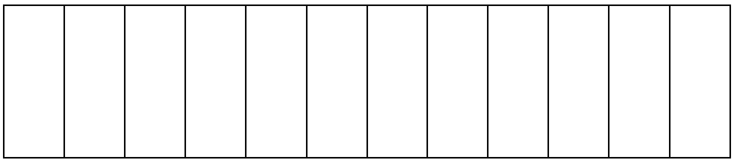
Assinatura: ______________________________________

Anexo 11

Tarefas da aula de Diagnóstico

1. A avó do Luís deu-lhe um chocolate como aquele que mostra a figura. O Luís decidiu dar $\frac{1}{4}$ do chocolate ao seu amigo Rodrigo.

Assinala a sombreado a parte do chocolate que o Luís de ao Rodrigo.



2. A Maria tem 60 bombons que quer partilhar com alguns colegas. Deu $\frac{1}{2}$ aos colegas da natação e $\frac{1}{3}$ aos colegas da turma.

a) Quantos bombons deu a Maria aos colegas da natação?

b) E aos colegas da turma?

c) Quantos bombons sobraram à Maria?

3. Coloca por ordem crescente os seguintes números:

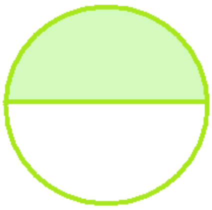
a) 1,5 0,25 0,4 0,75 1,25 0,04 0,125

b) $\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{5}{4}; \frac{1}{25}; \frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{2}$; 0,25; $\frac{3}{4}$; 0,5; $\frac{1}{3}$; 0,75

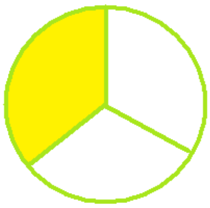
4.1. Considera as figuras e indica a fracção a que corresponde a parte colorida.

a)



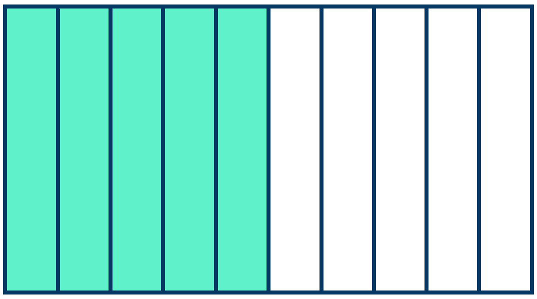
____

b)



____

c)



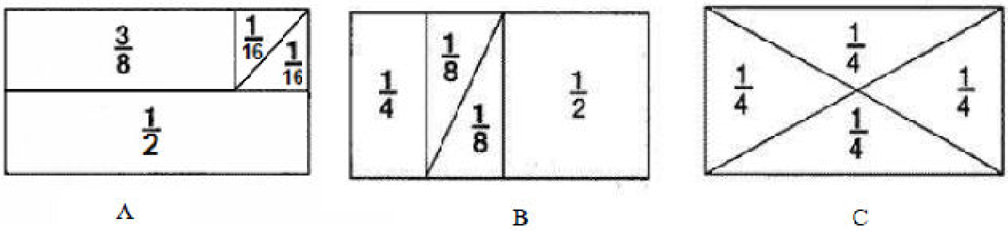
____

4.2. Das duas fracções (a) ou (b), qual é maior?

5. Há muitos anos viveu um Rei que deixou em testamento toda a sua fortuna aos seus quatro filhos. Segundo as leis da época a sua fortuna foi distribuída do seguinte modo:

O filho mais velho recebeu 50% da fortuna;
O filho mais novo recebeu 25% da fortuna;
A restante fortuna foi dividida igualmente pelos restantes filhos.

5.1. Qual das seguintes **representações (A, B ou C)** corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos?



5.2. O valor da herança do filho mais velho foi calculado em 4 500 pesos reais. Quanto receberam, em pesos reais, os restantes filhos?

5.3. Que percentagem da herança recebeu cada um dos filhos do meio?

5.4. Se tu fosses o Rei como dividias a fortuna pelos quatro filhos? Justifica a tua opção.

5.4.1. De acordo com a tua opção que percentagem da fortuna recebia cada filho? Quanto recebia cada um em pesos reais?

Anexo 12

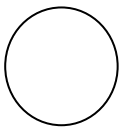
Guião da Primeira Entrevista

Registo da data e da hora do início da gravação.

Tarefas – 1.ª Entrevista

Ao longo da resolução das tarefas que se seguem, apresenta todo o teu raciocínio, explicando, também, **oralmente** o modo como estiveres a pensar, em cada uma delas. (utiliza esquemas, desenhos, cálculos, etc. para explicar como encontraste a resposta)

1. Se a figura seguinte representar $\frac{1}{3}$ da unidade, desenha a figura completa.



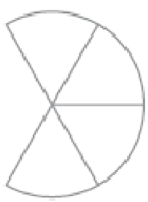
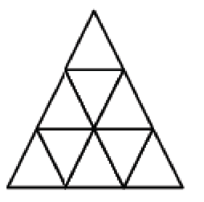
2. O Filipe, o Bernardo e a Inês foram participar no campeonato de natação. Ao fim de alguns minutos, o irmão do Filipe fez o ponto da situação:

- O Filipe já percorreu $\frac{4}{6}$ do percurso;
- O Bernardo $\frac{3}{6}$;
- E a Inês $\frac{5}{6}$.

a) Indica qual dos amigos vai em primeiro lugar. E em segundo?

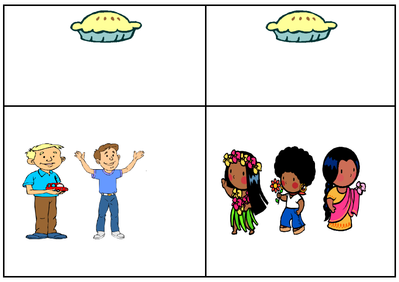
b) Indica a distância entre o Filipe e o Bernardo.

3. Pinta, em cada uma das figuras, a fracção apresentada.

a) 	b) 

$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{9}$

4. As meninas dividem uma tarte e os meninos também dividem uma tarte igual à das meninas.



a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

c) Quem é que come mais? Cada menino ou cada menina?

5. Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) 0,5; 2,29; 0,45; 5,02; 2,200

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$

6. Sr. Jacinto comprou 6 arbustos. Tinha 3 canteiros e queria plantar $\frac{1}{3}$ dos arbustos em cada um. Quantos arbustos plantou o Sr. Jacinto em cada canteiro?

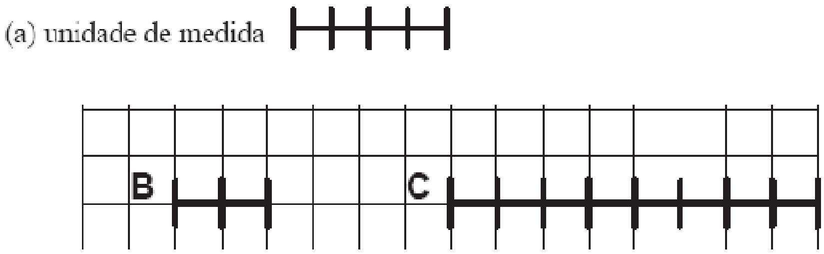
7. Se a figura seguinte representar a unidade, pinta $\frac{2}{6}$ da figura.

8. A Maria, o Carlos e a Margarida querem partilhar quatro pizas médias quadradas. Cada um receberá a mesma quantidade de piza.

a) Representa na figura a quantidade de piza que cabe ao Carlos.

b) Que quantidade da piza é que o Carlos vai receber?

9. Observa a figura seguinte:

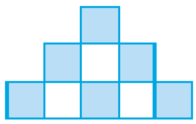
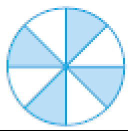


a) Utilizando como unidade de medida o segmento de recta *a*, quanto mede o segmento de recta *c*?

b) Utilizando o segmento de recta *a* como unidade de medida, quanto mede o segmento de recta *b*?

10. Num inquérito feito aos 20 alunos da turma do Henrique, 0,75 dizem que vêm de carro para a escola. Quantos alunos vêm de carro para a escola?

11. Para cada figura indica a fracção que corresponde à parte pintada.

a) 	b) 

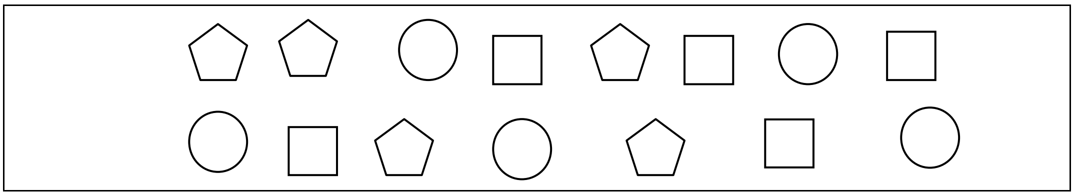
c) Qual das figuras anteriores tem pintada 50% da sua área?

12. Qual é a fracção maior? De entre os pares de fracções faz um círculo em volta da maior.

a)	$\frac{3}{8}$	e	$\frac{7}{8}$
b)	$\frac{1}{2}$	e	$\frac{5}{8}$
c)	$\frac{4}{6}$	e	$\frac{4}{8}$
d)	$\frac{2}{4}$	e	$\frac{4}{2}$

13. O Luís tinha 40 cromos e repartiu com o irmão. No final o irmão disse: - deste-me 25% dos cromos da tua colecção. Quantos cromos deu o Luís ao seu irmão?

14. Que parte do todo representam os círculos?



15. Como estava muito calor depois da prova de natação a mãe do Bernardo fez limonada para os atletas. Para fazer a limonada a mãe do Bernardo usou 3 copos de sumo de limão e 9 copos de água.

a) Representa sob a forma de fracção a quantidade de sumo em relação à de água.

b) O Filipe achou a limonada muito fraca para o seu gosto. O que deverá fazer a mãe do Bernardo para fazer a limonada com sabor mais forte?

Questões finais

- ✓ Qual o teu nome?
- ✓ Que idade tens?
- ✓ Como foi o teu percurso escolar?
    - Já repetiste algum ano? Qual?
    - Como foi o teu percurso em relação à Matemática?
    - Como te sentes este ano, nesta disciplina?
- ✓ Consideras-te um bom, médio ou fraco aluno a Matemática? Porquê?
- ✓ Pensas que poderias ser melhor aluno? Então o que modificarias?
- ✓ Quando te colocam perante uma tarefa nova como é que te sentes?
- ✓ Como trabalhas melhor: em grupo, com o colega do lado ou individualmente? Porquê?
- ✓ Como vês as aulas em que se realiza a discussão das resoluções das tarefas?
- ✓ Qual das tarefas gostaste mais de resolver? Porquê?
- ✓ Quais foram as principais dificuldades que sentiste neste trabalho?

Matriz da 1.ª Entrevista

Questão	Tipo de Questão	Significado	Representação	Objectivo
1	Construção da unidade	Parte-Todo	Fracção Pictórica Percentagem Verbal	- Compreender e usar um número racional como parte-todo.; - Representar sob a forma de fracção um número racional não Negativo; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes. - Ler e escrever números na representação decimal e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.
2	Comparação e equivalência			
3	Representação			
7	Construção das partes			
14	Representação			
11	Representação			
15	Representação/ordenação	Razão	Verbal Fracção	- Compreender e usar um número racional como razão; - Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; - Compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes.
4	Comparação e Representação	Quociente	Verbal Decimal Fracção	- Compreender e usar um número racional como quociente; - Recorrer a representações pictóricas para representar um número racional.
8	Representação			
5	Ordenação	Medida	Fracção Decimal Pictórica Percentagem	- Compreender e usar um número racional como medida; - Localizar e posicionar na recta um número racional; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; - Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
9	Comparação			
12	Comparação e equivalência			
6	Representação/comparação	Operador	Fracção Percentagem Decimal	- Compreender e usar um número racional como operador; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.
10	Representação/comparação			
13	Representação/comparação			

Anexo 13

Guião da Segunda Entrevista

Registo da data e da hora do início da gravação.

Tarefas – 2.ª Entrevista

Ao longo da resolução das tarefas que se seguem, apresenta todo o teu raciocínio, explicando, também, **oralmente** o modo como estiveres a pensar, em cada uma delas. (utiliza esquemas, desenhos, cálculos, etc. para explicar como encontraste a resposta)

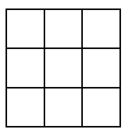
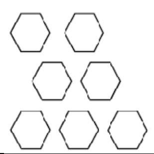
1. Se a figura seguinte representar $\frac{2}{5}$ da unidade, desenha a figura completa.

2. No último dia do primeiro período os alunos do 5.º ano organizaram uma gincana. O percurso da gincana foi feito da seguinte forma:

$\frac{1}{6}$ a correr ao pé coxinho;
$\frac{2}{12}$ a segurar, com a boca, uma colher com um ovo;
$\frac{2}{3}$ enfiados dentro de um saco de batatas;

Qual foi o maior trajecto? Justifica a tua resposta.

3. Pinta, em cada uma das figuras, a fracção apresentada.

a) 	b) 
$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{7}$

4. Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?

b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

5. Ordena os seguintes números por ordem crescente

c) 0,67; 3,400; 69%; 0,7; 8,01; 2,5

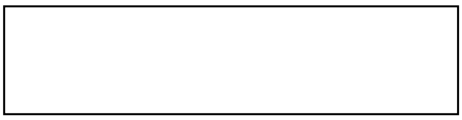
d) $1\frac{1}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 24%

6. Se a figura seguinte representar a unidade, pinta:

a) Um quarto

b) Dois terços

c) Cinco terços

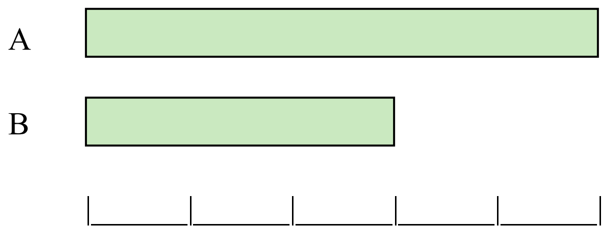


7. A Ana, a Beatriz, o Carlos, o David, a Elsa e o Filipe querem partilhar quatro pizas. Cada um receberá a mesma quantidade de piza.

a) Representa a quantidade de piza que cabe a cada amigo.

b) Representa sob a forma de fracção a parte da piza que cada amigo come.

c) Observa a figura seguinte:

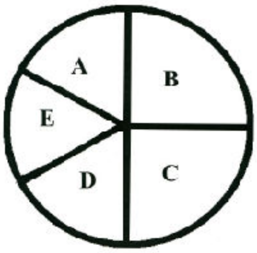


a) Utilizando como unidade de medida a barra A, quanto mede a barra B?

b) Utilizando como unidade de medida a barra B, quanto mede a barra A?

8. Numa escola básica com 600 alunos, $\frac{2}{3}$ são rapazes e destes, 50% tem mais de 12 anos. Quantos rapazes com mais de 12 anos há nesta escola?

9. Observa a figura seguinte.



a) Qual é a fracção do círculo representada pela parte B?______________________

b) Qual é a fracção do círculo representada pela parte D?______________________

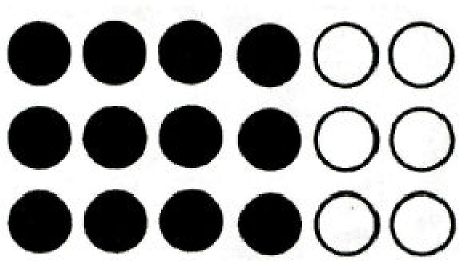
c) Qual das fracções anteriores representa 25% do círculo?

10. Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras:

$\frac{6}{8}$____$\frac{7}{8}$ b. $\frac{5}{7}$____$\frac{5}{9}$ c.$\frac{4}{5}$____$\frac{3}{4}$ d. $\frac{3}{4}$____$\frac{9}{12}$

11. Um adulto pesa 80kg. 0,6 da sua massa corporal é água. Qual o peso de água? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.

12. Que fracção dos círculos é preta?



Existe outro "nome" para a fracção?

13. Num treino de basquetebol dois jogadores estiveram a fazer lançamentos ao cesto e o Henrique conseguiu marcar 4 dos 6 lançamentos enquanto o Tomé conseguiu marcar 7 dos 12 lançamentos.

a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles.

b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

Questões finais

- ✓ Qual das tarefas gostaste mais de resolver? Porquê?
- ✓ Quais foram as principais dificuldades que sentiste neste trabalho?

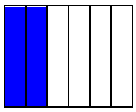
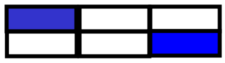
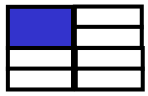
Matriz da 2.ª Entrevista

Questão	Tipo de Questão	Significado	Representação	Objectivo
1	Construção da unidade	Parte-Todo	Fracção Pictórica Percentagem Verbal	- Compreender e usar um número racional como parte-todo.; - Representar sob a forma de fracção um número racional não Negativo; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes. - Ler e escrever números na representação decimal e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.
2	Comparação e equivalência			
3	Representação			
6	Construção das partes			
10	Dado o todo e a parte, descobrir a fracção /comparação e equivalência			
13	Representação			
14	Representação/ordenação	Razão	Verbal Fracção	- Compreender e usar um número racional como razão; - Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; - Compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes.
4	Comparação e Representação	Quociente	Verbal Decimal Fracção	- Compreender e usar um número racional como quociente; - Recorrer a representações pictóricas para representar um número racional.
7	Representação			
5	Ordenação	Medida	Fracção Decimal Pictórica Percentagem	- Compreender e usar um número racional como medida; - Localizar e posicionar na recta um número racional; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; - Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
8	Comparação			
11	Comparação e equivalência			
9	Representação/comparação	Operador	Fracção Percentagem Decimal	- Compreender e usar um número racional como operador; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.
12	Representação/comparação			

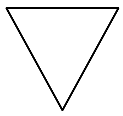
Anexo 14

Teste Diagnóstico

1. Considera as figuras e indica a fracção a que corresponde a parte colorida.

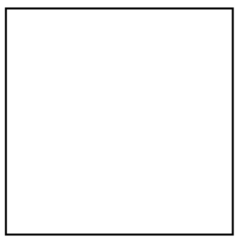
a) 	**b)** 	**c)** 

2. Se a figura representar $\frac{1}{4}$ da unidade, desenha a figura completa.



3. A Rita, o Jorge e a Madalena, vão almoçar fora e estão a pensar partilhar uma piza gigante quadrada, sendo que cada um receberá a mesma quantidade.

a) Representa na imagem a quantidade da piza que a Madalena vai comer.



b) Qual a fracção da piza que o Jorge comeu?

4. Quais dos seguintes símbolos são números? Coloca um círculo à volta.

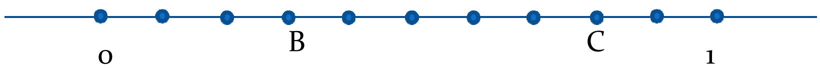
A   4   *   1,7   16   0,006 $\frac{2}{5}$ 47,5 $\frac{1}{2}$ $1\frac{2}{4}$

5. Tenho 40 cromos e dei $\frac{3}{4}$ aos meus colegas da escola.

a) Quantos cromos dei aos meus colegas?

b) Com quantos cromos fiquei?

6. Qual a distância entre B e C?



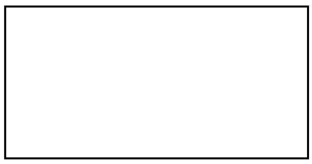
7. Na segunda-feira misturámos 3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul. Na terça-feira misturámos 2 litros de branca e 2 de azul.

a) A mistura vai ficar da mesma cor nos dois dias? Justifica a tua resposta.

b) Que fracção da mistura foi feita com tinta azul na segunda-feira?

c) E na terça-feira?

8. Se a figura seguinte representar a unidade, pinta $\frac{3}{5}$ da figura.

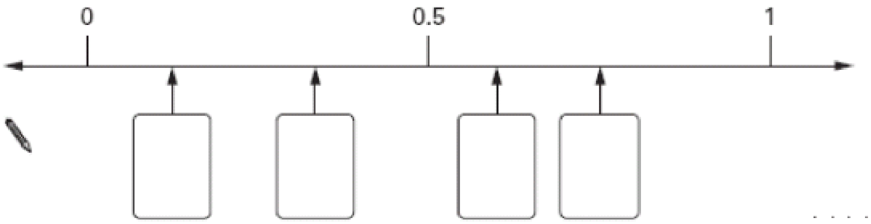


9. Na festa de aniversário da Rita os seus colegas comeram bolos de acordo com a seguinte figura:

a) Os colegas da Rita comeram todos a mesma quantidade de bolo?
b) Que fracção representa a divisão do bolo na figura 1?
c) Que fracção representa a divisão do bolo na figura 2?

10. Observa a recta abaixo. Escreve cada uma das seguintes fracções nas caixas baixo

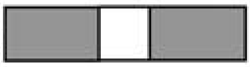
$$\frac{3}{4}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{5}$$

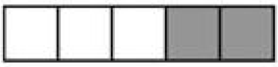


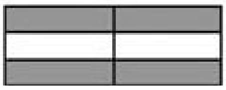
11. Num clube desportivo que tem 600 atletas.

a) 25% dos atletas pratica futebol, quantos atletas praticam futebol?

12. Qual das seguintes figuras tem $\frac{2}{3}$ pintado?


a)


b)


c)

13. A Joana, a Marta e a Inês dispõem de 4 bolachas para o lanche. Se as bolachas forem repartidas entre elas de igual forma, quanto come cada criança?

14. Observa a figura seguinte

A |______| B

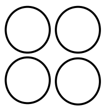
C ____________________ D

|______|______|______|

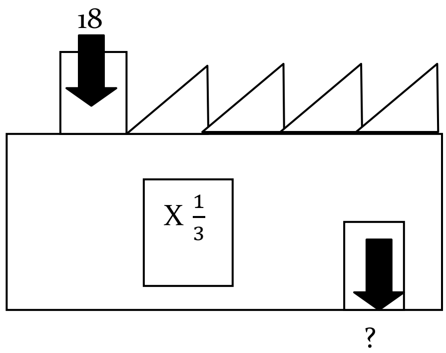
a) Utilizando como unidade de medida o segmento de recta $\overline{AB}$, quanto mede o segmento de recta $\overline{CD}$?

b) Utilizando o segmento de recta $\overline{CD}$ como unidade de medida, quanto mede o segmento de recta $\overline{AB}$?

15. Se a figura seguinte representar 20% da colecção de berlindes do Luís, desenha ao lado a colecção completa de berlindes do Luís.



16. A fábrica dos números. O diagrama seguinte representa uma máquina que produz números que são $\frac{1}{3}$ dos números que entram. Qual será o número que sai se entrar o número 18?



17. O Rodrigo, o Tomás e o Martim comeram 24 bombons. O Rodrigo comeu 12, o Tomás comeu 4 e o Martim comeu 8. Que parte dos bombons comeu cada um?

18. Ordena os seguintes números por ordem crescente.

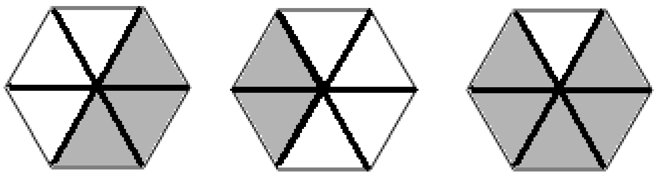
a) 3,10; 4,25; 3,5; 0,635; 4,255; 0,64

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{8}$; 1; $\frac{5}{4}$; 1,5

19. O Rui tem uma colecção com 150 cromos. Calcula o número de cromos que a Diana tem, sabendo que tem 0,3 do número de cromos que o Rui tem.

20. Observa as figuras seguintes.

a) b) c)



a) Em qual das figuras se pintou $\frac{2}{6}$? ________________________

b) Em qual das figuras ficou 50% da figura por pintar?

____

21. Qual é a fracção maior? De entre os pares de fracções faz um círculo em volta da maior.

a)	$\frac{2}{6}$	e	$\frac{5}{6}$
b)	$\frac{3}{5}$	e	$\frac{2}{4}$
c)	$\frac{5}{9}$	e	$\frac{5}{10}$

22. Se tivermos 5 chocolates para distribuir por várias crianças e cada criança receber 0,25 de um chocolate, a quantas crianças podemos dar chocolate?

23. Um grupo de amigos foi a uma festa de aniversário. As 5 raparigas comeram 3 pizas e os 3 rapazes comeram uma piza. Quem comeu mais? Cada rapariga ou cada rapaz? Justifica a tua resposta usando desenhos.

Matriz do Teste Diagnóstico

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Tipo de Questão</th><th></th><th>Significado</th><th>Representação</th><th>Objectivo</th></tr>
<tr><td>1 a)</td><td rowspan="5">Representação</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="10">Parte-Todo</td><td rowspan="10">Fracção
Pictórica
Percentagem
Decimal
Verbal</td><td rowspan="10">- Compreender e usar um número racional como parte-todo.;
- Representar sob a forma de fracção um número racional não Negativo;
- Reconstruir a unidade a partir das suas partes;
- Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes.
- Ler e escrever números na representação decimal e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.</td></tr>
<tr><td>1b)</td></tr>
<tr><td>1 c)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Construção da unidade</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Construção das partes</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Representação e equivalência</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>Representação</td><td>Construção da unidade</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Representação e equivalência</td><td>Dado o todo e a parte, descobrir a fracção</td></tr>
<tr><td>20 a)</td><td rowspan="2">Representação</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>20 b)</td></tr>
<tr><td>7 a)</td><td>Comparação</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Razão</td><td rowspan="3">Fracção
Verbal</td><td rowspan="3">- Compreender e usar um número racional como razão;
- Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo;
- Compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes.</td></tr>
<tr><td>7 b)</td><td rowspan="2">Representação</td></tr>
<tr><td>7 c)</td></tr>
<tr><td>3 a)</td><td rowspan="2">Representação</td><td rowspan="8"></td><td rowspan="8">Quociente</td><td rowspan="8">Fracção
Decimal
Pictórica</td><td rowspan="8">- Compreender e usar um número racional como quociente;
- Recorrer a representações pictóricas para representar um número racional.</td></tr>
<tr><td>3 b)</td></tr>
<tr><td>9 a)</td><td>Comparação e equivalência</td></tr>
<tr><td>9 b)</td><td rowspan="4">Representação</td></tr>
<tr><td>9 c)</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Comparação</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Comparação</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="9">Medida</td><td rowspan="9">Pictórica
Recta numérica
Fracção
Decimal
Numeral misto fraccionário</td><td rowspan="9">- Compreender e usar um número racional como medida;
- Localizar e posicionar na recta um número racional;
- Reconstruir a unidade a partir das suas partes;
- Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade;
- Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Ordenação</td></tr>
<tr><td>14 a)</td><td rowspan="2">Comparação</td><td rowspan="2">Dado o todo e a parte, descobrir a fracção</td></tr>
<tr><td>14 b)</td></tr>
<tr><td>18 a)</td><td rowspan="5">Ordenação</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>18 b)</td></tr>
<tr><td>21 a)</td></tr>
<tr><td>21 b)</td></tr>
<tr><td>21 c)</td></tr>
<tr><td>5 a)</td><td>Representação</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">Operador</td><td rowspan="5">Fracção
Decimal
Pictórica
Percentagem</td><td rowspan="5">- Compreender e usar um número racional como operador;
- Reconstruir a unidade a partir das suas partes.</td></tr>
<tr><td>5 b)</td><td>Comparação</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Representação</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="2">Representação/Comparação</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>Sem significado</td><td></td><td>Identificação de símbolos, compreender fracções como números</td></tr>
</table>

Anexo 15

Pós-Teste

1. A Ana, o Bruno a Catarina e o Vasco, vão almoçar fora e estão a pensar partilhar 3 pizas, cabendo a cada um a mesma quantidade.

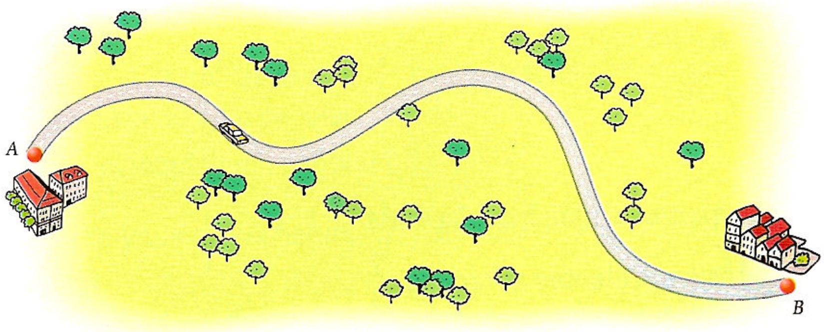
c) Representa numa figura a quantidade de piza que cada amigo vai comer.

d) Qual a fracção de uma piza que o Vasco vai comer?

2. Quais dos seguintes símbolos são números? Coloca um círculo à volta.

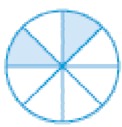
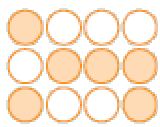
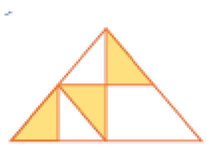
H 2 # 4,5 78 0,00045 $\frac{3}{6}$ 28,27 $\frac{4}{10}$ $3\frac{1}{3}$

3. A cidade **A** dista da cidade **B, 150 Km**. O António saiu de A em direcção a B e, ao fim de 40 minutos de via**ge**m, já tinha percorrido $\frac{2}{5}$ da distância.



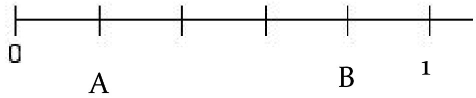
Quantos quilómetros já tinha percorrido o António ao fim dos 40 minutos?

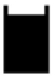
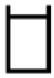
4. Em cada figura, indica a fracção a que corresponde a parte colorida.

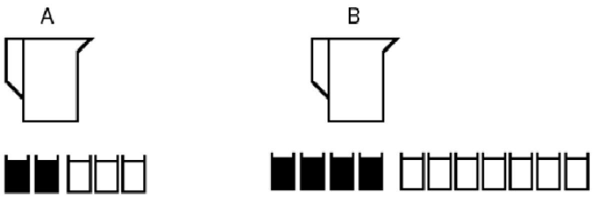
a) 	**b)** 	**c)** 

5. A figura abaixo representa $\frac{4}{3}$ da unidade. Desenha a unidade.

6. Observa a figura e indica qual a distância entre A e B.



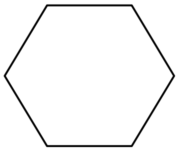
7. A Ana preparou dois sumos de laranja, A e B, misturando medidas de concentrado de sumo de laranja () e medidas de água ().



a. Em cada um dos casos representa sob a forma de fracção a quantidade de sumo em relação à quantidade de água.

b. Qual dos sumos, A ou B, tem sabor a laranja mais forte?

8. A figura seguinte representa a unidade. Pinta $\frac{3}{6}$ da figura.



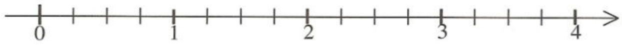
9. Os amigos da Diana foram lanchar a sua casa. Os dois rapazes comeram três sandes e as quatro raparigas comeram seis sandes.

a) Que fracção de sandes comeram os rapazes? E as raparigas?

b) Os amigos da Diana comeram todos a mesma quantidade de sandes?

10. Observa a recta a seguir indicada. Indica na recta cada um dos seguintes números.

$1,5$; 25%; ; $\frac{9}{4}$; $3\frac{3}{4}$

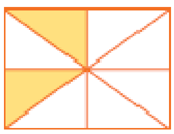
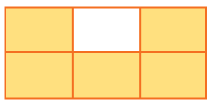
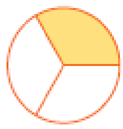


11. O livro que o António está a ler tem 180 páginas. Entusiasmado com a leitura, na 2ª feira, antes de adormecer, leu $\frac{1}{3}$ e na 3ª feira leu $\frac{2}{5}$ do livro.

a. Em qual dos dias leu mais páginas?

b. Quando acabou de ler o livro emprestou-o ao Luís que leu 75% do livro em dois dias. Quantas páginas leu o Luís nesses dois dias?

12. Qual das seguintes figuras tem $\frac{1}{4}$ pintado?

a)	**b)**	**c)**
		

13. Se $\frac{2}{5}$ dos berlindes do Manuel são verdes e ele tem 12 berlindes verdes, então quantos berlindes tem no total?

14. Observa a figura seguinte

A |______|______|B

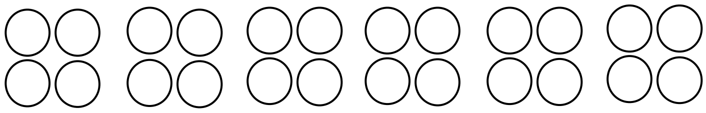
C |______|______|______|D

|______|______|______|______|______|

c) Utilizando como unidade de medida o segmento de recta AB, quanto mede o segmento de recta CD?

d) Utilizando o segmento de recta CD como unidade de medida, quanto mede o segmento de recta AB?

15. Se a figura seguinte representar 80% da colecção de berlindes do Luís, desenha ao lado a colecção completa dos berlindes do Luís .



16. O pai da Vera comprou 90 metros de rede, para vedar a sua horta, e sobrou $\frac{1}{3}$ da rede que tinha comprado. Quantos metros de rede sobraram ao pai da Vera?

17. O João e o Carlos têm 36 cromos. O João tem 24 e o Carlos tem 12 Cromos. Que parte dos cromos tem cada um?

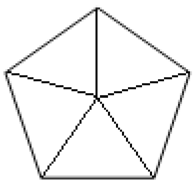
18. Ordena os seguintes números por ordem crescente.

c) 5,25; 0,635; 5,255; 0,64; 65%

d) $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{4}$; 1,75; $\frac{5}{5}$; 3,7

19. O Gonçalo tem uma colecção com 260 postais. Calcula o número de postais que a Matilde tem, sabendo que tem 0,4 do número de postais que o Gonçalo tem.

20. Observa a figura seguinte.



c) Pinta 40% da figura.

21. Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a. $\frac{6}{7}$..........$\frac{3}{7}$ b. $\frac{5}{9}$.........$\frac{5}{3}$ c. $\frac{2}{3}$........$\frac{4}{9}$ d. $\frac{6}{12}$........$\frac{2}{3}$

22. Se tivermos 10 chocolates para distribuir por várias crianças e cada criança receber

1,25 de um chocolate, a quantas crianças podemos dar chocolate?

23. Um grupo de amigos foi a uma festa de aniversário. As 6 raparigas comeram 4 pizas e os 5 rapazes comeram três pizas. Quem comeu mais? Cada rapariga ou cada rapaz? Justifica a tua resposta usando cálculos, desenhos ou esquemas.

Matriz do Pós-Teste

Questão	Tipo de Questão		Significado	Representação	Objectivo
4 a)	Representação		Parte-Todo	Fracção Pictórica Percentagem Decimal Verbal	- Compreender e usar um número racional como parte-todo.; - Representar sob a forma de fracção um número racional não Negativo; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes. - Ler e escrever números na representação decimal e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.
4 b)					
4 c)					
5		Construção da unidade			
8		Construção das partes			
12	Representação e equivalência				
15	Representação	Construção da unidade			
17	Representação e equivalência	Dado o todo e a parte, descobrir a fracção			
20 a)	Representação				
7.1	Representação		Razão	Fracção Verbal	- Compreender e usar um número racional como razão; - Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; - Compreender uma relação entre valores de duas grandezas diferentes.
7.2	Comparação				
1 a)	Representação		Quociente	Fracção Decimal Pictórica	- Compreender e usar um número racional como quociente; - Recorrer a representações pictóricas para representar um número racional.
1 b)					
9 a)	Representação				
9 b)	Comparação e equivalência				
22	Representação				
23	Comparação				
6	Comparação		Medida	Pictórica Recta numérica Fracção Decimal Numeral misto fraccionário	- Compreender e usar um número racional como medida; - Localizar e posicionar na recta um número racional; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes; - Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; - Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
10	Ordenação				
14 a)	Comparação				
14 b)					
18 a)	Ordenação				
18 b)					
21 a)					
21 b)					
21 c)					
21 d)					
3	Representação		Operador	Fracção Decimal Pictórica Percentagem	- Compreender e usar um número racional como operador; - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.
11.1	Comparação				
11.2	Representação				
13					
16	Representação/Comparação				
19					
2			Sem significado		Identificação de símbolos, compreender fracções como números

Anexo 16

Guião - Diário de Bordo

Aula:
Data:
Tarefas:
Tempo previsto/Tempo gasto:

Antes da Aula
Expectativas do professor

Durante a Aula
Introdução da tarefa
Instruções:
Reacções dos alunos:
Desenvolvimento da tarefa
Atitudes do professor / Questões colocadas / Reacções obtidas
Questões específicas colocadas pelos alunos
Dificuldades e comentários dos alunos
Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas
Discussão Geral
Intervenções dos alunos / Gestão do professor
Principais conclusões / Aspectos novos
O que se salientou relativamente aos alunos entrevistados neste estudo
Outros aspectos a destacar / Episódios marcantes decorridos na sala de aula

Após a Aula
Aspectos bem conseguidos
Aspectos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor)
Papel do professor / investigador
Reflexos na investigação

Outras Observações

Análise dos Testes

Anexo 17

Diagnóstico		Pós-Teste				
Questão		**Questão**		**Tipo de Questão**		**Significado**
1 a)	76 %	4 a)	90 %	Representação		Parte-Todo
1b)	62 %	4 b)	90 %			
1 c)	67 %	4 c)	86 %			
2	81 %	5	76 %		Construção da unidade	
8	57 %	8	90 %		Construção das partes	
12	0 %	12	71 %	Representação e equivalência		
15	81 %	15	62 %	Representação	Construção da unidade	
17	24 %	17	62 %	Representação e equivalência	Dado o todo e a parte, descobrir a fracção	
20 a)	86 %	----------------------	---------------------------	Representação		
20 b)	62 %	20 a)	86 %			
7 a)	43 %	7.2	62 %	Comparação		Razão
7 b)	38 %	7.1	71 %	Representação		
7 c)	38 %					
3 a)	76 %	1 a)	86 %	Representação		Quociente
3 b)	57 %	1 b)	62 %			
9 a)	57 %	9 b)	62 %	Comparação e equivalência		
9 b)	48 %	9 a)	52 %	Representação		
9 c)	48 %	----------------------	---------------------------			
13	14 %	----------------------	---------------------------			
23	48 %	22	81 %			
24	24 %	23	48 %	Comparação		
6	38 %	6	62 %	Comparação		Medida
10	0 %	10	43 %	Ordenação		
14 a)	71 %	14 a)	67 %	Comparação	Dado o todo e a parte, descobrir a fracção	
14 b)	38 %	14 b)	43 %			
18 a)	43 %	18 a)	67 %	Ordenação		
18 b)	0 %	18 b)	38 %			
21 a)	57 %	21 a)	86 %			
21 b)	67 %	21 c)	81 %			
21 c)	14 %	21 b)	76 %			
-----------------	------------------------	21 d)	81 %			
5 a)	43 %	3	71 %	Representação		Operador
5 b)	43 %	----------------------	---------------------------	Comparação		
-----------------	------------------------	11.1	71 %			
11	24 %	11.2	67 %	Representação		
-----------------	------------------------	13	67 %	Representação/Comparação		
16	38 %	16	81 %			
19	5 %	19	71 %			
4	38 %	2	71 %			Sem significado

* As percentagens representam o sucesso da turma em cada uma das questões.