

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Estatística e Investigação Operacional



**Optimização em grafos num contexto de redes sociais,
tecnológicas e no ensino da Matemática. Estudo do Problema
de Balanceamento de uma Comunidade na *World Wide Web***

Susana Isabel Gueifão Colaço Caldas

**Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional
(Optimização)**

2007

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Estatística e Investigação Operacional



**Optimização em grafos num contexto de redes sociais,
tecnológicas e no ensino da Matemática. Estudo do Problema
de Balanceamento de uma Comunidade na *World Wide Web***

Susana Isabel Gueifão Colaço Caldas

Tese orientada pela Prof. Doutora Margarida Maria Gonçalves Vaz Pato

e

pela Prof. Doutora Maria Eugénia de Vasconcelos Captivo

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional

(Optimização)

2007

Ao Alexandre,
ao Henrique e
aos meus Pais

Abstract

Operations Research (OR) has been widely applied in several traditional contexts (e.g. route optimisation, partitioning problems, scheduling problems, etc.). More recently, new applications include the design of telecommunication networks and data mining among others. Within this context of new application domains, the exploration of OR to Mathematics teaching is also briefly discussed within this thesis in a chapter dedicated to conceptual framework and bibliographic revisions.

However, the main investigation focus on the application of graph optimisation to socio-technical networks and the World Wide Web (Web). Web topologies are commonly characterised by hierarchical structures and highly unbalanced compositions, as illustrated by the centrality and connectivity of their elements. Web communities are one among many examples of Web structures. The major interest of the problem addressed in this thesis lies in reconfiguring such communities to reduce their initial disequilibria.

The Web Balancing Problem is addressed, along with a network model and integer programming formulations. GRASP and tabu search heuristics were developed to find feasible solutions to the problem. Computational results are also reported, based on several web communities, involving comparison and combination of these meta-heuristics. Some of these Web communities were obtained by crawling the web and using epistemic boundaries. Other communities were randomly generated by network analysis tools. The results confirmed more balanced structures for the Web communities investigated.

Keywords: metaheuristics, GRASP, tabu search, Web communities, hub-and-spoke networks.

Resumo

A Investigação Operacional (IO) tem sido tradicionalmente aplicada em diversos contextos como o desenho de rotas, problemas de partição e de escalonamento, etc.. Mais recentemente, começou a ser utilizada em novas áreas como o desenho de redes de telecomunicações e *data-mining*. Neste âmbito e num capítulo inicial de enquadramento e revisão bibliográfica, discute-se de forma sucinta, o modo como problemas de IO podem vir a ser utilizados no ensino da Matemática.

Esta investigação tem enfoque particular na utilização de optimização em grafos para a modelação de redes sócio-tecnológicas, como a *World Wide Web (Web)*. As topologias da *Web* são normalmente caracterizadas por estruturas hierárquicas e composições bastante desequilibradas, como é demonstrado pela centralidade e conectividade dos seus elementos. As comunidades *Web* são apenas um dos muitos exemplos destas estruturas na *Web*. O contributo proposto nesta tese tem como objectivo principal a reconfiguração destas comunidades *Web*, de modo a reduzir o seu desequilíbrio estrutural inicial.

O trabalho de investigação caracterizou o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*, apresentando um modelo de grafo bem como formulações em programação inteira. Foram desenvolvidas heurísticas de pesquisa GRASP e Tabu para encontrar soluções admissíveis para o problema. São também apresentados resultados computacionais baseados em diversas comunidades *Web* e envolvendo a comparação e combinação das referidas metaheurísticas. Algumas destas comunidades *Web* foram obtidas por *crawling* da *Web* e utilizando fronteiras epistémicas ou conceptuais. Outras comunidades foram geradas aleatoriamente com *software* de análise de redes. Os resultados confirmam a reconfiguração e obtenção de estruturas mais balanceadas para as comunidades *Web* em análise.

Palavras-chave: metaheurísticas, GRASP, pesquisa tabu, comunidades *Web*, redes hub-and-spoke.

Agradecimentos

No momento em que um projecto destes termina é sempre difícil agradecer a todos. Existem inúmeras pessoas que me ajudaram e suportaram de um ou outro modo durante este período de quase quatro anos num projecto de grandes desafios mas também com momentos difíceis e de grande responsabilidade.

Em primeiro quero agradecer às minhas orientadoras, à Professora Margarida Vaz Pato que me tem acompanhado desde a orientação do mestrado e a quem eu devo tudo o que sei de Investigação Operacional. Pela sua exigência e rigor que me permitiram crescer muito em termos profissionais pelo seu companheirismo e pelo seu incansável apoio não apenas no que diz respeito a este projecto de doutoramento mas, principalmente, em termos humanos. Quero também agradecer à Professora Eugénia Captivo pela sua disponibilidade que, com curtos prazos de tempo, conseguiu sempre responder e orientar da melhor forma todo este processo de doutoramento.

Gostaria também de agradecer à Escola Superior de Educação de Santarém pela possibilidade que me deu de poder beneficiar de uma bolsa de doutoramento do PRODEP III (Medida 5, Acção 5.3) e a todos os colegas docentes e não docentes por todo o apoio que me deram. Uma palavra de agradecimento muito especial a toda a equipa de formadores do Projecto de Formação Contínua em Matemática pelo seu apoio e pela sua compreensão principalmente, nestes dois últimos meses.

À minha colega e grande amiga Cecília por todo o apoio que me deu, não só no trabalho que com ela desenvolvi no âmbito deste projecto mas, principalmente pela sua grande amizade.

À minha família a quem muito devo, obrigada por tudo, pela sua preocupação, pelo seu apoio, incentivo e palavras de encorajamento.

Por último, os primeiros, ao meu filho Henrique que apesar da sua tenra idade foi extraordinário e compreensivo nos momentos mais cruciais deste projecto e ao meu marido Alexandre a quem devo tudo. Desde o facto de me ter despertado para o tema da *Web* e das suas aplicações, ao trabalho que com ele desenvolvi em Oxford no âmbito deste projecto, à sua presença constante e palavras de incentivo e optimismo nos momentos mais difíceis. Sem ele nada teria conseguido. Obrigada pelo teu apoio e pelo teu amor.

Índice

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de siglas

1	Introdução	15
1.1	Motivação	15
1.2	Enquadramento e objectivos	18
1.3	Organização do documento	25
Parte I		
2	Investigação Operacional na aula de Matemática - do ensino básico ao secundário	28
2.1	Introdução	28
2.2	Contextualização	29
2.3	Problemas em grafos para a aula de Matemática	32
2.3.1	Identificação de subgrupos coesos numa rede social	33
2.3.2	Optimização numa rede com fluxos de informação	35
2.3.3	Localização de recursos numa rede computacional	37
2.4	Problemas de optimização para a aula de Matemática	40
2.4.1	Problema de produção	41
2.4.2	Problema de gravação de DVDs	45
2.4.3	Problema de isolamento de canalizações	47
2.4.4	Problema de cobertura por antenas	49
2.4.5	Problema de elaboração de horários	50
2.5	Potencialidades de exploração em contexto de sala de aula	51
2.6	Conclusões	52
Parte II		
3	Optimização em grafos num contexto de redes sociais e tecnológicas	54
3.1	Introdução	54
3.2	Redes sociais	56
3.3	Redes tecnológicas	62

3.4	Redes sócio-tecnológicas	67
3.4.1	Casos na <i>Internet</i>	67
3.4.2	Comunidades <i>Web</i>	74
3.5	Conclusões	79
4	O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na <i>Web</i>	80
4.1	Introdução	80
4.2	Contextualização	80
4.3	Considerações preliminares	84
4.4	Revisão bibliográfica	87
4.4.1	Problema de agrupamento	87
4.4.2	Problema de desenho de redes com dois níveis	90
4.4.3	Modelo de cobertura por <i>hubs</i>	91
4.5	Apresentação do PCW	93
4.6	Modelo de grafos para o PCW	96
4.7	Aplicações para o PCW	98
4.8	Caracterização de comunidades <i>Web</i> em estudo	99
4.9	Conclusões	103
5	Modelos de programação inteira para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na <i>Web</i>	105
5.1	Introdução	105
5.2	Modelo não linear	105
5.3	Estudo da complexidade computacional do problema	108
5.4	Modelos lineares	111
5.5	Conclusões	119
6	Métodos heurísticos para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na <i>Web</i>	120
6.1	Introdução	120
6.2	Heurística Construtiva Semi-Aleatorizada	122

6.3	Definição das vizinhanças	126
6.3.1	Vizinhança de inserção	127
6.3.2	Vizinhança de troca	127
6.3.3	Vizinhança de localização	128
6.4	GRASP	130
6.4.1	Características da GRASP	131
6.4.2	Pesquisa local	133
6.5	Pesquisa tabu	135
6.5.1	Características da pesquisa tabu	136
6.5.2	Pesquisa nas vizinhanças	138
6.5.3	Listas tabu e critério de aspiração	144
6.5.4	Diversificação	147
6.5.5	Oscilação estratégica	147
6.6	Procedimento híbrido	149
6.7	Estudo bi-objectivo	149
6.8	Conclusões	150
7	Testes computacionais	151
7.1	Introdução	151
7.2	Relaxações lineares do modelo para obtenção de minorantes	152
7.3	Estudo computacional das heurísticas	155
7.4	Determinação da fronteira de Pareto	169
7.5	Comparação entre os métodos heurísticos	182
7.6	Discussão dos resultados	190
7.7	Conclusões	196
8	Conclusões e desenvolvimentos	197
8.1	Principais conclusões	197
8.2	Limites da investigação e trabalhos futuros	199
	Referências bibliográficas	202
	Lista de figuras	

2.1	Rede de alunos que comunicam pelo <i>messenger</i>	33
2.2	Identificação de subgrupos coesos	34
2.3	Rede de delegados de turma	36
2.4	Subrede de delegados de turma	36
2.5	Resolução da questão 1	37
2.6	Exemplos de respostas à questão 2	37
2.7	Representação da rede computacional	38
2.8	Representação de duas respostas possíveis à questão 1	39
2.9	Representação das soluções reformuladas face às alterações das condições	40
2.10	Peças lego que serviram para modelar a situação	41
2.11	Representação da solução óptima, retirado de Edwards e Chelst (1999)	42
2.12	Exemplo de algumas resoluções de alunos para o problema de produção	43
2.13	Exemplo de utilização da folha de cálculo	44
2.14	Resolução gráfica do problema, retirado de Edwards e Chelst (1999)	44
2.15	Tiras de cartolina que serviram para modelar a situação	45
2.16	Exemplo de produções de alunos para o problema de empacotamento	46
2.17	Representação das canalizações da casa e respectivos comprimentos	47
2.18	Ilustração da solução obtida pelo algoritmo <i>first-fit</i>	48
2.19	Aperfeiçoamento da solução anterior por trocas	48
2.20	Mapa do distrito de Viseu	49
2.21	Apresentação de duas soluções admissíveis para o problema de cobertura	50
2.22	Exemplo de uma solução para o problema de horários	51
3.1	Representação de relações matrimoniais através de um modelo de redes	55
3.2	Representação do grafo G (adaptado de Wasserman e Faust (1994))	58
3.3	Rede de terroristas compilada por Krebs (2002), em Borgatti (2006)	60
3.4	Rede de texto da <i>Reuters</i> apenas com os nodos e ligações mais relevantes, em Batagelj (2004)	62
3.5	Tipologias estruturais básicas de redes computacionais, adaptado de Lewis (2004)	63
3.6	Exemplos de serviços disponibilizados na <i>Internet</i> aos seus utilizadores, adaptado de http://english.unitecnology.ac.nz/resources/resources/tutorial/theory/works	65

acedido em 21/06/2004	
3.7 Exemplo do reagrupamento dos <i>packets</i> no final da transferência, retirado de http://www.btplc.com/21CN/The technology of the network/21CNkey technologies/IP/IP.htm , acedido em 21/06/2004	66
3.8 Relação entre redes sociais e tecnológicas	68
3.9 Representação da estrutura da <i>Web</i> , retirado de Broder et al. (2000)	72
3.10 Tipos de estrutura de redes, adaptado de Matthews (1999)	73
3.11 Parte de uma rede representativa de uma comunidade <i>Web</i> , retirada de Toyoda e Kitsuregawa (2001)	74
3.12 Organização da <i>Web</i> , segundo Kleinberg e Lawrence (2001)	75
3.13 Ilustração do método <i>maximum flow</i> , retirado de Flake et al. (2000)	76
3.14 Comunidade <i>Web</i> definida como uma clique	77
4.1 Ligações entre documentos num sítio da <i>Web</i> , por Girvan e Newman, retirado de Mendes (2005)	82
4.2 Representação da distribuição do grau interno e grau externo, retirado de Broder et al. (2000)	83
4.3 Representação de relações na <i>Web</i> , adaptado de Björneborg (2004)	85
4.4 Debilidade total da ligação entre os nodos <i>spoke i e j</i>	94
4.5 Grafo representativo de uma comunidade <i>Web</i> inicial	96
4.6 Grafo representativo de uma possível reconfiguração do grafo em 4.5	97
4.7 Representação gráfica de Mat20	101
6.1 Lista restrita de candidatos a <i>hub</i> , RCLH, adaptado de Resende (2000)	123
6.2 Pseudocódigo de Construtiva Semi-Aleatorizada	124
6.3 Lista restrita de nodos <i>spoke</i> e respectivos candidatos a <i>hub</i> , adaptado de Resende (2000)	125
6.4 Vizinhaça de inserção da solução <i>sol</i>	127
6.5 Vizinhaça de troca da solução <i>sol</i>	128
6.6 Vizinhaça de localização da solução <i>gol</i>	129
6.7 Pseudocódigo de Global GRASP	132
6.8 Pseudocódigo do procedimento <i>Exchange</i>	133
6.9 Representação da solução <i>sol</i> para ilustração do procedimento <i>Exchange</i>	134
6.10 Pseudocódigo de Pesquisa Global Tabu	137

6.11	Representação da solução <i>sol</i> para ilustração da fase de afectação	140
6.12	Vizinhança de localização da solução <i>gol</i>	142
6.13	Representação da solução <i>tol</i> para ilustração da fase de localização	143
6.14	Actualização de T_1 com base num movimento de inserção	145
6.15	Actualização de T_1 com base num movimento de troca	145
6.16	Actualização de T_2 com base num movimento de localização	146
6.17	Estrutura da lista tabu T_3 mantida na oscilação estratégica	148
7.1	Solução óptima de Mat20 com função objectivo ponderada	168
7.2	Soluções não-dominadas, no espaço dos objectivos, de um problema linear inteiro e bi-objectivo	170
7.3	Espaço dos objectivos no final da 1ª iteração do método das restrições aplicado a Mat20	172
7.4	Espaço dos objectivos no final da 3ª iteração do método das restrições aplicado a Mat20	172
7.5	Representação gráfica da fronteira de Pareto para Mat20	174
7.6	Solução da fronteira de Pareto de Mat20 correspondente ao mínimo lexicográfico para f_1	174
7.7	Solução da fronteira de Pareto de Mat20 correspondente ao mínimo lexicográfico para f_2	175
7.8	Fronteira de Pareto e fronteira aproximada pela Global GRASP para Mat20	176
7.9	Fronteira de Pareto e fronteira aproximada pela Global Tabu para Mat20	176
7.10	Fronteira de Pareto e fronteira aproximada pela Híbrida, para Mat20	177
7.11	Fronteiras aproximadas obtidas pela Global GRASP, Global Tabu e Híbrida, para a instância Hiv	188

Lista de tabelas

2.1	Estrutura da Informação	51
4.1	Entidades da instância Mat20	101
4.2	Comunidades geradas utilizando o <i>Pajek</i>	102
4.3	Características das comunidades <i>Web</i>	103
5.1	Dimensões comparativas das relaxações lineares	118

6.1	Cálculo das poupanças para movimentos de inserção a partir da solução <i>sol</i>	135
6.2	Cálculo das poupanças para os movimentos de troca a partir da solução <i>sol</i>	140
6.3	Cálculo da poupança para movimentos de localização a partir da solução <i>tol</i>	144
7.1	Resultados computacionais comparativos das várias relaxações lineares para as comunidades <i>Web</i> reais	153
7.2	Resultados computacionais comparativos das várias relaxações lineares para as comunidades <i>Web</i> geradas	154
7.3	Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades <i>Web</i> reais	156-158
7.4	Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades <i>Web</i> geradas	159-161
7.5	Valores dos parâmetros da Global Tabu	162
7.6	Resultados computacionais da Global Tabu	164
7.7	Resultados computacionais comparativos dos vários métodos para as comunidades <i>Web</i> reais	166
7.8	Resultados computacionais comparativos dos vários métodos para as comunidades <i>Web</i> geradas	167
7.9	Listagem dos pontos da fronteira de Pareto para Mat20	173
7.10	Fronteiras aproximadas obtidas através da Global GRASP para as comunidades <i>Web</i> reais	178
7.11	Fronteiras aproximadas obtidas através da Global GRASP para as comunidades <i>Web</i> geradas	179
7.12	Fronteiras aproximadas obtidas através da Global Tabu	180
7.13	Fronteiras aproximadas obtidas através da Híbrida	181
7.14	Comparação entre a fronteira de Pareto e a fronteira aproximada para a comunidade Mat20	184
7.15	Comparação entre as fronteiras aproximadas para as comunidades <i>Web</i> reais	185
7.16	Comparação das fronteiras aproximadas, utilizando <i>MDR</i> , nas comunidades <i>Web</i> reais	187
7.17	Comparação entre as fronteiras aproximadas nas comunidades <i>Web</i> geradas	189
7.18	Comparação das fronteiras aproximadas, utilizando <i>MDR</i> , nas comunidades	190

<i>Web</i> geradas	
7.19	Comparação de indicadores de distância nas comunidades original e reconfigurada 191
7.20	Comparação de indicadores de <i>flow betweenness</i> e proximidade nas comunidades original e reconfigurada de Mat20 193
7.21	Comparação de indicadores de <i>flow betweenness</i> e proximidade nas comunidades original e reconfigurada de Rnd150 194

Lista de siglas

Sigla	Secção
APM - Associação de Professores de Matemática	1.2
DNS - <i>Domain Name Server</i>	3.3
GRASP - <i>greedy randomized adaptative search</i>	6.1
HITS - <i>Hyperlinked Induced Topic Search</i>	3.4
HTML – <i>HyperText Markup Language</i>	1.1
IO - Investigação Operacional	1.1
IP - <i>Internet Protocol</i>	3.3
ME-DES - Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário	2.2
NCTM - <i>National Council of Teachers of Mathematics</i>	1.2
OE – Oscilação estratégica	
PCH - problema de cobertura por <i>hubs</i>	4.3
PCW - Problema de Balanceamento de uma Comunidade <i>Web</i>	1.1
SEM/SPCE - Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação	1.2
RCL - <i>random candidate list</i>	6.2
RCLH - <i>random candidate list of hubs</i>	6.2
TCP - <i>Transmission Control Protocol</i>	3.3
<i>Web</i> - <i>World Wide Web</i>	1.1

Capítulo 1

Introdução

A journey of a thousand miles begins with a single step

Lao-Tze

1.1 Motivação

O âmbito desta dissertação situa-se essencialmente no estudo de modelos e métodos de optimização em grafos no contexto de redes sociais e tecnológicas, em particular da *World Wide Web (Web)*. Esta escolha foi motivada por diversos factores.

Em primeiro lugar, considera-se que a Investigação Operacional (IO) e, mais especificamente, a optimização em grafos pode, e deve, dar um contributo importante no desenvolvimento das redes sociais e das redes tecnológicas, quer do ponto de vista teórico e metodológico, quer da exploração das suas potenciais aplicações. Se é um facto que os modelos e métodos da IO são, tradicionalmente, a base de sistemas de apoio à decisão na indústria, no sector dos transportes, na agricultura, etc., a sua aplicação noutros contextos, considerados «não tradicionais», deve ser encarada como uma oportunidade e um campo aberto a novos trabalhos de investigação. Aliás, de acordo com o referido no editorial de Karasoven et al. (2006) relativamente a uma edição especial do *European Journal of Operational Research* dedicada ao tema *data mining*, este é um dos exemplos, entre outros, de como o âmbito actual da IO se está a

1. Introdução

modificar. Uma prova disso é o aumento de artigos de IO publicados em revistas da especialidade de *data mining* e outras áreas «não tradicionais».

Como consequência do alargamento do domínio de aplicação da IO a áreas como as redes sociais e tecnológicas abrem-se perspectivas de tornar este ramo da matemática aplicada mais visível a novos públicos e a uma ainda maior amplitude de aplicação. É nesta perspectiva que se enquadra o segundo motivo para a escolha deste tema, que passa por evidenciar as potencialidades dos problemas de optimização no ensino da Matemática desde os primeiros anos de escolaridade, tal como foi feito, por exemplo, há alguns anos atrás com a inclusão nos programas e no currículo nacional de conteúdos como a Análise de Dados e a Estatística Descritiva.

Constituiu um motivo adicional para a escolha do âmbito da tese o facto de durante o desenvolvimento deste trabalho a autora ter desempenhado funções docentes simultaneamente na Escola Superior de Educação de Santarém e, durante o último ano lectivo, na docência dos cursos de formação inicial de professores e a coordenar o Projecto de Formação Contínua em Matemática do Ministério da Educação para professores do 1º e 2º CEB do distrito de Santarém. Os factores acima referidos foram essenciais para incutir na autora uma maior preocupação com a introdução de alguns destes temas no ensino da Matemática. Aliás, o facto de surgirem já nos programas de Matemática do ensino secundário tópicos como programação linear (Matemática A - 11º ano) ou, mesmo, a modelação matemática recorrendo ao modelo de grafos (Matemática Aplicada às Ciências Sociais) constitui um indicador de que se deverá apostar num futuro próximo no ensino de problemas, modelos e métodos desta área. Este tipo de trabalho a implementar no ensino da Matemática permite desenvolver um conjunto de capacidades e competências ao nível da aprendizagem da Matemática, podendo trazer consequências futuras não só na motivação para a investigação neste ramo da Matemática como também um aumento de visibilidade das suas aplicações.

O principal objectivo desta dissertação centra-se no estudo de um problema particular que surge no contexto da *World Wide Web* e consiste em reconfigurar uma comunidade *Web* de modo a que os recursos e informação sejam partilhados por todos os elementos da comunidade com maior equidade, designado por **Problema de Balanceamento de**

uma Comunidade Web (PCW). Pretende-se responder a questões como: será que reconfigurar uma comunidade *Web* do modo proposto a torna «mais» balanceada do que era inicialmente? Será que a informação, a partilha de recursos, a preservação da própria comunidade *Web* melhora com esta reconfiguração?

Um conjunto de etapas foi sendo desenvolvido em simultâneo com vista à contextualização, identificação e definição do problema em estudo, passando pela análise dos seguintes aspectos:

- (1) a aplicação da IO em domínios não tradicionais, em particular em problemas que envolvem redes sócio-tecnológicas;
- (2) a introdução de problemas, modelos, métodos e algoritmos de IO, em particular de optimização em grafos, no ensino da Matemática, desde o nível do 1º CEB ao secundário;
- (3) o estudo em detalhe do PCW;
- (4) a formalização do PCW recorrendo a modelos de grafos e de programação inteira;
- (5) o desenvolvimento de métodos heurísticos para obtenção de soluções aproximadas para o PCW, realizando para isso testes computacionais com instâncias reais e instâncias geradas para o efeito;
- (6) a análise dos resultados obtidos e conclusões.

Como se verá mais em pormenor na secção 1.3, este documento está organizado em duas partes distintas mas complementares. A primeira parte no âmbito do enquadramento e revisão bibliográfica, faz uma abordagem de como alguns tópicos de Investigação Operacional, em particular problemas de optimização em grafos, podem ser trabalhados e explorados no ensino básico e secundário, apresentando algumas propostas concretas de tarefas (capítulo 2). A segunda parte corresponde à contribuição fundamental desta dissertação que estuda o problema do balanceamento de comunidades na *World Wide Web* e desenvolve um modelo e metaheurísticas para a solução deste problema (capítulos 3 a 7).

1.2 Enquadramento e objectivos

Como já foi referido nos parágrafos anteriores, os problemas e métodos de IO podem ser a base de construção de actividades, tarefas de investigação e projectos a desenvolver em contexto de sala de aula, no ensino da Matemática, podendo promover articulações com outras áreas. Por exemplo, os algoritmos genéticos são uma forma de articular a Matemática com a Biologia.

O estudo de grafos ou redes e de outros modelos discretos não é novidade no âmbito do ensino da Matemática. Em 1989, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) introduzia no ensino secundário a matemática discreta, onde se incluía a teoria de grafos, a teoria de jogos, a programação linear e algoritmos.

Os modelos de grafos permitem mobilizar a Matemática para outros fins, utilizando estratégias diversificadas. Num documento recente publicado pelas Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa das Ciências da Educação (SEM/SPCE) e pela Associação de Professores de Matemática (APM) onde constam recomendações sobre a formação inicial de professores de Matemática (ver Albuquerque et al. (2006)) um dos temas matemáticos considerados essenciais para a formação matemática de futuros professores do 3º CEB e secundário é o das aplicações às Ciências da Computação, onde se salienta o estudo de estruturas discretas e suas aplicações na programação, a análise de algoritmos de recursão e o estudo de grafos e redes.

De facto, a modelação de situações reais através de optimização em grafos apresenta grandes potencialidades de exploração e aproveitamento no ensino/aprendizagem da Matemática, proporcionando um desenvolvimento de competências ao nível da resolução de problemas, da comunicação, do raciocínio e conexões, nos vários níveis de ensino. A possibilidade de usar diferentes heurísticas para a resolução de um problema, bem como a constatação da existência de soluções distintas para o mesmo problema permitem uma maior flexibilização do raciocínio e o desenvolvimento da comunicação quer seja oral, através de diagramas, quer por escrito.

1. Introdução

Constitui particular interesse para o âmbito deste projecto de doutoramento a aplicação de problemas de optimização, na construção de propostas de tarefas para os alunos realizarem, desde o modelo simples de programação linear a alguns modelos de optimização combinatoria e problemas de optimização em redes

É ainda mais recente a aplicação da IO, nomeadamente métodos e técnicas da optimização em grafos ao estudo da estrutura e evolução das redes sócio-tecnológicas. Segundo Wellman (1997), quando uma rede tecnológica interliga entidades sociais, passa a ser uma rede sócio-tecnológica. Ora, recorrendo à teoria de grafos é fácil modelar uma rede sócio-tecnológica como um grafo. A exploração de modelos, métodos e algoritmos de optimização em grafos pode, assim, ser aplicada no contexto das redes sócio-tecnológicas.

No século XX, a teoria de grafos teve grandes desenvolvimentos e tomou duas direcções distintas: uma relativa a aspectos de índole algébrica e a outra relacionada com optimização. Nos últimos cinquenta anos tem sido muito diversificada a utilização de grafos como modelos, quer seja em domínios tradicionais da IO como o escalonamento de veículos e tripulações, sequenciamento de tarefas em máquinas; quer na análise de redes sociais em Sociologia, no estudo da disseminação de doenças contagiosas em Epidemiologia, na análise da estrutura das cadeias alimentares em Biologia, entre outras aplicações. No primeiro caso, os modelos de grafos têm sido estudados como estruturas estáticas. No segundo caso, o maior relevo é dado às características e à dinâmica das redes, ou seja, ao modo como as redes se formam e evoluem ao longo do tempo.

Na investigação sociológica tem particular relevo o estudo de propriedades estruturais e de localização, nomeadamente a identificação de subgrupos coesos, a análise da centralidade e do prestígio dos indivíduos, bem como do equilíbrio estrutural e da transitividade, a determinação do papel e da posição dos indivíduos na rede (ver com maior detalhe Wasserman e Faust (1994)). Outros problemas, também amplamente abordados e que não são em exclusivo da análise de redes sociais, vão desde a identificação de *clusters*, à avaliação da importância dos indivíduos e/ou ligações numa

1. Introdução

rede, passando pela identificação de entidades controladoras de fluxos de informação, entre muitos outros.

Um estudo particular das características de redes sociais consiste na análise da estrutura da *Web*. Esta é uma área que tem merecido uma grande atenção por parte de várias comunidades científicas (e.g. Kleinberg e Lawrence (2001)). A rede *Web*, como uma parte integrante da *Internet*, pode ser encarada como um grafo orientado cujos nodos representam as páginas *html*, subdomínios, domínios, etc. e os arcos estabelecem as hiperligações (ver definição na secção 4.3) entre eles. Segundo Kumar et al. (2002) e, de acordo com estimativas de 1998, este grafo tinha nessa altura cerca um bilião de nodos e cada nodo, em média, sete hiperligações. O estudo da estrutura da rede *Internet* e, em particular, da topologia da *Web*, permite obter informação com aplicação variada.

De acordo com Watts e Strogatz (1998), normalmente a topologia das ligações numa rede assume-se ser ou completamente regular ou completamente aleatória. Mas em muitas redes, quer biológicas, quer sociais e tecnológicas, esta topologia está algures entre estes dois extremos, de acordo com a figura 3.10 (no capítulo 3). Tais sistemas podem ter um elevado nível de *clustering* como as estruturas regulares, mas apresentarem distâncias médias entre dois quaisquer nodos relativamente reduzidas, como as redes aleatórias – usualmente estas redes são designadas por «*small-worlds networks*».

A um nível local, a estrutura da *Web* torna-se ainda mais intrincada e não uniforme. As páginas e as hiperligações são criadas por utilizadores com interesses particulares, e páginas no mesmo tópico tendem a agrupar-se em «comunidades». Têm sido desenvolvidas diversas abordagens para encontrar comunidades na *Web*. A grande diferença entre estas abordagens reside na definição utilizada. Num *survey* de Han et al. (2003) são enumeradas algumas definições, apresentadas em vários trabalhos, assim como comparações entre os algoritmos associados a cada definição aos quais daremos algum destaque no capítulo 3.

Segundo Shirky (2003) em todos os sistemas onde muitas pessoas podem escolher entre muitas opções, um pequeno conjunto destas opções obtém uma quantidade desproporcionada de tráfego. Este fenómeno está relacionado com o facto do tráfego

1. Introdução

seguir uma distribuição de potência (*powerlaw*). A mesma autora afirma, referindo-se a comunidades *online* de *Weblogging*, que quando um sistema social novo começa, e aparenta ser não elitista, à medida que o sistema cresce surgem os problemas de escala, isto é, nem todos os elementos podem intervir de igual modo na comunidade e parece existir um núcleo dentro da comunidade mais conexo que todos os outros. Também tem sido este o comportamento observado nas comunidades *Web*, designado por Pastor-Satorras e Vespigani (2004) como «*the rich club phenomenon*».

Mostrou-se que tem sido prolífica a investigação sobre a topologia e mesmo a evolução das estruturas da *Web*, bem como sobre comunidades *Web*. Contudo, o estudo acerca de como estas comunidades *Web* poderão ser reconfiguradas ou redesenhadas, reduzindo o desequilíbrio natural revelado pela sua estrutura hierárquica, tem merecido menor ou mesmo muito pouca atenção. Este é precisamente o objectivo principal deste projecto de doutoramento, o de contribuir para o desenvolvimento de métodos para reconfigurar comunidades *Web*, de modo a obter um menor desequilíbrio na estrutura de ligação entre os elementos que a constituem.

Dada uma comunidade *Web*, pretende-se reconfigurar a comunidade criando grupos com o mesmo conjunto de domínios, eventualmente aumentando o conjunto inicial de hiperligações de forma a reduzir o desequilíbrio da estrutura inicial relativo ao grau das ligações e, assim, providenciar uma distribuição de fluxos de informação e recursos mais balanceada. Em acordo com Shirky (2003), o nosso objectivo passa por conseguir proporcionar a todos os elementos uma intervenção mais equitativa na comunidade.

É óbvio que o problema definido deste modo apresenta um carácter muito geral sendo inúmeras as direcções a seguir. Uma das abordagens aqui apresentada no capítulo 4, precisamente aquela que foi implementada, consiste em reconfigurar a rede recorrendo a um modelo de cobertura por *hubs*. Acredita-se que o objectivo acima definido poderá ser atingido criando uma estrutura *hub-and-spoke* onde os *hubs* são domínios que agregam um conjunto de outros domínios ligados a eles através de hiperligações entre as páginas.

1. Introdução

A escolha deste modelo garante que qualquer domínio, independentemente da sua conectividade ou centralidade iniciais, tenha a possibilidade de difundir e partilhar com todos os restantes elementos da comunidade recursos e, portanto, tenha uma capacidade de intervenção semelhante à dos restantes elementos, exceptuando, obviamente, os que funcionam como *hubs*. Note-se que o facto de se impor que todos os fluxos sejam sempre redireccionados via *hubs* que promove a partilha de informação ou recursos. No entanto, outras formulações e modelos, para além do modelo de localização de *hubs* proposto, poderiam ser usadas para lidar com o balanceamento de comunidades *Web*, abrindo portas a futuros trabalhos.

São diversas as potenciais aplicações dos resultados desta investigação. São exemplo disso os programas de difusão alargada de informação ou de distribuição de recursos de diversa natureza entre elementos de uma determinada comunidade electrónica. Outros exemplos relevantes são a implementação de políticas de distribuição de recursos e, particularmente, informação de suporte ao planeamento e organização de recursos electrónicos na *Web* ou, ainda, a preservação de recursos electrónicos, para recuperação de informação ou salvaguarda de casos de catástrofe, dada a natureza extremamente dinâmica dos sítios e recursos na *Web*.

Para clarificar este problema, designado abreviadamente por PCW, é apresentada no capítulo 5 uma formulação em programação inteira não linear bi-objectivo, inspirada nos trabalhos de Kara e Tansel (2003) para o problema de cobertura por *hubs*, bem como várias propostas de linearização.

Tendo em conta que, por um lado, o PCW apresenta dois objectivos contraditórios logo, não se pode considerar a existência de apenas uma solução óptima e que, por outro, cada método em estudo depende de um número razoável de parâmetros para os quais é necessário escolher valores apropriados, a metodologia que se considerou mais apropriada começou com natureza mono-objectivo e terminou bi-objectivo. Assim, numa primeira abordagem foram realizados testes computacionais com um modelo cujo único objectivo é minimizar a soma ponderada das duas funções objectivo do PCW. Com base nesses testes, ou seja, estudando o problema mono-objectivo, foram

1. Introdução

escolhidos parâmetros, bem como versões das várias metaheurísticas de modo a utilizar posteriormente num problema bi-objectivo (ver capítulo 7).

Foram adaptadas para o PCW as metaheurísticas GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*) e pesquisa tabu.

A GRASP é uma pesquisa local cuja principal característica é o facto de combinar uma forte componente de aleatoriedade com uma exaustiva repetição de processos. Aparentemente, não se conhece nenhum trabalho que aplique este método para resolver o problema de localização de *hubs*, com um número de *hubs* desconhecido e com mais do que um objectivo. Além disso, são poucas as investigações que se referem à aplicação da GRASP na resolução de problemas multi-objectivo (ver, por exemplo, os artigos de Jones et al. (2002) e Scaparra e Church (2005)). Na GRASP implementada (com designação Global GRASP), como é usual, existem duas fases distintas que se repetem durante um certo número de iterações: a fase de construção de uma solução admissível, baseada na heurística Construtiva Semi-Aleatorizada, incorporando alguma aleatoriedade, e a fase de pesquisa local numa vizinhança dessa solução.

A pesquisa tabu, aqui designada por Global Tabu, é uma metaheurística constituída por procedimentos que orientam a busca com o objectivo de ultrapassar a optimalidade local e chegar a regiões ainda não exploradas. A condução deste processo é conseguida por intermédio do conceito de memória que guarda as soluções já visitadas e/ou movimentos realizados nas iterações anteriores. Ao contrário de outros métodos de pesquisa local, nomeadamente da GRASP, esta metaheurística permite avançar de uma solução para outra com movimentos que, muitas vezes, deterioram a solução actual mas podem levar a pesquisa para outras regiões ainda não exploradas. A pesquisa tabu tem sido utilizada com mais frequência do que a GRASP no estudo de problemas multi-objectivo (ver, por exemplo, Alves e Clímaco (2000), Alves e Clímaco (2007), Hansen (1997) e Slomka et al. (2004)) e mesmo em problemas de localização de *hubs* (ver Abdinnour-Helm (1998), Carello et al. (2004), Kapov e Skorin-Kapov (1994), Klincewicz (1992), Klincewicz (2002), Skorin- e Skorin-Kapov et al. (1996) e Yaman e Carello (2005)).

1. Introdução

Foi também implementada uma metaheurística, denominada Híbrida, que resulta da conjugação da GRASP com a pesquisa tabu.

De seguida, tomando o PCW como um problema de optimização bi-objectivo, procedeu-se à determinação das soluções eficientes, a partir de uma abordagem interactiva mono-objectivo em que se minimiza a soma ponderada das duas funções objectivo, com a introdução de restrições intervalares. Em alternativa usaram-se metaheurísticas (Global GRASP e Global Tabu) que fornecem uma aproximação à fronteira de Pareto tendo em conta a minimização das duas funções objectivo sem quaisquer restrições adicionais. Claro que esta segunda estratégia apresenta limitações para, além das inerentes ao facto das heurísticas serem métodos não exactos, encontrar soluções eficientes não suportadas.

Os testes computacionais realizados no âmbito deste trabalho para avaliação do comportamento das metaheurísticas acima mencionadas foram baseados em comunidades *Web*, definidas com o conceito epistemológico ou conceptual. Como já atrás referido têm sido desenvolvidos vários conceitos e, por isso, várias metodologias para encontrar comunidades *Web*. Em Portugal, trabalhou-se com a comunidade de Matemática e Educação Matemática (abreviado para Mat) e a nível internacional utilizaram-se as comunidades de *Climate Change* (abreviado para Clim), *Poverty* (abreviado para Pov) e *HIV/AIDS* (abreviado para Hiv). Seis outras comunidades foram geradas recorrendo a um *software* específico de análise de redes (*Pajek*).

Os resultados obtidos com os diferentes métodos heurísticos foram analisados por intermédio de algumas métricas retiradas de Collette and Siarry (2003) que permitem não só comparar a eficiência dos métodos no caso em que é conhecida a fronteira de Pareto (a partir de resolução exacta) como também nos casos em que não é.

Finalmente, de modo a poder avaliar a eficácia desta metodologia na reconfiguração de comunidades *Web*, recorreu-se a alguns indicadores de distância do grafo, *flow betweenness* e proximidade, calculados para as comunidades *Web*, antes e depois da reconfiguração. Assim se poderá verificar o impacto que esta metodologia provoca na alteração da estrutura de uma comunidade. São comparados para a comunidade inicial e

1. Introdução

para a comunidade reconfigurada, entre outros indicadores, o número de pares de nodos para os quais não existe nenhum caminho entre eles no grafo, em ambos os sentidos; a distância média entre dois pares de nodos e o diâmetro do grafo. Estes indicadores permitem caracterizar a centralidade quer para cada um dos nodos, considerado individualmente, quer para a rede no seu conjunto.

1.3 Organização do documento

Este primeiro capítulo procurou introduzir e enquadrar de forma sucinta os vários problemas pesquisados neste trabalho, bem como os objectivos que se pretendem atingir para avanço desta área do conhecimento.

No capítulo 2 são apresentados algumas propostas de tarefas baseadas em problemas que podem ser explorados no ensino da Matemática aos vários níveis, desde o básico ao secundário. Estas propostas resultaram, por um lado, da recolha bibliográfica feita no âmbito deste projecto de doutoramento, por outro, de trabalhos desenvolvidos por investigadores e professores de Matemática interessados nesta temática.

Nesse capítulo procede-se primeiro a uma revisão bibliográfica de tais aplicações no ensino e aprendizagem da Matemática. De seguida, são descritas de forma detalhada algumas propostas de tarefas e actividades. Por último, são discutidas as potencialidades em termos de desenvolvimento de competências para o ensino da Matemática.

No capítulo 3, após uma breve introdução e revisão bibliográfica à teoria de grafos e optimização em grafos, são apresentados alguns exemplos de problemas surgidos no contexto das redes sociais e tecnológicas e que têm sido modelados através de grafos. É explorada a estrutura das redes sócio-tecnológicas e, em particular da configuração e reconfiguração de hiperligações na *World Wide Web*. Neste âmbito, são definidas as comunidades *Web*, bem como determinadas as características fundamentais da topologia e dinâmica destas comunidades.

No capítulo 4 apresenta-se o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web* e na secção 4.2 uma revisão bibliográfica e contextualização. A secção 4.3 é dedicada à

1. Introdução

apresentação do PCW, na secção 4.4 figura uma revisão bibliográfica no contexto de alguns modelos de optimização possíveis de utilizar para o problema em questão. Na secção 4.5 descreve-se um modelo de optimização bi-objectivo para grafos para o PCW. Na secção 4.6 surgem algumas aplicações deste problema, sendo de seguida, em 4.7, analisadas algumas comunidades *Web* que serviram como casos de estudo para análise dos resultados computacionais.

No capítulo 5 são discutidos modelos de programação inteira para o PCW, sendo detalhado um modelo não linear e, depois, várias alternativas de linearização para este modelo. No seguimento de prova, verifica-se que o problema em estudo pertence à classe dos NP-difíceis, sendo por isso conveniente encontrar métodos alternativos aos exactos, para a determinação de soluções.

Os métodos heurísticos para a resolução do Problema do Balanceamento de uma Comunidade na *Web* figuram no capítulo 6. Na secção 6.1 introduzem-se estes métodos não exactos, delineados para a versão mono-objectivo do PCW, isto é, quando se minimiza a soma ponderada das duas funções objectivo. Na continuação, as secções 6.2 a 6.6 são dedicadas a uma heurística construtiva e às metaheurísticas com vista à obtenção de soluções admissíveis para o PCW.

O capítulo 7 é dedicado aos resultados da experiência computacional realizada. São também apresentadas relaxações lineares para a obtenção de minorantes para o valor óptimo do problema na versão mono-objectivo, com base nos modelos do capítulo 5. Finalmente, a secção 7.6 sintetiza as principais conclusões decorrentes destes testes.

O último capítulo, capítulo 8, apresenta as principais conclusões e as contribuições desta dissertação, discute algumas das suas limitações e introduz ainda pistas para trabalhos de investigação futuros.

Parte I

Capítulo 2

Investigação Operacional no ensino da Matemática - do básico ao secundário

«Um ensino que incida em redes de ideias matemáticas, em vez de incidir apenas nos nodos isolados dessas redes, servirá para que os alunos compreendam e sejam capazes de apreciar quer a beleza quer o poder da matemática»

NCTM (1991) em Bernardes (2000)

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns problemas de optimização, alguns deles amplamente estudados em Investigação Operacional e que proporcionam tarefas interessantes para a aula de Matemática desde o 1º CEB ao ensino secundário.

Procede-se primeiro a uma revisão bibliográfica destas aplicações no ambiente de sala de aula (secção 2.2). De seguida, descrevem-se de forma detalhada algumas propostas. Assim, na secção 2.3 são discutidos problemas no âmbito da optimização em grafos: problema de identificação de subgrupos coesos numa rede social, problema de optimização numa rede com fluxos de informação e problema de localização de recursos numa rede computacional. A secção seguinte (2.4) é dedicada a problemas mais «tradicionais» no contexto da optimização: problema de produção, problema de gravação

de DVDs (empacotamento), problema de isolamento de canos, problema de cobertura por antenas e problema de elaboração de horários.

Por último, discutem-se as potencialidades em termos de desenvolvimento de competências para o ensino da Matemática. Estas propostas pretendem expôr exemplos de problemas envolvendo modelos de optimização que podem ser resolvidos por alunos desde o 1º CEB ao secundário, bem como diferentes abordagens em termos de estratégia a empregar para o mesmo problema. É também feita uma pequena análise de conteúdos e competências que cada uma das tarefas propostas permitirá desenvolver e, em alguns casos, são mesmo apresentadas produções de alunos duma escola do 1º CEB do distrito de Santarém.

2.2 Contextualização

O estudo de grafos ou redes e de outros modelos discretos não é novidade no âmbito do ensino da Matemática.

Em Portugal os programas de Matemática A – 11º ano e o de Matemática Aplicada às Ciências Sociais fazem referência explícita a tópicos como programação linear:

«A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.», ver Programa Nacional da Matemática A para o 11º ano, Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário (ME – DES). Também a modelação Matemática, nomeadamente a referência à utilização de modelos de grafos figura no programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais:

«Os modelos de grafos introduzem outra forma de mobilizar a Matemática para outros fins pensando de maneira não usual. Pretendem ser modelos úteis para enfrentar problemas de gestão e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha (tanto no que se refere à distribuição de bens alimentares, de

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

correio ou de recolha de lixo, como às decisões sobre localização de serviços que careçam de controladores, vendedores, etc.)».

Ainda nos temas/conteúdos deste programa está referido explicitamente:

«Sistemas de distribuição - postal, limpeza de ruas e recolha de lixo, de patrulhamento e controle de equipamentos sociais. Planos de viagens, problemas de «caixeiros-viajantes», localização de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região. (...)».

No documento já mencionado em 1.2 publicado pela SEM/SPCE e pela APM sobre a formação inicial de professores de Matemática, lê-se:

«Muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre certos grafos. Por exemplo, a estrutura de *links* de um sítio na *Internet* pode ser representada por um digrafo. (...) Na formação de professores deve-se adquirir o domínio de conceitos básicos da teoria dos grafos e capacidade de usar adequadamente grafos como modelos em situações concretas.»

Deve-se, no entanto, considerar esta indicação de uma forma mais ampla com a introdução destes temas logo nos primeiros anos de escolaridade. De facto, Rosenstein et al. (1992) aponta para uma utilização mais abrangente da matemática discreta não só no ensino secundário mas também nos níveis de ensino básico, o que viria a ser reforçado mais tarde nos *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM (2000).

São já conhecidos variados exemplos de aproveitamento de problemas do domínio da IO para o ensino da Matemática no básico e secundário.

Bouma (1991) descreve uma experiência com alunos do ensino secundário que desenvolveram um projecto de planeamento de uma cidade envolvendo conceitos da teoria dos grafos, da programação linear e o estudo de algoritmos para o problema de empacotamento. No mesmo sentido, Biehl (1992) num artigo publicado em Rosenstein et

al. (1992) refere o sucesso de actividades de modelação de problemas de optimização de rotas aplicados à distribuição de produtos de uma indústria local e na recolha de lixo. Nesta experiência foi feita também uma análise de heurísticas e de outros métodos para resolução de cada um dos problemas.

Têm sido referidas outras tarefas para alunos do 1º ao 3º CEB como, por exemplo, o desenho de redes de colaboração entre os vários elementos de uma turma ao longo do ano, a afectação de saídas de emergência a determinados locais da escola (biblioteca, refeitório, salas de aula) com base na planta da escola (Rosenstein et al. (1992)) ou mesmo o planeamento de uma visita ao centro histórico de Santarém por alunos de 4º ano do 1º CEB, tendo por suporte o problema do caixeiro-viajante com janelas temporais (Henriques e Santos (2003)).

Em Portugal são vários os trabalhos publicados sobre este tema, nomeadamente, sobre a teoria de grafos ao nível do ensino básico e secundário e a programação linear ao nível do secundário (Abrantes (1992), Borralho e Espadeiro (2003), Filipe (1998), Nascimento (2004) e Veloso e Loureiro (1998)). Borralho e Espadeiro (2003) sugerem actividades destinadas à formação de professores envolvendo os problemas do caixeiro-viajante, de localização, de desenho de redes de comunicações e problemas de horários. Nascimento (2004) apela à resolução de problemas de programação linear no secundário por intermédio, em alguns casos, do *solver* do *Excel*.

A modelação de situações reais através de optimização em redes apresenta grandes potencialidades de exploração e aproveitamento para o contexto da aula de Matemática, proporcionando um desenvolvimento de competências ao nível da resolução de problemas, da comunicação, do raciocínio e conexões, nos vários níveis de ensino (para uma abordagem não muito aprofundada de conceitos da teoria dos grafos e sua aplicação à optimização em redes consultar Kocay e Kreher (2005) e Ahuja et al. (1993)). A abordagem destes conceitos e modelos integrada em aplicações reais pode ser a base de actividades para a aula de Matemática. Este tipo de actividades permite aos alunos não só a exploração de conceitos relacionados com a actividade em si mas também a compreensão do valor da Matemática na resolução de problemas em situações reais. A possibilidade de estudar diferentes heurísticas para encontrar soluções, bem como a

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

existência de soluções óptimas distintas para o mesmo problema facilitam uma maior flexibilização do raciocínio e o desenvolvimento da comunicação quer seja verbal, através de diagramas, quer seja por escrito.

Em suma, os problemas de optimização que têm servido de base na construção de propostas de algumas tarefas vão desde o modelo simples de programação linear a alguns modelos de optimização combinatória e problemas de optimização em redes de que são exemplos o problema do caixeiro-viajante, do caminho mais curto, de localização, de afectação e empacotamento e do fluxo máximo. Tais problemas têm tido interessantes e proveitosas aplicações na indústria, no sector dos transportes, nas telecomunicações e, mais recentemente, na *Internet e Web*, e na área das ciências sociais.

Sendo assim, a Investigação Operacional constitui uma fonte rica em situações problemáticas que podem ser discutidas em contexto de sala de aula, no ensino da Matemática. São, contudo, ainda escassos os estudos no âmbito do ensino da Matemática sobre as potencialidades educativas dos referidos problemas. Não pretendendo ser este um dos objectivos deste trabalho, apenas a título de ilustração, além de propostas de tarefas serão também apresentadas na próxima secção algumas respostas de alunos pertencentes a uma turma do 4º ano de uma escola do 1º CEB do Distrito de Santarém.

2.3 Problemas em grafos para a aula de matemática

Esta secção é dedicada a propostas de problemas no contexto da optimização em grafos que podem ser abordados na aula de Matemática (para mais informações consultar Colaço et al. (2005), Fisher e Hochbaum (1980) e Pearson e Bryant (2004)). Como é natural, as tarefas propostas devem ser abordadas após os alunos terem tido contacto com noções básicas da teoria de grafos.

2.3.1 Identificação de subgrupos coesos numa rede social

Problema 2.1 - Identificação de um subgrupo coeso

Considera o conjunto de alunos de uma escola secundária que comunicam entre si pelo *messenger*. Pretende-se encontrar o maior subgrupo coeso deste conjunto apelando a diferentes conceitos da teoria de grafos. Recorrendo ao modelo de rede social os nodos representam os alunos da escola que usam o *messenger* e as arestas representam as comunicações entre eles.

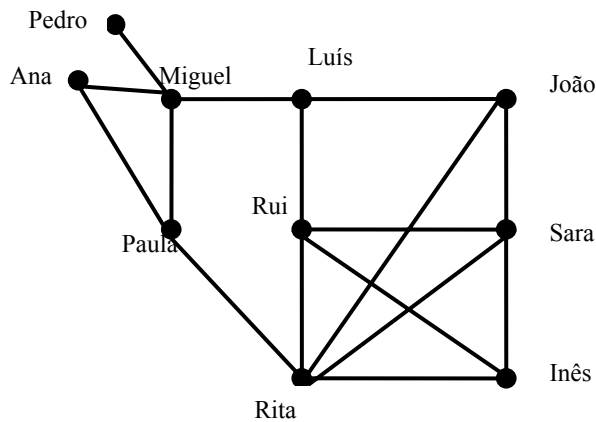


Figura 2.1 Rede de alunos que comunicam pelo *messenger*

1. Identifica o maior subgrupo coeso desta rede, designada por G , empregando alternativamente um dos seguintes três conceitos:

- 1.1 clique que por definição é o maior subgrafo completo de uma dada rede G ;
- 1.2 2-clique que é o maior conjunto de nodos da rede G tal que a distância entre dois quaisquer nodos desse conjunto é menor ou igual a 2 - a distância entre dois nodos é dada pelo número de arestas do caminho mais curto entre os nodos na rede, mesmo passando por nodos intermediários que não estão na 2-clique;
- 1.3 2-club que é dada pelo maior conjunto de vértices S que induz um subgrafo de G de diâmetro igual ou menor que 2 - o diâmetro define-se como a distância máxima entre dois quaisquer nodos no subgrafo e, ao contrário da 2-clique,

não utiliza elementos fora do subgrafo para definir o caminho mais curto entre dois nodos.

2. Relaciona os conceitos de 1-clique, 2-clique e 3-clique.
3. Relaciona os conceitos de 2-clique e 2-club.
4. Enuncia uma condição necessária e outra que seja necessária e suficiente, envolvendo alguns dos conceitos anteriores.
5. Supõe agora que a Rita mudou de casa e deixou temporariamente de ter acesso à *Internet*, que repercussão terá esta alteração na rede? E se fosse a Ana? O que podes concluir?

■

Esta tarefa apresenta diversas potencialidades para discussão, como por exemplo, a relação entre os diferentes conceitos de subgrupo coeso, nomeadamente, relações de implicação e de equivalência entre eles.

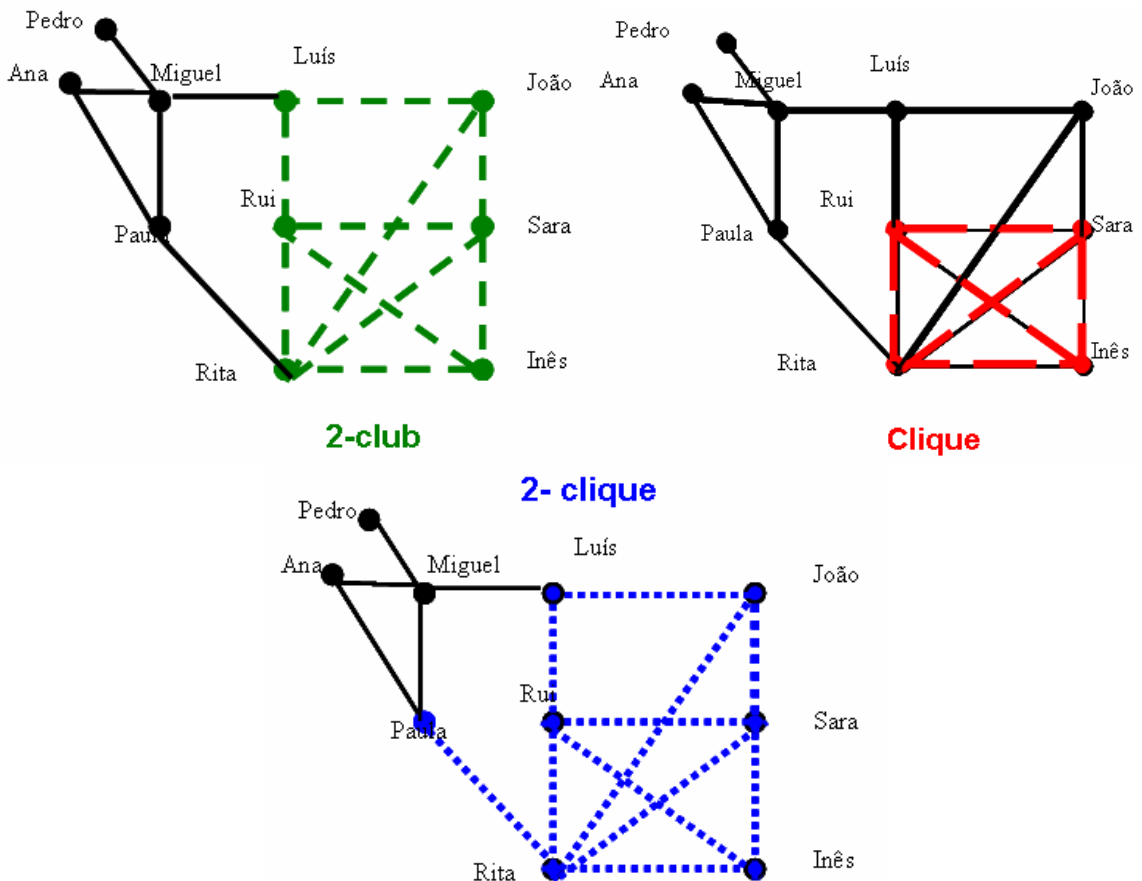


Figura 2.2 Identificação de subgrupos coesos

Além disso, é essencial discutir com os alunos o facto de uma definição ser mais ou menos exigente e que tipo de implicações pode acarretar. É também importante avaliar o impacto que pode ocorrer com a alteração de algumas condições iniciais do problema. A comunicação Matemática tem aqui um aspecto fundamental na realização desta tarefa permitindo por um lado desenvolver a capacidade de argumentar, por outro, formular conjecturas, de que é exemplo: «Qual será o nodo mais importante na rede de modo a esta manter a sua coesão?».

2.3.2 Optimização numa rede com fluxos de informação

Problema 2.2 - Optimização de fluxos de informação

Uma Escola do 2º e 3º ciclo do ensino básico tem a funcionar um projecto curricular e são fornecidas informações regularmente aos delegados de turma envolvidos no projecto. A comunicação entre os delegados é feita por contacto directo ou por intermédio de outros delegados. Existe, por isso, um tempo estimado para o delegado da turma A contactar com o delegado da turma B. A estimativa é baseada não só na distância entre as salas de aula de cada turma (admitindo que são fixas) mas também nos horários de cada turma. Em alguns casos, face à incompatibilidade de horários, não existem ligações (directas) entre delegados.

Considera uma rede em que os nodos representam os delegados de turma da Escola e as arestas representam as comunicações directas entre os delegados. A cada aresta está associado um parâmetro temporal que representa o tempo de transmissão em minutos da mensagem por comunicação directa entre esses dois delegados.

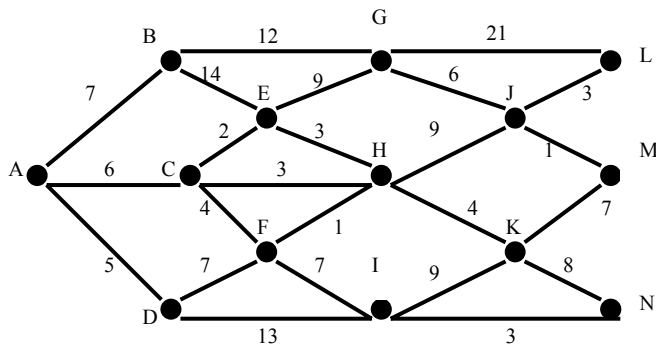


Figura 2.3 Rede de delegados de turma

1. Qual a forma mais rápida de:
 - 1.1 a partir do delegado A fazer chegar a informação ao delegado N?
 - 1.2 a partir do delegado D fazer chegar a informação ao delegado M?
2. Considera agora a subrede da rede inicial representada na figura 2.4. Identifica 3 sequências possíveis para partindo do delegado A fazer chegar a informação a todos os outros delegados de tal modo que no final retorne ao delegado A? Qual das sequências identificadas é a mais rápida?

■

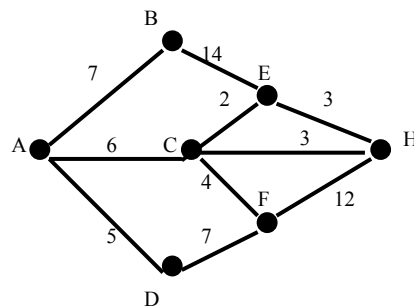


Figura 2.4 Subrede de delegados de turma

No âmbito deste problema são diversas as questões que surgem. Por exemplo, qual a forma de a partir do delegado A fazer chegar a informação o mais rápido possível ao delegado B? (Problema do Caminho Mais Curto) ou a partir do delegado A como fazer chegar a informação a todos os outros delegados de tal modo que no final retorne ao delegado A? (Problema do Caixeiro Viajante) ou, ainda, qual o impacto provocado nesta rede pelo desaparecimento de alguns nodos e/ou arestas?

Nas figuras 2.5 e 2.6 são apresentados alguns exemplos de soluções a encontrar pelos alunos.

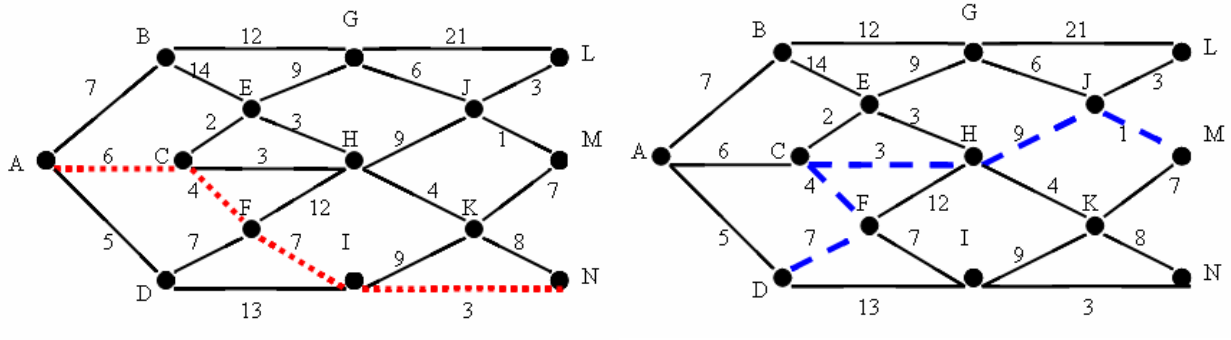


Figura 2.5 Resolução da questão 1

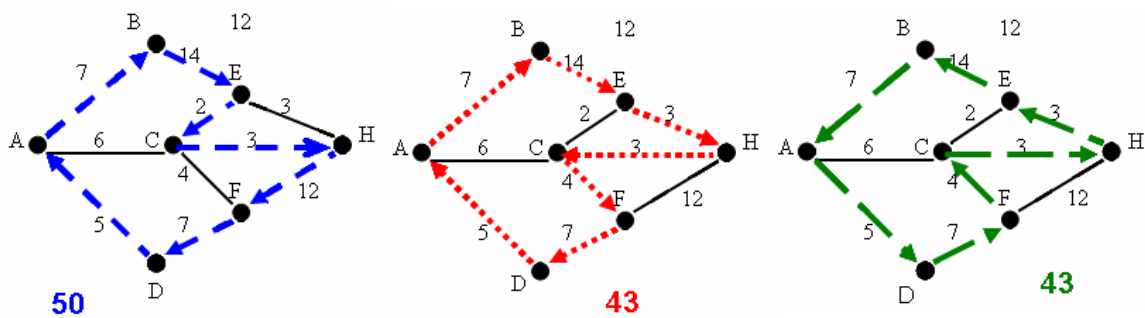


Figura 2.6 Exemplos de respostas à questão 2

2.3.3 Localização de recursos numa rede computacional

Problema 2.3 – Localização de uma base de dados numa rede computacional

Uma rede computacional local LAN (*Local Area Network*) é formada por peças de *hardware* (computadores, minicomputadores, terminais, etc) e suas ligações. Neste caso assume-se que as peças de *hardware* são só computadores, cada um deles associado a um utilizador do sistema, embora com diferentes custos de armazenamento e volume de consulta à base de dados. Dada uma rede, os nodos representam os computadores e as

arestas os canais de comunicação entre eles. Associado a cada um dos nodos, existem dois parâmetros que representam:

- (1) o custo de armazenamento unitário em euros, c , caso seja aí localizada uma base de dados;
- (2) o volume de consulta à base de dados em *Kbytes*, v , estimado com base num plano a médio prazo.

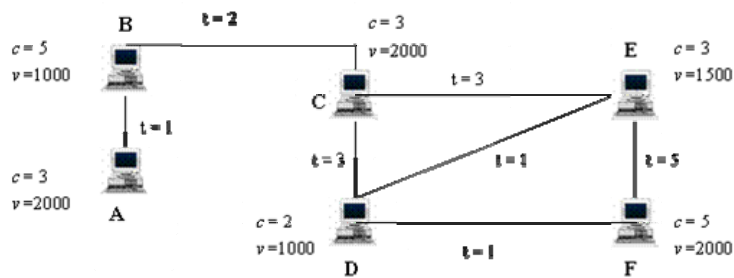


Figura 2.7 Representação da rede computacional

1. Determina os locais da rede onde deverão ser localizadas as bases de dados com cópias de segurança dos dados e programas acessíveis aos utilizadores do sistema, afectando cada utilizador a uma única base de dados, de modo que os custos sejam mínimos (custos de armazenamento e transmissão) e, finalmente, que seja satisfeito o volume de consulta, v , em cada local.
2. Considera agora que existe um custo adicional fixo associado aos custos de manutenção, de 3500 euros por cada base de dados. Escolhe a melhor solução. ■

A decisão a tomar envolve a escolha dos nodos nos quais colocar a base de dados (problema de localização) tendo presente dois objectivos: por um lado minimizar os custos de armazenamento e, por outro lado, minimizar os custos de transmissão dos dados - dois objectivos por vezes conflituosos.

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

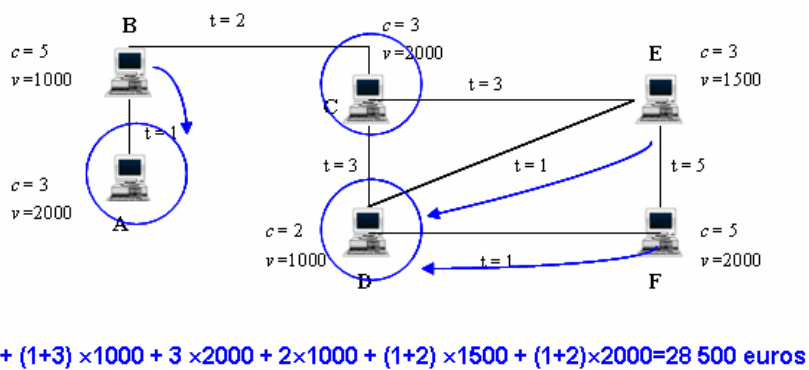
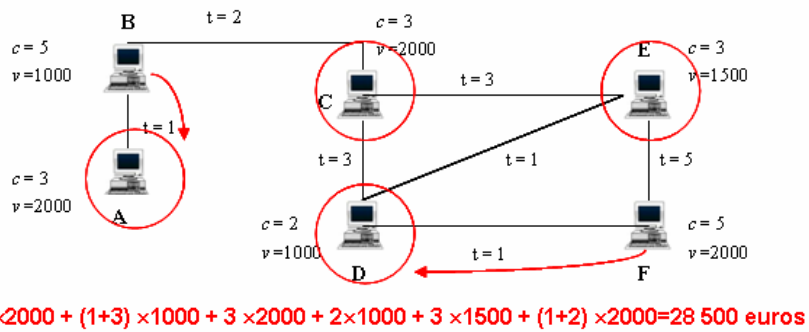


Figura 2.8 Representação de duas respostas à questão 1

Acrescentando depois um novo custo relativo à manutenção da base de dados, o aluno vê-se obrigado a reformular a sua resposta em função desta nova informação, como se pode observar na figura 2.9.

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

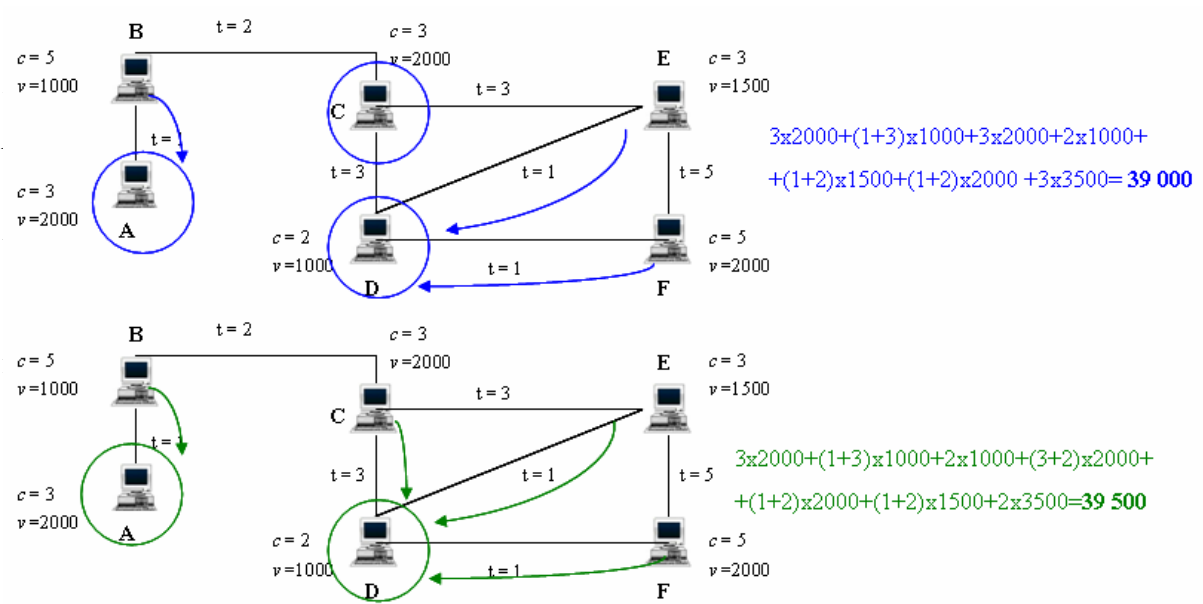


Figura 2.9 Representação das soluções reformuladas face às alterações das condições

2.4 Problemas de optimização para a aula de Matemática

Nesta secção são apresentados problemas tradicionalmente de Investigação Operacional, que vão desde o conhecido problema de produção, adaptado de Pendegrift (1997) e Edwards and Chelst (1999), ao problema de gravação de DVDs, passando pelo problema de isolamento de canalizações (empacotamento), adaptado de Malkevitch (1991). Por último são apresentados dois problemas um relacionado com cobertura, problema de cobertura por antenas, e o último com elaboração de horários.

2.4.1 Problema de produção

Problema 2.4 – Produção de cadeiras e mesas

Uma fábrica produz cadeiras e mesas. Uma cadeira representa para a fábrica 15 euros de lucro e uma mesa 20 euros. Sabe-se que para construir uma cadeira é necessário uma peça grande azul e duas cinzentas e que para construir uma mesa precisamos de duas peças azuis e duas cinzentas, ver figura 2.10.

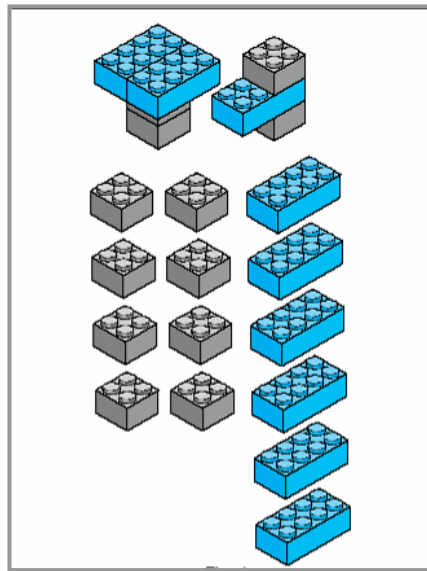


Figura 2.10 Peças de lego que serviram para modelar a situação

1. Supondo que em *stock* existem apenas 6 peças azuis e 8 peças cinzentas, qual deverá ser a produção da fábrica de modo a que o lucro seja o maior possível?
2. Supõe agora que existem em *stock*, em alternativa:
 - (1) 12 peças azuis e 8 peças cinzentas;
 - (2) 6 peças azuis e 16 peças cinzentas;
 - (3) 12 peças azuis e 16 peças cinzentas.Qual deverá ser a produção, em cada um dos casos, de modo a maximizar o lucro? ■

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

É fundamental deixar os alunos construírem livremente as várias possibilidades com o material concreto e calcular o lucro de cada solução e onde é trabalhada a adição e a multiplicação. Pretende-se confrontar as várias possibilidades, comparando o lucro que cada uma representa para a empresa e as sobras existentes relativas a cada solução. Por exemplo, em relação à questão 1.:

- (1) 4 cadeiras (lucro = 60 euros e sobram duas peças azuis)
- (2) 3 cadeiras e 1 mesa (lucro = 65 euros e sobra uma peça azul)
- (3) 2 cadeiras e 2 mesas (lucro = 70 euros e não sobra nada)
- (4) 3 mesas e 1 cadeira (lucro = 75 euros mas, falta uma peça azul)

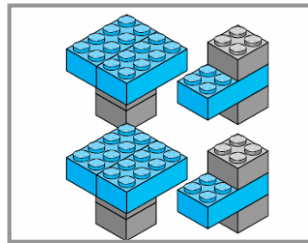


Figura 2.11 Representação da solução óptima, retirado de Edwards and Chelst (1999)

Através das peças de lego, os alunos tiveram a oportunidade de construir várias soluções de produção e comparar o lucro de cada uma delas.

Na figura 2.12 são apresentadas, apenas a título ilustrativo, algumas produções de alunos de uma turma de 4º ano do 1º CEB de uma escola do distrito de Santarém.

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

$15€ + 15€ + 15€ + 15€ = 60€$
 $20€ + 20€ + 20€ = 60€$
 $20€ + 20€ + 15€ + 15€ = 70€$

$$\begin{array}{r} 15€ \\ 15€ \\ 15€ \\ +15€ \\ \hline 60€ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20€ \\ 20€ \\ +20€ \\ \hline 60€ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20€ \\ 20€ \\ 15€ \\ +15€ \\ \hline 70€ \end{array}$$

Porque nós fizemos assim: juntamos primeiro três mesas e duas cadeiras e deu 60€ de lucro. Juntamos quatro cadeiras e deu 60€ de lucro. E juntamos duas cadeiras e duas mesas que nos deu 70€ de lucro. Selecionamos duas peças pequenas nas mesas, nas cadeiras selecionamos duas peças grandes e nas mesas e nas cadeiras não selecionou nada.

a) $15€ + 15€ + 20€ + 20€ = 70€ \rightarrow 2$ cadeiras e 2 mesas
 b) $20€ + 20€ + 20€ = 60€ \rightarrow 3$ mesas
 c) $15€ + 15€ + 15€ + 15€ = 60€ \rightarrow 4$ cadeiras
 d) $15€ + 15€ + 15€ + 20€ = 65€ \rightarrow 3$ cadeiras e 1 mesa

R.: ganhamos mais lucro a fazer 2 cadeiras e 2 mesas. Hipótese a

cadeiras	mesas	lucro
4	0	$4 \times 15 = 60€$
0	4	$4 \times 20 = 80€$
2	2	$2 \times 15 = 30€$ $2 \times 20 = 40€$ $70€$
1	3	$1 \times 15 = 15€$ $3 \times 20 = 60€$ $75€$
3	1	$3 \times 15 = 45€$ $1 \times 20 = 20€$ $65€$

O que dá mais lucro é $75€$.

Figura 2.12 Exemplo de algumas resoluções de alunos para o problema de produção

A folha de cálculo é um instrumento que permite explorar diversos cenários, organizando a informação e relacionando os objectivos e as restrições com as variáveis, como podemos observar na figura 2.13. Este tipo de exploração tem ainda a vantagem de

2.4.2 Problema de gravação de DVDs

Problema 2.5 – Problema de gravação de episódios em DVDs

O Pedro quer gravar alguns episódios do *Beyblade* em DVDs de 60 minutos.

1. Sabendo que os episódios que tem para gravar têm a duração de 31, 27, 15, 21, 15 e 31 minutos, qual o número mínimo de DVDs que é preciso comprar para gravar todos os episódios, não podendo a gravação de cada episódio ser repartida por mais do que um DVD?
2. O Pedro arranjou um episódio recente com duração de 30 minutos. Será possível gravá-lo sem comprar mais DVDs? ■

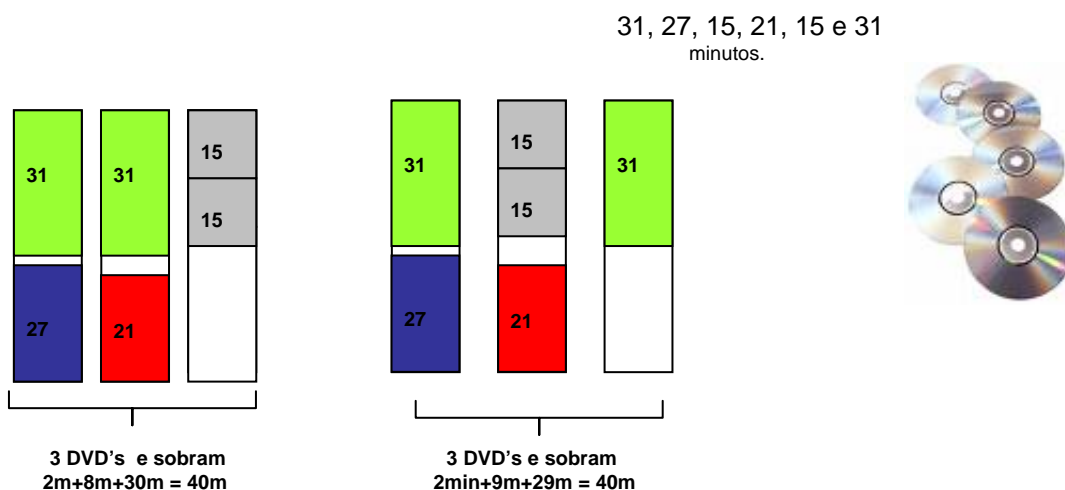


Figura 2.15 Tiras de cartolina que serviram para modelar a situação

É fundamental deixar os alunos construírem livremente as várias possibilidades com o material concreto e encontrarem diferentes soluções. Neste tipo de problemas os alunos de 4º ano tendencialmente utilizam, numa primeira abordagem, a divisão. No entanto, quando são confrontados com extensões do problema (análise de sensibilidade) constata-se que o problema é bem mais complexo. De seguida, são apresentadas a título exemplificativo algumas estratégias / produções de alunos de uma turma de 4º ano do 1º CEB.

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

1 CD dá para três episódios um de 15, outro de 15 e um de 21 e sobram 9.
 1 CD dá para dois episódios um de 27 e um de 31 e sobram 2 m.
 1 CD dá para um episódio de 31 m. e sobram 28 m.

1º CD com dois 15.
 2º CD com 27 e um 31
 3º CD com 31 mais 21.
 aproveitamos o filme de 30 m. no 1º cd.

$$\begin{array}{r} 31 \\ +15 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ +15 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ +27 \\ \hline 48 \end{array}$$

O mínimo de CDs que o Pedro precisasse foi 3.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +15 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ +31 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ +27 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ +15 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ +27 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ +15 \\ \hline 30 \\ +30 \\ \hline 60 \end{array}$$

Porém na 2ª hipótese o resultado dava 30 portanto juntamos os outros 30m e conseguimos preencher um CD.

Figura 2.16 Exemplo de produções de alunos para o problema de empacotamento

Neste caso, o problema de empacotamento tornou-se um pouco mais complexo e não foi utilizado nenhum material concreto.

2.4.3 Problema de isolamento de canalizações

Problema 2.5 – Problema de isolamento de canalizações

Pretende-se isolar com fibra de vidro as canalizações de uma casa. Este material é vendido em rolos com 36 metros de comprimento cada. Os rolos têm que ser cortados em secções de diferentes comprimentos, de acordo com as necessidades. O esquema abaixo representa os segmentos de canalização e os respectivos comprimentos em metros (m).

1. Qual o número mínimo de rolos que é preciso comprar para isolar todos os canos da casa?
2. O que acontece se o comprimento dos rolos diminuir 1 m? E se aumentar 2 m? Se duplicar o comprimento dos rolos será que a solução óptima passa para metade?

■

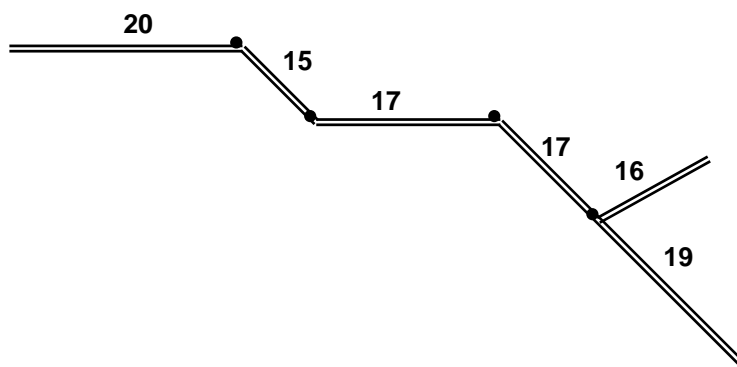


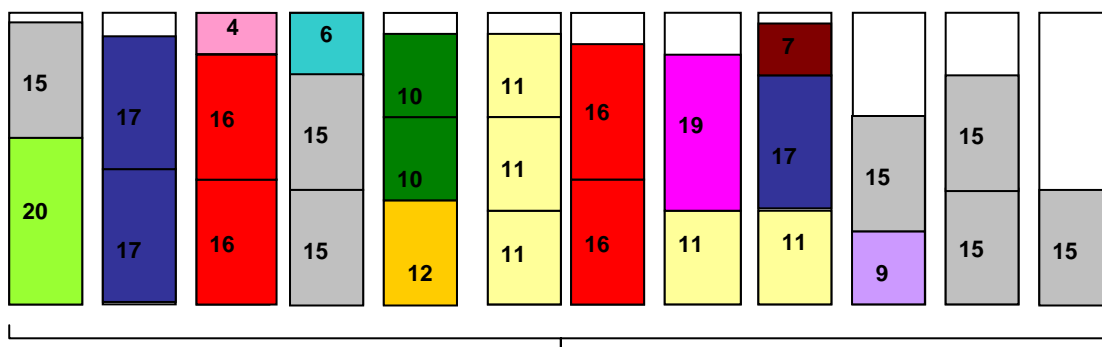
Figura 2.17 Representação das canalizações da casa e respectivos comprimentos

Esta tarefa pode ser realizada com alunos desde o 2.º CEB ao secundário, fazendo adequar as condições iniciais do problema aos respectivos anos de escolaridade.

Segundo Malkevitch (1991), uma das primeiras abordagens seguidas pelos alunos é a tentativa e erro. Será também interessante e, bastante motivador, discutir com os alunos do secundário a não existência de um algoritmo rápido e eficiente para resolver este tipo

de problemas. Depois disso, poderão ser trabalhadas abordagens alternativas para encontrar uma solução não exacta, nomeadamente os algoritmos *first-fit* (ver figuras 2.18 e 2.19), *last-fit*, *next-fit*, *worst-fit*, *best-fit*, bem como analisar as vantagens e desvantagens de cada um.

20, 15, 17, 17, 16, 16, 4, 15, 15, 6, 12, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 16, 16, 11, 19, 11, 17, 9, 7, 15, 15, 15,15



São necessários 12 rolos e sobra $1m+2m+4m+3m+4m+6m+1+12m+6m+21m=60m$

Figura 2.18 Ilustração da solução obtida pelo algoritmo *first-fit*

20, 19, 17, 17, 17, 16, 16, 16, 16, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 12, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 10, 10, 9, 7, 6, 4



São necessários 11 rolos e sobram $2m+5m+6m+6m+2m+3m = 24 m$

Figura 2.19 Aperfeiçoamento da solução anterior por trocas

De seguida, pode-se discutir com os alunos se a solução obtida é óptima e passar para a 2.ª parte da questão, uma extensão que se pode considerar no contexto da análise de sensibilidade.

A generalização do problema de empacotamento para duas e três dimensões apresenta também grandes potencialidades para trabalhar conceitos matemáticos como a pavimentação, área e volume, presentes no Currículo Nacional de Ensino Básico.

2.4.4 Problema de cobertura por antenas

Problema 2.7 – Problema de cobertura por antenas

Identifica quais as localidades do distrito de Viseu para instalação de antenas de modo que as outras localidades fiquem cobertas pelo sistema (ver mapa da figura 2.20). Sabe-se que o raio de cobertura de cada antena é igual a 15 km. Qual o menor número de antenas a localizar?

■



Figura 2.20 Mapa do distrito de Viseu

Os alunos poderão utilizar discos com um raio construído à escala de modo a representar 15 km. Na figura 2.21 são apresentadas duas possíveis soluções que correspondem respectivamente a 10 e 9 antenas a localizar. Dever-se-á discutir com os alunos se existe uma solução melhor. Em termos de área total do distrito de Viseu, tentar encontrar uma

2. Investigação Operacional no ensino da Matemática

aproximação por excesso e outra por defeito correspondente à área coberta relacionando com as soluções encontradas anteriormente.

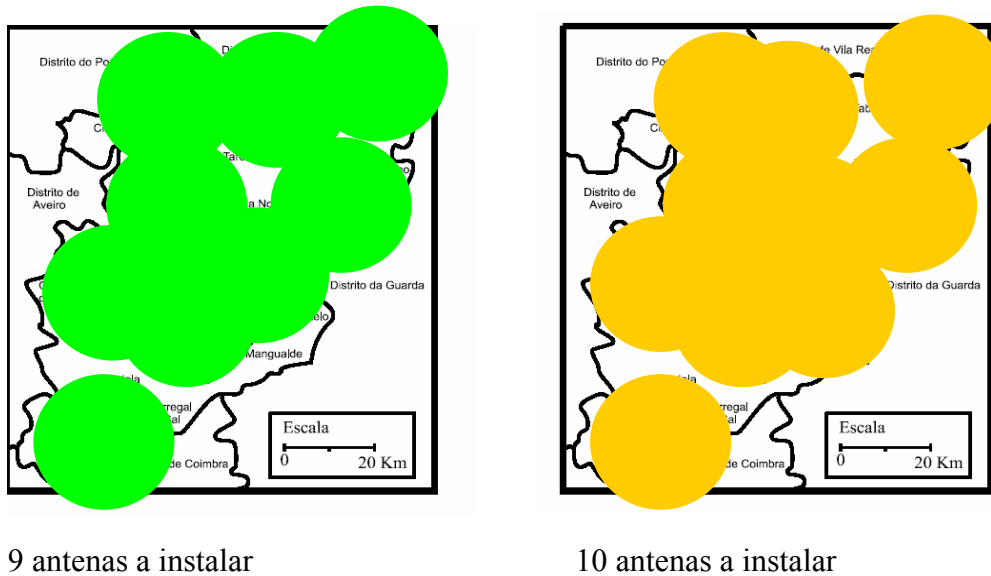


Figura 2.21 Apresentação de duas soluções admissíveis para o problema de cobertura

2.4.5 Problema de elaboração de horários

Problema 2.7 – Problema de elaboração de horários

Elabora um calendário para a época de exames de recurso, tendo em conta a tabela 2.1, onde estão indicados os alunos com números pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os exames do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ em que cada um está inscrito. Como cada aluno não pode fazer mais do que um exame por dia, qual o menor número de dias necessários para realizar os exames da época de recurso? ■

Uma das principais dificuldades dos alunos, desde o ensino básico ao secundário, começa na leitura e interpretação da informação da tabela 2.1. Depois, a estratégia mais plausível e que se espera ser a utilizada será a de tentativa e erro, articulando logo à partida com um conjunto de informações que os alunos podem retirar da leitura da tabela, por exemplo, os exames B, C e D terão que ser em dias distintos porque o aluno 1 está

inscrito nos três. Inicialmente poderão aparecer diversas soluções admissíveis mas que não são óptimas, sendo a discussão com os alunos fundamental no desenvolvimento destes conceitos (ver figura 2.22).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		●	●	●				
2			●	●		●		
3	●		●				●	
4					●		●	●
5	●	●	●					
6		●	●	●				
7	●	●	●					
8	●				●		●	
9				●	●	●		
10	●					●		●

Tabela 2.1 Estruturação da informação

Serão necessários pelo menos 4 dias

Exemplo de uma solução

Dia 1 - {A,D}

Dia 2 - {C,E}

Dia 3 - {F,B,G}

Dia 4 - {H}

Figura 2.22 Exemplo de uma solução para o problema de horários

2.5 Potencialidades de exploração em contexto de sala de aula

As actividades sugeridas nas secções anteriores constituem exemplos demonstrativos, entre muitos outros, de como se pode trabalhar problemas de IO em níveis de ensino elementar. Estes problemas, por um lado, traduzem situações reais que não exigem um

grande número de pré-requisitos e possibilitam uma actuação dinâmica na sua resolução, apresentando, em alguns casos, soluções óptimas ou apenas admissíveis mas distintas; por outro lado, promovem a prática compreensiva de procedimentos, a exploração de conexões e o desenvolvimento da comunicação matemática. Compreende-se por comunicação matemática:

«(...) inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos matemáticos sobre a matemática ou em que haja informação matemática.» *in* Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais, ME-DEB (2001).

2.6 Conclusões

Foram apresentados alguns exemplos de tarefas matemáticas que, sem exigir um grande número de pré-requisitos e embebidas em aplicações sociais, tecnológicas e de organização, permitem o desenvolvimento de novas atitudes para a Matemática, para a Escola e para a Sociedade.

Além disso, as referidas actividades permitem trabalhar conceitos relacionados com as operações de adição, multiplicação e divisão, com área e volume, e ainda aplicar modelos e algoritmos. Segundo Mason (2001) a modelação é necessária a qualquer indivíduo como forma de exercer a sua própria cidadania. Consequentemente, a exploração de situações de modelação com os alunos não serve exclusivamente para ilustrar as aplicações da Matemática à realidade. É mais do que isso, é uma forma de fornecer aos alunos competências necessárias ao exercício dos seus deveres fundamentais como cidadãos.

Parte II

Capítulo 3

Optimização em grafos num contexto de redes sociais e tecnológicas

«...quando uma rede computacional liga pessoas passa a ser necessariamente uma rede social...»

Wellman (1996)

3.1 Introdução

A teoria de grafos, como refere Evans e Minieka (1992), ao contrário do que aconteceu com outras áreas científicas, é usual considerar-se que teve origem numa data muito precisa, coincidente com a publicação de um primeiro artigo sobre grafos do matemático Suíço Euler, em 1736, pela Academia das Ciências em St. Petersburg. Este artigo foi motivado pelo problema das pontes de Königsberg que consistia em saber se um habitante desta cidade poderia, a partir de um determinado ponto, percorrendo exactamente uma vez cada ponte da cidade, regressar ao ponto de partida. Segundo os mesmos autores, a importância da optimização em grafos deriva, essencialmente, do facto de os grafos estarem na base de modelos, fáceis de perceber, em domínios muito diversificados e de, além disso, possuírem propriedades especiais que permitem resolver problemas recorrendo a algoritmos, frequentemente, bastante eficientes.

O problema estudado, a apresentar no capítulo 4 – o PCW – tem a característica de aliar dois campos de aplicação, o das redes sociais e o das redes tecnológicas, aparentemente distintos. Resumidamente, uma rede social pode ser definida como um conjunto de indivíduos ou grupos ligados entre si. Por exemplo, uma rede de relações matrimoniais entre 16 famílias de Florença no século XV, ver figura 3.1, objecto de estudo em Padgett (1994), é uma das redes sociais mais conhecidas. Uma rede tecnológica pode ser definida como um sistema de natureza tecnológico constituído por componentes tecnológicas e suas ligações, por exemplo, uma rede computacional.

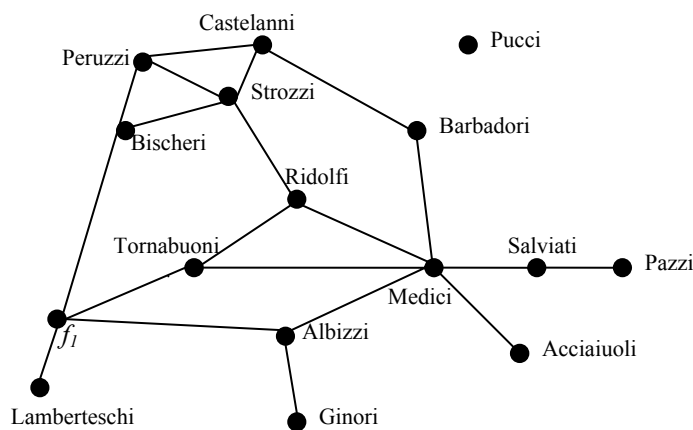


Figura 3.1 Representação de relações matrimoniais através de um modelo de redes

O estudo no âmbito desta dissertação destes dois tipos de rede deriva do facto de, em muitos casos, eles estarem relacionados. Mais especificamente, tal acontece no caso da *Internet* e da *Web*, devendo encarar-se as ligações não só do ponto de vista tecnológico, e.g. ligações de infra-estruturas entre servidores, mas também das relações sociais entre entidades, sejam elas documentos, pessoas ou instituições.

Estas redes são passíveis de modelação, através de grafos: numa rede social os indivíduos ou actores são representados pelos nodos e as ligações entre esses actores por arcos; enquanto que numa rede tecnológica os nodos representam componentes tecnológicas e os arcos entre pares de nodos, as ligações entre essas componentes. Nas próximas secções serão apresentados conceitos fundamentais envolvidos no estudo de redes sociais e redes

tecnológicas, bem como alguns problemas usualmente estudados nestes dois contextos. Na secção 3.4 será analisado com particular ênfase o caso da *Web* tendo em consideração os pontos de contacto atrás mencionados.

3.2 Redes sociais

Considerando agora o contexto mais específico das redes sociais, uma rede social pode ser definida como «um conjunto de indivíduos ou grupos que estão ligados entre si através de relações sociais significativas» (Wellman (1997)). Têm sido diversificados os estudos acerca de redes sociais mas é, sem dúvida, na análise da sua estrutura e evolução que reside o maior enfoque. Segundo Wellman et al. (1996), nas últimas três décadas, a análise de redes sociais produziu um conjunto vasto de conceitos, métodos e resultados para a generalidade das ciências sociais (Berkowitz (1982), Scott (1991), Wasserman e Faust (1994) e Wellman (1988)).

De acordo com Jain e Krishna (2003), relativamente à aplicação dos grafos no domínio das redes sociais, os trabalhos publicados podem ser agrupados em vários níveis. Num primeiro nível, já referido no parágrafo anterior, os objectivos prendem-se com a descrição da estrutura do sistema e aqui a teoria de grafos fornece ferramentas importantes para caracterização destas redes. Num segundo nível, o objectivo é estudar em que medida o tipo de rede de um sistema pode influenciar o comportamento desse sistema. Neste caso, durante o período de tempo em análise, a estrutura é considerada fixa de modo a avaliar o impacto dessa estrutura em determinadas variáveis que estão a ser observadas. A teoria dos sistemas dinâmicos tem tido aqui um papel fundamental. Num terceiro nível, estuda-se a evolução das redes ao longo do tempo, pretendendo-se compreender os processos e os mecanismos envolvidos.

É, no entanto, interessante verificar que, embora na generalidade os objectivos destas várias vertentes sejam bem diferentes, existem pontos em comum, nomeadamente no respeitante à modelação através de grafos e utilização de algoritmos apropriados à resolução dos respectivos problemas.

Muitos são os estudos a enumerar. Relativamente ao primeiro nível atrás mencionado – propriedades estruturais e de localização – podem ser identificados subgrupos coesos, realizada análise da centralidade e do prestígio dos indivíduos, do equilíbrio estrutural, da transitividade e do papel e posição que alguns indivíduos desempenham na rede (ver com maior detalhe Wasserman e Faust (1994)). Outros problema que não surgem exclusivamente na análise de redes sociais, vão desde a identificação de *clusters*, à avaliação da importância das ligações numa rede, passando pela identificação de entidades controladoras de fluxos de informação, entre muitos outros.

Os estudos referidos são baseados em modelos descritivos específicos no contexto de grafos pois, como foi referido na secção 3.1, uma rede social pode ser modelada por um grafo.

Por exemplo, a identificação de subgrupos coesos pode ser abordada por diferentes formas, entre as quais podemos salientar: reciprocidade das ligações formalizada por cliques; proximidade ou *reachability* dos membros do subgrupo definida recorrendo a conceitos como *k*-clan, *k*-clique ou *k*-club; grau do nodo, traduzido por *k*-plexes e *k*-cores. Alguns destes conceitos da teoria de grafos, são suporte de variados problemas NP-difíceis, como o problema da determinação da clique máxima (1-clique), ver Garey and Johnson (1979), e o da determinação do *k*-club máximo num grafo não orientado (Bourjolly et al. (2002)).

Para detecção de indivíduos e grupos com elevado grau de centralidade são calculadas medidas como o grau interno e o grau externo dos nodos, a proximidade e *betweeness*. Este tipo de indicadores permite responder a questões como esta: «De que forma o departamento de engenharia influencia a rede da empresa onde está inserido?», para mais detalhe consultar Everett e Borgatti (1999)). Outras aplicações destes problemas passam, por exemplo, pela análise de redes sociais em organizações militares (Dekker (2000)) ou pela construção de um agente para classificação de *e-mails* com base nas relações sociais (Lockerd e Selker (2002)).

Note-se que esta breve descrição não pretende de modo algum ser exaustiva na análise de técnicas para estudo de redes sociais.

Para terminar, apresentam-se, de seguida, alguns exemplos um pouco mais detalhados.

Exemplo 3.1 - Identificação de um subgrupo coeso

Seja G' um grafo não orientado com um conjunto de nodos igual a $\{1,2,3,4,5,6\}$ e um conjunto das arestas igual a $\{(1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,6), (2,3)\}$, conforme apresentado na figura 3.2. Põe-se a questão de saber se existe em G' subgrupos coesos e identific -los.

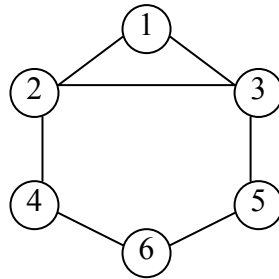


Figura 3.2 Representa o do grafo G (adaptado de Wasserman e Faust (1994))

A resposta depende, obviamente, da defini o escolhida para subgrupo coeso. Se um subgrupo coeso   uma clique então, o subgrupo coeso em G' é dado por $\{1, 2, 3\}$. Mas, podem ser usadas outras defini es menos exigentes que vão desde, k -club, k -clique ($k > 1$) e k -clan, entre outras.

Por defini o seja $G=(V,A)$ um grafo não orientado e conexo, onde $V=\{1,\dots,n\}$ é o conjunto dos nodos e A o conjunto de arestas. Um subconjunto T de V induz um subgrafo $H(T)$ de G definido por $H(T)=(T,F(T))$, onde $F(T) = \{(i, j) \in A : i, j \in T\}$. Define-se diâmetro de $H(T)$ como o maior comprimento do caminho que liga dois quaisquer nodos em T utilizando apenas arestas em $F(T)$. Determinar um subgrupo coeso recorrendo ao conceito de k -club máximo consiste em determinar o maior conjunto de nodos que correspondem aos nodos do subgrafo induzido $H(T)$ com diâmetro no máximo igual a k . Este problema provou-se ser NP.difícil (Bourjolly et al. 2002). Este conceito embora

relacionado com a k -clique é ligeiramente diferente, pois para encontrar uma k -clique pretende-se encontrar um conjunto de nodos em T de G tal que o diâmetro seja no máximo k mas cujos nodos em T podem estar ligados por uma cadeia de arestas em G e não obrigatoriamente em $H(T)$. Tal como é referido em Wasserman e Faust (1994), Mokken (1979) todos os k -clubs são k -cliques, mas nem sempre o recíproco é verdadeiro.

Neste exemplo podem ser identificados vários subgrupos coesos, dependendo da definição:

- (1) clique: $\{1, 2, 3\}$
- (2) 2-cliques: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{2, 3, 4, 5, 6\}$
- (3) 2-clubs: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, e $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

É de salientar o facto de que $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ é uma 2-clique mas não é um 2-club porque, calculando a distância entre os elementos 4 e 5, tomando apenas elementos em $H(T)$, o caminho mais curto corresponde ao caminho $[4,2,3,5]$ com comprimento 3, logo não é um 2-club. No entanto, constitui uma 2-clique, pois por definição numa k -clique o caminho mais curto pode envolver nodos intermédios fora da k -clique. Logo, neste caso, o caminho mais curto entre 4 e 5 é o caminho $[4,6,5]$ cujo comprimento é 2.

■

Exemplo 3.2 - Análise da contribuição de alguns actores para a coesão da rede social.

Em Borgatti (2006) pretende-se medir explicitamente a contribuição de um conjunto de indivíduos para a coesão da rede social de que fazem parte. De modo a testar a sua abordagem através de diferentes medidas o autor utilizou uma base de dados de presumíveis terroristas compilada por Krebs (2002) com 74 nodos, tendo aproveitado apenas a componente principal, isto é, o maior subgrafo conexo, ficando assim constituída por 63 indivíduos. A primeira questão colocada pelo autor envolve saber quais os indivíduos que deverão ser isolados da rede (o menor número possível) de modo a maximizar a sua ruptura, quer em termos de maior índice de fragmentação da rede quer em termos do maior número de componentes principais obtidas com o isolamento desses indivíduos (para mais informação, consultar Borgatti (2006)).

A segunda questão, mais relacionada com o problema central desta dissertação incide na importância de descobrir qual o menor subconjunto de indivíduos a partir dos quais se pode chegar a todos os outros. Este autor refere que tal problema tem aplicações variadas que vão desde o sector da saúde pública, quando se pretende seleccionar uma pequena amostra da população para difusão de determinadas práticas ou atitudes para promoção da saúde, a aplicações em contextos judiciais ou criminais, por exemplo, quando é necessário seleccionar um conjunto eficiente de indivíduos da rede para vigiar os restantes (*double-agents*).

De acordo com Borgatti, em todos os casos atrás mencionados existe uma característica comum que é envolverem a pesquisa de um subconjunto particular de nodos da rede bem posicionados para rapidamente difundirem informação, atitudes, comportamentos, recursos e, também, recebê-los de uma forma rápida. ■

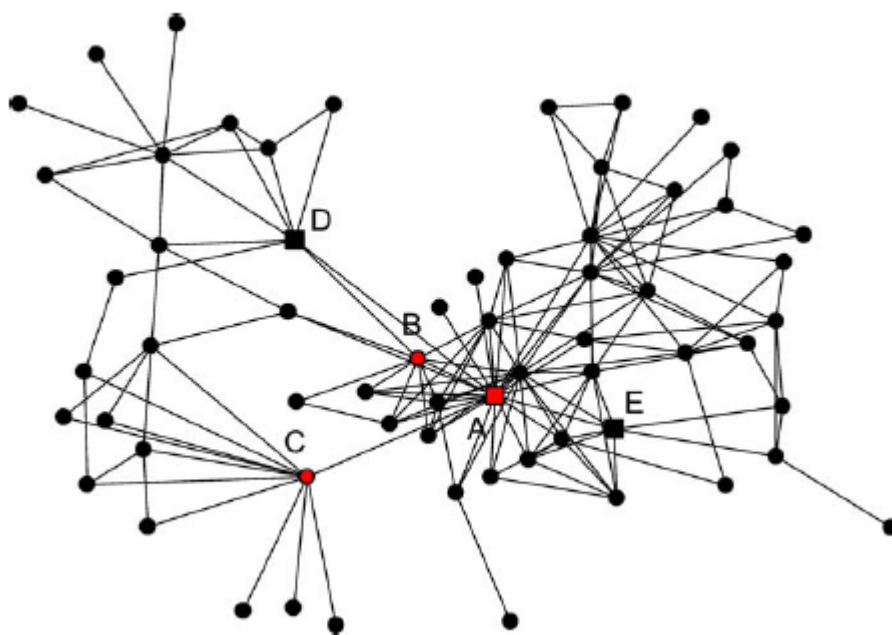


Figura 3.3 Rede de terroristas compilada por Krebs (2002), em Borgatti (2006)

Na figura 3.2 os círculos a vermelho (cor mais clara) são a resposta à primeira questão, enquanto os quadrados são a resposta à segunda, seguindo a metodologia deste autor.

Exemplo 3.3 - Análise de redes de texto

Outros exemplos de redes sociais encontram-se nas redes de texto. Estas redes têm como objectivo a representação abstracta de textos de modo a ser mais fácil compilar e pesquisar, no futuro, determinados temas abordados num determinado período de tempo, identificar partes densas da rede e, mesmo, estudar a evolução temporal de uma determinada rede de texto.

Steve Corman e Kevin Dooley desenvolveram uma técnica de análise de textos designada por *Centering Resonance Analysis* (CRA) na Universidade do Estado de Arizona, ver Batagelj (2004). Estes autores estudaram a evolução da rede de texto relativa às notícias publicadas pela agência *Reuters* durante 58 dias consecutivos e respeitantes ao ataque de 11 de Setembro de 2001 em Nova Iorque. Na figura 3.4 é apresentada a *Reuters terror news network*. Nesta rede os nodos são as palavras e existe uma aresta entre duas palavras se estas ocorrerem na mesma frase. O peso associado às arestas, representado na figura pela espessura da ligação, está relacionado com a frequência deste fenómeno. ■

Note-se que existem várias aplicações de *software* que já incorporam as metodologias da análise de redes sociais, como é o caso do UCINET 6 de Borgatti et al. (1999), do Pajek 1.01 de Batagelj (2004) e do Agra 2.1.1. de Benta (2003), entre outras, e que têm sido amplamente utilizadas por vários investigadores na área da análise de redes sociais. No entanto, para redes de grandes dimensões muitos dos problemas da análise de redes sociais continuam de difícil resolução.

Na secção seguinte referem-se algumas redes tecnológicas e problemas surgidos nesse contexto.

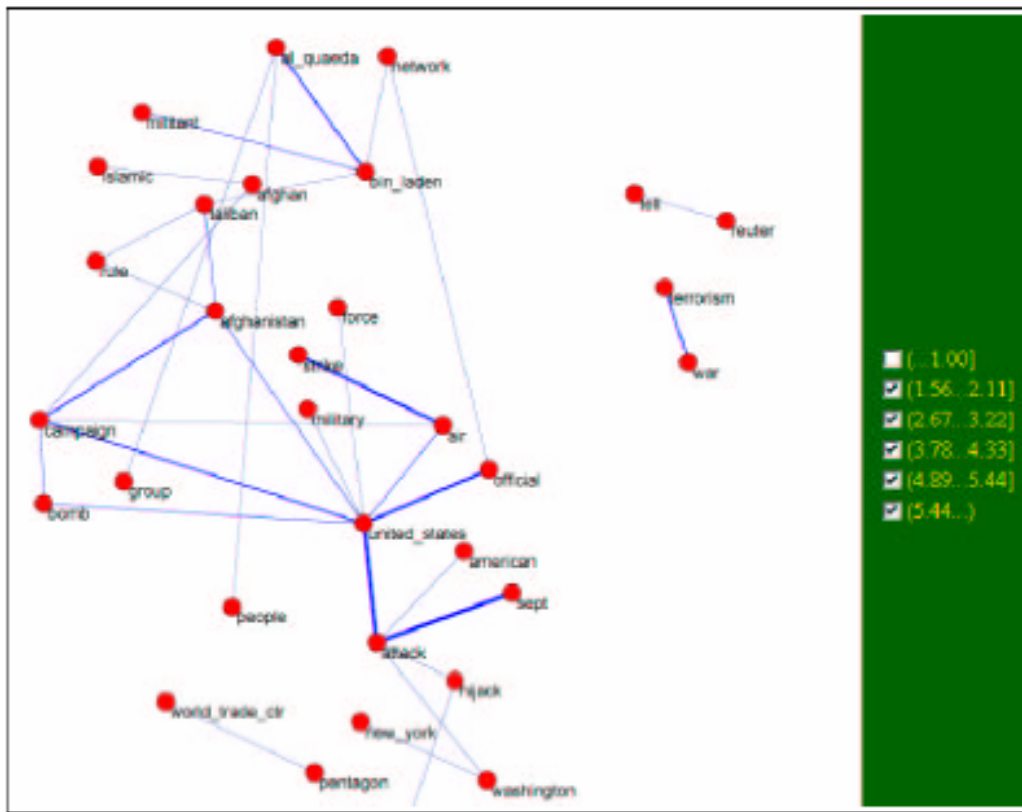


Figura 3.4 Rede de texto da Reuters apenas com os nodos e ligações mais relevantes, em Batagelj (2004)

3.3 Redes tecnológicas

Uma rede tecnológica pode ser definida de uma forma muito ampla como um sistema constituído por componentes tecnológicas e suas ligações, tendo em conta que uma componente tecnológica pode ser caracterizada por transformar um conjunto de *inputs* num conjunto de *outputs*, ambos previamente definidos.

Como exemplo de redes tecnológicas temos as redes de transporte, as redes de telecomunicações, os circuitos electrónicos, as redes de fornecimento de luz e água, etc. Mais recentemente, temos as redes computacionais e a *Internet*.

São variados os problemas estudados ao longo do último meio século no contexto das redes tecnológicas e vão desde o desenho de circuitos altamente complexos - VLSI (*very large scale integrated*, ver Alpert e Kahng (1995) e Jeong et al. (2002)), ao desenho e

localização em redes de telecomunicações (Barbas e Marín (2004), Fischetti et al. (2003), Smith (2004) e Whitaker e Hurley (2004)), redes de electricidade (Avella et al. (2005), Curcic et al. (1996), Garcia e França (2007), James e Salhi (2000)) ou, mesmo, redes de transporte (Arnold et al. (2004), Klempous et al. (1994), Zäpfel e Wasner, (2002) e Yoon et al. (1998)).

Mais recentemente surgiram as redes computacionais. Estas redes podem ser classificadas em termos da sua extensão: PAN (*Personal Area Network*), ou seja, uma rede computacional para comunicação entre vários dispositivos do computador e afecta a um indivíduo; LAN (*Local Area Network*) quando os computadores na rede estão localmente próximos; WAN (*Wide Area Network*) quando os computadores estão separados por longas distâncias. Em alternativa, podem ser classificadas com suporte nas relações funcionais entre as várias componentes (cliente-servidor, *peer-to-peer*, etc.), bem como nas tipologias de estrutura da rede (estrela, anel, árvore, etc., como se pode observar na figura 3.5).

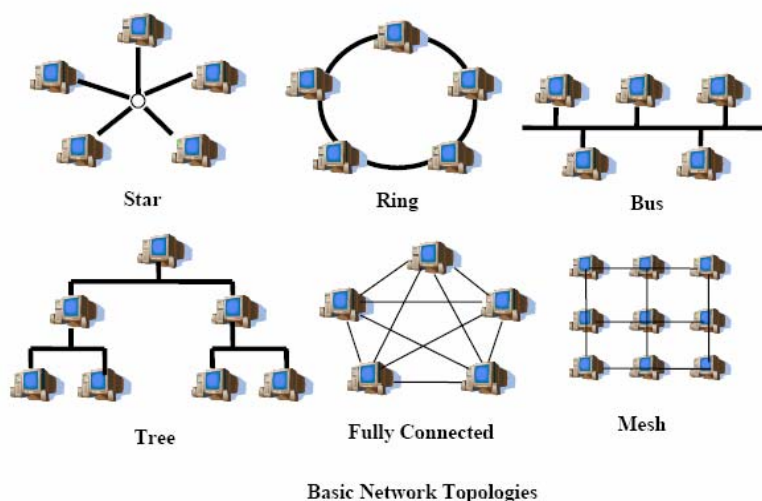


Figura 3.5 Tipologias estruturais básicas de redes computacionais, adaptado de Lewis (2004)

A interligação entre estes vários tipos de redes computacionais concretizou-se tecnologicamente com a criação de uma rede de redes, de grandes dimensões - *Internet*

(*INTERconnected NETworks*). A *Internet* surgiu nos Estados Unidos da América no final da década de 60 do século XX, sob o patrocínio do governo Norte Americano como uma interligação de super computadores com objectivos na área da defesa e designada por *Arpanet* (Leiner et al. (2000)). Esta rede estende-se hoje praticamente a todos os países do Mundo e tem sido referenciada como «a rede das redes» constituída por pequenos grupos de redes ligados por cabos telefónicos, cabos de fibra óptica, ligações laser e ligações por satélite. A *Internet* é pois uma rede electrónica que permite transportar dados entre os computadores e outros dispositivos electrónicos e disponibiliza variados serviços, tal como se pode observar na figura 3.6. O estudo da estrutura destas redes pode fornecer informação variada com aplicação a diferentes áreas.

Mas é, na realidade, a *World Wide Web* ou *WWW* ou, ainda, *Web*, a rede líder em termos de serviços disponibilizados pela *Internet* pois justifica actualmente cerca de 70% do tráfego na *Internet*. Esta rede é muitas vezes confundida com a rede *Internet* sendo, no entanto, menos abrangente, pois representa apenas o serviço de navegar por hiperligações através dos dados guardados em computadores ligados à *Internet* (in <http://homepage.oninet.pt>).

A rede *Web*, como uma parte integrante da *Internet*, pode ser encarada como um grafo orientado cujos nodos representam as páginas *html*, subdomínios, domínios, etc. e os arcos representam as hiperligações entre eles. Segundo Kumar et al. (2002), de acordo com estimativas de 1998, este grafo tinha nessa altura cerca um bilião de nodos e cada nodo tinha em média sete hiperligações a outros nodos da rede.

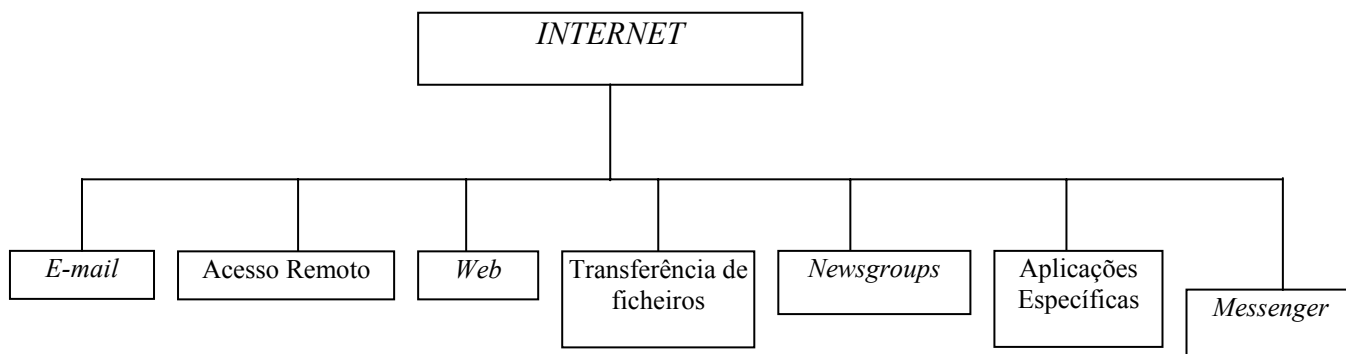


Figura 3.6 Exemplos de serviços disponibilizados na *Internet* aos seus utilizadores, adaptado

<http://english.unitecology.ac.nz/resources/resources/tutorial/theory/works.html>, _acedido em 21/06/2004

O que caracteriza fundamentalmente a *Internet* é a facilidade com que a informação consegue circular de um ponto para outro da rede electrónica, distantes entre si, e num curto espaço de tempo. Esta possibilidade de computadores e redes poderem partilhar informação à escala mundial é possível graças a dois protocolos complementares: o TCP (*Transmission Control Protocol*) e o IP (*Internet Protocol*). Vejamos um exemplo para perceber como funciona a *Internet*.

Exemplo 3.4 - Envio de um *E-mail*

Querendo enviar uma mensagem para um outro computador, essa mensagem é dividida em pequenos conjuntos de dados designados por *packets* (ver figura 3.7) sendo cada um desses *packets* enviado através de linhas de cabo ou sinais (no caso das redes *wireless*) mas por caminhos diferentes de modo a que a transmissão seja mais rápida. Por analogia, podemos pensar num grupo de pessoas de uma mesma família que pretendem viajar de um mesmo local para outro mas não conseguem arranjar bilhetes de modo a viajarem todos no mesmo avião; a alternativa será fazerem rotas diferentes em função do avião que viajam e efectuar escalas em países diferentes, com o objectivo final de se encontrarem todos no local de destino.

Os *packets* viajam em envelopes com um endereço IP do tipo xxx.xxx.xxx.xxx. Os *routers* são máquinas especializadas com um mapa da *Internet* na sua memória que apresenta uma descrição completa pelo menos da sua vizinhança, podendo por isso chegar aos *routers* vizinhos. Estes examinam o endereço IP e determinam qual o caminho, de entre os possíveis, que é mais eficiente para enviar um determinado *packet*. No seu destino o protocolo TCP reagrupa os vários *packets* na sua forma original. Os erros e correcções necessários no envio de *packets* são corrigidos também através dos protocolos TCP/IP (adaptado de <http://dragon.ep.usm.edu/~int/capstone/tonette/Internet2.html>, 21/06/2004).

■

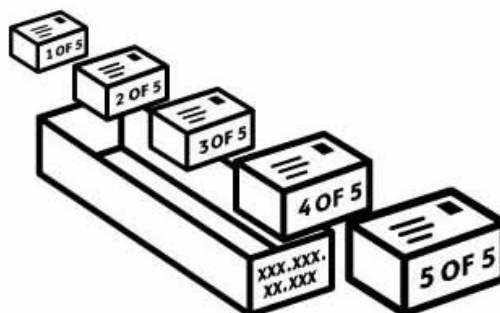


Figura 3.7 Exemplo do reagrupamento dos *packets* no final da transferência, retirado de www.btplc.com/21CN/The%20technology%20of%20the%20network/21CNkeytechnologies/IP/IP.htm

Exemplo 3.5– Aceder a uma página *Web*

Para aceder a uma determinada página *Web* que pode ser um documento escrito em HTML ou outra linguagem compatível, é usado um *browser*, aplicação da *Internet* que permite a visualização de conteúdos. O *browser* começa por estabelecer uma ligação por rede   máquina onde está o documento mas, para o fazer, tem que encontrar a localização na rede *host*, localização esta representada pelo endereço de IP. Para encontrar a localização, esta aplicação consulta um programa chamado servidor de nomes, o DNS (*Domain Name Server*). O DNS dirá ao *browser* qual o endereço de IP da página que se pretende visualizar. De seguida, o *browser* enviará um comando para poder trocar informação com essa página. Este comando é convertido num pacote com três

componentes: o endereço da fonte, o endereço de destino e um número de serviço que indica que é um pedido para a *WWW*. A máquina origem envia então um pacote pela ligação *modem* até chegar a um equipamento *router* de destino. O pacote poderá ter de passar por vários *routers* até chegar ao destino. De seguida, a página será transmitida à máquina origem através da sua desagregação em pequenos grupos que seguem caminhos diferentes de acordo com o descrito anteriormente.



3.4 Redes sócio-tecnológicas

3.4.1 Casos na *Internet*

Em alguns casos as redes tecnológicas, em particular as redes computacionais, e as redes sociais estão intimamente relacionadas e constituem aquilo que alguns autores designam por redes tecno-sociais ou sócio-tecnológicas (Wellman (2001)). De facto, se por um lado envolvem ligações de índole tecnológica, por outro acabam por expressar também ligações de natureza social, ver figura 3.8. A *Web* é sem dúvida uma rede sócio-tecnológica que tem sido alvo de grandes desenvolvimentos e estudos nas duas últimas décadas. Nos próximos parágrafos será apresentada uma revisão bibliográfica de algumas publicações neste âmbito.

Alguns trabalhos de investigação têm-se focalizado nas questões relacionadas com a dinâmica e a estrutura das redes, mais especificamente questões relacionadas com a formação das redes e a sua evolução ou modificação, pretendendo-se encontrar modelos matemáticos para estas redes de modo a descrever, compreender e fazer previsões do seu comportamento em determinadas situações (consultar Chakrabarti et al. (2002), Pastor-Satorras e Vespigani (2004) e Zhong et al. (2003), entre outros). Estes problemas envolvem modelos da teoria de grafos, nomeadamente, o modelo de grafo aleatório clássico e simples proposto por Paul Erdős e Alfréd Rényi, em 1959, num artigo seminal. Todavia, e segundo Newman (2003), este modelo revelou-se inadequado para descrever todas as ocorrências de algumas redes reais, em particular, redes sociais, redes na área da biologia ou na ciência da computação. Este autor, entre muitos outros, desenvolveu várias

generalizações do modelo de Erdős-Rényi que mostraram ter resultados mais ajustados quando aplicadas na modelação de redes sociais entre outras.

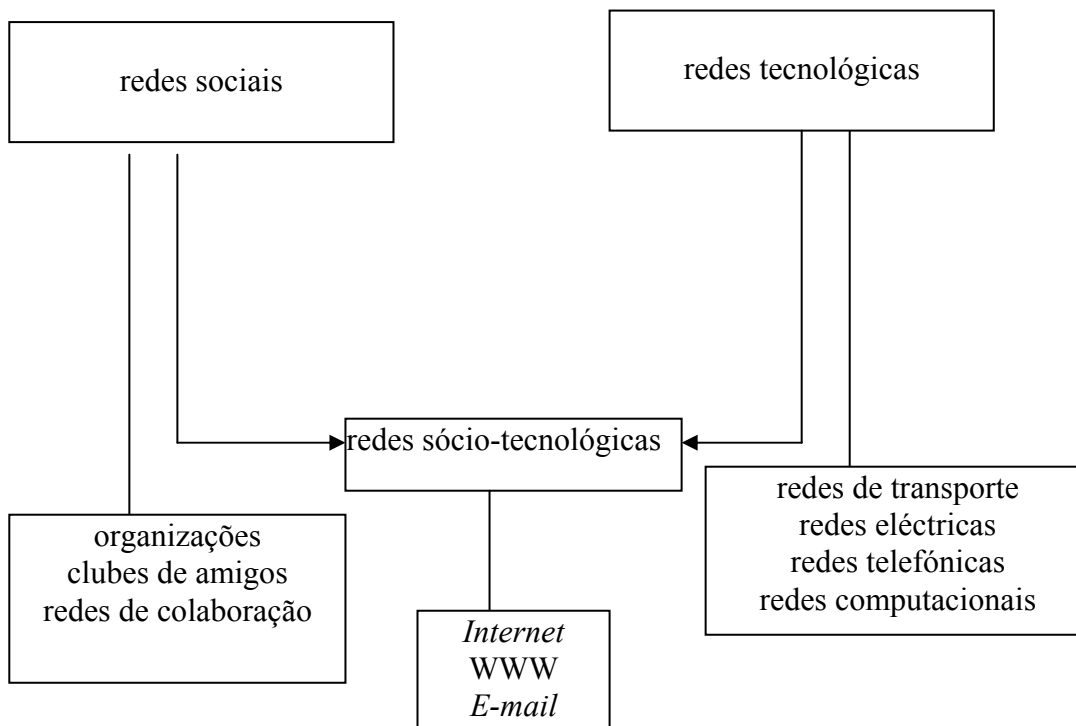


Figura 3.8 Relação entre redes sociais e tecnológicas

Contudo, os estudos dedicados a redes sociais e tecnológicas não recaem só na sua modelação mas, principalmente, na caracterização da rede, por exemplo, análise da conectividade, da centralidade, do prestígio, da existência de subgrupos coesos ou de grupos por semelhança. Assim, os grafos e a correspondente teoria têm sido amplamente usados como um meio de caracterização da estrutura da rede *Web*.

De seguida serão apresentados diversos problemas do contexto das redes sócio-tecnológicas, todos relativos à *Internet* ou *Web*, tendo alguns deles surgido na área de *information retrieval*, mais especificamente, em *data mining*. Os exemplos que se seguem tem a particularidade, ao contrário dos exibidos em 3.3, de incluírem, além da componente tecnológica que lhes está obviamente subjacente, uma componente social.

Existe um fio condutor comum aos vários problemas que serão descritos nesta secção relativamente à forma como podem ser abordados. Sugere-se, assim, uma classificação destes segundo a seguinte tipologia:

- (1) análise da estrutura (estrutura das ligações entre as páginas), é o caso do exemplo 3.8;
- (2) análise de conteúdos (com base nas palavras-chave, frases, etc.. dos nodos), é o caso do exemplo 3.6;
- (3) análise da utilização (navegação dos utilizadores nos *websites*, *newsgroups*, *logs*, ...), é o caso dos exemplos 3.5, 3.6 e 3.7.

Exemplo 3.5 - Agrupamento de documentos hipermedia

O problema de agrupamento em sistemas hipermedia tem sido amplamente trabalhado e tem por objectivo a constituição de grupos de conceitos com a finalidade de facilitar a circulação dos utilizadores ao longo do sistema. Neste caso, o sistema hipermedia é modelado através de uma rede cujos nodos representam vários fragmentos de informação (texto, audio, vídeo ou uma combinação de vários) e os arcos, as ligações definidas no documento hipermedia. Johnson e Fotouhi (1996) propõem um agrupamento com base apenas no «histórico da navegação» do utilizador através do documento hipermedia, não sendo, por isso, considerado o conteúdo dos nodos. Deste modo, é oferecida a possibilidade ao utilizador de navegar no documento hipermedia original ou usar um indexador pessoal, baseado no agrupamento hierárquico construído para cada utilizador específico, de acordo com o descrito no parágrafo anterior. ■

Exemplo 3.6 - Agrupamento de documentos na *Web*

Um dos problemas amplamente desenvolvido refere-se ao agrupamento de documentos relativamente à pesquisa na *Web*. Uma primeira forma, mais tradicional, consiste em agrupar os documentos antes de efectuar a pesquisa de modo a torná-la mais eficiente, pr -agrupamento. Um processo de pesquisa de informa o disponível na *Internet* beneficiar  em velocidade e em qualidade se a informa o estiver classificada por t picos afins. Também se pode estar interessado numa classifica o de agentes econ micos e sociais por afinidades. A segunda forma consiste em agrupar depois de já ter os resultados da pesquisa.

Note-se que o conjunto de grupos formado não é, no geral, uma parti o permitindo-se a sobreposi o, isto é, elementos comuns a vários grupos. Os trabalhos desenvolvidos nesta área recorrem a diversos critérios de semelhança entre os documentos, nomeadamente, a proximidade entre dois documentos baseada no número de palavras, específicas e significativas, partilhadas pelos documentos (Iliopoulos et al. (2001)) ou o número de frases comuns (Zamir e Etzioni (1998)). Uma alternativa às duas anteriores consiste em agrupar os documentos não com base no seu conteúdo mas sim na informa o fornecida pelo controlo de acesso de utilizadores, a chamada análise de utiliza o. Nesta  ptica, documentos que apresentam muitas co-visitas deverão ser considerados próximos (Su et al. (2004)). Deverá sempre existir o cuidado de não agrupar documentos que façam parte de diferentes sessões de acesso à *Web* ou cujo intervalo de tempo seja superior a um determinado limite.

■

Um outro conjunto de problemas que tem sido estudado é a propaga o de vírus por *E-mail*. Neste tipo de trabalhos são estudados modelos de propaga o de vírus por *E-mail* entrando em linha de conta não são com a estrutura da rede mas também com o comportamento dos utilizadores de *E-mail* (por exemplo, frequência de leitura dos *E-mails* ou probabilidade de abertura de um *attachment*).

Exemplo 3.7 - Propagação de vírus por *E-mail*

Em Zou et al. (2004) foram considerados apenas vírus que se propagam através das listas de endereços de *E-mail*. Esta rede de *E-mail* é modelada como uma rede orientada cujos nodos são os utilizadores de *E-mail* e existe um arco (i,j) se o endereço de *E-mail* de j existe na listas de endereços de i . Como na maioria dos casos, se existe uma ligação de i para j então também existe outra de j para i , os autores deste artigo decidiram utilizar como modelo uma rede não orientada. O objectivo do trabalho destes autores foi apresentar um modelo de propagação de vírus por *E-mail* tendo em consideração os diferentes comportamentos dos utilizadores. Por fim, estudaram alternativas de imunidade de modo a evitar a propagação de vírus. ■

Exemplo 3.8 - Estrutura das redes face a um ataque intencional

Cohen et al. (2001) analisou a estrutura de uma rede de modo a verificar o seu comportamento face a um ataque intencional. O autor mostra que este comportamento varia em função de determinadas características da rede. Verifica, por exemplo, que redes como a *Web*, a *Internet*, redes sociais, etc. (*scale-free networks*) apresentam um grau inesperado de robustez, isto é, possibilidade dos seus nodos continuarem a comunicar mesmo sujeitos a falhas graves de funcionamento. No entanto, verificou que estas redes são particularmente vulneráveis a ataques intencionais. A elevada tolerância a uma falha, por um lado, e a grande vulnerabilidade a um ataque intencional, por outro lado, são características das redes comunicacionais. Nesse artigo é aprofundado o problema do ataque intencional e, em particular, determinado o valor exacto da fracção crítica necessária para a ruptura e a dimensão do *cluster* restante. ■

Ainda em relação à rede *Web*, em Kleinberg e Lawrence (2001) é referido que dada a natureza descentralizada do seu crescimento se acreditava que esta não apresentaria uma estrutura e uma organização. No entanto, Broder et al. (2000) indica que a *Web* contém um núcleo grande e fortemente conexo (*core*), constituído por um conjunto de páginas mais proeminentes tendo cada página uma destas páginas hiperligações para qualquer outra página desse núcleo. Além disso, o núcleo apresenta a característica de ser muito

compacto, isto é, o caminho mais curto de uma sua página para outra também dentro do núcleo envolve em média entre 16 a 20 hiperligações. As restantes páginas podem ser caracterizadas pelas suas relações com o núcleo:

- (1) *upstream* - nodos que podem atingir o núcleo mas que a partir do núcleo não se pode chegar a eles;
- (2) *downstream* - nodos que podem ser atingidos a partir do núcleo mas que não podem chegar a ele;
- (3) *tendrils* - nodos que estão isolados do núcleo.

Uma possível representação desta estrutura da *Web* é a apresentada na figura 3.9.

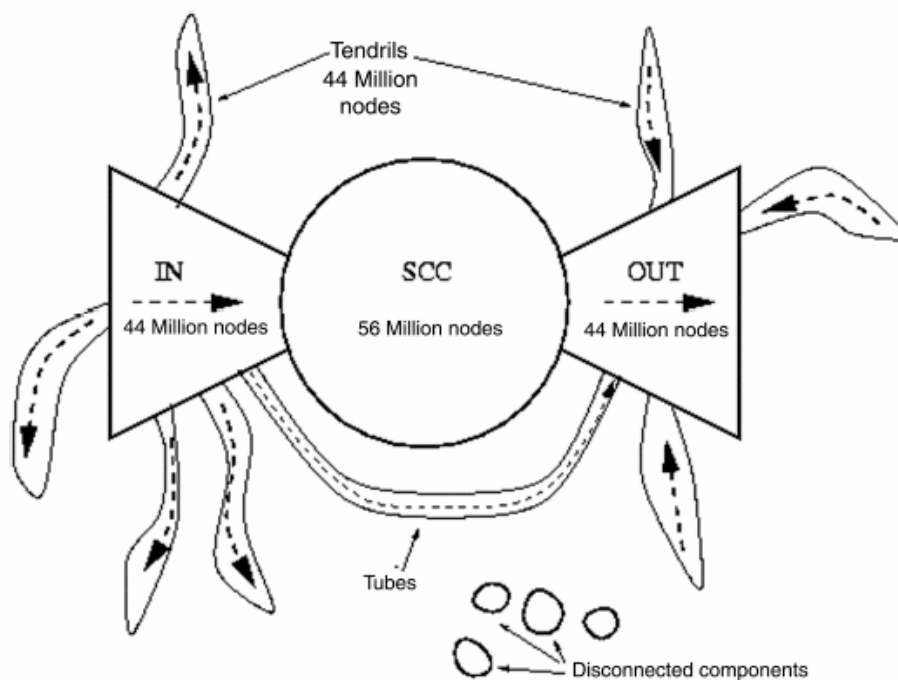


Figura 3.9 Representação da estrutura da *Web*, retirado de Broder et al. (2000)

De acordo com Watts e Strogatz (1998) normalmente assume-se que a topologia das ligações numa rede é completamente regular ou completamente aleatória. Mas, em muitas redes - biológicas, sociais e tecnológicas - esta topologia está algures entre os dois extremos, de acordo com figura 3.10, não sendo excepção o caso da *Web*.

Em 2000, Barabási e os seus colegas dedicaram-se a redes tecnológicas e sociais complexas e verificaram que redes como a *Web* são dominadas por alguns nodos inseridos em componentes fortemente conexas (conjunto de *hubs*) que apresentam hiperligações para os restantes nodos, fazendo parte de subredes menos conexas. Estes sistemas podem ter um elevado nível de *clustering* como as estruturas regulares, mas apresentam distâncias médias entre dois quaisquer nodos relativamente reduzidas, como as redes aleatórias. Estas redes têm sido designadas por *small-worlds networks*. Segundo Watts e Strogatz (1998), o fenómeno de *small-world* formaliza de algum modo a situação anedótica de que «*you are only ever six 'degrees of separation' away from anybody else on the planet.*»

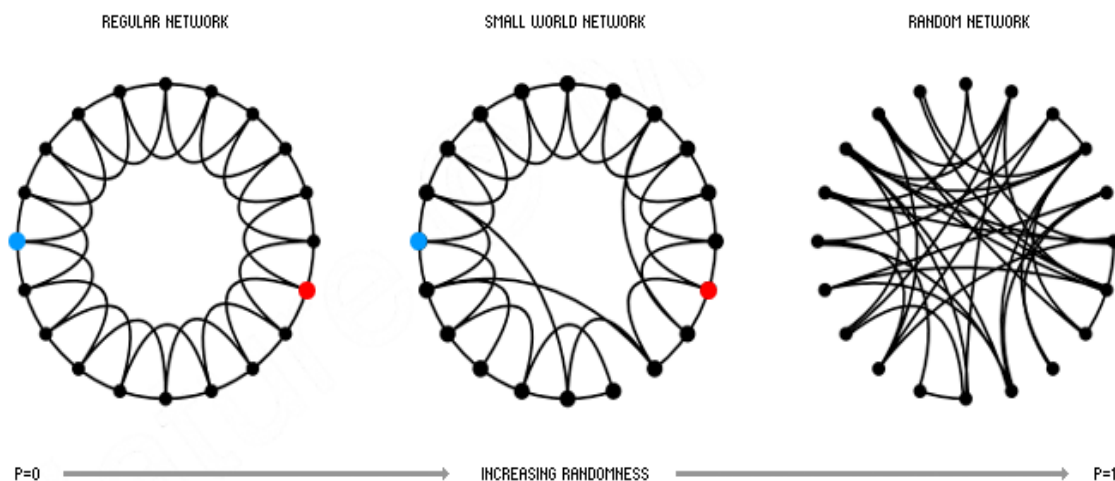


Figura 3.10 Tipos de estrutura de redes, adaptado de Matthews (1999)

A um nível local, a estrutura da *Web* torna-se ainda mais intrincada e não uniforme. As páginas e as ligações são criadas por utilizadores com interesses particulares e páginas no mesmo tópico tendem a agrupar-se em «comunidades». Segundo Kumar et al. (1999) existem pelo menos três razões para procurar extrair sistematicamente comunidades da *Web*:

- (1) estas comunidades representam uma fonte de informação valiosa, oportuna e, possivelmente, mais fiável e actualizada;

3. Optimização em grafos num contexto de Redes Sociais e Tecnológicas

- (2) constituem uma representação sociológica da rede, o seu estudo proporciona pistas relativas à evolução da própria *Web*;
- (3) portais que identificam e fazem distinções entre estas comunidades são muito úteis e valiosos do ponto de vista do *marketing* pois, por exemplo, permitem enviar publicidade a um conjunto específico de consumidores muito preciso.

3.4.2 Comunidades *Web*

Têm sido desenvolvidas diversas abordagens para encontrar comunidades *Web*. A grande diferença entre estas reside na definição de comunidade (ver Zhang et al. (2006)).

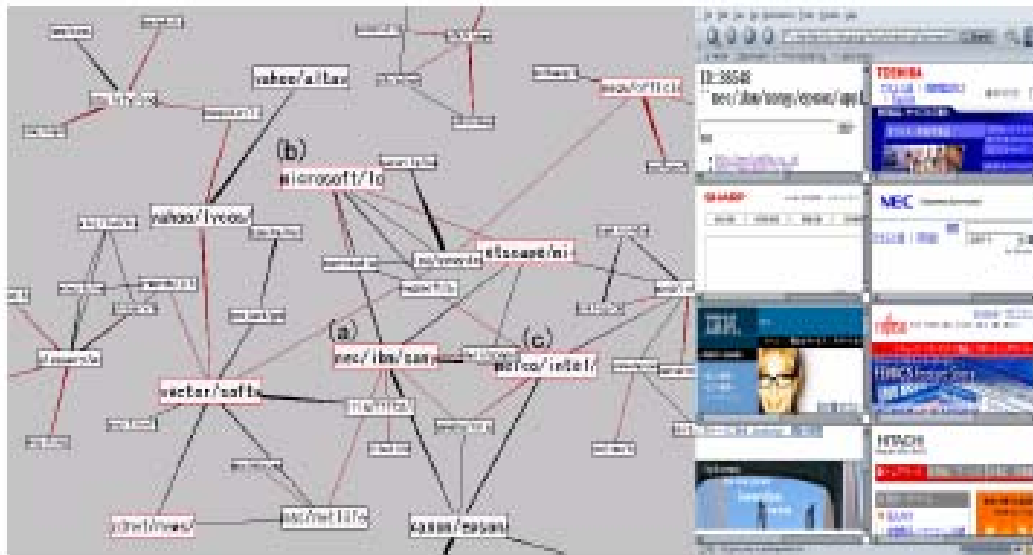


Figura 3.11 Parte de uma rede representativa de uma comunidade *Web*, retirada de Toyoda e Kitsuregawa (2001)

Num *survey* de Han et al. (2003) são enumeradas algumas definições assim como comparações entre os algoritmos associados a cada definição.

Uma comunidade *Web* pode ser identificada com uma clique do grafo *Web*. Esta definição apresenta dois inconvenientes: encontrar a clique máxima num grafo é um

problema NP-difícil e é uma definição demasiado exigente para uma comunidade *Web* de grandes dimensões.

Kleinberg et al. (1999) refere que uma comunidade *Web* também pode ser caracterizada por um conjunto de n páginas-autoridades e por um conjunto de m páginas-*hubs* num determinado tópico (ver lado esquerdo da figura 3.12). Este conjunto define o núcleo da comunidade *Web*. Assim, um subgrafo bipartido completo (*bipartite core*) serve para indicar a presença de uma comunidade *Web* (ver Kumar et al. (1999)). Neste grafo os nodos pertencem a dois subconjuntos disjuntos: *hubs* e autoridades e todas as arestas são orientadas dos *hubs* para as autoridades. Existem métodos já implementados que permitem encontrar na *Web* comunidades que têm como núcleo um subgrafo bipartido, designados por *HITS-based* porque são baseados no algoritmo *HITS*, inicialmente proposto para melhorar os motores de pesquisa da *Web*.

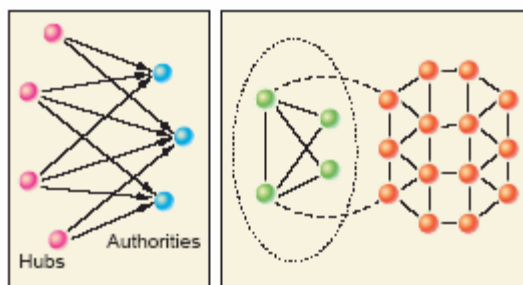


Figura 3.12 Organização da *Web*, segundo Kleinberg e Lawrence (2001)

No entanto, ainda segundo Kumar et al. (1999), a definição de comunidade *Web* baseada em subgrafo bipartido completo apresenta alguns inconvenientes pois, embora algumas páginas façam parte da mesma comunidade frequentemente não se referenciam entre elas. Segundo estes autores tal pode acontecer por vários motivos: elevada competitividade entre as entidades, não compartilharem da mesma opinião ou por desconhecimento.

Outra alternativa para definir uma comunidade *Web* é devida a Flake et al. (2002) e consiste em encarar a comunidade *Web* como um subgrafo em que todos os nodos têm mais ligações (independente do sentido) entre os elementos da comunidade do que fora

dela (ver lado direito da figura 3.12 e figura 3.13). Encontrar uma comunidade deste tipo corresponde a determinar o corte mínimo no grafo. Ora o *balanced minimum-cut problem* é NP-difícil e, por isso, os autores propuseram uma outra definição para comunidade *Web* baseada no corte mínimo no grafo entre s e t , sendo s e t dois nodos do grafo, designados por origem e destino. Depois do corte todos os nodos que são alcançáveis a partir de s pertencem à comunidade. O algoritmo *maximum flow-minimum cut* é considerado uma boa alternativa para encontrar uma comunidade *Web* recorrendo a esta última definição menos exigente do ponto de vista computacional.

Como podemos observar todas estas definições resultam exclusivamente de uma análise de ligações (*link analysis*) sendo o próximo passo conseguir aliar a esta análise de ligações uma de conteúdo das páginas (Kumar et al. (1999)).

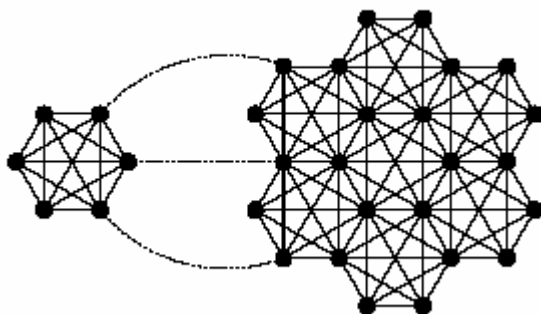


Figura 3.13 Ilustração do método *maximum flow*, retirado de Flake et al. (2000)

Verbeurgt (2003) refere que uma limitação adicional às noções de comunidade mais vulgares, nomeadamente as baseadas na presença de *hubs* e autoridades, é o facto de representarem uma «visão muito autoritária» do mundo. Se é exigido às comunidades possuírem nodos *hubs* e autoridades então, formas mais «democráticas» de comunidades serão rejeitadas à partida.

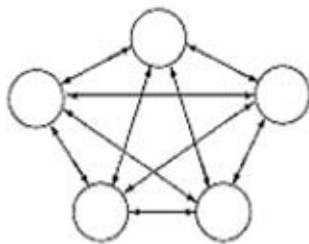


Figura 3.14 Comunidade *Web* definida como uma clique

O trabalho de Ng et al. (2001) mostrou que o algoritmo HITS não funciona bem com comunidades com uma noção mais «democrática», ou seja, se o algoritmo é aplicado a grafos sem uma estrutura do tipo autoridade-*hub* os n os *hub* e autoridade escolhidos para formar a comunidade serão instáveis.

Neste sentido, o trabalho de Verbeurgt (2003) discute conceitos da teoria de grafos que permitam definir estruturas de comunidades mais democráticas. A primeira é a noção de clique máxima (figura 3.14), mencionada no início da secção 3.4.2, que, como já vimos atrás, apresenta algumas desvantagens pois, por um lado, o problema da determinação da clique máxima   NP-difícil e, por outro, é uma definição demasiado exigente e forte para uma comunidade *Web*.

Depois temos conceitos como os de componentes conexas fortes e fracas, específicos para grafos orientados, que também não devem ser utilizadas como definições de comunidades *Web* pois, contrariamente à anterior, são definições demasiado fracas para encontrar comunidades a um nível mais local. Uma componente conexa forte de um grafo orientado G define-se como o maior subgrafo S de G tal que cada não em S   alcançável a partir de qualquer outro não de S , enquanto a componente fraca apenas exige que dados dois n os de S estes sejam alcançáveis pelo menos num determinado sentido. São a título de curiosidade sabe-se que cerca de 25% das páginas de toda a *Web* pertencem à componente conexa forte (*core*). Logo, segundo este autor, a definição deverá estar relacionada como uma noção de conectividade local não demasiado exigente como a definição de clique mas também não demasiado fraca como a componente conexa fraca.

Na opinião de Verbeurgt (2003), a definição de uma comunidade *Web* deve ser baseada na noção intuitiva de que um nodo, se é membro de uma determinada comunidade, então estará ligado aos restantes membros da comunidade e existirão também ligações desses membros para ele, o que, corresponde ao conceito de ciclo num grafo.

No entanto, e ainda segundo Verbeurgt, apesar dos problemas relacionados com a visão pouco democrática das comunidades *Web*, a noção de comunidade baseada num núcleo constituído por *hubs* e autoridades continua a ser muito interessante porque:

- (1) existe um algoritmo eficiente (HITS) para calcular os *hubs* e autoridades a partir de um pequeno conjunto obtido por um algoritmo de pesquisa na *Web*;
- (2) existem algoritmos que permitem encontrar comunidades a um nível global usando a definição de comunidade;
- (3) esta definição para comunidade é bastante adequada do ponto de vista sociológico.

Um modo alternativo de definir comunidades *Web* consiste em aceitar previamente uma forma de agrupamento conceptual dos nodos ou entidades interligados por hiperligações na *Web*. Este agrupamento conceptual está normalmente associado a razões epistémicas ou outras formas de semelhança de interesse ou tema. São exemplo disso as subcomponentes ou partes da *Web* dedicadas a determinada área científica ou de interesse. O espaço da *Web* dedicado à Matemática, mais especificamente à Optimização em Grafos, onde se incluiriam as hiperligações na *Web* de diversos grupos de investigação neste domínio científico, poderá assim ser considerado como uma comunidade *Web* válida e com os mesmos desequilíbrios já anteriormente referidos. Em Caldas (2004) é estudada a organização deste tipo de comunidades epistémicas na *Web*, bem como, o comportamento das entidades nestas comunidades gerando assim as denominadas bases de conhecimento digitais.

3.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados alguns problemas baseados no modelo de grafos, nomeadamente, no âmbito das redes sociais e das redes sócio-tecnológicas. Sabe-se que estes conceitos têm merecido menos atenção da parte da comunidade de Investigação Operacional. Salienta-se o facto da possibilidade de ampliação do campo de aplicação da Investigação Operacional poder promover um aumento da sua visibilidade a novos públicos e, com isso, abrir novas perspectivas de uma maior conexão com outras áreas e, eventualmente, a possibilidade de integração de alguns destes temas no ensino da Matemática desde os primeiros anos de escolaridade, à semelhança do que foi feito no passado com outros ramos da Matemática Aplicada (ver, com mais detalhe, no capítulo anterior).

Capítulo 4

O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

«Freedom of choice makes stars inevitable»

Shirky (2003)

4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*. Na secção 4.2 é realizada uma contextualização e definição do problema. Na secção 4.3 surge uma revisão bibliográfica de modelos e problemas de optimização passíveis de utilização como modelos para o problema e, com base nesta revisão, é exposto na secção 4.4 um modelo, no contexto de grafos. Na secção 4.5 são mostradas algumas aplicações deste problema, sendo de seguida, em 4.6, apresentadas e analisadas algumas instâncias que serviram como casos de estudo.

4.2 Contextualização

Como se verificou pela revisão bibliográfica apresentada no capítulo 3, tem sido prolífica a investigação sobre a topologia e, mesmo, a evolução das estruturas da *Web*, bem como sobre comunidades *Web*. Contudo, o estudo acerca de como estas comunidades *Web* poderão ser reconfiguradas ou redesenhadas de modo a reduzir o desequilíbrio natural revelado pela sua estrutura hierárquica, tem merecido menor ou mesmo muito pouca atenção.

De acordo com Kumar et al. (1999) de entre as várias questões que se consideram ainda por resolver sobressaem a extracção semântica de informação da *Web* e a organização das comunidades encontradas em estruturas úteis e eficientes.

Aqui se insere precisamente o objectivo principal desta dissertação, o de contribuir para o desenvolvimento de métodos que permitam reconfigurar uma comunidade *Web* de modo a obter um menor desequilíbrio na estrutura de interligação entre os elementos que a constituem e, com isso, promover uma partilha e distribuição de recursos e informação de uma forma mais equilibrada e eficiente.

Poder-se-ia pensar, face à natureza distribuída e descentralizada da *Web*, que esta não tem uma estrutura organizada ou, pelo menos, não apresenta determinadas regularidades. Não é, no entanto, o que se verifica na realidade. Aliás, de acordo com vários estudos realizados sobre a estrutura da *Web* e sobre redes sociais e redes de informação verificou-se que em sistemas onde as pessoas são livres de escolher entre várias opções, um pequeno subconjunto de opções obtém uma quantidade elevada de tráfego/atenção/informação, etc. (ver Albert e Barabási (2002), Barabási et al. (2000), Girvan e Newman (2002), Kleinberg e Lawrence (2001) e Watts e Strogatz (1998)), ao contrário das restantes. Este tipo de comportamento é identificado por o grau dos nodos seguir uma distribuição de potência.

Note-se que uma variável aleatória X , não negativa, se diz seguir uma distribuição de potência quando $\Pr[X \geq \rho] \sim c\rho^{-\rho}$ para constantes $c > 0$ e $\rho > 0$ e onde $f(x) \sim g(x)$ indica que o limite da razão se aproxima de 1 à medida que x tende para infinito (ver Mitzenmacher (2003)). Simplificando, numa distribuição de potência as caudas do gráfico decrescem de acordo com o expoente ρ , o que leva a um decréscimo mais acentuado comparativamente com outros modelos mais comuns. No contexto em estudo, isto traduz-se na existência de poucas páginas com elevado grau de conectividade e de muitas com poucas ligações para as primeiras, portanto com grau externo baixo.

Por outro lado, tal como Shirkey (2003) refere, muitos investigadores do século passado encontraram este tipo de distribuição em sistemas humanos, o que talvez pareça um

pouco estranho quando estamos tão habituados à presença da distribuição normal. Este mesmo autor, cita alguns exemplos variados, desde a descoberta do economista Vilfredo Pareto que observou que a distribuição da riqueza mundial segue este padrão de desequilíbrio, com 20% da população detendo 80% da riqueza mundial, sendo por isso de acordo com Adamic (2000) a distribuição de potência uma derivação directa da distribuição de Pareto.

Segundo Adamic (2000) também o linguista George Zipf observou a existência desta distribuição relativamente à utilização do vocabulário.

Outro exemplo deste tipo de comportamento está presente no grau interno das páginas *Web* e no grau externo pois ambos apresentam uma distribuição de potência (Broder et al. (2000), ver figura 4.2). Entende-se por grau externo das páginas *Web* e grau interno, respectivamente, o número total de hiperligações originados numa dada página *Web* ou que têm como destino uma dada página *Web*. A figura 4.1 ilustra as ligações entre documentos num sítio da *Web*.

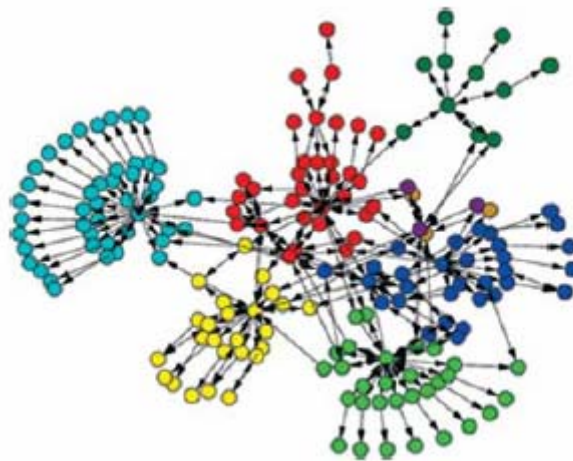


Figura 4.1 Ligações entre documentos num sítio da *Web*, por Girvan e Newman, retirado de Mendes (2005)

Em Broder et al. (2000) figuram resultados de testes realizados com um *crawler* da *Web* num conjunto com aproximadamente 200 milhões de páginas e 1.5 biliões de hiperligações durante o período de Maio a Outubro de 1999. Na figura 4.2 mostra-se a

distribuição do grau interno e do grau externo das páginas *Web* obtidos nestes dois meses com $\rho \approx 2.1$, um valor já referido em trabalhos anteriores (Albert e Barabási (2002) e Kumar et al. (1999)).

As distribuições de grau externo apresentam também, segundo estes autores uma distribuição de potência existindo no entanto um pequeno desvio nas páginas com baixo grau externo.

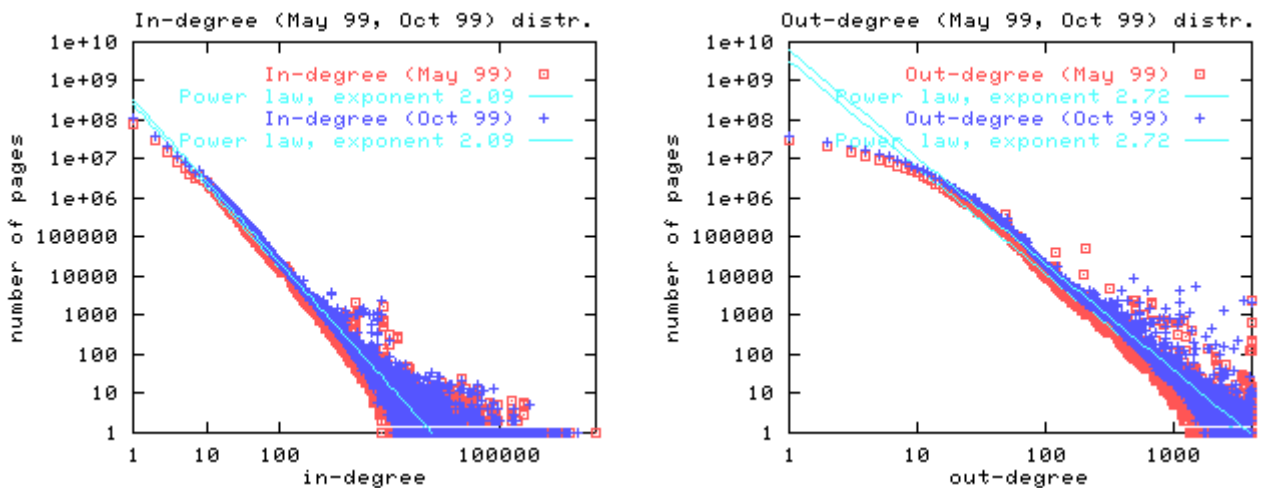


Figura 4.2 Representação da distribuição do grau interno e grau externo, retirado de Broder et al. (2000)

A justificação para este comportamento passa pelo facto da rede *Web* ser também uma rede social. É, assim, uma rede sócio-tecnológica, tal como definido no capítulo 3.

As comunidades *Web* determinadas por aplicação de algoritmos baseados na presença de *hubs* e autoridades como o do HITS, ou em comunidades conceptuais obtidas a partir da pesquisa de palavras chave em vários motores de pesquisa, ou mesmo através de *expert knowledge*, quase todas apresentam uma estrutura hierárquica que vem de algum modo contrapor o efeito equitativo que se pretende para promover a partilha e difusão de conhecimento.

Imaginemos agora uma inovação, um novo produto ou serviço ou mesmo um pacote de informação que uma entidade possui e pretende distribuir ou partilhar com todos as

entidades de uma dada comunidade *Web*. Pode então colocar-se uma questão: qual a melhor forma de organizar esta comunidade *Web* de modo a partilhar tal informação de um modo abrangente e o mais igualitário possível por todos os elementos da comunidade.

Face ao exposto, torna-se necessário uma reorganização ou reconfiguração da comunidade *Web* de modo a que a nova estrutura de ligações promova uma diminuição do desequilíbrio entre os elementos da comunidade relativamente aos parâmetros de grau interno e externo e, assim, permita uma intervenção e um acesso à informação e recursos o mais igualitária possível para todos os elementos da comunidade.

Nas três próximas secções será definido o problema PCW em estudo com base numa contextualização (em 4.3 e 4.5) e apresentada uma revisão bibliográfica relativa a modelos/problemas de optimização alternativos (em 4.4).

4.3 Considerações preliminares

O problema que foi designado abreviadamente por PCW é estabelecido no contexto de uma comunidade *Web* definida como uma colecção de domínios ou subdomínios *Web* com as hiperligações entre eles. Por domínio na *Web* entende-se, neste caso, um «grupo de computadores e dispositivos numa rede administrados como uma unidade com regras e procedimentos comuns», em <http://www.webopedia.com/TERM/d/domain.html> na *Internet*, os domínios estão associados a um endereço IP e a um DNS (*Domain Name System*). Por exemplo, <http://www.ox.ac.uk/> é um domínio; <http://www.history.ox.ac.uk/> e <http://www.prm.ox.ac.uk/> são subdomínios e «.uk» e «.ac.uk» constituem, respectivamente, um domínio e um subdomínio de nível de topo. Nos domínios ou subdomínios podem ser identificadas directorias, subdirectorias, etc. Por exemplo, <http://www.ox.ac.uk/research/> representa uma directoria do domínio <http://www.ox.ac.uk/>. Num nível mais granular encontramos as páginas *Web*, documentos que podem conter textos, vídeos, imagens ou outros objectos como, ficheiros do tipo pdf, gif, doc, etc., pertencentes a um domínio específico. Por exemplo, <http://www.history.ox.ac.uk/prosundergrad/index.htm> é uma página *Web* do domínio <http://www.ox.ac.uk/>.

A figura 4.3 exemplifica a relação entre alguns elementos da *Web*: páginas, subdomínios, domínios e domínios de nível topo (Björneborg (2004)).

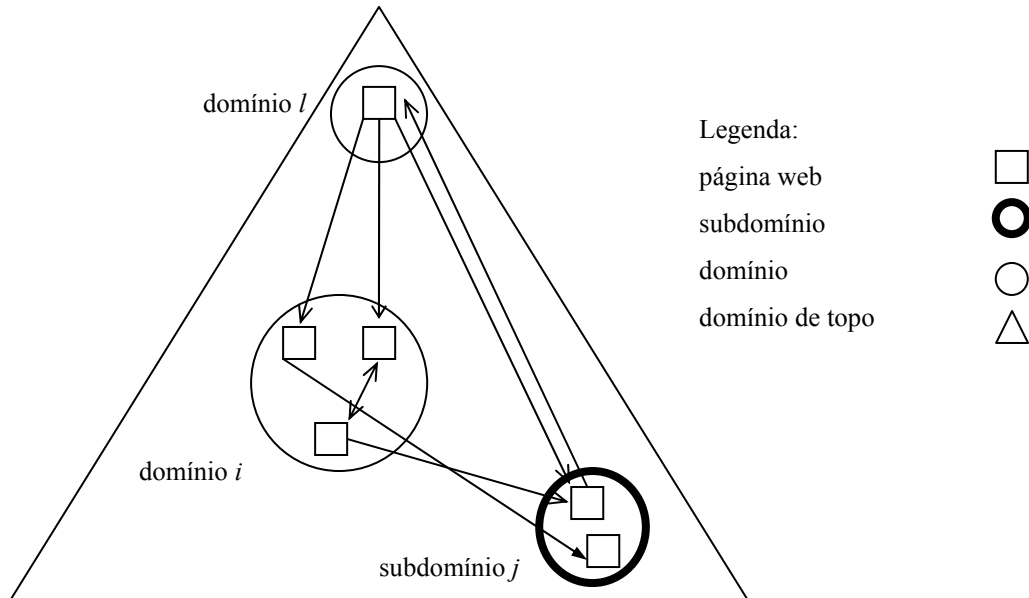


Figura 4.3 Representação de relações na *Web*, adaptado de Björneborg (2004)

As páginas *Web* encontram-se relacionadas através de hiperligações. Uma hiperligação é uma referência (numa palavra, numa imagem, etc.) existente numa página *Web* que aponta para a mesma página ou para outras páginas do mesmo domínio ou mesmo para páginas de outros domínios. Para uma referência histórica ao termo hiperligação, pode ser consultado Nelson (1965). Sendo assim, há uma ligação de um domínio (ou subdomínio) i para um domínio (ou subdomínio) j quando existe pelo menos uma hiperligação de uma página *Web* em i para uma página *Web* em j . Na figura 4.3 aparece uma ligação de i para j , mas nenhuma ligação de j para i . Sem perda de generalidade, de aqui para diante será utilizado unicamente o termo domínio quer seja relativo a um domínio ou um subdomínio, será usado o termo hiperligação para ligações entre páginas e, finalmente, o termo ligação para as ligações entre domínios.

Associado a uma ligação entre domínios pode definir-se um parâmetro, designado por intensidade, igual ao número total de hiperligações que ligam entre si páginas de dois domínios distintos. Por exemplo, a intensidade da ligação de i para j na figura 4.3 é 2 e de

l para j é 1. Este parâmetro é importante pelo facto de indicar o número total de hiperligações entre páginas de dois domínios representando, de algum modo, a intensidade de relacionamento de ambos. Da mesma forma, pode-se introduzir a debilidade da hiperligação como o inverso da intensidade. O parâmetro debilidade está pois associado à ligação entre domínios.

Dada uma comunidade *Web*, tem-se como objectivo reconfigurar a comunidade de modo a criar grupos, mantendo o mesmo conjunto de domínios mas aumentando o conjunto inicial de hiperligações, de modo a reduzir o desequilíbrio inicial relativo ao grau das ligações dentro desta estrutura e a providenciar uma distribuição de fluxos de informação e recursos mais balanceada. De acordo com Shirky (2003), o objectivo passa por conseguir proporcionar que todos os elementos possam cada vez mais intervir de igual modo na comunidade.

É óbvio que o balanceamento de uma comunidade *Web* apresentado deste modo manifesta um carácter muito geral sendo inúmeras as abordagens e as direcções a seguir. Para modelar o Problema de Balanceamento de uma Comunidade *Web* foi escolhido o conceito de cobertura por *hubs*. De facto, acredita-se que o objectivo acima definido poderá ser atingido criando uma estrutura *hub-and-spoke* onde os *hubs* são domínios que agregam um conjunto de outros domínios ligados a eles através de hiperligações entre as páginas.

O critério de cobertura está relacionado com um limite máximo imposto ao valor da debilidade na ligação entre quaisquer dois pares de nodos origem/destino, via *hubs*. Na minimização dos custos entra-se não só em linha de conta com os custos relacionados com o número de *hubs* escolhidos, como também com a criação de novas ligações. Além disso, existe ainda um segundo objectivo que passa por balancear a estrutura criada. Este equilíbrio é conseguido construindo *clusters* de acordo com determinados parâmetros dos domínios, nomeadamente, grau interno e grau externo. Outros parâmetros poderiam ter sido aplicados como, por exemplo, o *flow betweenness*, *page rank* e o coeficiente de *clustering* (para mais detalhe consultar Wasserman e Faust (1994)).

A escolha deste modelo garante que qualquer domínio, independentemente da sua conectividade ou centralidade iniciais, tenha a capacidade de difundir e partilhar, a todos os restantes elementos da rede, fluxos de informação e recursos e, portanto, que a sua capacidade de intervenção na rede seja semelhante à dos restantes elementos da comunidade. Também pelo facto de se impor que todos os fluxos sejam sempre redireccionados via *hubs* se promove essa partilha.

No entanto, outras formulações e modelos poderiam ser explorados para abordar este problema, além do modelo de localização de *hubs*, abrindo portas a futuros trabalhos.

4.4 Revisão bibliográfica

Nesta secção é feita uma revisão bibliográfica, bem como apresentado um conjunto de modelos de optimização, alternativos ao estudado nesta dissertação, que vão desde os problemas de agrupamento, desenho de redes por dois níveis, aos problemas de cobertura e partição.

4.4.1 Problema de agrupamento

A primeira alternativa poderá passar por uma formulação com base em agrupamento. O problema de agrupamento é bastante antigo em IO e amplamente aplicado em inúmeros domínios: em biologia (classificação de cetáceos em Gröstchell e Wakabayashi, como é referido em Everitt et al. (2001)), ou em informática (*data mining* (Berkhin (2002)), *image segmentation* (Makrogiannis et al. (2005)), ou agrupamento de documentos da *Web* referido em Zamir e Etzioni (1998)). Noutro caso, Johnson et al. (1993) aplicaram o agrupamento na construção de um compilador definindo o problema como uma partição dos nodos com uma restrição na dimensão ou peso dos grupos.

De uma maneira geral, o problema de agrupamento consiste em agrupar um conjunto de unidades em grupos homogéneos de tal modo que as unidades do mesmo grupo sejam semelhantes entre si e unidades de grupos diferentes sejam dissemelhantes entre si. Everitt et al. (2001) relaciona esta particularidade com a existência de uma grande coesão

interna - homogeneidade - e de um grande isolamento do exterior - separação. Têm surgido inúmeras definições para um grupo (*cluster*), desde subconjunto, partição, empacotamento, cobertura, partição estruturada ou *block models* (para mais informações consultar Hansen e Jaumard (1997) e Mirkin e Muchnik (1998)). Ultimamente, tem-se recorrido também a alguns «enfraquecimentos» nas definições, utilizando conceitos como hierarquias de empacotamento, hierarquias fracas, pirâmides, *fuzzy clustering*, em que as unidades não são afectas a um grupo em particular mas possuem uma espécie de função de pertença indicando a «força» de pertença a um ou vários grupos. Para mais informação sobre este assunto consultar Aude et al. (1999), Bertrand (1995), Bezdek (1981), Gordon, (1999), Rousseeuw (1995) ou Zhang et al. (1998). Aliás, de acordo com Barthélemy e Brucker (2001), nos últimos cinquenta anos têm sido desenvolvidos vários modelos que permitem a intersecção de grupos e estes autores acrescentam mais algumas definições às referidas, por exemplo, de pseudo-hierarquias, quasi-hierarquias e *k-weak* hierarquias.

Em função do tipo de grupo surgem vários modelos para a formulação do problema de agrupamento tais como, modelos de cobertura e partição, de localização e empacotamento, de clique máxima. Nos próximos parágrafos será feita uma resumida revisão bibliográfica à utilização dos diferentes modelos no problema de agrupamento.

Mehrotra e Trick (1998) formulam-no em programação binária equivalente ao problema de partição em cliques num grafo completo. Neste caso, o problema de agrupamento define-se como uma partição de nodos em grupos de modo que a soma dos pesos das arestas nos grupos seja maximizada. Hansen e Jaumard (1997) estudam uma pequena variante do modelo de *minimum sum-of-cliques partitioning* cujo objectivo é procurar uma partição consensual de entre um conjunto de partições possíveis. Uma partição consensual é aquela à qual corresponde uma distância total mínima relativamente às outras partições. Define-se a distância entre as partições pelo número de pares de entidades no mesmo grupo numa partição e em diferentes grupos noutra partição. As dissemelhanças/semelhanças podem, por isso, ser negativas ou positivas, não sendo fixado à partida o número de grupos formado.

Por outro lado, Arthanary e Dodge (1980) abordam o problema da p -mediana como um caso particular do problema de agrupamento em que o objectivo será encontrar uma partição do conjunto N em p grupos de modo que a soma de distâncias à mediana seja minimizada. Este problema é também modelado em programação binária mista. Em Caldas (1991) é referido que em Mulvey e Crowder, o objectivo passa por encontrar p grupos homogéneos que constituem uma partição de N tendo em conta que a afectação de um elemento a um determinado grupo é feita minimizando a soma das distâncias entre os objectos à mediana do grupo a que pertence.

Para o mesmo problema mas agora com restrições de capacidade nos grupos, Baldacci et al. (2002) e Mehrotra e Trick (1998) apresentam uma formulação segundo o modelo da p -mediana com restrições de capacidade do tipo saco-mochila. Por sua vez, Hansen e Mladenóvic (2001) formulam o problema de *minimum sum-of-squares clustering* com o qual se pretende encontrar uma partição do conjunto N em p conjuntos disjuntos tal que a soma dos quadrados das distâncias de cada objecto ao centróide do seu grupo seja mínima.

Como se pode observar, são muitas e diversificadas as formulações adoptadas para os problemas de agrupamento e, nalguns casos, os critérios utilizados expressam a homogeneidade dentro dos grupos ou, então, a separação entre os grupos. São raros os critérios que conseguem traduzir em simultâneo estas duas componentes. Os problemas de agrupamento definidos acima generalizam a definição do problema de agrupamento envolvendo alguns problemas combinatórios NP-difíceis.

O Problema de Balanceamento de uma Comunidade *Web* pode também ser encarado como um problema de agrupamento; as dificuldades residem na pesquisa de critérios de homogeneidade dentro dos *clusters* ou na separação entre eles, pesquisa que vá ao encontro do objectivo central deste problema - encontrar *clusters* balanceados. Por outro lado, as restrições que este problema enfrenta na formação de grupos estão mais relacionadas com a contiguidade/conectividade do que as já referidas de capacidades.

4.4.2 Problema de desenho de redes com dois níveis

Uma segunda alternativa de modelação corresponde ao problema de desenho de redes com dois níveis. A construção de uma rede de dois níveis foi inicialmente introduzida por Current et al. (1985) e pode ser encarada como uma extensão do problema da árvore geradora mínima, embora com dois tipos diferentes de nodos e arcos.

Modelos de redes de dois níveis surgem em diferentes áreas, nomeadamente, em problemas de localização (Aardal et al. (1996) e Barros et al. (1998)), em problemas de telecomunicações e desenho de rotas (Chamberland et al. (2000) e Polak e Ahuja (1995), entre outros).

É de realçar o problema estudado em Park et al. (2000) que apresenta algumas semelhanças com o PCW. Existem dois níveis na hierarquia da rede e os autores abordaram-no recorrendo a um problema de agrupamento de nodos para os dois níveis da rede minimizando o tráfego entre os grupos. Neste problema, interessante pois combina o desenho de uma rede com dois níveis com o agrupamento de nodos, existem ainda restrições de conectividade, compatibilidade e de manutenção dos *hubs*.

Neste caso poderíamos encarar num nível de topo, correspondente aos elementos da rede com maior grau de conectividade (*hubs*, autoridades, ou ambos), e um nível mais baixo correspondente aos restantes nodos. De qualquer modo, surgem dificuldades na adopção deste modelo para o PCW pois há que ter em conta a rede do PCW já existente, isto é, não se está a construir de raiz, e, além disso, pretende-se contrariar o efeito de desequilíbrio face à existência dos *hubs* e das autoridades, o que com este modelo provavelmente seria difícil de contrariar.

4.4.3 Modelo de cobertura por *hubs*

O problema de localização de *hubs* tem, de um modo geral, como objectivo a construção de uma rede do tipo *hub-and-spoke* (ligações entre os *hubs* e os restantes nodos) de modo a minimizar os custos de transporte de fluxos ao longo da rede. Contrariamente ao que acontece na maioria dos problemas simples de localização de instalações, a procura é especificada em termos de fluxo entre cada par de nodos origem/destino, sendo esses fluxos, na maioria das vezes, orientados via *hubs*.

Este problema é aplicado em várias situações, nomeadamente, redes de controlo de tráfego aéreo, redes de distribuição de correio e telecomunicações com o objectivo de evitar que os nodos de uma rede troquem entre si directamente determinado tipo tráfego utilizando para isso intermediários, *hubs* (<http://www.cmis.csiro.au/or/hubLocation/>). O sucesso está dependente do custo de distribuição do tráfego, oportunidade e segurança (Marianov et al. (1999)).

Os problemas de localização discreta de hubs envolvem um conjunto conexo de instalações, designadas por *hubs*, e que servem como locais de transbordo entre origens e destinos de fluxos, existindo um efeito de economia de escala nas ligações entre *hubs* (para mais referências consultar Alumur e Kara (2007), Campbell (1996) e O'Kelly(1992)).

Um dos primeiros modelos construído para o problema de localização de *hubs*, de que se tem conhecimento, foi apresentado por O'Kelly (1986). Trata-se de um modelo de programação inteira quadrática com uma função objectivo não convexa. A versão linearizada deste foi primeiro apresentada por Campbell (1996). Têm sido referidas inúmeras variantes do problema de localização de *hubs*, tais como problema de afectação múltipla com restrições de capacidade ou de localização de *hubs* com restrições de fluxo, sendo a variante mais frequente o problema *uncapacitated single allocation p-hub median*. Nesta variante os p *hubs* têm de ser localizados entre os n nodos da rede e cada nodo deverá ser afecto a exactamente um *hub* (afectação singular), o objectivo é minimizar o custo total de transporte. Ernst e Krishnamoorthy (1996) definem este problema da seguinte forma: dado p , número de *hubs* a localizar na rede, este problema

tem por objectivo encontrar localizações óptimas para os *hubs*, bem como a afectação dos restantes nodos aos *hubs*. Cada nodo, não *hub*, é afecto a exactamente um *hub* de tal modo que o custo total seja minimizado satisfazendo as restrições de fluxo. Em Klincewicz (1996) é apresentado o problema de localização de *hubs* sem capacidades, com um custo fixo para a fixação de um *hub* mas sem restrição no número de *hubs*.

Casos que têm sido menos estudados são os problemas *p-hub center* e o problema de cobertura por *hubs* (PCH), sugeridos por Campbell em 1994. No problema *p-hub center* reconhecem-se três variantes respeitantes aos critérios de escolha dos *hubs*: a primeira consiste em determinar um conjunto de *hubs* tal que o custo máximo de transporte entre cada par origem/destino seja minimizado; a segunda passa por determinar o conjunto de *hubs* que minimiza o custo máximo de transporte numa única ligação; e a terceira variante exige encontrar o conjunto de *hubs* que minimiza o custo máximo da ligação entre um *hub* e um nodo origem/destino.

A modelação do PCW na perspectiva exclusiva do objectivo de minimização de custos é de algum modo semelhante ao problema de cobertura por *hubs* (Campbell (1994), Ernst et. al. (2005), Kara e Tansel (2003) e Wagner (2004)) pertencendo, por isso, à classe de problemas de localização discreta de *hubs*, introduzidos inicialmente por Campbell (1994).

Kara e Tansel (2003) referem que a principal diferença entre os diversos problemas de localização de *hubs* reside no critério para escolher os *hubs* e na afectação dos nodos. O problema de cobertura por *hubs* usual é um problema de localização de *hubs* em que o número de *hubs* tem que ser minimizado, respeitando o limite máximo de tempo entre dois quaisquer nodos - também designado por critério de cobertura.

Após esta revisão bibliográfica e a contextualização do PCW, que se segue, este será apresentado como um modelo de grafos na secção 4.6.

4.5 Apresentação do PCW

Começa-se por notar que no PCW a minimização do número de *hubs* está relacionada com o facto de através deste modelo o balanceamento não ser completo pois se admitem nodos controladores (*hubs*) que acabam por ter uma forma de intervenção na comunidade *Web* superior aos outros, sendo, de qualquer modo, este efeito contrabalançado pelo facto de se reconstruir a rede para que todos os restantes nodos fiquem o mais possível em igualdade de circunstâncias. Os *hubs* funcionam como centros de consolidação e disseminação, de modo a receber, processar e distribuir fluxos de informação ou recursos. Consequentemente, estes controladores ficarão todos ligados entre si e a ligação de um domínio *spoke i* para um domínio *spoke j* é sempre feita via um ou um par de *hubs*, aos quais os nodos *spoke* estão afectos. Cada controlador tem um custo fixo, associado à sua manutenção e procedimentos de segurança. Este custo é considerado, neste momento, idêntico para todos os domínios.

O número de hiperligações extra que tenham que ser criadas para atingir esta estrutura também deve ser minimizado pois a criação de novas ligações acarreta um custo. Este custo resulta do facto de estas ligações serem ligações artificiais, representando novas hiperligações a criar dentro da comunidade, nem sempre bem aceites e, por vezes, difíceis de implementar e manter. Por exemplo, se um domínio não está inicialmente ligado ao domínio *hub*, na nova comunidade reconfigurada, uma ou duas novas hiperligações são criadas para permitir que o primeiro domínio seja um *spoke* do *hub*. Estas novas ligações serão construídas com uma debilidade previamente definida e conhece-se o respectivo custo. Cada domínio *spoke* está associado apenas a um *hub* que terá de controlar toda a informação que entra e sai. O conjunto formado pelo controlador e pelos nodos *spoke* associados designa-se por *cluster* ou grupo.

Note-se que debilidade das ligações entre os *hubs* vem reduzida por um factor α , não negativo com ($\alpha \leq 1$) para entrar em linha de conta com a centralidade e conectividade dos *hubs*, bem como com as funções que vão ter na comunidade.

De qualquer modo, a debilidade total de ligação entre um par de domínios origem/destino ligados via *hubs* é sempre restringida para um limite de debilidade máxima γ . Com esta restrição pretende-se garantir um mínimo de fiabilidade nas ligações dentro de toda a comunidade. Por exemplo, na figura 4.4 a ligação entre i e j que se supõem afectos aos *hubs* k e m , respectivamente, deverá verificar esta restrição. Se a debilidade da ligação do *spoke* i para o *hub* k for alta terá que ser compensada por uma debilidade de ligação do *hub* k para o *hub* m e depois pela debilidade de ligação do *hub* m para o *spoke* j , promovendo, por isso, uma garantia mínima no valor da debilidade total da ligação entre os *spokes* i e j .

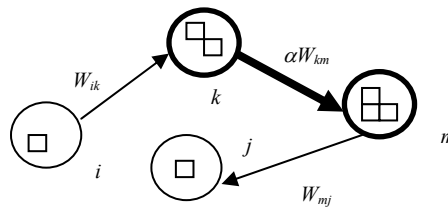


Figura 4.4 Debilidade total da ligação entre os nodos *spoke* i e j

Tal como se referiu no início desta secção, com o PCW pretende-se atingir dois objectivos:

- objectivo 1 - minimização de f_1 função que dá o custo de construção da estrutura, assumindo-se o custo dado pela soma do número *hubs* com o número de novos arcos necessários para reconfigurar a rede, neste caso considerou-se os custos quer dos *hubs* quer dos novos arcos iguais;
- objectivo 2 - optimização do balanceamento dos *clusters* que se considera conseguida pela minimização de f_2 , função definida pela soma do valor máximo do grau interno com o valor máximo do grau externo entre todos os *clusters*.

A minimização dos custos associados à utilização de *hubs* e à criação de novos arcos induz soluções com poucos *hubs* e, conseqüentemente, também com poucos novos arcos, logo com um número reduzido de *clusters* e por isso com elevado desequilíbrio entre os *clusters* a nível do grau total. Por outro lado, a minimização do grau interno e do grau externo total entre os vários *clusters* constrói soluções com um número elevado de

4. O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

clusters logo com muitos *hubs* com a criação de muitos arcos, conseqüentemente, com elevados custos. Para resolver este problema é por isso necessário obter uma solução de compromisso entre estes dois objectivos conflituosos.

Neste contexto, resolver o problema PCW passa por seleccionar, de entre todos os domínios da comunidade *Web*, aqueles que irão funcionar como controladores (*hubs*) e afectar os restantes domínios (*spoke*) aos *hubs*. Isto pode levar à construção de novas hiperligações entre páginas dos domínios. Mais ainda, a estrutura da comunidade *Web* resultante deverá ser constituída por um conjunto de *clusters* balanceados no que respeita aos graus interno e externo iniciais.

Em resumo, para apoiar a tarefa de reconfigurar uma comunidade *Web* surge o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web* exigindo uma estrutura *hub-and-spoke* que assegura um limite no valor da debilidade de todas as ligações entre dois quaisquer domínios origem/destino via *hub* tendo em conta, por um lado, a minimização dos custos associados aos *hubs* e às novas hiperligações e, por outro lado, a minimização do desequilíbrio entre os *clusters*, objectivos estes naturalmente conflituosos.

No entanto, e apesar do PCW ser de algum modo um problema de tipo localização de *hubs*, o parâmetro debilidade do critério de cobertura não verifica a desigualdade triangular pois não é uma métrica. Sendo assim, as linearizações propostas e utilizadas com sucesso para o problema de cobertura por *hubs* (ver artigo de Kara e Tansel (2003)) não podem ser estendidas ao PCW. Outra diferença para esse modelo reside no facto do PCW ser suportado por uma rede pré-existente que vai ser reconstruída de acordo com características específicas tendo em conta a minimização de dois objectivos contraditórios.

O problema de cobertura por *hubs* provou-se ser NP-difícil conforme referem Kara e Tansel (2003) e o mesmo se passa com o PCW, como se poderá constatar na secção 5.3.

Na próxima secção será apresentado um modelo de optimização em grafos para o PCW.

4.6 Modelo de grafos para o PCW

4. O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

Seja $G = (N, A)$ um grafo orientado e conexo representativo de uma comunidade *Web*; $N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de nodos que representam os domínios da comunidade *Web* e A o conjunto de arcos de G associados às ligações entre os domínios. A matriz $[A_{ij}]$ $\forall i, j \in N$ é a matriz de adjacências, onde $A_{ij} = 1$ se existe uma ligação entre o domínio i e o domínio j na comunidade *Web* original e $A_{ij} = 0$, caso contrário.

Associado a cada nodo $i \in N$ assumem-se conhecidos dois parâmetros, já definidos na secção 4.2, relacionados com as ligações dos nodos no grafo G : o grau interno, Ind_i , e o grau externo, Out_i . O parâmetro W_{ij} está associado a cada arco $(i, j) \in A$ e representa a debilidade da ligação, de i para j na rede original, $1 \geq W_{ij} > 0$. A debilidade, embora seja um parâmetro inicialmente definido apenas para os arcos de G , por motivos de simplificação, foi generalizada para todo $(i, j) \in N \times N$ fixando-se o valor de $W_{ij} = \varphi$, com $\varphi > 1$ para $\forall (i, j) \notin A$, isto é, para os arcos artificiais, com $i \neq j$ e $W_{ij} = 0$ no caso de $i = j$. Seja α o factor de desconto da debilidade nas ligações entre os *hubs* e seja γ o limite superior imposto à soma das debilidades dos arcos utilizados para ligar qualquer par de nodos (i, j) por via dos *hubs* k e m , assim a restrição de debilidade impõe-se pela desigualdade $W_{ik} + \alpha W_{km} + W_{jm} \leq \gamma$. O valor escolhido para este parâmetro γ é baseado no facto de se considerar que a ligação entre dois quaisquer nodos do grafo nunca poderá ser feita usando exclusivamente arcos artificiais, logo $\gamma < 2\varphi + \alpha\varphi$, sendo menos restritiva em grafos de maior dimensão.

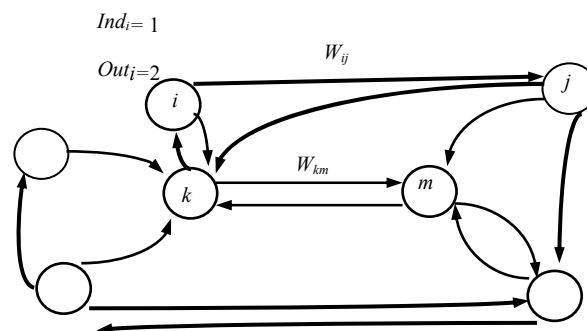


Figura 4.5 Grafo representativo de uma comunidade *Web* inicial

Pretende-se determinar $H \subset N$, o conjunto de nodos que especificam a localização dos *hubs*, e $C(h) \subset N$ o conjunto constituído pelos nodos afectos a cada $h \in H$, incluindo o próprio *hub* h , designado por *cluster* de h . As afectações podem ser realizadas servindo-se dos arcos já existentes em A ou, no caso de serem inexistentes, criando novos arcos, os quais juntamente com os iniciais caracterizam o conjunto A' . As afectações deverão obedecer à restrição de debilidade imposta à ligação entre dois quaisquer nodos de N , isto é cumprindo o limite total máximo γ ($0 \leq \gamma \leq 1$), e simultaneamente, minimizando o número de novos arcos e hubs, bem como o valor máximo total de *indegree* e *outdegree* entre todos os *clusters* construídos. O valor da debilidade é dado pela soma da debilidade dos arcos utilizados na ligação de dois nodos, via um ou dois *hubs* e utilizando o factor de desconto α ($0 \leq \alpha \leq 1$) nas ligações entre *hubs*.

Pelo facto do grafo inicial, representativo da comunidade *Web*, ser orientado, o grafo *hub-and-spoke* reconstruído deverá sê-lo também, sendo por isso necessário, na afectação de um nodo *spoke* a um *hub* exigir que existam sempre duas ligações correspondentes aos dois sentidos nodo *spoke* \rightarrow *hub*, *hub* \rightarrow nodo *spoke* e que o grafo seja completo nos dois sentidos relativamente ao conjunto dos *hubs* $H \subset N$.

O diagrama apresentado na figura 4.6 mostra uma pequena comunidade *Web* reconfigurada com dois *clusters* seguindo uma estrutura *hub-and-spoke*, onde os hubs são representados por círculos pretos mais carregados, os novos arcos por setas a tracejado e os arcos pré-existentes por setas a preto.

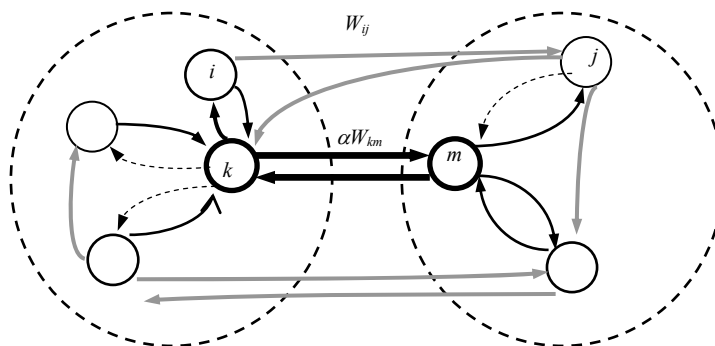


Figura 4.6 Grafo representativo de uma possível reconfiguração do grafo em 4.5

Em suma, resolver o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web* consiste em construir parcialmente um novo grafo $G' = (N, A')$ a partir de G , onde $A' \subset (N \times N)$ é o conjunto constituído pelos arcos iniciais mais os novos arcos necessários para estabelecer ligações nos dois sentidos entre os nodos *spokes* e os seus *hubs*, bem como entre todos os *hubs*. Sendo assim, G' é um grafo orientado com uma estrutura *hub-and-spoke*, com *clusters* disjuntos, balanceados através da minimização dos valores máximos dos parâmetros de grau entre os vários *clusters*, admitindo-se a reconstrução a um custo mínimo e respeitando a restrição de debilidade.

4.7 Aplicações para o PCW

São diversas as aplicações dos resultados desta investigação, por exemplo, nos domínios da difusão alargada de informação, na distribuição de recursos de diversa natureza entre elementos de uma determinada comunidade *Web* na implementação de políticas de distribuição de recursos e, particularmente, distribuição de informação de suporte ao planeamento e organização de recursos electrónicos na *Web*.

Outro domínio distinto dos acima mencionados é a preservação de recursos electrónicos. Neste o PCW poderá também dar um contributo na recuperação de informação ou salvaguarda em casos de catástrofe. Esta aplicação é evidenciada pela natureza extremamente dinâmica que os sítios e recursos na *Web* apresentam, um exemplo disso é o facto de encontrarmos com frequência páginas *Web* que deixam de estar disponíveis. Assim, um problema relevante consiste em agrupar os elementos de uma comunidade *Web* de modo a contrariar o efeito da organização não equilibrada impondo controladores (*hubs*) que agreguem a informação de modo a preservá-la e a distribuí-la.

Esta preocupação é também partilhada por Kleinberg et al. (1999) onde é referido que um trabalho a desenvolver no futuro será a organização das comunidades *Web* descobertas através de processos de pesquisa na *Internet*. Kumar et al. (1999) reforçam esta ideia indicando que algumas das questões em aberto continuam a ser a extracção automática de informação semântica e a organização em comunidades de modo a conseguir uma pesquisa útil e eficiente na *Web*.

De seguida, serão detalhadas, a título de exemplo, duas situações em que o PCW poderá vir a ser aplicado.

Consideremos em primeiro lugar a necessidade de distribuir de forma o mais homogénea possível uma determinada informação numa dada região da *Web*. Partindo-se do princípio que todas as entidades deverão ser receptoras da informação, torna-se crítico garantir o acesso equitativo de todos à informação, ou seja, que a distância ao site onde essa informação reside em termos de número de hiperligações não seja muito variável. Uma metodologia que apoie a reconfiguração da estrutura original da comunidade *Web* facilitará o processo de acesso à informação na *Web*, nestes casos.

Vejamos um segundo exemplo agora relacionado com o caso da preservação da *Web*. Por natureza, a *Web* e as comunidades da *Web* são extremamente dinâmicas e o mesmo é válido para a informação armazenada e distribuída na *Web*. É extremamente provável que uma dada informação na *Web* em dado momento, passe a não estar disponível permanentemente no futuro ou venha a sofrer modificações não controláveis noutro momento. Assim, a reorganização de partes da *Web* que suportem o armazenamento de médio e longo prazo de largas porções da *Web*, constitui já uma necessidade premente para o futuro da própria *Web*. A uma escala mais pequena, poderá ser considerado como objectivo que porções significativas e relevantes de determinados conteúdos estejam distribuídos por um conjunto de servidores de *backup* da *Web*.

4.8 Caracterização de comunidades *Web* em estudo

Os testes computacionais realizados no âmbito desta dissertação foram baseados no conceito de comunidade *Web* epistemológica ou conceptual. Como já foi referido na secção 3.4.2 existem várias metodologias para encontrar comunidades *Web*. Em relação a comunidades portuguesas trabalhou-se com a comunidade de Matemática e Educação Matemática (abreviado para Mat) e a nível internacional estudaram-se as comunidades de *Climate Change* (abreviado para Clim), *Poverty* (abreviado para Pov) e *HIV/AIDS*

(abreviado para Hiv). Cinco outras comunidades foram geradas para testes computacionais, recorrendo a um *software* específico.

A comunidade *Web* em Matemática e Educação Matemática foi obtida de acordo com o procedimento seguinte:

- (1) pesquisa por palavra-chave, «matemática», «educação» e «ensino», com o *software* *Web Data Extractor* (WDE) 4.3 usando dois motores de pesquisa, o *Google*¹ e o *Altavista*², e tomando como restrição a selecção de entidades pertencentes ao domínio de nível topo «*.pt»;
- (2) selecção de um subconjunto, a partir do obtido inicialmente, por conhecimento prévio;
- (3) *crawling* da *Web* a partir de cada entidade seleccionada anteriormente, utilizando o *software* *Galilei* de Caldas (2005) e construção de uma base de dados de hiperligações entre as páginas de cada domínio seleccionado, excluindo do conjunto as entidades que não tinham nenhuma hiperligação com as restantes;
- (4) análise das hiperligações das páginas entre os vários domínios de modo a calcular a intensidade de cada ligação entre domínios da comunidade.

Foram assim preparadas três instâncias desta comunidade, designadas por Mat20, Mat30 e Mat53, com 20, 30 e 53 domínios, respectivamente. A tabela 4.1 e o diagrama da figura 4.7 mostram as entidades e as ligações da instância Mat20.

¹ O motor de pesquisa Google estava disponível em <http://www.google.com>, na data de Junho de 2005.

² O motor de pesquisa Altavista estava disponível em <http://www.altavista.com>, na data de Junho de 2005.

4. O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

URL	Entidade
www.apm.pt	Associação de Professores de Matemática
www.educ.fc.ul.pt	Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
www.esec.ipcb.pt	Escola Superior de Educação de Castelo Branco
www.eselx.ipl.pt	Escola Superior de Educação de Lisboa
www.eses.pt	Escola Superior de Educação de Santarém
www.esev.ipv.pt	Escola Superior de Educação de Viseu
www.esrp.pt	Escola Secundária Raúl Proença
www.fpce.uc.pt	Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra
www.fpce.ul.pt	Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Lisboa
www.iec.uminho	Instituto de Estudos da Criança-Universidade do Minho
www.iie.min-edu.pt	Instituto de Inovação Educacional do Ministério da Educação
www.math.ist.utl.pt	Departamento de Matemática do IST da Universidade Técnica de Lisboa
www.math.uma.pt	Departamento de Matemática da Universidade da Madeira
www.math.uminho.pt	Departamento de Matemática da Universidade do Minho
www.mat.ua.pt	Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
www.mat.uc.pt	Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
www.minerva.uevora.pt	Núcleo de Minerva da Univerdade de Évora
www.netprof.pt	Clube dos Professores Portugueses na <i>Internet</i>
www.rede-nonio.min-edu.pt	Projecto Nónio do Ministério da Educação
www.spm.pt	Sociedade Portuguesa de Matemática

Tabela 4.1 Entidades da instância Mat20

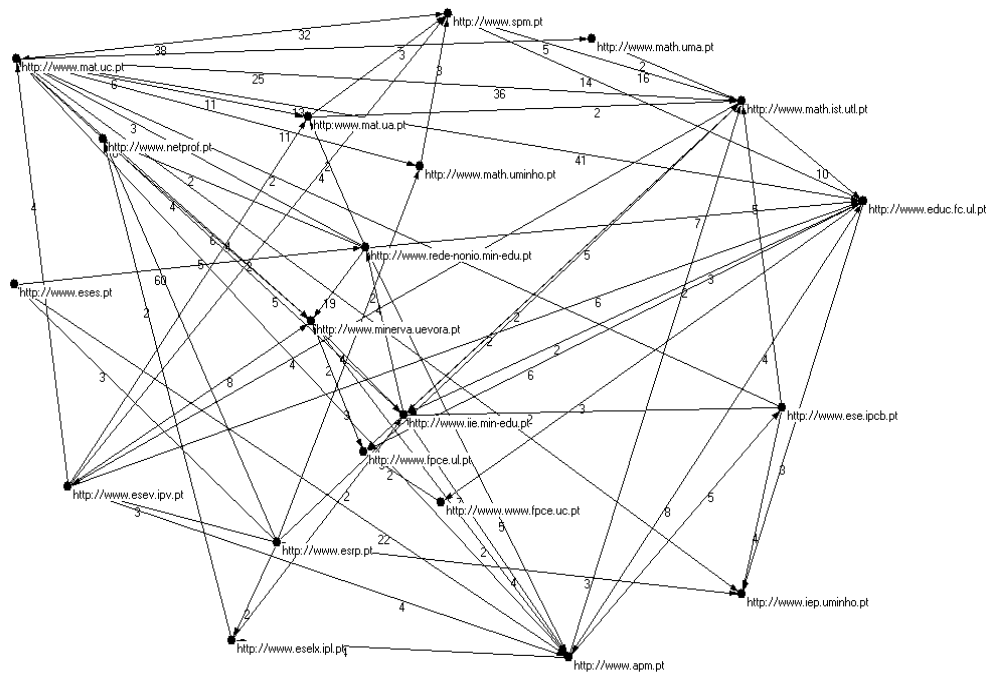


Figura 4.7 Representação gráfica de Mat20

4. O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

As comunidades *Web* de *Climate Change* (Clim), *Poverty* (Pov) e *HIV/AIDS* (Hiv) foram obtidas a partir de um projecto Internacional - *World Wide Web of Science* desenvolvido pelo *Oxford Internet Institute* (para mais detalhes consultar Caldas et al. (2006)). Neste projecto de doutoramento recorreu-se à mesma metodologia acima descrita para obtenção destas comunidades epistémicas.

O *software* de análise de redes sociais *Pajek* (Batagelj e Mrvar (1998)) foi usado na simulação de cinco grafos representativos de hipotéticas comunidades *Web*. Este *software* permite gerar de acordo com vários modelos. Para este caso foi escolhida um grafo orientado segundo o modelo Erdős-Rényi com um número de nodos fixo à partida e com um grau médio fixo, de acordo com o que se pode observar na tabela 4.2.

Comunidade <i>Web</i>	Número de nodos	grau médio
Rnd20	20	10
Rnd30	30	10
Rnd40	40	8
Rnd50	50	8
Rnd60	60	8
Rnd150	150	6

Tabela 4.2 Comunidades geradas utilizando o *Pajek*

Depois de cada comunidade ter sido gerada recorreu-se à função *random* do compilador *Borland C* para gerar números aleatórios entre 1 e 5 de modo a fazer corresponder um desses valores à intensidade de cada arco obtido inicialmente pelo *Pajek*.

A tabela 4.3 fornece informação sobre algumas características das comunidades *Web* aqui apresentadas.

comunidade <i>Web</i>	número de domínios	número de arcos	grau médio	densidade
Mat20	20	74	3.7	19.5 %
Mat30	30	116	3.9	13.3 %
Mat53	53	292	5.5	10.6 %
Clim	68	81	1.2	1.8%
Pov	59	84	1.4	2.5 %
Hiv	55	57	1.0	1.9 %
Rnd20	20	87	4.4	22.9%
Rnd30	30	179	6	20.6%
Rnd40	40	117	2.9	7.5%
Rnd50	50	185	3.7	7.6%
Rnd60	50	210	4.2	8.6%
Rnd150	150	398	2.7	1.8%

Tabela 4.3 Características das comunidades *Web*

Como podemos observar na tabela 4.3 uma característica comum a estas comunidades *Web* reside no facto de todas serem relativamente esparsas. A densidade varia entre o valor máximo de 22.9%, no caso de Rnd20, e mínimo de 1.8%, no caso de Rnd150 e Clim.

4.9 Conclusões

Acredita-se que o objectivo proposto de reconfiguração de uma comunidade *Web* poderá ser atingido recriando a comunidade segundo uma estrutura *hub-and-spoke* que garanta a qualquer domínio, independentemente da sua conectividade ou centralidade iniciais, a capacidade de difundir/partilhar a todos os restantes elementos da comunidade fluxos de informação e recursos, ou seja, que cada domínio tenha capacidade de intervenção na comunidade semelhante à dos restantes elementos. Para isso, foi desenvolvido um modelo de grafos muito similar ao modelo de cobertura por *hubs* (Campbell (1996)) mas com restrições de debilidade, dois objectivos conflituosos (minimização de custos e balanceamento dos *clusters*) e admitindo a possibilidade de criação de novos arcos não existentes inicialmente no grafo.

4. O Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

Ainda neste capítulo foi descrita a metodologia para criação de comunidades *Web* reais e de comunidades geradas aleatoriamente, indicando algumas das respectivas características.

De modo a clarificar aspectos do PCW, uma formulação em programação não linear inteira figura no próximo capítulo 5, seguida de formulações lineares.

Capítulo 5

Modelos de programação inteira para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

The more alternatives, the more difficult the choice

Abbe 'D'Allanival

5.1 Introdução

Neste capítulo será detalhado um modelo não linear inteiro para o PCW seguido de vários modelos lineares inteiros alternativos. Será ainda realizado um estudo da complexidade computacional do PCW.

5.2 Modelo não linear

Tendo sido já exposto no capítulo anterior o modelo de grafos para o PCW, bem como as semelhanças e diferenças com os problemas já estudados e mais próximos deste, com vista a clarificar alguns aspectos do PCW será apresentada uma formulação em programação não linear inteira, PCW-I, inspirada nos trabalhos de Kara e Tansel (2003) para o problema de cobertura por *hubs*, com base no modelo de grafo apresentado na secção 4.6. Este modelo envolve dois tipos de variáveis binárias: as primeiras, designadas

por x_{ik} para todo i e todo k , estabelecem a afectação dos nodos aos *hubs* e as segundas, relacionadas com a criação de novos arcos, são representadas por z_{ik} para todo i e todo k . Além destas, definem-se duas variáveis inteiras, s e t , que representam, respectivamente, o valor máximo de grau interno e grau externo dos *clusters* formados pela reconfiguração.

PCW-I

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

$$\text{Min } f_2 = s + t \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$(W_{ik} + \alpha W_{km} + W_{mj})x_{ik}x_{jm} \leq \gamma \quad \forall i, k, m, j \in N (i \neq j) \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Ind}_i \leq s \quad \forall k \in N \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Out}_i \leq t \quad \forall k \in N \quad (5.7)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i \neq k) \quad (5.8)$$

$$2x_{ii}x_{kk} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i < k) \quad (5.9)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \text{ com } i \neq k,$$

$$\forall i, k \in N; s, t \text{ inteiros não negativos.} \quad (5.10)$$

A variável x_{ik} é igual a 1 se o nodo i é afecto ao nodo k , caso contrário, $x_{ik} = 0$; $x_{kk} = 1$ se o nodo k foi escolhido para a localização de um *hub*, caso contrário, $x_{kk} = 0$; $z_{ik} = 1$ se o arco (i,k) é adicionado à rede inicial, caso contrário, $z_{ik} = 0$. Como já foi referido no

capítulo anterior existem dois objectivos distintos e conflituosos no PCW aqui formalizadas em (5.1) e (5.2).

As restrições (5.3) e (5.4) asseguram que a afectação de um nodo *spoke* é feita exclusivamente a um *hub* e juntamente com a minimização de f_i que um nodo i é afecto ao *hub* k se e somente se k é escolhido para localizar um *hub*.

As restrições (5.5) asseguram que a debilidade total do caminho que liga dois quaisquer nodos i e j , via os *hubs* k e m , não ultrapassa o limite inicialmente imposto e dado por γ . Este caminho aqui referido pode ser composto por três arcos, caso os nodos *spoke* estejam afectos a dois *hubs* diferentes, ver figura 4.7, por dois arcos no caso em que estão afectos ao mesmo *hub* ou, então, por um arco se forem os dois *hubs*.

Em articulação com a função objectivo (5.2), as restrições (5.6) e (5.7) são responsáveis pelo balanceamento do grau total máximo (interno e externo) entre os *clusters*. Tomemos como exemplo as restrições (5.6) respeitantes ao grau total interno nos *clusters*. O somatório representa a soma total do grau interno de todos os nodos *spoke* que constituem o *cluster* de k , caso k seja *hub*, incluindo o grau interno de k . Este somatório deverá ser inferior ou igual a um inteiro s que, de acordo com o segundo objectivo, deverá ser minimizado. Estas restrições impõe que todos os *clusters* deverão ter um grau interno total inferior ou igual a s , promovendo assim o seu balanceamento. As restrições (5.7) funcionam do mesmo modo mas agora para o grau externo.

As, restrições (5.8) e (5.9) em articulação com objectivo (5.1) impõem a existência de arcos, em ambos os sentidos, no caso da afectação de um nodo *spoke* i a um *hub* ou entre *hubs*. Se por exemplo o *spoke* i é afecto ao *hub* k existem várias possibilidades:

- (1) existem na rede inicial os arcos (i,k) e (k,i) logo $A_{ik}=A_{ki}=1$ o que implica que as variáveis z_{ik} e z_{ki} serão nulas;
- (2) existe o arco (i,k) (ou vice-versa) mas não existe o arco (k,i) , então $A_{ik}=1$ e $A_{ki}=0$, logo, como $z_{ki}(1 - A_{ki}) = 1$ implica que $z_{ki}=1$, acarretando a criação de um novo arco (k,i) ;
- (3) não existe na rede inicial nenhum arco entre i e k , o que origina que $z_{ik}=z_{ki}=1$, isto é terão que ser criados dois arcos artificiais.

Por fim, as restrições em (5.10) especificam os domínios das variáveis.

Considerando $|N| = n$, este modelo apresenta $2n^2$ variáveis binárias, duas variáveis inteiras e $n^4 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ restrições.

Como podemos observar, a formulação acima proposta, em programação inteira, além de ser bi-objectivo, não é linear devido às restrições (5.5) e (5.9).

5.3 Estudo da complexidade computacional do problema

Kara e Tansel (2003) estudaram com mais profundidade os problemas de cobertura por *hubs* apontando como principal diferença entre eles e os restantes problemas de localização de *hubs* o critério de optimização. No problema de cobertura por *hubs* usual o critério de optimização corresponde à minimização do número de *hubs* impondo um limite máximo associado ao percurso entre dois nodos (envolvendo sempre dois ou três arcos ou, dito de outra forma, um ou dois *hubs*) seja verificado - critério de cobertura.

Uma versão do problema PCW definida apenas com o primeiro objectivo será apresentada nesta secção e é, de algum modo, semelhante ao problema de cobertura por *hubs* que, como referida, pertence à classe de problemas de localização discreta de *hubs* e foi introduzido por Campbell (1994).

Ora, Kara e Tansel (2000) provaram que a versão de decisão do problema *p-hub center* é NP-completo. Mais ainda, dizem que esta versão de decisão corresponde ao PCH, logo este na sua versão de optimização é NP-difícil (Kara e Tansel (2003)).

Vejamos agora o que se passa com o PCW. Segue-se o modelo em programação inteira para o PCW numa versão mono-objectivo em que é considerada apenas a minimização da primeira função, f_1 , designado por PCW-I_{custos}:

PCW-I_{custos}

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$(W_{ik} + \alpha W_{km} + W_{mj})x_{ik}x_{jm} \leq \gamma \quad \forall i, k, m, j \in N (i \neq j) \quad (5.5)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i \neq k) \quad (5.8)$$

$$2x_{ii}x_{kk} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i < k) \quad (5.9)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \text{ com } i \neq k,$$

$$\forall i, k \in N. \quad (5.10)'$$

Será que o problema de cobertura por *hubs* (PCH) é um caso particular do PCW-I_{custos}?

Tomemos então em consideração o PCW-I_{custos} e o seu caso particular em que $G = (N, A)$ é um grafo completo. Isto implica que as desigualdades $2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}), \forall (i, k)$ e $2x_{ii}x_{kk} \leq A_{ik} + A_{ki}, \forall (i, k), i \neq k$ são sempre verificadas pois, como existem arcos $\forall (i, j) \in N, i \neq j$ então $A_{ik} = A_{ki} = 1$, logo as variáveis z_{ik} são todas nulas e podem ser fixas à partida. Em suma, as restrições (5.8) e (5.9) desaparecem pois são redundantes e as variáveis z_{ik} são eliminadas do modelo, ficando a função objectivo reduzida ao primeiro somatório. Sendo assim, esta particularização resume-se a:

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} \quad (5.1)'$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$(W_{ik} + \alpha W_{km} + W_{mj})x_{ik}x_{jm} \leq \gamma \quad \forall i, k, m, j \in N (i \neq j) \quad (5.5)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i, k \in N. \quad (5.10)''$$

Mais ainda, se for assumido o caso particular em que os parâmetros associados aos arcos (W_{ik}) verificam a desigualdade triangular e a simetria, então este problema coincide com o problema de cobertura por *hubs* (ver HCP em Kara e Tansel, 2003). Está provado que o PCW-I_{custos} é um problema NP-difícil pois tem como caso particular um problema NP-difícil.

De facto, a versão mono-objectivo PCW-I_{custos} tem como solução óptima uma das soluções eficientes e suportadas do PCW o que obriga a que o PCW na sua versão mono-objectivo com função objectivo dada pela soma ponderada de f_1 e f_2 seja NP-difícil.

Devemos notar, que em modelos de programação linear inteira mista bi-objectivo para além das soluções não-dominadas localizadas na fronteira do envolvente convexo no espaço dos objectivos (soluções não-dominadas suportadas) outras soluções não-dominadas podem existir, chamadas não-suportadas, no interior dos *gaps* de dualidade, dominadas por combinações convexas das suportadas.

Sendo o problema de determinar algumas das soluções óptimas (precisamente as eficientes e suportadas) NP-difícil, também o problema que tem estas e outras mais soluções (as eficientes e não suportadas), ou seja, o PCW, pertence à classe dos NP-difíceis.

Na próxima secção serão desenvolvidas linearizações para este modelo tendo como base trabalhos de diferentes autores.

5.4 Modelos lineares

Inclui-se nesta secção a descrição de três modelos lineares para o PCW inspirados no artigo de Kara e Tansel (2003) dedicado a linearizações para o problema de cobertura por *hubs* e, mais recentemente, no trabalho de Ernst et. al. (2005).

Em Kara e Tansel (2003) são realizadas comparações entre várias linearizações possíveis para a restrição (5.5). O melhor resultado apresentado nesse trabalho corresponde à sua substituição por (5.5)':

$$(W_{ik} + \alpha W_{km})x_{ik} + W_{mj}x_{jm} \leq \gamma \quad \forall i, j, k, m \in N, (i \neq j) \quad (5.5)'$$

No entanto, esta linearização não é aplicável ao PCW pois exige que o parâmetro da debilidade satisfaça a desigualdade triangular e simetria, isto é, $W_{ik} \leq W_{ir} + W_{rk}$ ($\forall i, k, r \in N$) o que, pode não se verificar com os parâmetros do PCW.

Sendo assim, foram estudadas e aplicadas ao PCW outras linearizações, igualmente referidas em Kara e Tansel que não impõem qualquer limitação ao parâmetro da debilidade. Convém salientar que além da restrição (5.5), designada por restrição de cobertura, o PCW possui ainda a (5.9) que também não é linear e que não aparece nos problemas de cobertura por *hubs*, sendo específica do PCW.

Na primeira linearização, designada por PCW-L1 e proposta inicialmente por Kara e Tansel (2000), é feita uma introdução de coeficientes V_{ijkm} tais que $V_{ijkm} = 1$ se $W_{ik} + \alpha W_{km} + W_{mj} \leq \gamma$ e 0, caso contrário; sendo os produtos $x_{ik}x_{jm}$ substituídos por variáveis com quatro índices, y_{ijkm} , como é usual na linearização de funções quadráticas (ver Sheralli e Adams (1999)), estas variáveis indicam o modo como a ligação entre os nodos i e j é realizada. Se esta é feita através dos hubs k e m , estando por isso i afecto a k e j afecto a m , então assumem o valor um, caso contrário são nulas. Estas variáveis serão também utilizadas em outras formulações, como veremos mais à frente.

Neste caso a restrição de cobertura (5.5) é substituída por três restrições (5.11) a (5.13), apresentadas a seguir e surge (5.15) para impôr o domínio das novas variáveis.

PCW-L1

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

$$\text{Min } f_2 = s + t \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n V_{ijkm} y_{ijkm} \geq 1 \quad \forall i, j \in N (i \neq j) \quad (5.11)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n y_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \in N (i \neq j) \quad (5.12)$$

$$x_{ik} + x_{jm} - y_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j, k, m \in N (i \neq j) \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Ind}_i \leq s \quad \forall k \in N \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Out}_i \leq t \quad \forall k \in N \quad (5.7)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i \neq k) \quad (5.8)$$

$$2y_{ikik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i < k) \quad (5.14)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \text{ com } i \neq k,$$

$$\forall i, k \in N; s, t \text{ inteiros não negativos.} \quad (5.10)$$

$$y_{ijkm} \geq 0, \quad \forall i, j, k, m \in N. \quad (5.15)$$

As restrições (5.11) e (5.12) asseguram a existência de pelo menos uma ligação nos dois sentidos entre qualquer par de nodos (i,j) do grafo G' (definido na secção 4.5) e que

verifique as restrições de debilidade impostas. As restrições (5.13) estabelecem a ligação entre as variáveis de dois índices e as variáveis de quatro índices.

Note-se que o abandono da integralidade das variáveis y_{ijkm} em (5.15) é justificado pela inclusão de (5.12) e (5.13).

Esta formulação linear do problema, aumenta, como seria expectável, o número de variáveis e o número de restrições que passa agora para $n^4 + 2n^2 + 2$ e $2n^4 - n^3 + \frac{13}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$, respectivamente.

Em Wagner (2004) esta formulação é modificada com vista à redução do número de variáveis e restrições. Tais adaptações foram também introduzidas no PCW-L1 dando origem ao modelo alternativo designado por PCW-L1W que a seguir se apresenta.

PCW-L1W

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

$$\text{Min } f_2 = s + t \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k (i \neq k) \in N \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n V_{ijkm} y_{ijkm} \geq 1$$

$$\forall i, j \in N ((i \neq j) \wedge ((V_{ijkm} = 1) \wedge (V_{jimk} = 1) \wedge ((j \neq k) \vee ((j \neq k) \vee (j = k \wedge j = m)) \wedge ((i \neq m) \vee (i = m \wedge k = i))) \quad (5.16)$$

5. Modelos de programação inteira para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n y_{ijkm} = 1$$

$$\forall i, j \in N((i \neq j) \wedge (V_{ijkm} = 1) \wedge (V_{jikm} = 1) \wedge ((j \neq k) \vee (j = k \wedge j = m)) \wedge ((i \neq m) \vee (i = m \wedge k = i))) \quad (5.17)$$

$$x_{ik} + x_{jm} - y_{ijkm} \leq 1$$

$$\forall i, j, k, m \in N((i \neq j) \wedge ((j \neq k) \vee ((j = k \wedge j = m)) \wedge ((i \neq m) \vee (i = m \wedge k = i))) \wedge (V_{ijkm} = 1) \wedge (V_{jikm} = 1)) \quad (5.18)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} Ind_i \leq s \quad \forall k \in N \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} Out_i \leq t \quad \forall k \in N \quad (5.7)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N(i \neq k) \quad (5.8)$$

$$2y_{ikik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N(i < k) \quad (5.14)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \text{ com } i \neq k,$$

$$\forall i, k \in N; s, t \text{ inteiros não negativos} \quad (5.10)$$

$$y_{ijkm} \in \{0,1\} \quad \forall i, j, k, m \in N(((j \neq k) \vee ((j = k) \wedge (j = m)) \wedge ((i \neq m) \vee (i = m) \wedge (k = i)))) \quad (5.19)$$

Em PCW-L1W o objectivo foi eliminar restrições e variáveis redundantes em determinados casos específicos. Por exemplo, em (5.18) se o nodo j é igual ao nodo k isto significa que j é *hub* e, além disso, que o nodo i lhe está afecto. Podem pois ser eliminadas um conjunto vasto de possibilidades consideradas redundantes.

A segunda formulação constitui uma adaptação de um dos modelos de Skorin-Kapov et al. (1996) por Kara e Tansel (2003) para o problema de cobertura por *hubs* que será designada por PCW-L2 e consiste em substituir (5.5) no PCW-I pelas restrições (5.11), já anteriormente apresentadas, e pelas seguintes restrições:

$$\sum_{m=1}^n y_{ijkm} = x_{ik} \quad \forall i, j, k \in N(i \neq j) \quad (5.20)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ijkm} = x_{jm} \quad \forall i, j, m \in N(i \neq j). \quad (5.21)$$

As restrições (5.14) mantêm-se, tal como em PCW-L1

Introduzindo estas alterações em PCW-I surge a seguinte alternativa de formulação linear para o PCW:

PCW-L2

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

$$\text{Min } f_2 = s + t \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n V_{ijkm} y_{ijkm} \geq 1 \quad \forall i, j \in N (i \neq j) \quad (5.11)$$

$$\sum_{m=1}^n y_{ijkm} = x_{ik} \quad \forall i, j, k \in N (i \neq j) \quad (5.20)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{ijkm} = x_{jm} \quad \forall i, j, m \in N (i \neq j) \quad (5.21)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Ind}_i \leq s \quad \forall k \in N \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} \text{Out}_i \leq t \quad \forall k \in N \quad (5.7)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i \neq k) \quad (5.8)$$

$$2y_{ikik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k \in N (i < k) \quad (5.14)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \text{ com } i \neq k,$$

$$\forall i, k \in N; s, t \text{ inteiros não negativos.} \quad (5.10)$$

$$y_{ijkm} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j, k, m \in N. \quad (5.15)'$$

As igualdades (5.21) garantem que, para cada nodo *spoke* de destino j , o fluxo da origem i com destino j via todos os caminhos utilizando as ligações $i - k$, será sempre diferente de zero e garantem que, para todos os nodos origem i e todos os *hub* k , um fluxo através do caminho $i - k - m - j$ é possível somente se j é afecto ao *hub* m (independentemente da origem). As igualdades em (5.20) são equivalentes mas agora relativas a cada nodo *spoke* de origem i .

Por último, descreve-se uma outra formulação alternativa ao PCW-I baseada no conceito de raio de cobertura e adaptada para o PCW do modelo de Ernst et al. (2005). No trabalho destes autores são introduzidas variáveis correspondentes aos raios de cobertura de cada *hub*, sendo depois definidas as restrições de cobertura. Tendo em conta as especificidades do PCW e fazendo as devidas alterações, foram definidas as variáveis inteiras $ri_k, ro_k, \forall k \in N$ que representam o raio de cobertura para o *hub* k relativamente ao grau interno e externo respectivamente. As novas restrições (5.24) impõem o limite superior de debilidade do problema enquanto que as restrições (5.22) e (5.23) estabelecem a ligação entre as variáveis $x_{ik} (\forall i, k \in N)$ e as variáveis de cobertura $ri_k, ro_k (\forall k \in N)$. A ideia inovadora nesta formulação reside na introdução de variáveis correspondentes ao raio de cobertura para cada *hub* e que são calculadas no PCW com base na debilidade máxima dos arcos que entram e saem dos *hubs* respeitantes às ligações com os seus *spokes*. Estas variáveis vêm eliminar a necessidade de existirem variáveis com quatro índices, o que em termos computacionais se torna menos pesado.

PCW-L3

$$\text{Min } f_1 = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{(k=1 \wedge k \neq i)}^n z_{ik} \quad (5.1)$$

$$\text{Min } f_2 = s + t \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{k \in N} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (5.3)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} Ind_i \leq s \quad \forall k \in N \quad (5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} Out_i \leq t \quad \forall k \in N \quad (5.7)$$

$$2x_{ik} \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall i, k (i \neq k) \in N \quad (5.8)$$

$$W_{ik}x_{ik} \leq ri_k \quad \forall i, k (i \neq k) \in N \quad (5.22)$$

$$W_{ki}x_{ik} \leq ro_k \quad \forall i, k (i \neq k) \in N \quad (5.23)$$

$$ri_k + ro_k + \alpha W_{km} [(n+1)x_{kk} - n] \leq \gamma [n - (n-1)x_{mm}] \quad \forall k, m (k \neq m) \in N \quad (5.24)$$

$$(2x_{kk} - 1) + (2x_{ii} - 1) \leq (A_{ik} + A_{ki}) + z_{ik}(1 - A_{ik}) + z_{ki}(1 - A_{ki}) \quad \forall k, i (k \neq i) \in N \quad (5.14)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, z_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i, k \in N; s, t \text{ inteiros não negativos} \quad (5.10)$$

$$ri_k, ro_k \geq 0 \quad \forall k \in N. \quad (5.25)$$

Na tabela 5.1 é feita uma comparação dos vários modelos lineares com base no número de variáveis e restrições, tendo em consideração algumas das instâncias reais e geradas para os testes computacionais descritos no capítulo 7.

Observa-se que nalgumas células não aparece nenhum valor porque o programa *Gnuwin32* (<http://gnuwin32.sourceforge.net/packages.html>) não conseguiu gerar os problemas no formato LP para o CPLEX 8.1 por falta de memória do computador.

5. Modelos de programação inteira para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) modelo	(3) número de variáveis	(4) número de restrições
Mat20/20	PCW-L1	152 802	153 791
	PCW-L1W	40 656	41 719
	PCW-L2	112 028	9011
	PCW-L3	822	2171
Mat30/30	PCW-L1	784 802	787 036
	PCW-L1W	147 548	149 900
	PCW-L2	533 275	29 266
	PCW-L3	1832	4906
Mat53/53	PCW-L1	-	-
	PCW-L1W	-	-
	PCW-L2	-	-
	PCW-L3	5 673	15 371
Rnd20/20	PCW-L1	152 802	153 791
	PCW-L1W	36 026	37 101
	PCW-L2	110 448	9011
	PCW-L3	822	2171
Rnd30/30	PCW-L1	784 802	787 037
	PCW-L1W	77 686	78 822
	PCW-L2	514 989	29 266
	PCW-L3	1832	4906
Rnd40/40	PCW-L1	-	-
	PCW-L1W	28 661	30 419
	PCW-L2	68 021	1 400 143
	PCW-L3	3 242	8 741

Tabela 5.1 - Dimensões comparativas das relaxações lineares

É nítida a vantagem do modelo PCW-L3 em termos de dimensão (número de variáveis e restrições) em comparação com os outros modelos lineares, sendo por isso este modelo o escolhido para a resolução exacta do PCW.

5.5 Conclusões

Neste capítulo foi formulado um modelo de programação não linear inteira para o PCW, designado por PCW-I seguido de vários modelos lineares inteiros alternativos: PCW-L1 e PCW-L1W adaptados dos modelos apresentados nos artigos de Kara e Tansel (2003) e Wagner (2004), PCW-L2 adaptado da formalização de Skorin-Kapov et al. (1996) e Kara e Tansel (2003) e, por último, o PCW-L3 desenvolvido com base no artigo de Ernst et al. (2005).

Relativamente à complexidade computacional do PCW, provou-se que este problema é NP-difícil a partir dos trabalhos de Kara e Tansel (2000) e (2003) para o PCH.

Capítulo 6

Métodos heurísticos para o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*

Doubt is not a pleasant condition, but certainty is absurd

Voltaire

6.1 Introdução

De acordo com o capítulo anterior, o PCW em estudo classifica-se como um problema NP-difícil sendo, por isso, conveniente encontrar métodos alternativos à sua resolução exacta.

Os trabalhos realizados por Klinecicz (1991), (1992) e (2002) para o problema de localização de p hubs revelaram-se de extrema importância para o desenvolvimento da vertente heurística do trabalho. O primeiro destes artigos faz referência a uma variedade de heurísticas baseadas no conceito de pesquisa local com movimentos de inserção e movimentos de troca. No artigo de Klinecicz (1992) são estudadas duas metaheurísticas para o problema acima mencionado: uma GRASP (*greedy randomized adaptative search*) e uma pesquisa tabu. Por outro lado, em Ernst e Krishnamoorthy (1996) são obtidos bons resultados com a pesquisa *simulated annealing* para o problema da mediana com p hubs;

Abdinnour-Helm (1998) refere-se a uma estratégia híbrida para resolver o problema de localização de *hubs* sem restrições de capacidade a qual resulta da combinação da pesquisa tabu com algoritmos genéticos e, finalmente, em Topcuoglu et al. (2005) é aplicado um algoritmo genético para este mesmo problema de localização de *hubs* sem restrições de capacidade.

Apesar do PCW envolver algumas dificuldades acrescidas, não só a nível das restrições mas também, no que diz respeito à existência de dois objectivos conflituosos, foram implementadas duas das metaheurísticas acima mencionadas (GRASP e tabu) com as devidas adaptações (ver Colaço e Pato, 2006). Até ao momento não se conhecem referências a métodos heurísticos para resolver o problema de cobertura por *hubs*, podendo este trabalho ser um pequeno contributo nesta área.

Começa-se na secção 6.1 por uma introdução a métodos não exactos para a versão mono-objectivo do PCW, isto é, quando a única função objectivo é dada pela soma ponderada das duas funções objectivo, f_1 e f_2 , com qualquer par de pesos $(\lambda, 1-\lambda)$ e $\lambda \in [0,1]$. As secções seguintes são dedicadas a métodos heurísticos para o referido problema mono-objectivo.

Assim, na secção 6.2 figura uma heurística construtiva *greedy* com a possibilidade de inclusão de aleatoriedade, na secção 6.3 são caracterizadas as vizinhanças usadas nas pesquisas locais incorporadas nas metaheurísticas GRASP e tabu. A secção 6.4 é dedicada a esta primeira metaheurística, cuja principal característica assenta na combinação de alguma aleatoriedade com a repetição exaustiva de processos. A moderada exigência a nível computacional e a relativa facilidade de implementação foram dois dos factores que conduziram à sua escolha. De seguida, na secção 6.5, será descrita a pesquisa tabu que, ao introduzir o conceito de memória, permite a orientação da procura para regiões ainda não exploradas, acarretando ao mesmo tempo um aumento do tempo computacional. Outras técnicas particulares foram implementadas na pesquisa tabu, nomeadamente, a oscilação estratégica e a diversificação. Na secção 6.6 é apresentada uma heurística Híbrida que combina estas duas metaheurísticas, sendo também usada nos testes computacionais, que serão discutidos no capítulo 7.

Apesar de todas as heurísticas implementadas terem sido delineadas considerando a minimização da soma ponderada das duas funções objectivo, $\min \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$, na secção 6.7 é analisada a possibilidade destes métodos serem aplicados à resolução do PCW, ou seja, ao problema na versão bi-objectivo. Para avaliar a qualidade das soluções heurísticas no contexto do PCW foram escolhidas duas vias, como se verá no capítulo 7:

- (1) resolver optimalmente o problema na versão mono-objectivo com um valor fixo para λ , tomando a formalização PCW-L3, ou seja, $\min \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$, sujeito a (5.3), (5.4), (5.6), (5.7), (5.8), (5.10), (5.14), (5.23), (5.24), (5.25), (5.26) e comparar o valor óptimo com os majorantes resultantes das heurísticas aplicadas com esse mesmo λ ;
- (2) determinar a fronteira de Pareto para o problema PCW-L3 e correr cada uma das heurísticas com vários valores para λ , comparando no final a fronteira exacta com a fronteira aproximada.

6.2 Heurística Construtiva Semi-Aleatorizada

Foi implementada uma heurística Construtiva Semi-Aleatorizada para a criação de uma solução inicial sendo depois incluída nos processos de pesquisa local (GRASP e tabu).

Para um número fixo de *hubs*, p , e, de acordo com o que é ilustrado na figura 6.1, começa por ser escolhida a localização dos p *hubs* - passo 1. escolha semi-aleatorizada de *hubs*. Esta escolha é realizada construindo e actualizando uma lista restrita de candidatos a *hub*, RCLH (*random candidate list of hubs*), em tudo muito semelhante à lista de candidatos a *hub* mencionada em Ebery et al. (2000) e em Klincewicz (1991). Tal como acontece nestes dois artigos, esta lista é construída por ordem decrescente tendo em conta os parâmetros dos nodos, neste caso em estudo não são as quantidades de fluxo recebidas e enviadas por cada nodo mas apenas o grau associado aos nodos (grau interno + grau externo). Existe um parâmetro $\alpha_1 \in [0,1]$ que lhe confere um carácter mais ou menos restritivo relacionado com o peso da aleatoriedade, como se percebe na figura. Sendo assim, um nodo h está em RCLH se:

$$d(h) = (Ind_h + Out_h) \in [d^{\min} + \alpha_1(d^{\max} - d^{\min}), d^{\max}]$$

onde $d^{\min} = \min_{i \in N} (Ind_i + Out_i)$ e $d^{\max} = \max_{i \in N} (Ind_i + Out_i)$ (6.1)

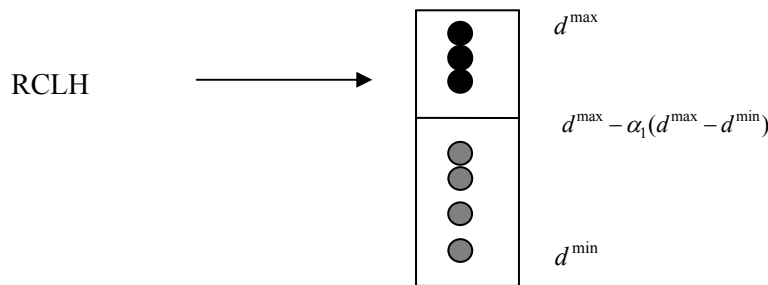


Figura 6.1 Lista restrita de candidatos a *hub*, RCLH, adaptado de Resende (2000)

Depois de RCLH ser construída, é nela seleccionado aleatoriamente um elemento para funcionar como *hub*, iniciando-se novamente este processo com actualização de RCLH, agora sem os nodos já seleccionados em iterações anteriores para localizarem *hubs*. Note-se que no caso de $\alpha_1 = 1$ este processo é completamente aleatório e quando $\alpha_1 = 0$ é totalmente *greedy*.

Depois de escolhido o conjunto de nodos que vão funcionar como *hubs*, resta afectar os restantes nodos, designados nodos *spoke*, a cada um dos *hubs*; não esquecendo que cada *hub* é afecto a si próprio e que um nodo *spoke* será afecto a um e um só *hub* - passo 2. afectação semi-aleatorizada de *spokes*.

```

procedure Construtiva Semi-Aleatorizada ( $p, \text{maxiterconst}, \alpha_1, \alpha_2; \text{solution}_k$ )
  passo 1. escolha semi-aleatorizada de hubs
  repeat until  $p$  hubs estão escolhidos
    construir a lista  $RCLH$  (parâmetro  $\alpha_1$ ) baseada nos graus dos nodos ainda livres
    seleccionar aleatoriamente um  $hub$  em  $RCLH$ 
  end

  passo 2. afectação semi-aleatorizada de spokes
  while existe um  $spoke$  livre por afectar and número iterações inferior a  $\text{maxiterconst}$ 
    for cada  $spoke$  ainda não afectado
      calcular custos incrementais
      escolher o melhor  $hub$  que é candidato e admissível
    end
    construir a lista  $RCL$  (parâmetro  $\alpha_2$ )
    escolher aleatoriamente um  $spoke$  em  $RCL$ 
    afectar o  $spoke$  ao seu  $hub$ 
    incrementar número de iterações

  end
  return  $\text{solution}_k$ 
end Construtiva Semi-Aleatorizada

```

Figura 6.2 Pseudocódigo de Construtiva Semi-Aleatorizada

Inicialmente, são calculados para cada nodo $spoke$ i os custos incrementais de afectação relativamente a cada hub , sendo depois escolhido o melhor candidato a hub para cada i . Esta escolha é baseada, por um lado, na admissibilidade de afectação e, por outro, no valor mais baixo dos custos incrementais. Estes custos entram em linha de conta não só com uma ponderação dos dois objectivos a minimizar neste problema mas também com a restrição de debilidade. O custo incremental $c(i, h)$, para um nodo $spoke$ i e um hub h é dado pela soma ponderada:

- (1) das poupanças dos valores máximos de grau interno (poupança_s) e grau externo (poupança_t);
- (2) a poupança nos novos arcos necessários para afectar i a h (poupança_{arcos});
- (3) com a debilidade dos arcos que ligam i ao seu candidato a hub (W_{ih} e W_{hi}):

$$c(i, h) = \lambda (W_{ih} + W_{hi} + \text{poupança}_{\text{arcos}}) + (1 - \lambda) (\text{poupança}_s + \text{poupança}_t) \quad (6.2)$$

A poupança do valor máximo do grau interno (ou externo) é calculada através da diferença entre o valor máximo de grau interno (externo) entre todos os *clusters* antes da afectação de *i* a *h* e depois da afectação de *i* a *h*. De forma semelhante a poupança na criação de novos arcos, e visto que *i* não está ainda afecto a nenhum *hub*, corresponde em avaliar o número de novos arcos necessários para afectar *i* a *h*, existindo três possibilidades: nenhum, um ou dois novos arcos, o que, em termos de poupança de arcos se traduz em valores iguais a 0, -1 ou -2, respectivamente.

Depois destes cálculos, é construída uma lista restrita de nodos *spoke* RCL (*random candidate list*) e respectivos candidatos a *hub* com base nos valores dos custos incrementais. Tal como no caso da RCLH, é associado um parâmetro $\alpha_2 \in [0,1]$, sendo que o nodo *spoke* *i* pertence a RCL se $c(i) \in [c^{\min}, c^{\min} + \alpha_2(c^{\max} - c^{\min})]$, tal como é ilustrado na figura 6.3.

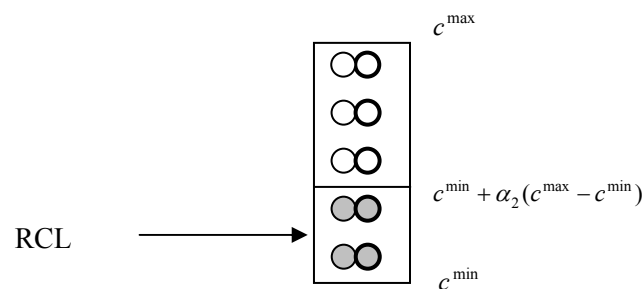


Figura 6.3 Lista restrita de nodos *spoke* e respectivos candidatos a *hub*, adaptado de Resende (2000)

A heurística Construtiva Semi-Aleatorizada continua até conseguir obter uma solução admissível para o PCW, *solution_k*, ou até atingir um número máximo de iterações (*maxiterconst*). Este último caso significa que chegou ao fim sem ter construído uma solução admissível, sendo então escolhido um outro conjunto de *hubs* da lista RCLH e o procedimento chamado novamente. Esta heurística construtiva pode ser utilizada com um carácter totalmente *greedy*, para isso basta fazer $\alpha_1=0$ e $\alpha_2=0$, ou totalmente aleatório fazendo $\alpha_1=1$ e $\alpha_2=1$. Daí que na experiência computacional apresentada no capítulo 7 tenham sido testados apenas os casos em que $\alpha_1 = \alpha_2$ pois se pretendia avaliar o

comportamento da heurística ao variar o grau de aleatoriedade, com a mesma intensidade quer na escolha de *hubs* quer na escolha de *spokes*.

6.3 Definição das vizinhanças

A eficácia de qualquer procedimento de pesquisa local depende de vários factores entre os quais a solução inicial, a avaliação da função custo nas soluções vizinhas e, obviamente, a estrutura de vizinhança.

Seja *sol* uma solução do problema, define-se a vizinhança de *sol*, como o conjunto de todas as soluções que se podem obter a partir de *sol* por um determinado movimento ou conjunto de movimentos. Neste caso do PCW, foram considerados movimentos de reafecção de um nodo *spoke* a outro *hub* (movimento de inserção), de troca de afectação entre dois nodos *spoke* (movimento de troca) ou, ainda, de substituição de um *hub* por um nodo *spoke* (movimento de localização). As vizinhanças aqui utilizadas são as mais frequentes nos problemas de localização de *hubs* (ver, por exemplo, os trabalhos de Abdinnour-Helm (1998), Ernst e Krishnamoorthy (1996), Ernst e Krishnamoorthy (1999), Klinecicz (1991), Klinecicz (1992) e Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994)).

Note-se que na definição da vizinhança de uma solução para o PCW ficamos sempre restringidos ao número de *hubs*, inicialmente fixado, não sendo por isso permitida a eliminação ou a criação de um *hub*, ao contrário do que acontece, por exemplo, no trabalho de Tuzun e Burke (1999) onde são permitidos além de movimentos de troca de localização, também o aumento do número de instalações que correspondem, neste problema, aos *hubs*. Se, por um lado, este constrangimento relativo às vizinhanças para o PCW restringe a pesquisa, por outro lado, torna-se em termos computacionais mais leve, isto porque adicionar ou eliminar um *hub* envolve o cálculo de uma estrutura de custos muito elevada, bem como uma avaliação de admissibilidade complexa.

6.3.1 Vizinhança de inserção

A vizinhança de uma dada solução *sol* baseada em movimentos de inserção é caracterizada pelo conjunto de todas as soluções que se podem obter a partir de *sol* por reafecção de um nodo *spoke* a outro nodo *hub*.

Exemplo 6.1 – Exemplo de vizinhança de inserção

A figura 6.4 ilustra a vizinhança de inserção de uma solução *sol*, que tem apenas dois hubs e três nodos *spoke*, sendo a sua vizinhança constituída somente por três soluções. ■

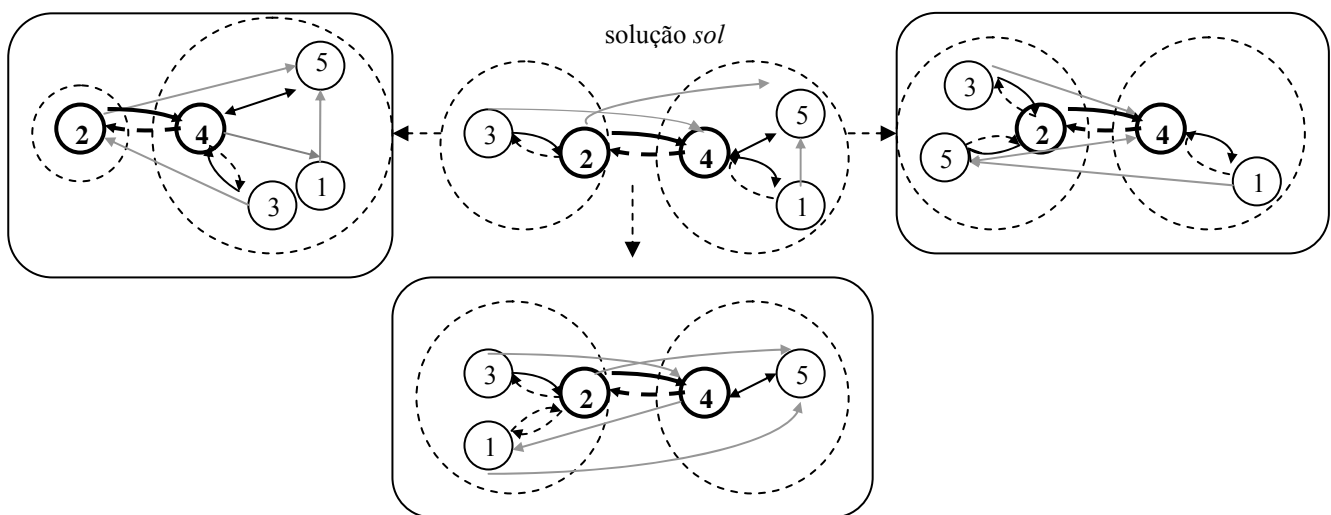


Figura 6.4 Vizinhança de inserção da solução *sol*

6.3.2 Vizinhança de troca

A vizinhança de troca de uma solução *sol* define-se como o conjunto de todas as soluções que se podem obter a partir de *sol* por um movimento de troca de afectação entre dois nodos *spoke* e corresponde, assim, à composição de dois movimentos de inserção. Esta vizinhança é ilustrada no exemplo que se segue.

Exemplo 6.2 – Exemplo de vizinhança de troca

Na vizinhança de troca da solução representada na figura 6.5 existem apenas duas possibilidades de movimentos de troca que correspondem a: troca de afectação do nodo *spoke* 5 pelo nodo *spoke* 3 e troca de afectação do nodo *spoke* 1 pelo nodo *spoke* 3, o que equivale a dois movimentos de inserção consecutivos, isto é, reafecção do nodo *spoke* 5 ao *hub* 2, seguida da reafecção do nodo *spoke* 1 ao *hub* 4.

■

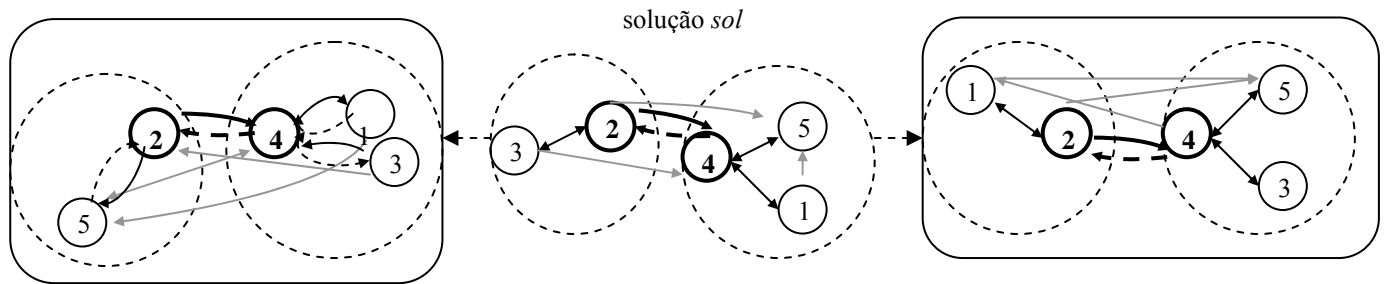


Figura 6.5 Vizinhança de troca da solução *sol*

6.3.3 Vizinhança de localização

A vizinhança de localização de uma solução *gol* é caracterizada pelo conjunto de todas as soluções que se obtêm de *gol* alterando a localização de um nodo *hub* para um nodo *spoke*, mantendo-se as mesmas afectações excepto a do par *hub-spoke*.

Exemplo 6.3 – Exemplo de vizinhança de localização

Dada uma solução particular para uma instância com seis nodos, *gol*, a figura 6.6 ilustra a vizinhança de localização para *gol*. Esta vizinhança é constituída pelo conjunto das soluções que se obtêm alterando a localização do *hub* para um qualquer nodo *spoke*. Por exemplo, na figura 6.6 o *hub* 4 pode ser substituído por qualquer nodo *spoke*, nomeadamente o 1, o 5 ou o 3, mantendo as restantes afectações.

■

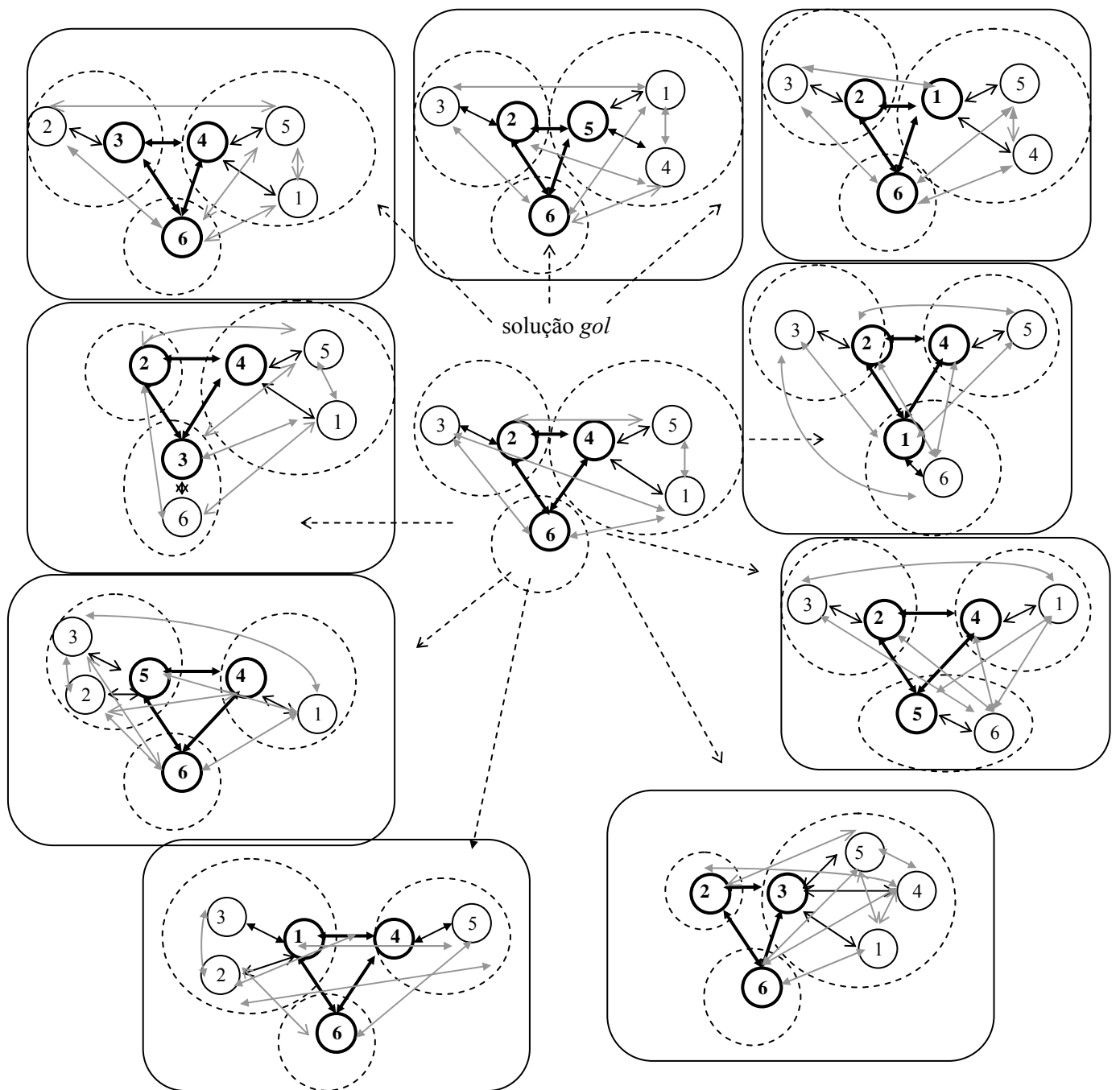


Figura 6.6 Vizinhança de localização da solução *gol*

6.4 GRASP

A metaheurística GRASP é uma pesquisa local cuja principal característica é o facto de aliar uma forte componente de aleatoriedade com uma exaustiva repetição de processos. Para mais detalhes poderá ser consultado Resende e Ribeiro (2002).

A GRASP tem sido usada na resolução de problemas de optimização muito diversificados, a título de exemplo salientam-se os trabalhos de Areibi e Vannelli (2003), Cano et al. (2002) e Pacheco e Valencia (2003) para problemas de agrupamento, os de Hasan et al. (2002), Liu et al. (2000) e Murphey et al. (1998) para problemas de afectação e, por último, os de Holmqvist et al. (1997) e de Delmaire et al. (1997) para problemas de localização.

Aparentemente, não se conhece nenhuma aplicação deste método ao problema de localização de *hubs* com número de *hubs* desconhecido e com mais do que um objectivo. Klincewicz (1992) desenvolveu uma GRASP para um problema de localização de *p-hubs*; mais tarde, o mesmo autor em Klincewicz (2002) volta a aplicar este método para o mesmo problema, mas agora apenas para seleccionar o conjunto de *hubs*, determinando a afectação dos nodos *spoke* por recurso a um modelo de localização e afectação de equipamentos sem restrições de capacidade. Por outro lado, são poucos os artigos sobre GRASP na resolução de problemas de optimização multi-objectivo (ver, por exemplo Jones et al. (2002) e Scaparra e Church (2005)). Nesta dissertação será relatada uma aplicação da GRASP com vista a obter soluções admissíveis para o PCW, como se sabe, problema bi-objectivo e com número de *hubs* desconhecido.

6.4.1 Características da GRASP

A GRASP aqui implementada inclui duas fases distintas, à semelhança do trabalho desenvolvido por Klincewicz (2002): a fase de construção de uma solução admissível, baseada na heurística Construtiva Semi-Aleatorizada e incorporando alguma aleatoriedade; e a fase de pesquisa local numa vizinhança dessa solução. Obtém-se, assim, uma solução admissível para o problema. O processo é repetido durante várias iterações retornando, no final, a melhor solução. Embora o PCW envolva a minimização de dois objectivos contraditórios, balanceamento de *clusters* e minimização de custos, tal como é referido no início deste capítulo, nas heurísticas o problema é encarado com um só objectivo, minimização da soma ponderada das duas funções. Sendo assim, no processo de pesquisa local o que se pretende é encontrar um óptimo local relativo ao objectivo da soma ponderada.

Devido ao facto do PCW exigir também a determinação do número de *hubs*, cada corrida da GRASP é feita com um número de *hubs* fixo à partida, p , sendo realizadas várias corridas para um número de *hubs* num intervalo previamente definido, $p \in [kmin, kmax]$, seleccionando-se, no final, a melhor opção respeitante ao valor da função objectivo ponderada. O pseudocódigo apresentado na figura 6.7 ilustra este algoritmo designado por Global GRASP.

```

Global GRASP
  for  $p = kmin$  to  $kmax$  do
    procedure GRASP ( $p$ ;  $bestsolution$ )
      for  $k=1$  to  $maxiter$  do
        procedure Construtiva Semi-Aleatorizada ( $p$ ,  $maxiterconst$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ;  $solution\_k$ )
          passo 1. escolha semi-aleatorizada de hubs
          passo 2. afectação semi-aleatorizada de spokes
        procedure Exchange ( $solution\_k$ ,  $maxiterexch$ ;  $bestsolution\_k$ )
      end
      if  $bestsolution\_k$  melhor que  $bestsolution$  then  $bestsolution \leftarrow bestsolution\_k$ 
    end GRASP
  end
  return  $bestsolution$ 
end Global GRASP

```

Figura 6.7 Pseudocódigo de Global GRASP

No procedimento designado por GRASP (p ; $bestsolution$) em cada iteração é construída uma solução admissível com p *hubs* envolvendo o procedimento Construtiva Semi-Aleatorizada (p , $maxiterconst$, α_1 , α_2 ; $solution_k$) apresentado na secção 6.3; de seguida, e com base na solução obtida na fase anterior, é realizada uma pesquisa local - Exchange ($solution_k$, $maxiterexch$; $bestsolution_k$) – com pseudocódigo na figura 6.8.

Como resultado deste processo, que é repetido para um número máximo de iterações fixo à partida ($maxiter$), é retornada a melhor solução relativa à soma ponderada dos dois objectivos, com p *hubs*. O procedimento Global GRASP inicia-se com $p=kmin$ e continua, incrementando uma unidade sempre ao valor de p , até atingir o limite máximo definido inicialmente por $kmax$. No final, este processo retorna a melhor solução a que corresponde um determinado número de *hubs* entre $kmin$ e $kmax$.

6.4.2 Pesquisa local

Depois de construída a solução admissível, com alguma componente de aleatoriedade, é realizada uma pesquisa local - procedure *Exchange* (*solution_k*, *maxiterexch*; *bestsolution_k*) de forma a atingir-se um óptimo local para as vizinhanças de inserção e de troca, optimalidade novamente relativa à soma ponderada dos dois objectivos.

```

procedure Exchange (solution_k, maxiterexch; bestsolution_k)
  while ainda não chegou ao fim da lista de spokes do
    passo 1. cálculo da poupança para cada spoke i pela reafecção a outro hub admissível
    passo 2. escolha da melhor poupança
    if a melhor das poupanças de i é não-positiva
      go to próximo spoke na lista
    else reafectar o spoke i ao melhor hub; go to início da lista
    end
  end
  return bestsolution_k
end Exchange

```

Figura 6.8 Pseudocódigo do procedimento *Exchange*

Este tipo de pesquisa local baseado na vizinhança de inserção é frequente em problemas de localização, como já foi referido em 6.4. Neste estudo, o procedimento *Exchange* (*solution_k*, *maxiterexch*; *bestsolution_k*) avalia toda a vizinhança de inserção da solução na esfera de influência de outros *hubs* - movimentos de inserção.

O cálculo da poupança relativa à reafecção de um nodo *spoke* a outro *hub* é feito com base numa soma ponderada da diferença do número de novos arcos, $poupança_{arcos}$ e dos valores máximos de grau interno e grau externo dos *clusters* antes e depois de efectuar o movimento, respectivamente, $poupança_s$ e $poupança_t$ isto é,

$$\lambda(poupança_{arcos}) + (1 - \lambda)(poupança_s + poupança_t) \quad (6.3)$$

onde $\lambda \in [0, 1]$.

A $poupança_{arcos}$ é dada pela diferença entre o número de novos arcos que são necessários criar para a afectação anterior do *spoke* e o número de novos arcos que são necessários

para a nova afectação. No exemplo 6.4 a reafecção do nodo *spoke* 1 ao *hub* 2 apresenta um valor negativo para a poupança_{arcos} pois, é necessário criar dois novos arcos enquanto, na afectação de 1 ao *hub* 4, era necessário criar apenas um novo arco.

A poupança do valor máximo do grau interno (ou externo), tal como já foi referido em 6.2, é calculada através da diferença entre o valor máximo de grau interno (externo) entre todos os *clusters* antes depois da reafecção de *i* a *h*. Voltando novamente ao exemplo 6.4 calcule-se a título ilustrativo o valor da poupança respeitante ao máximo de grau externo entre os *clusters* com a reafecção de nodo *spoke* 3 ao *hub* 4. Antes deste movimento o valor máximo de grau externo era igual a quatro depois deste movimento o valor máximo de grau externo passa para seis, o que corresponde a um valor de poupança negativo (tabela (6.1)).

Exemplo 6.4 - Cálculo da poupança para um movimento de inserção

Na solução *sol*, aqui novamente apresentada na figura 6.9, poderão ser efectuados três movimentos de inserção: um que consiste em reafectar o nodo *spoke* 3 ao *hub* 4 e dois que consistem em reafectar os nodos *spoke* 5 ou 1 ao *hub* 2. Os valores da poupança, para cada um destes casos são dados pela tabela 6.3.

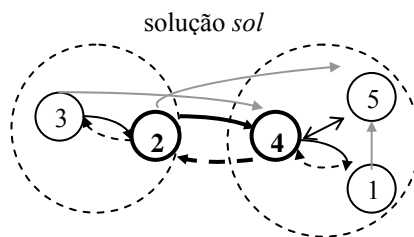


Figura 6.9 Representação da solução *sol* para ilustração do procedimento *Exchange*

reafecção	valor da poupança
nodo <i>spoke</i> 3 ao <i>hub</i> 4	$\lambda(0) + 2(1 - \lambda) = 2(1 - \lambda)$
nodo <i>spoke</i> 5 ao <i>hub</i> 2	$\lambda(-2) + (1 - \lambda)(3 + (-1)) = -4\lambda + 2$
nodo <i>spoke</i> 1 ao <i>hub</i> 2	$\lambda(-1) + (1 - \lambda)(1 + (-1)) = -\lambda$

Tabela 6.1 Cálculo das poupanças para movimentos de inserção a partir da solução *sol*

Estes movimentos são sempre realizados no espaço das soluções admissíveis, pois nesta metaheurística apenas a região admissível é objecto de pesquisa. Como critério de escolha, e de modo a reduzir o tempo computacional, é escolhido o primeiro movimento encontrado que melhora (*first-improving*), isto é, logo que aparece um movimento de inserção admissível e com poupança positiva este é efectuado. O procedimento continua até não existirem movimentos admissíveis que permitam melhorar a solução. De modo a evitar-se um tempo computacional excessivo, nalguma instância particularmente mal comportada, foi colocado um limite ao número de movimentos a realizar verificando-se, no entanto, durante os testes computacionais que este limite é de pouca utilidade pois não surgiu nenhum caso onde o número de movimentos atingisse este limite.

6.5 Pesquisa tabu

A pesquisa tabu é uma metaheurística constituída por procedimentos que orientam a pesquisa com o objectivo de ultrapassar a optimalidade local e chegar a regiões ainda não exploradas e onde, eventualmente, se situam as melhores soluções. A condução deste processo é conseguida empregando o conceito de memória onde se introduzem restrições tabu baseadas nas soluções já visitadas e/ou movimentos realizados nas iterações anteriores. Ao contrário de outros métodos de pesquisa local, nomeadamente da GRASP, esta metaheurística permite avançar de uma solução para outra com movimentos que, muitas vezes, pioram em relação à solução actual mas conduzem a pesquisa para outras regiões. Tal como é referido em Glover e Laguna (1997), embora a pesquisa tabu tenha por base uma pesquisa local, a memória faz com que a vizinhança de uma solução não seja estática mas dinâmica, modificando-se com base nos movimentos anteriormente

realizados. Para referências sobre pesquisa tabu, consultar Glover (1989) e Glover e Laguna (1997).

Esta metaheurística tem sido aplicada na resolução de diversos problemas de optimização combinatória. Aqui se referem, a título de exemplo, os artigos de Ahmadi e Osman (2005), Al-Sultan (1995), França et al. (1999) e Pacheco e Valência (2003) para problemas de agrupamento; os de Gendreau et al. (1999), Montané e Galvão (2006), Rego (1994), Rego e Roucairol (1995) e Tuzun e Burke (1999) para problemas de rotas; Ernst e Krishnamoorthy (1998) e Gendreau et al. (1997) dedicados a problemas de afectação e localização; e os de Alves e Clímaco (2000), Alves e Clímaco (2007), Hansen (1997) e Slomka et al. (2004) para problemas multi-objectivo.

Nas aplicações de pesquisa tabu a problemas de localização de *hubs* destacam-se alguns trabalhos, nomeadamente os de Klincewicz (1992), Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994), Skorin-Kapov et al. (1996), Abdinnour-Helm (1998), Klincewicz (2002), Carello et al. (2004) e Yaman e Carello (2005).

6.5.1 Características da pesquisa tabu

O procedimento Global Tabu para o PCW (ver figura 6.10) foi inspirado nos delineados para os problemas mono-objectivo de Tuzun e Burke (1999) para a localização e desenho de rotas, de Correia e Captivo (2006) para a localização com capacidades modulares e de Klincewicz (1992) e Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994) para a localização de *hubs*. A pesquisa tabu é desenvolvida em duas fases, tal como aconteceu nestes trabalhos: uma primeira, relacionada com a escolha da localização dos *hubs* e, uma segunda, relacionada com a afectação dos nodos *spoke* aos *hubs*, tendo em conta não só as restrições de debilidade entre todos os nodos da rede, como também a minimização da soma ponderada das duas funções objectivo do PCW.


```

Pesquisa Global Tabu
   $K \leftarrow \emptyset$ 
  for  $p = kmin$  to  $kmax$  do
    procedure Construtiva Semi-Aleatorizada ( $p$ ;  $solution\_p$ )
      passo 1. escolha greedy de hubs
      passo 2. afecção greedy de spokes
    Updatek ( $t$ ,  $solution\_p$ ;  $K$ )
  end
  for cada  $solution\_k \in K$  do
     $bestsolution \leftarrow solution\_k$ 
    procedure Assignment Phase ( $maxiterassi$ ,  $solution\_k$ ;  $bestsolution\_k$ )
       $solution\_k \leftarrow best\_solutionk$ 
    procedure Location Phase ( $maxiterloca$ ,  $solution\_k$ ;  $bestsolution\_k$ )
      if  $bestsolution\_k$  melhor que  $bestsolution$  then  $bestsolution \leftarrow bestsolution\_k$ 
  end
  return  $bestsolution$ 
end Global Tabu Search

```

Figura 6.10 Pseudocódigo de Pesquisa Global Tabu

De qualquer modo o problema em estudo apresenta algumas características muito particulares:

- (1) envolve restrições de ligação entre todos os nodos da rede de ordem $O(n^2)$ com um parâmetro que não verifica a desigualdade triangular, o que em termos computacionais se torna muito pesado;
- (2) pretende a reconfiguração num grafo do tipo *hub-and-spoke* tomando por suporte um grafo já existente e, além disso, com dois objectivos de optimização contraditórios.

Embora uma das facetas da resolução deste problema passe pela escolha do número de *hubs*, não se entra em linha de conta com esta decisão durante a pesquisa tabu, tal como aconteceu na GRASP. Isto significa que durante esta pesquisa a vizinhança de uma solução tem um número fixo de *hubs*, fixado inicialmente pela solução de entrada. Embora esta via não seja tão elegante como ter uma heurística especialmente delineada para a determinação do número de *hubs*, mostrou, neste caso, ser particularmente eficiente. Pelo contrário, no artigo de Abdinnour-Helm (1998) a determinação do número

de *hubs* é feita previamente recorrendo a uma heurística híbrida que combina algoritmos genéticos para a determinação do número de *hubs* seguida de pesquisa tabu.

Note-se que na secção 6.6 será sugerida uma heurística Híbrida com pesquisa tabu aplicada a partir de uma solução encontrada pela GRASP, logo, também com o número de *hubs* já determinado.

A solução inicial, *input* da pesquisa tabu, é construída pela heurística Construtiva Semi-Aleatorizada (secção 6.2) cujos parâmetros associados à aleatoriedade assumem os seguintes valores: $\alpha_1=\alpha_2=0$. Deste modo, a construção é totalmente *greedy*. Esta heurística construtiva fornece soluções admissíveis com p *hubs*, tomando p todos os valores inteiros num intervalo definido inicialmente. Este conjunto de soluções, K , constitui o *input* da pesquisa tabu.

A vizinhança de cada uma das soluções iniciais é explorada em duas fases distintas: fase de afectação - pesquisa nas vizinhanças de inserção e de trocas - e fase de localização - pesquisa na vizinhança de localização. Esta pesquisa termina quando ao fim de um número fixo de iterações não existe alteração da melhor solução encontrada até ao momento. Sempre que é descoberta uma solução melhor, o processo é reiniciado, na afectação ou na localização, dependendo da fase em que se encontra.

6.5.2 Pesquisa nas vizinhanças

Como já se referiu, na definição dada na secção 6.3, as soluções vizinhas ficam sempre restringidas ao número de *hubs* inicialmente fixado, não sendo por isso permitida a eliminação ou a criação de um *hub*.

Fase de Afectação

A primeira fase deste algoritmo, inspirada no trabalho desenvolvido por Skorin-Kapov e Skorin-Kapov (1994) e concretizada pelo procedimento *Assignment Phase* (*maxiterassignment*, *solution_k*; *bestsolution_k*), efectua pesquisa local com dois movimentos: inserção e troca mas, ao contrário do descrito nesse trabalho, onde se

definiram apenas movimentos de inserção, aqui estes movimentos são ambos realizados sem uma ordem predefinida, escolhidos em cada momento de forma aleatória. Este procedimento que incorpora alguma aleatoriedade e combina os dois tipos de movimentos verificou-se experimentalmente funcionar melhor em comparação com movimentos alternados de inserção e troca ou apenas com um único tipo de movimento. O número máximo de movimentos permitido, durante esta fase e sem melhoria da solução, é dado pelo parâmetro *maxiterassignment*. De cada vez que é encontrada uma solução melhor, o contador de iterações é colocado a zero.

Assim, em cada iteração deste procedimento é escolhido aleatoriamente o tipo de movimento a realizar. No caso de não existir nenhum movimento admissível do tipo escolhido então far-se-á o outro tipo de movimento. O melhor movimento, do tipo escolhido, corresponde àquele que, entre todas as possibilidades, apresenta um valor de poupança mais elevado, é admissível em termos de restrições de debilidade e é permissível, isto é, não é um movimento tabu ou, caso seja tabu, verifica o critério de aspiração. Isto significa que a vizinhança definida por movimentos de troca ou de inserção é modificada com base nos movimentos classificados como tabu. O facto de não ser exigido que o valor da poupança tome valores não negativos pode orientar a pesquisa para regiões onde, por um lado, se verifique uma deterioração da solução mas, por outro, exista a possibilidade de encontrar uma solução melhor.

A poupança relativa à reafecção de um nodo *spoke* a outro *hub* ou a poupança relativa à troca de afecções entre dois nodos *spoke* corresponde a uma soma ponderada da diferença entre o número de novos arcos e os valores máximos de grau interno e grau externo dos *clusters* antes e depois de efectuar o movimento (ver fórmula (6.2)).

Exemplo 6.5 - Cálculo da poupança para um movimento de troca

A partir da solução *sol*, aqui novamente apresentada na figura 6.11, durante a fase de afecção pode ser realizado um movimento de inserção, já ilustrado no exemplo 6.1, ou então pode ser realizado um movimento de troca que avalia as possibilidades de trocar a afecção dos nodos *spoke* entre 3 e 5 ou entre 3 e 1.

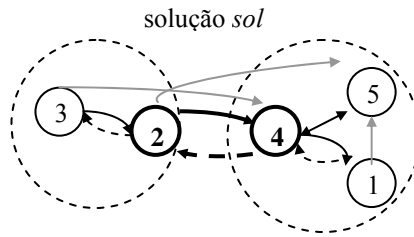


Figura 6.11 Representação da solução *sol* para ilustração da fase de afectação

O melhor movimento é escolhido como aquele ao qual corresponde a melhor poupança de entre os movimentos admissíveis (a partir dos nodos *spoke*) e que não são tabu, de acordo com a ilustração da tabela 6.2.

troca de afectação entre nodos <i>spoke</i>	valor da poupança
3 e 5	$\lambda(0) + (1 - \lambda)(3 + (-1)) = 2 - 2\lambda$
3 e 1	$\lambda(-2) + (1 - \lambda)(1 + (-1)) = -2\lambda$

Tabela 6.2 Cálculo das poupanças para os movimentos de troca a partir da solução *sol*

O número de movimentos de inserção a analisar numa determinada iteração é de ordem $O((n-p) \times p)$ e o número de movimentos de troca é de ordem $O((n-p) \times (n-p))$, o que em termos computacionais é elevado. De forma a reduzir o número de potenciais movimentos a analisar, no caso de instâncias com dimensão média ou elevada, foi aplicado um filtro para avaliar apenas os movimentos envolvendo nodos cuja soma do grau interno e externo seja superior a um determinado limite (*maxd*), porque são estes os que podem provocar um maior impacto na solução. Há uma redução nas soluções de vizinhança a analisar, mas não se pode garantir a chegada a um óptimo local.

Fase de Localização

Na fase de localização, implementada recorrendo ao procedimento *Location Phase* (*maxiterlocat*, *solution_k*; *bestsolution_k*) a vizinhança é caracterizada por alterações de localização dos *hubs*, isto é, a localização de um *hub* é modificada para um outro nodo inicialmente não *hub* - vizinhança de localização, secção 6.4.3. A exploração desta vizinhança restringe-se apenas a trocas de localização de *hubs* com os nodos *spoke* que

lhes estão afectos, isto porque a avaliação da admissibilidade após a troca de localização de um *hub* por um nodo não *hub* é computacionalmente elevada no caso em que esse nodo está afecto a outro *hub*. Excepcionalmente, quando não existe nenhum nodo *spoke* afecto ao *hub*, a pesquisa é realizada com base em todas as trocas possíveis entre os nodos *spoke* de outros *hubs* e o *hub* em causa, ou seja, avalia-se a possibilidade de substituir o *hub* «isolado» por um nodo *spoke* afecto a outro *hub* ficando o *hub* «isolado» como nodo *spoke* do novo *hub*.

Exemplo 6.6 – Exemplo de vizinhança na fase de localização

Na figura 6.12 é apresentada esta vizinhança de localização de *hubs* para uma solução *gol* de um hipotética instância do PCW com seis domínios. Figuram a sombreado as soluções que, embora façam parte da vizinhança de localização de *gol*, não são exploradas. ■

Quando se avalia a possibilidade de substituir o *hub* k por um nodo *spoke* i afecto inicialmente a k , a poupança é calculada com base na soma ponderada da diferença entre o número de novos arcos antes e depois da substituição, dentro do *cluster* de k , e da diferença entre o número de novos arcos necessários para ligar todos os *hubs* entre si, antes e depois da substituição, ou seja:

$$\lambda(\text{poupança}_{\text{arcosdentrocluster}} + \text{poupança}_{\text{arcosentrecluster}}). \quad (6.4)$$

Quando o *hub* k é isolado, isto é, não tem nodos *spoke* afectos, é avaliada a possibilidade da sua substituição por um nodo *spoke* i afecto a outro *hub* h . Neste caso, a poupança é a soma ponderada não só das duas componentes anteriores, mas também da diferença entre o número de novos arcos dentro do *cluster* inicial de i e entre os valores máximos de grau interno e grau externo dos *clusters* da solução actual, antes e depois do movimento, de acordo com explicação apresentada em 6.4.

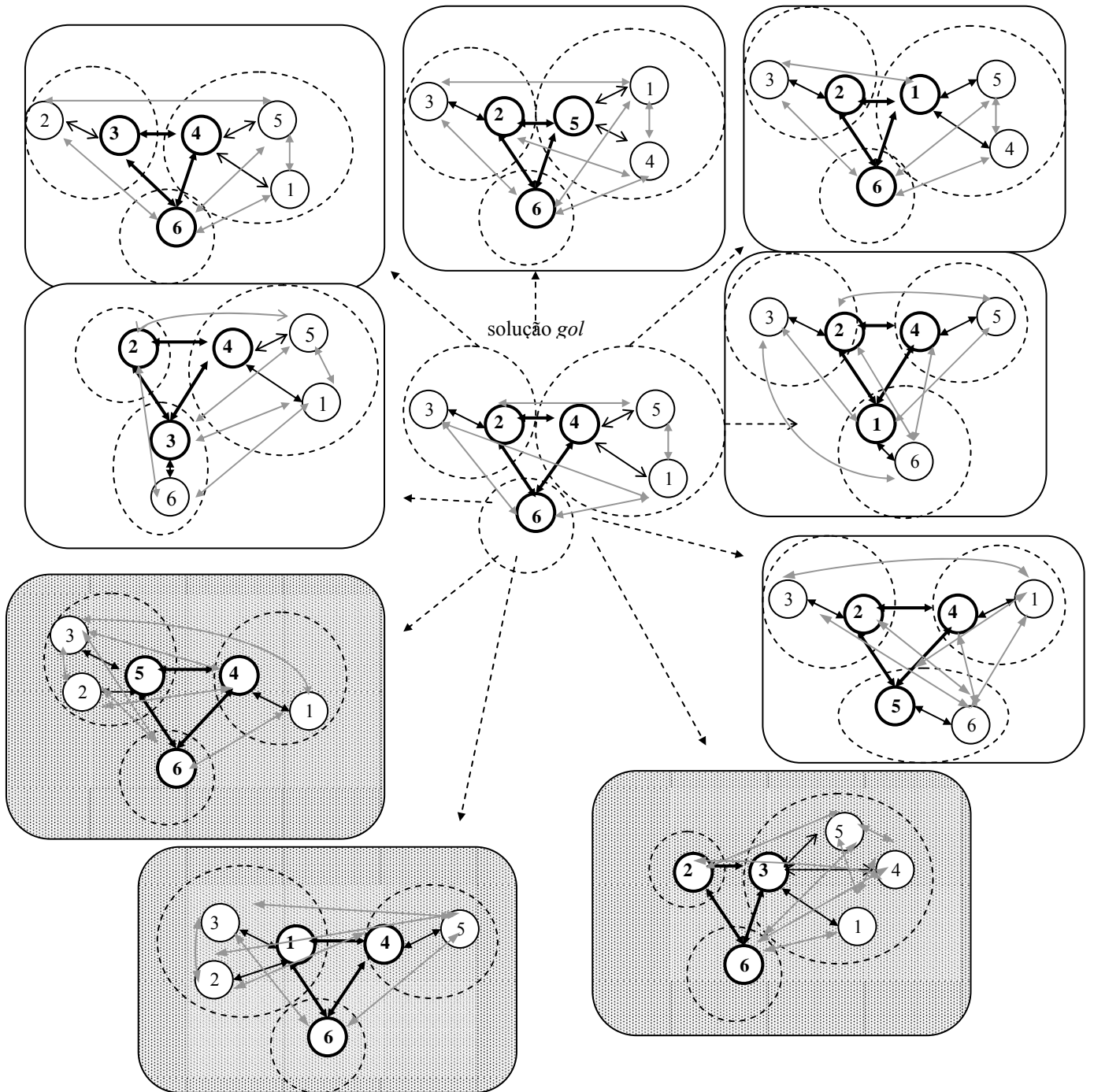


Figura 6.12 Vizinhança de localização da solução *gol*

Exemplo 6.7 - Cálculo da poupança para um movimento de localização

Na solução *tol*, apresentada na figura 6.13, durante a fase de localização é avaliada a substituição do *hub* 8 pelos nodos *spoke* 5, 6 e 7, do *hub* 3 pelos nodos *spoke* 1 e 2 e, finalmente, do *hub* 4 pelos nodos *spoke* 1, 2, 5, 6 e 7. O valor da poupança é calculado conforme se ilustra na tabela 6.3.

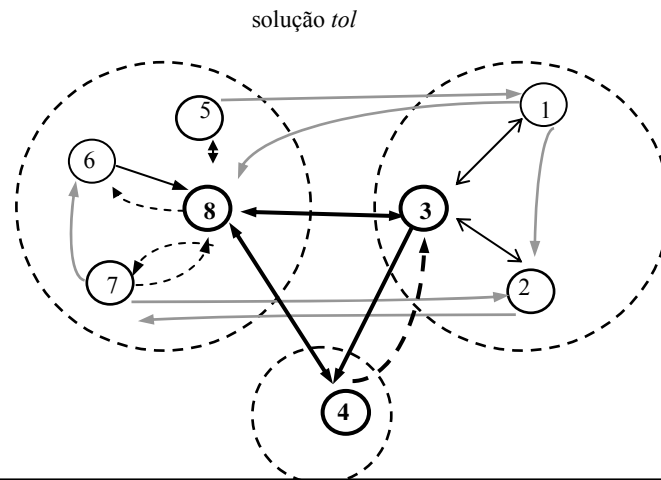


Figura 6.13 Representação da solução *tol* para ilustração da fase de localização

Em cada iteração deste procedimento é escolhido um nodo *spoke* para substituir um *hub* e de seguida são realizados movimentos de inserção e troca de modo a obter um ótimo local (fase de afectação incorporada na fase de localização). Isto significa que são avaliadas as vizinhanças de inserção e troca. Tal como na fase de afectação, existe um número máximo de movimentos permitido sem melhoria da solução que, neste caso, é dado pelo parâmetro *maxiterlocat*. Cada vez que é encontrada uma solução melhor, o contador de iterações é colocado a zero.

alteração de localização de <i>hub</i>	cálculo da poupança
troca do 8 com o 5	$\lambda((-1) + (-4)) = -5\lambda$
troca do 8 com o 6	$\lambda(0 + (-4)) = -4\lambda$
troca do 8 com o 7	$\lambda((-2) + (-4)) = -6\lambda$
troca do 3 com o 1	$\lambda((-1) + (-3)) = -4\lambda$
troca do 3 com o 2	$\lambda((-1) + (-3)) = -4\lambda$
troca do 4 com o 5	$\lambda(-1) + (1 - \lambda)((-1) + 0) = -1$
troca do 4 com o 6	$\lambda(-1) + (1 - \lambda)((-1) + 0) = -1$
troca do 4 com o 7	$\lambda(-1) + (1 - \lambda)((-1) + 0) = -1$
troca do 4 com o 1	$\lambda(-1) + (1 - \lambda)((0 + 1) = -2\lambda + 1$
troca do 4 com o 2	$\lambda(-2) + (1 - \lambda)(0 + 1) = -3\lambda + 1$

Tabela 6.3 Cálculo da poupança para os movimentos de localização a partir da solução *tol*

6.5.3 Listas tabu e critério de aspiração

De forma a conduzir o processo de pesquisa noutras direcções, determinadas soluções e/ou movimentos são classificados como tabu, por terem sido usados na pesquisa efectuada nas iterações anteriores. Tal significa que a vizinhança de uma solução vai sendo modificada ao longo das iterações.

Para os movimentos de inserção e troca é mantida a mesma lista tabu, designada por T_l , que guarda os movimentos realizados nas iterações anteriores e é constituída por pares de nodos formados por um *spoke* e um *hub*. De cada vez que se efectua um movimento de inserção é colocado na lista tabu o nodo *spoke* e o seu antigo *hub* e, de cada vez que se realiza um movimento de troca, são colocados dois pares na lista correspondente a cada um dos nodos *spoke* e respectivos *hubs*, de acordo com os exemplos das figuras 6.14 e 6.15.

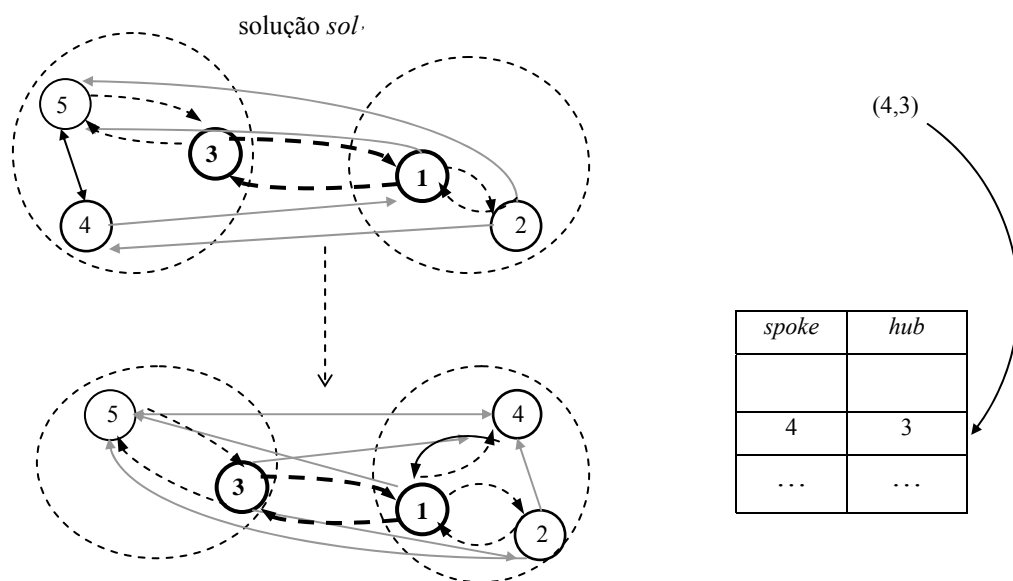


Figura 6.14 Actualização de T_I com base num movimento de inserção

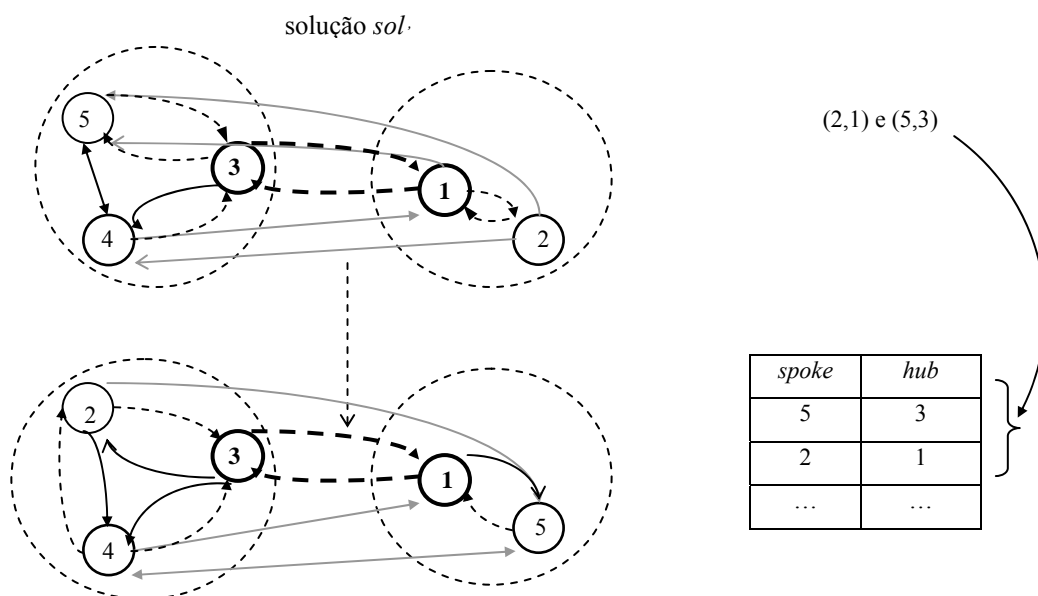


Figura 6.15 Actualização de T_I com base num movimento de troca

No caso em que a pesquisa da vizinhança corresponde a alteração na localização de um *hub* (ver figura 6.16), guarda uma parte da informação respeitante às soluções

pesquisadas anteriormente. Cada solução pode ser parcialmente caracterizada conhecendo apenas o seu conjunto de *hubs*, sendo portanto esse conjunto armazenado em T_2 . Ambas as listas apresentam um tamanho fixo.

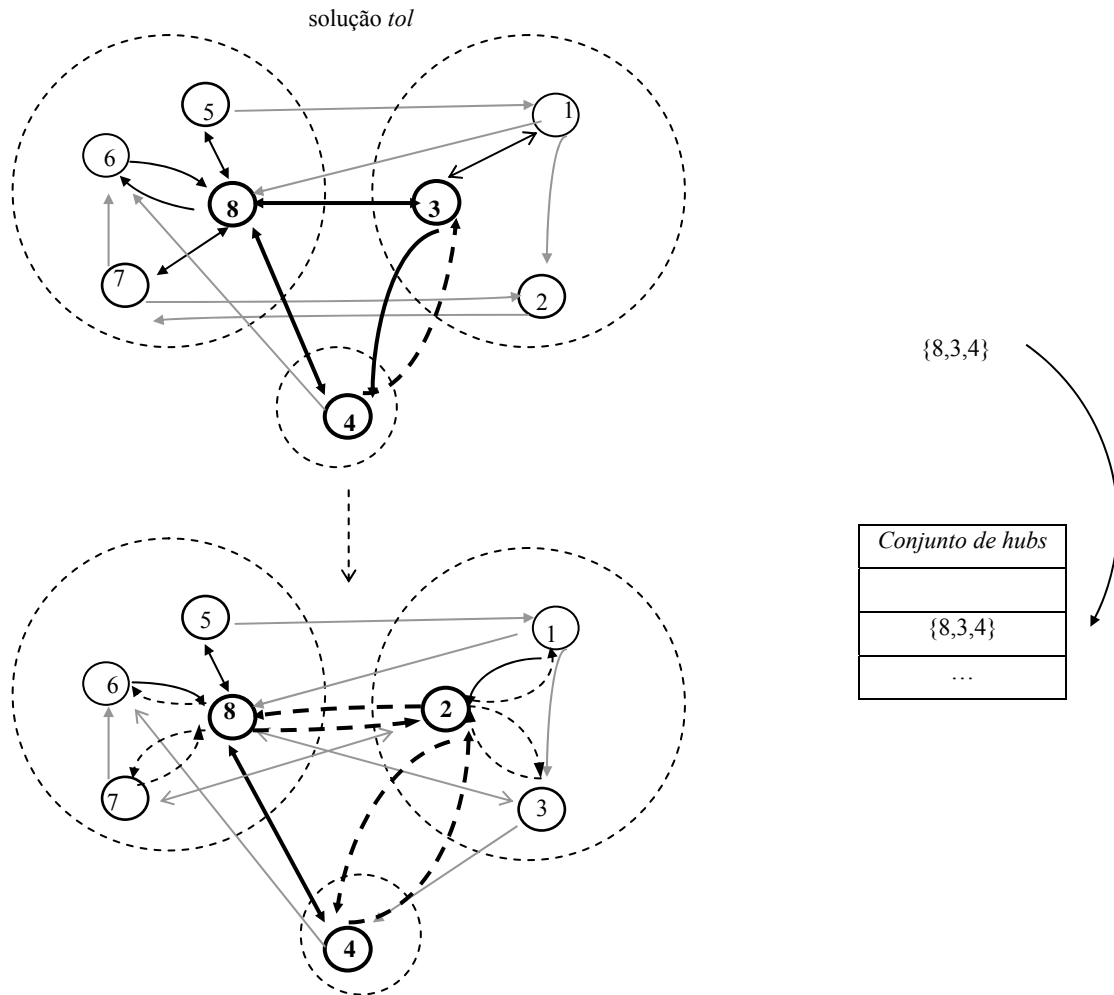


Figura 6.16 Atualização de T_2 com base num movimento de localização

O critério de aspiração usado permite a realização de um movimento tabu, caso este movimento implique a deslocação para uma solução melhor que a melhor solução encontrada até ao momento.

6.5.4 Diversificação

Na pesquisa tabu a diversificação surge para ultrapassar de certo modo os efeitos da memória (de curta duração), reforçando a pesquisa com estruturas de memória de longa duração, que direccionam a pesquisa para zonas afastadas. A implementação da diversificação neste algoritmo foi conseguida através da reinicialização da pesquisa com novas soluções na fase de localização. Assim, é permitido em determinadas circunstâncias alterar a solução existente fazendo uma nova afectação de todos os nodos *spoke* ao novo conjunto de *hubs* obtido durante os movimentos de localização. A escolha entre partir da solução corrente ou reiniciar com uma nova é feita no início da fase de localização com uma probabilidade de 0.75 para o primeiro caso e 0.25 para o segundo caso, dado que construir uma nova solução acarreta um maior consumo de tempo computacional.

6.5.5 Oscilação estratégica

A oscilação estratégica foi incorporada neste algoritmo com o objectivo de permitir a entrada na região não admissível, relaxando as restrições de debilidade e, de seguida, forçar a reentrada numa zona da região admissível, eventualmente, ainda por pesquisar.

Sempre que não se observe melhoria da solução durante um número fixo de iterações (*maxrepeatsolution*), entra-se na fase de oscilação estratégica. Neste algoritmo são usadas duas formas distintas de oscilação que se distinguem pelos movimentos de entrada na região não admissível. No caso de estar na fase de afectação, a entrada na região não admissível realiza-se com movimentos de inserção de nodos *spoke* em outros *hubs*. Se o processo está na fase de localização, a entrada faz-se com alteração de localização dos *hubs*. Em ambos os casos, os movimentos são realizados até ser verificado o critério de paragem dado por um limite máximo de não admissibilidade da solução (*maxgrau*) ou por um número máximo de iterações (*maxiter*). A escolha dos movimentos para entrar na região não admissível baseia-se na obrigatoriedade de melhorar a solução e na minimização do grau de não admissibilidade, e são guardados numa lista tabu T_5 . Considera-se que o grau de não admissibilidade de uma solução é dado pelo número total de ligações entre dois quaisquer nodos da rede que violam a restrição de debilidade.

A oscilação estratégica pode ser baseada na melhor solução encontrada até ao momento ou na solução actual. A opção depende de a solução já ter sido ou não utilizada na oscilação estratégica em iterações anteriores. Para a oscilação estratégica é mantida uma lista tabu, T_3 , cujos elementos são vectores formados por três componentes. A primeira posição guarda o valor da função objectivo relativo à solução, a segunda e a terceira posições guardam valores binários que são zero, caso a solução nunca tenha sido utilizada como solução inicial na oscilação estratégica na forma de afectação e na forma de localização, respectivamente, e valor igual a um, caso contrário.

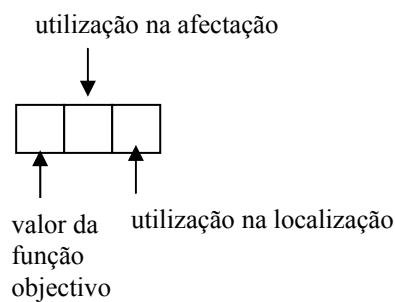


Figura 6.17 Estrutura da lista tabu T_3 mantida na oscilação estratégica

O facto de se usar exclusivamente o valor da função objectivo para caracterizar a solução tem vantagens em termos de poupança de memória e tempo computacional gasto. Tal opção pode, no entanto, trazer algumas desvantagens no caso de duas soluções distintas terem o mesmo valor da função objectivo, o que aconteceu com algumas instâncias durante os testes computacionais.

Durante a entrada e saída da região não admissível há uma alteração nos critérios de escolha dos movimentos, muito idênticos aos que são utilizados em Cortinhal e Captivo (2003), comparativamente com o que é feito quando a pesquisa é realizada na região admissível. A entrada na região não admissível é orientada pela escolha de movimentos que melhoram obrigatoriamente o valor da função objectivo e cujo grau de não admissibilidade é o menor possível. A saída da região admissível é orientada por movimentos que diminuem o grau de não admissibilidade. Quando a admissibilidade não é recuperada, é realizada nova tentativa de entrada na região não admissível com outro conjunto de movimentos e os movimentos anteriores são colocados numa lista T_4 . É

estabelecido um limite no número de tentativas (*maxosc*) para entrar na região não admissível.

Nos dois procedimentos de oscilação estratégica apresentados atrás há que recuperar a admissibilidade da solução. Tal é conseguido através de movimentos de inserção e, caso seja necessário, também de movimentos de localização. Qualquer destes movimentos terá que ser, por um lado, permissível, isto é, não pode pertencer ao conjunto de movimentos que foram utilizados para entrar na região não admissível, lista T_5 , e, por outro, terá que reduzir o grau de não admissibilidade. Ao contrário do que acontece em outros problemas estudados, por exemplo, por Cortinhal e Captivo (2003) aqui a recuperação da admissibilidade exige a realização de vários movimentos, tornando-se muito complicada e exigindo, por vezes, um grande esforço em termos computacionais.

6.6 Procedimento híbrido

É proposta uma combinação da pesquisa tabu incluindo oscilação estratégica com a GRASP, resultando numa metaheurística híbrida destas duas, designada por Híbrida.

Este procedimento começa por correr a Global GRASP, tal como foi apresentada na secção 6.4 e a melhor solução obtida servirá de *input* para a pesquisa tabu - Global Tabu com oscilação estratégica, apresentada na secção 6.5. Como veremos na descrição da experiência computacional, este procedimento acabou por apresentar muito bons resultados quando aplicado a algumas instâncias do problema.

6.7 Estudo bi-objectivo

Os métodos heurísticos apresentados anteriormente baseiam-se num raciocínio mono-objectivo, mas foram aplicados ao PCW, problema de minimização bi-objectivo, tomando uma versão com único objectivo de minimizar a soma ponderada das funções objectivo f_1 e f_2 e fazendo variar os pesos λ e $(1-\lambda)$: $\min(\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2)$, com $\lambda \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$.

Verificou-se que apesar de ser uma técnica relativamente pouco elaborada para optimização bi-objectivo e se reconheça as limitações que a metodologia das somas

pesadas apresenta na geração de soluções eficientes não suportadas, talvez por introduzir aleatoriedade em alguns dos processos incorporados nas metaheurísticas implementadas se obtiveram razoáveis aproximações à fronteira de Pareto do PCW para as instâncias do PCW que puderam ser optimalmente resolvidas.

6.8 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados métodos não exactos para o PCW. Pelo facto deste problema ser de natureza bi-objectivo, optou-se primeiro por desenvolver métodos heurísticos para a sua versão com função objectivo ponderada (mono-objectivo) e, depois, com os mesmos métodos, alterando os pesos, obter várias soluções candidatas a soluções eficientes da versão base do PCW, bi-objectivo portanto.

As secções 6.2 a 6.6 referem-se às heurísticas para obtenção de soluções admissíveis para o PCW, nomeadamente, uma GRASP, uma pesquisa tabu e uma híbrida, combinação das duas anteriores.

Os resultados dos testes computacionais aplicados para avaliar o comportamento das heurísticas serão discutidos no capítulo seguinte.

Capítulo 7

Testes computacionais

«...Men have sought to make a world from their own conception and to draw from their own minds all the material which they employed, but if, instead of doing so, they had consulted experience and observation, they would have the facts and not opinions to reason about, and might have ultimately arrived at the knowledge of the laws which govern the material world." ...»

Francis Bacon (1623)

7.1 Introdução

Neste capítulo discute-se de forma detalhada a experimentação computacional realizada com as instâncias do PCW reais e com as geradas, todas descritas no capítulo 4. Tomou-se em consideração que o problema em estudo tem dois objectivos de optimização, logo não se pode falar na existência de uma solução óptima e, para além disso, que cada método depende de um número razoável de parâmetros para os quais é necessário escolher valores apropriados.

A metodologia levada a cabo, compreendida em duas etapas, foi a seguinte:

- (1) numa primeira abordagem, secção 7.2 e 7.3, foram realizados testes computacionais tomando a versão do PCW com apenas o objectivo de minimizar a soma ponderada das funções objectivo e com base nesses testes foram obtidos minorantes e escolhidos parâmetros, bem como versões dos vários métodos não exactos;

(2) na secção 7.4, descrevem-se os estudos computacionais incidentes no PCW, de facto, encarado como um problema bi-objectivo.

Os resultados destes testes e respectiva discussão são analisados na secção 7.5. A secção, 7.6, apresenta uma análise em termos de impacto que tem na estrutura do grafo a reconfiguração de uma comunidade *Web* com a metodologia delineada. Os indicadores obtidos revelam desde já alguns resultados bastante animadores. São também apontadas conclusões e algumas perspectivas de futuros estudos computacionais, na secção 7.7.

As heurísticas foram implementadas em C e correram num processador PC Pentium IV, com 512 Mb RAM e 2.6 Ghz. Por sua vez, os testes computacionais com o *software* CPLEX 8.1 usado para resolver as intâncias de problemas de programação linear e linear inteira foram realizados num PC Pentium IV, com 512 Mb RAM e 2.8 Ghz.

7.2 Relaxações lineares do modelo para obtenção de minorantes

Antes de testar computacionalmente as heurísticas para o PCW na versão de soma ponderada (mono-objectivo) decidiu-se obter minorantes para o valor óptimo deste problema. Assim, tomando a função objectivo definida como uma soma ponderada de f_1 e f_2 com pesos fixos $\lambda=0.6$ e $(1-\lambda)=0.4$, resolveram-se as relaxações lineares dos diferentes modelos apresentados em 5.3: PCW-L1, PCW-L1W, PCW-L2 e PCW-L3.

Nas tabelas 7.1 e 7.2 são apresentados para as instâncias relativas à comunidade *Web* em estudo, quer os valores óptimos nas situações em que é possível o seu cálculo, quer os minorantes obtidos a partir das relaxações lineares dos modelos acima mencionados. Na coluna (4) é calculado o *gap* relativo dado por $\frac{(\text{óptimo} - LI)}{\text{óptimo}} \times 100\%$, onde *LI* é o minorante.

Pode-se constatar pelas tabelas 7.1 e 7.2 que, embora aparentemente a relaxação linear do modelo PCW-L2 apresente resultados melhores que as outras, o excessivo tempo computacional necessário para resolver instâncias com um número de nodos superior a 30 torna-a inexecutável. Sendo assim, e face à nítida vantagem em termos de tempo

7. Testes computacionais

computacional do modelo de Ernst et al. (2005) - PCW-L3, este foi aplicado para obter minorantes para todas as instâncias e soluções óptimas para as instâncias com 20 nodos, as únicas para as quais se conseguiu obter o óptimo.

(1) Comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) problema	(3) valor da função objectivo	(4) relativo <i>gap</i> (%)	(5) tempo de CPU (seg.)
Mat20/20	PCW_L3	30.4	0.0	3863.4
	PCW-RL1	5.9	80.6	63.7
	PCW-RL1W	5.9	80.6	17.0
	PCW-RL2	6.5	78.6	69.0
	PCW-RL3	5.9	80.6	0.3
Mat30/30	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	8.1	-	245.8
	PCW-RL2	9.0	-	2136.8
	PCW-RL3	8.1	-	3.3
Mat53/53	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	13.6	-	38.0
Clim/68	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	20.2	-	90.5
Pov/59	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	17.2	-	57.8
Hiv/55	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	17.4	-	26.1

Tabela 7.1 Resultados computacionais comparativos das várias relaxações lineares para as comunidades *Web* reais

7. Testes computacionais

(1) Comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) problema	(3) valor da função objectivo	(4) <i>gap</i> relativo (%)	(5) tempo CPU (seg.)
Rnd20/20	PCW-L3	33.2	0.0	49772.6
	PCW-RL1	5.8	82.5	64.0
	PCW-RL1W	5.8	82.5	13.1
	PCW-RL2	6.0	81.9	55.7
	PCW-RL3	5.8	82.5	0.3
Rnd30/30	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	7.1	-	52.8
	PCW-RL2	16.2	-	1196.8
	PCW-RL3	7.1	-	2.6
Rnd40/40	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	8.3	-	11.2
Rnd50/50	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	25.9	-	9.8
Rnd60/60	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	11.1	-	72.1
Rnd150/150	PCW-RL1	-	-	-
	PCW-RL1W	-	-	-
	PCW-RL2	-	-	-
	PCW-RL3	25.1	-	2 243.3

Tabela 7.2 Resultados computacionais comparativos das várias relaxações lineares para as comunidades *Web* geradas

Observando as duas tabelas anteriores, e tomando em consideração o valor óptimo para as duas instâncias de menor dimensão, verifica-se que os minorantes obtidos por relaxação linear são de muito fraca qualidade.

7.3 Estudo computacional das heurísticas

Nas próximas páginas serão discutidos os resultados obtidos no teste computacional das diversas instâncias (reais e geradas), respectivamente com cada um dos métodos, Global GRASP, Global Tabu e Híbrida, todos para o PCW na versão de minimização da soma ponderada de duas funções objectivo. No final desta secção serão apresentados os resultados globais e comparativos entre estes métodos.

Na função objectivo ponderada fixou-se os pesos da seguinte forma: $\lambda=0.6$ e $(1-\lambda)=0.4$. Estes valores, em várias experiências computacionais, permitiram atingir uma solução de equilibrada entre os dois objectivos.

O intervalo no qual o número de *hubs*, p , pode variar é igual para todas as heurísticas dependendo exclusivamente da dimensão das instâncias. Sendo assim, para instâncias cujo número de nodos é inferior a 30 torna-se $p \in [1,10]$, caso contrário, $p \in [1,15]$.

Os valores relativos à Global GRASP figuram nas tabelas 7.3 e 7.4, onde os parâmetros α_1 , α_2 e *maxiter* tomam diferentes valores (colunas (2) e (3)). No entanto, como se pode constatar em todos os testes computacionais, α_1 é igual a α_2 . Esta opção resulta de se ter considerado que o importante é comparar os resultados da Global GRASP a partir de soluções obtidas por procedimento totalmente *greedy* ($\alpha_1=\alpha_2=0$) passando por soluções intermédias, até chegar soluções iniciais construídas com um elevado grau de aleatoriedade ($\alpha_1=\alpha_2=1$). Não foram feitas quaisquer experiências com ($\alpha_1 \neq \alpha_2$). De acordo com testes preliminares, o parâmetro *maxiterconst* do procedimento Construtiva Semi-Aleatorizada foi fixado igual a 3.

O procedimento Global GRASP correu cinco vezes para cada instância e para cada escolha de parâmetros α_1 e α_2 . Nas colunas (4), (5) e (6) das tabelas 7.3 e 7.4 são dadas, respectivamente, o valor da função objectivo ponderada, para simplificar designado por valor, relativo à pior, à mediana e à melhor entre as cinco soluções obtidas. Salienta-se nos dados da tabela (a *bold*) os melhores valores da função objectivo, respectivamente, na pior, na mediana e na melhor das soluções para cada uma das instâncias.

7. Testes computacionais

Além disso, em cada tabela são fornecidos os números de domínios, ou seja nodos de cada instância (coluna (1)) e o tempo de CPU total das cinco corridas em segundos, (coluna (7)).

(1) comunidade <i>Web</i> / n° nodos	(2) α_1, α_2	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	0	50	40.8	40.8	40.8	0.8
		100	40.8	40.8	40.8	2.2
	0.35	50	30.6	30.4	30.4	1.3
		100	30.6	30.6	30.4	2
	0.5	50	34.8	31.8	30.6	0.7
		100	31.8	30.6	30.4	1.7
	0.85	50	36.2	36.0	34.4	1.1
		100	35.5	33.4	30.6	2.4
	1	50	38.0	36.6	36.2	1.3
		100	36.2	36.2	30.6	2.5
Mat30/30	0	50	68.2	68.2	68.2	1.8
		100	68.2	68.2	68.2	3.0
	0.35	50	61.0	59.2	58.0	1.7
		100	59.6	59.2	58.0	3.4
	0.5	50	57.6	56.4	55.0	2.0
		100	57.6	52.6	52.6	2.8
	0.85	50	59.2	55.6	53.4	2.3
		100	55.0	52.6	52.6	3.6
	1	50	59.8	58.0	53.6	3.8
		100	56.2	52.6	52.4	5.0

Tabela 7.3 Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades *Web* reais (parte 1)

7. Testes computacionais

(continuação da tabela 7.3)

(1) comunidade <i>Web</i> / n° nodos	(2) α_2 α_i	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)
Mat53/53	0	50	111.2	111.2	111.2	5.3
		100	111.2	111.2	111.2	10.2
	0.35	50	110.4	107.6	105.0	6.5
		100	107.6	107.2	106.2	11.7
	0.5	50	109.6	107.2	106.2	4.3
		100	106.2	104.4	103.8	8.1
	0.85	50	111.0	107.2	104.8	7.8
		100	108.8	107.6	103.8	13.5
	1	50	118.0	116.4	110.6	10.5
		100	114.8	111.4	107.6	20.9
Clim/68	0	50	139.2	139.2	139.2	2.5
		100	139.2	139.2	139.2	3.6
	0.35	50	131.4	131.4	130.6	3.4
		100	131.2	130.6	130.4	5.8
	0.5	50	131.2	130.4	130.4	5.7
		100	130.4	130.4	130.4	10.9
	0.85	50	131.6	131.4	131.2	13.2
		100	131.6	131.2	130.4	28.7
	1	50	133.8	133.2	133.0	15.5
		100	133.2	133.0	132.8	33.3

Tabela 7.3 Resultados computacionais da Global GRASP para as comunidades *Web* reais (parte 2)

7. Testes computacionais

(continuação e finalização da tabela 7.3)

(1) comunidade <i>Web</i> / n° nodos	(2) α_1, α_2	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)
Pov/59	0	50	123.0	123.0	123.0	3.0
		100	123.0	123.0	123.0	4.9
	0.35	50	120.4	119.6	119.6	4.1
		100	120.4	119.6	119.6	5.8
	0.5	50	119.8	119.8	119.6	4.5
		100	119.8	119.6	119.6	8.2
	0.85	50	121.6	121.2	120.2	10.1
		100	120.4	120.4	119.8	19.3
	1	50	123.6	120.6	120.4	10.8
		100	122.4	121.2	119.8	20.5
Hiv/55	0	50	104.2	104.2	104.2	2.1
		100	104.2	104.2	104.2	3.4
	0.35	50	103.2	103.2	102.2	2.5
		100	103.2	103.2	102.2	4.5
	0.5	50	102.4	101.8	101.8	3.6
		100	101.8	101.8	101.8	6.6
	0.85	50	102.8	102.0	101.8	8.7
		100	101.8	101.4	101.4	16.3
	1	50	102.8	102.8	101.8	8.9
		100	102.8	102.8	101.8	16.7

Tabela 7.3 Resultados computacionais da Global GRASP para as comunidades *Web* reais (parte 3)

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° nodos	(2) $\alpha_i,$ α_e	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)	
Rnd20/20	0	50	36.8	36.8	36.8	1.1	
		100	36.8	36.8	36.8	2.0	
	0.35	50	34.6	33.2	33.2	1.1	
		100	33.6	33.2	33.2	1.5	
	0.5	50	37.0	34.0	33.2	1.0	
		100	36.6	34.0	33.2	1.5	
	0.85	50	44.2	40.8	39.8	1.2	
		100	42.4	39.8	35.6	1.7	
	1	50	48.6	43.2	39.2	1.4	
		100	43.6	39.6	35.8	1.9	
	Rnd30/30	0	50	68.4	68.0	68.0	2.3
			100	68.0	68.0	68.0	3.6
		0.35	50	66.0	60.6	60.2	3.7
			100	66.2	61.6	60.6	2.3
0.5		50	72.0	69.8	64.6	2.4	
		100	67.4	62.4	56.8	3.7	
0.85		50	70.4	64.6	62.8	2.3	
		100	75.0	68.8	62.2	4.8	
1		50	85.8	75.2	64.6	2.4	
		100	76.6	73.6	58.6	3.2	

Tabela 7.4 Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades *Web* geradas (parte 1)

7. Testes computacionais

(continuação da tabela 7.4)

(1) comunidade <i>Web</i> / n° nodos	(2) α_1 , α_2	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)	
Rnd40/40	0	50	119.8	119.8	119.8	2.1	
		100	119.8	119.8	119.8	3.0	
	0.35	50	120.0	119.6	119.6	2.5	
		100	119.8	119.6	119.4	4.1	
	0.5	50	120.6	120.4	119.8	4.1	
		100	120.6	120.4	119.2	5.7	
	0.85	50	121.2	120.6	120.4	4.8	
		100	120.8	120.6	119.8	8.4	
	1	50	121.2	120.6	119.6	4.6	
		100	120.6	120.4	119.4	8.3	
	Rnd50/50	0	50	193.4	193.4	193.4	1.8
			100	193.4	193.4	193.4	3.0
		0.35	50	174.8	173.6	173.0	4.0
			100	173.8	172.2	169.8	7.1
0.5		50	172.8	172.4	168.8	6.4	
		100	171.6	171.2	168.2	11.8	
0.85		50	177.4	176.0	174.8	8.5	
		100	174.0	172.8	169.2	16.3	
1		50	176.6	176.2	172.4	8.5	
		100	178.0	173.8	170.8	16.1	

Tabela 7.4 Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades *Web* geradas (parte 2)

(continuação da tabela 7.4)

(1) comunidade <i>Web</i> / nº nodos	(2) α_1, α_2	(3) <i>maxiter</i>	(4) valor da pior solução	(5) valor da solução mediana	(6) valor da melhor solução	(7) tempo total de CPU (seg.)
Rnd60/60	0	50	218.0	218.0	218.0	2.9
		100	218.0	218.0	218.0	5.2
	0.35	50	197.8	196.6	195.6	6.8
		100	197.4	196.4	196.2	12.8
	0.5	50	201.8	199.4	198.2	10.0
		100	202.4	199.6	197.4	19.5
	0.85	50	205.0	202.8	202.4	15.3
		100	204.2	200.4	198.2	25.2
	1	50	202.0	201.4	199.4	12.4
		100	203.4	202.6	199.4	23.9
Rnd150/150	0	50	480.2	477.4	475.2	14.2
		100	480.2	479.0	476.8	27.8
	0.35	50	360.4	352.0	343.8	78.6
		100	343.8	342.6	341.0	166.6
	0.5	50	366.0	345.2	344.2	106.9
		100	356.2	344.6	341.0	212.4
	0.85	50	488.8	390.8	345.0	131.7
		100	393.4	362.0	347.2	251.6
	1	50	431.0	399.4	351.2	130.3
		100	391.8	364.6	351.2	249.5

Tabela 7.4 Resultados computacionais da Global GRASP para comunidades *Web* geradas (parte 3)

Verifica-se que as soluções medianas de menor valor foram obtidas com os parâmetros $\alpha_1=\alpha_2=0.35$ e $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ para onze das doze instâncias, exceção para a instância Hiv.

Pela análise destes resultados verifica-se, igualmente, que na maioria das instâncias é com os parâmetros $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ que a Global GRASP apresenta os menores valores para a

7. Testes computacionais

melhor solução. No entanto, para algumas das instâncias tomando os parâmetros $\alpha_1=\alpha_2=0.35$ a Global GRASP atinge também bons resultados quanto à melhor solução.

No caso das piores soluções, em metade das instâncias a heurística atingiu o valor mais baixo com os parâmetros $\alpha_1=\alpha_2=0.35$ e nas restantes os resultados mais favoráveis são obtidos com $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ e $\alpha_1=\alpha_2=0.85$.

É interessante constatar que em qualquer dos casos (piores, medianas e melhores soluções) é com $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ que a Global GRASP chega a melhores soluções no que respeita às instâncias reais.

Note-se ainda que a Global GRASP exigiu tempos computacionais relativamente baixos quando comparados com os da resolução exacta do PCW (ver nas tabelas 7.7 e 7.8 as instâncias Mat20 e Rnd20). Estes tempos não mostram diferenças significativas para os diferentes valores dos parâmetros, excepto quando aumenta o número de iterações, o que está de acordo com os testes preliminares.

De seguida serão discutidos os resultados da Global Tabu que correu apenas três vezes para cada instância. Optou-se, neste caso, por diminuir o número de corridas deste procedimento com cada instância pois este método não é caracterizado por um elevado grau de aleatoriedade, como acontece com a Global GRASP.

Os resultados da pesquisa tabu são mostrados na tabela 7.6 onde as colunas (1), (3), (4) e (5) têm o mesmo significado que as respectivas das tabelas anteriores relativas à Global GRASP. Alguns parâmetros deste procedimento foram previamente fixados de acordo com a tabela 7.5 com base em experimentação computacional preliminar.

7. Testes computacionais

parâmetros	valores
$ K $ (número de soluções iniciais)	5
<i>maxd</i> (filtro com base no grau)	4
<i>maxiterassign</i> (número máximo de movimentos na fase de afectação sem melhoria da solução)	10
<i>maxiterlocat</i> (número máximo de movimentos na fase de localização sem melhoria de solução)	20
<i>maxgrau</i> (grau máximo de violação da restrição de debilidade)	50
<i>maxiter</i> (número máximo de movimentos para entrar na região não admissível)	60
<i>maxosc</i> (número máximo de tentativas de entrada na região não admissível)	3

Tabela 7.5 Valores dos parâmetros da Global Tabu

O tamanho de todas as listas tabu fixou-se inicialmente em 10. O procedimento Global Tabu foi chamado três vezes sem oscilação estratégica (OE) e realizaram-se três corridas com oscilação, tomando $maxrepeatsolution=3$ (ver coluna (2)).

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) pesquisa tabu	(3) valor da pior solução	(4) valor da solução mediana	(5) valor da melhor solução	(6) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	sem OE	37.0	36.4	36.2	37.5
	com OE	36.4	34.4	31.0	59.7
Mat30/30	sem OE	58.0	58.0	58.0	33.7
	com OE	51.2	50.0	49.6	270.6
Mat53/53	sem OE	114.8	114.8	112.8	175.3
	com OE	112.4	110.4	100.2	1 319.1
Clim/68	sem OE	131.4	131.4	130.4	4.0
	com OE	130.6	130.6	130.4	196.7
Pov/59	sem OE	122.2	120.8	120.6	24.6
	com OE	120.4	120.4	120.4	208.7
Hiv/55	sem OE	102.4	102.4	102.4	1.4
	com OE	102.4	102.4	101.8	117.8
Rnd20/20	sem OE	52.0	52.0	52.0	3.5
	com OE	34.8	34.8	34.8	27.3
Rnd30/30	sem OE	97.8	97.8	97.8	15.7
	com OE	89.2	89.2	59.2	117.2
Rnd40/40	sem OE	120.8	120.6	119.4	2.8
	com OE	119.2	119.2	119.2	102.5
Rnd50/50	sem OE	173.0	173.0	173.0	17.0
	com OE	172.0	169.8	169.0	455.8
Rnd60/60	sem OE	197.8	197.8	197.8	43.0
	com OE	197.8	194.4	194.4	921.3
Rnd150/150	sem OE	341.4	341.4	341.4	3 686.0
	com OE	340.8	340.2	339.6	5 098.6

Tabela 7.6 Resultados computacionais da Global Tabu

Como seria de esperar, a Global Tabu com oscilação estratégica consome muito mais tempo do ponto de vista computacional do que sem a incorporação deste procedimento

(coluna (6)). No entanto, a qualidade das piores, medianas e melhores soluções obtidas é sempre melhor ou igual do que a obtida sem oscilação estratégica.

Finalmente, a Global Tabu com oscilação estratégica foi combinada com a Global GRASP, dando origem à heurística Híbrida, na qual as soluções que servem de *input* para a pesquisa tabu, conjunto K , são construídas pelo procedimento Global GRASP.

A Híbrida correu três vezes para cada instância do PCW. As tabelas 7.7 e 7.8 dizem respeito à comparação dos resultados obtidos com os três métodos estudados: Global GRASP com $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ e $maxiter=50$, Global Tabu com oscilação estratégica e Híbrida. São também dados nas colunas (3) a (5) destas tabelas os valores relativos à solução ótima no caso das instâncias com 20 nodos. Nos outros casos não foi possível obter a solução ótima (exacta), pelo que se apresenta na coluna (5) o valor ótimo da relaxação linear do modelo PCW-L3 com a função objectivo ponderada e o valor da solução mediana obtida com as metaheurísticas. Optou-se por utilizar o valor da solução mediana dada a existência de um grau de aleatoriedade em todas as metaheurísticas, de modo a não se valorizar nenhuma das soluções extremas. O *gap* relativo figura na coluna (6), calculado pela fórmula $\left[\frac{LS - LI}{LI \text{ ou } \underline{\text{ótimo}}} \times 100\% \right]$, onde LS é o majorante correspondente ao valor da solução mediana obtido pela heurística nas cinco ou três corridas conforme a heurística.

Nas tabelas 7.7 e 7.8 a coluna (7) apresenta os tempos totais de CPU para as várias corridas das heurísticas e para a resolução do PCW-L3 com função objectivo ponderada ou respectiva relaxação linear usando o *software* CPLEX 8.1.

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método	(3) <i>hubs</i> + arcos novos	(4) <i>s + t</i>	(5) valor da solução mediana	(6) <i>gap</i> relativo (%)	(7) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	exacto	6+26	14+14	30.4	0.0	3 863.4
	relax. linear	-	-	6.5	-	0.3
	Global Tabu	6+32	15+14	34.4	13.3	59.7
	Global GRASP	6+25	14+16	30.6	0.7	0.8
	Híbrida	6+26	14+14	30.4	0.0	10.1
Mat30/30	relax. linear	-	-	9	-	2136.8
	Global Tabu	7+45	23+24	50.0	455.6	270.6
	Global GRASP	5+35	45+36	56.4	526.7	2.0
	Híbrida	4+33	40+36	52.6	484.4	115.1
Mat53/53	relax. linear	-	-	13.6	-	38.0
	Global Tabu	9+93	84+39	110.4	711.8	1319.1
	Global GRASP	5+63	97+73	107.2	688.2	4.3
	Híbrida	6+68	90+60	104.4	667.7	911.3
Clim/68	relax. linear	-	-	20.2	-	90.5
	Global Tabu	5+125	46+66	106	424.8	1 154
	Global GRASP	4+128	59+69	130.4	545.5	5.7
	Híbrida	4+128	59+69	130.4	545.5	151.1
Pov/59	relax. linear	-	-	17.2	-	57.8
	Global Tabu	5+132	59+62	130.6	659.3	196.7
	Global GRASP	4+105	74+62	119.8	596.5	4.5
	Híbrida	4+105	74+62	119.8	596.5	174.1
Hiv/55	relax. linear	-	-	17.4	-	26.1
	Global Tabu	3+101	54+46	102.4	488.5	117.8
	Global GRASP	3+100	51+49	101.8	485.0	3.6
	Híbrida	3+100	51+49	101.8	485.0	130.8

Tabela 7.7 Resultados computacionais comparativos dos vários métodos para as comunidades *Web* reais

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método	(3) <i>hubs</i> + arcos novos	(4) <i>s</i> + <i>t</i>	(5) custo da solução mediana	(6) <i>gap</i> relativo (%)	(7) tempo total de CPU (seg.)
Rnd20/20	exacto	6+28	15+17	33.2	0.0	49 772.6
	relax. linear	-	-	6	-	55.7
	Global Tabu	6+30	16+17	34.8	4.8	27.3
	Global GRASP	6+28	15+17	33.2	0.0	1.1
	Híbrida	6+28	15+17	33.2	0.0	10.5
Rnd30/30	relax. linear	-	-	16.2	-	1196.8
	Global Tabu	6+42	79+72	89.2	450.6	117.2
	Global GRASP	10+75	24+23	69.8	330.9	2.4
	Híbrida	8+55	27+28	59.8	269.1	137.1
Rnd40/40	relax. linear	-	-	8.3	-	11.2
	Global Tabu	5+73	96+85	119.2	1 336.1	102.5
	Global GRASP	4+72	93+94	120.4	1 350	4.1
	Híbrida	4+69	97+93	119.8	1 343.4	72.8
Rnd50/50	exacto	-	-	-	-	-
	relax. linear	-	-	9.8	-	25.9
	Global Tabu	6+95	147+126	169.8	1 632.6	455.8
	Global GRASP	6+96	143+135	172.4	1 659.2	6.4
	Híbrida	5+89	149+136	170.4	1 638.8	380.1
Rnd60/60	exacto	-	-	-	-	-
	relax. linear	-	-	11.1	-	72.1
	Global Tabu	7+117	153+147	194.4	1 651.4	921.3
	Global GRASP	6+114	164+157	200.4	1 705.4	10.1
	Híbrida	7+118	157+148	197	1 674.8	870.6
Rnd150/150	exacto	-	-	-	-	-
	relax. linear	-	-	25.1	-	2 243.3
	Global Tabu	6+294	201+201	340.2	1 255.4	5 098.6
	Global GRASP	6+294	203+204	342.8	1 265.7	78.5
	Híbrida	4+282	206+213	339.2	1 251.4	17 416.0

Tabela 7.8 Resultados computacionais comparativos dos vários métodos para as comunidades *Web* geradas

Observando as duas tabelas anteriores, 7.7 e 7.8, verifica-se que as metaheurísticas foram métodos com boa qualidade de soluções e baixo tempo computacional, razoáveis e alternativos ao método exacto nos casos em que este se conseguiu aplicar. Nas outras instâncias, não foi possível a resolução exacta por excesso de tempo computacional e limites de memória e capacidade de processamento.

Como seria de esperar, aumentou o tempo computacional com o aumento da dimensão das instâncias. Em todos os casos a heurística Global GRASP é aquela com menos gastos em termos de tempo computacional. Note-se que a heurística Híbrida consegue também alcançar uma solução óptima para a instância Mat20, ilustrada na figura 7.1, e no caso da instância Rnd20 tanto a Híbrida como a Global GRASP atingem o óptimo.

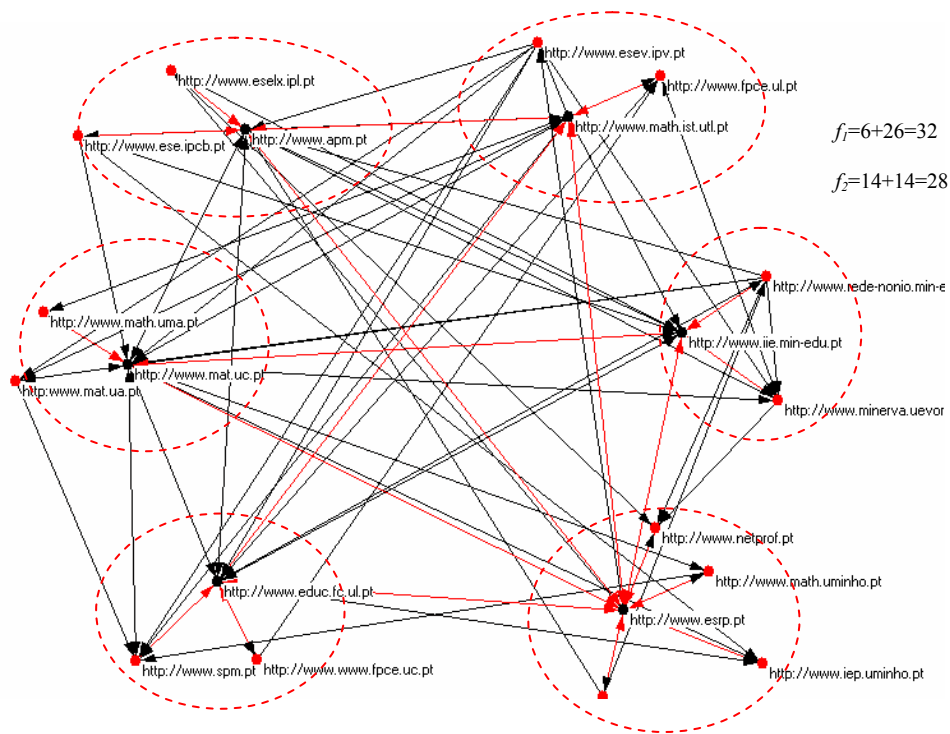


Figura 7.1 Solução óptima de Mat20 com função objectivo ponderada

Adicionalmente, as tabelas 7.7 e 7.8 mostram que, na maioria dos casos, a Híbrida é mais favorável do que cada uma das outras duas metaheurísticas separadamente. No entanto, em alguns casos a Global GRASP consegue obter soluções de igual qualidade quando

comparada com a Híbrida e consumindo muito menos tempo computacional. Para as comunidades *Web* geradas aleatoriamente a Global Tabu apresenta resultados similares à Híbrida.

Nesta secção as metaheurísticas foram aplicadas ao PCW na versão de soma ponderada, ou seja, o PCW foi encarado como problema mono-objectivo. Na próxima secção serão aplicadas as mesmas três metaheurísticas com os parâmetros já seleccionados à determinação de um conjunto de soluções eficientes para o PCW. Pretende-se, assim, obter uma aproximação à fronteira de Pareto do PCW.

7.4 Determinação da fronteira de Pareto

O PCW foi definido com dois objectivos conflituosos na secção 4.3 e pode pois ser alvo de uma abordagem interactiva em que se pretende minimizar a soma ponderada de duas funções objectivo com introdução de restrições intervalares respeitantes aos valores dos dois objectivos. Tal possibilita a determinação de todas as soluções eficientes e, em consequência, a fronteira de Pareto. Outra abordagem passa por métodos não exactos, neste caso metaheurísticas, que forneçam uma boa aproximação à fronteira de Pareto.

Como já foi referido anteriormente, há uma dificuldade acrescida que assenta no facto das formalizações em programação linear inteira possuírem um elevado número de variáveis binárias, o que torna a resolução deste problema ainda mais complexa.

A determinação da fronteira de Pareto foi conseguida apenas para uma instância, Mat20, aplicando o CPLEX 8.1 com a formalização em programação linear inteira PCW-L3, cujo objectivo é dado pela soma ponderada das duas funções objectivo. No entanto, e apesar das reduzidas dimensões desta instância, o tempo computacional foi excessivamente elevado o que inviabiliza, por agora, esta metodologia para as outras instâncias de maior dimensão.

Em problemas discretos, como é o caso do PCW, a optimização de somas ponderadas das diferentes funções objectivo só gera parte do conjunto das soluções não-dominadas, como foi demonstrado por Ross e Soland (1980).

Para ilustrar esta questão, consideremos o seguinte exemplo de um caso bicritério. Suponhamos que se trata de um problema bi-objectivo com as duas funções objectivo a minimizar, à semelhança do PCW, sendo as soluções não-dominadas representadas na figura 7.2, no espaço dos objectivos.

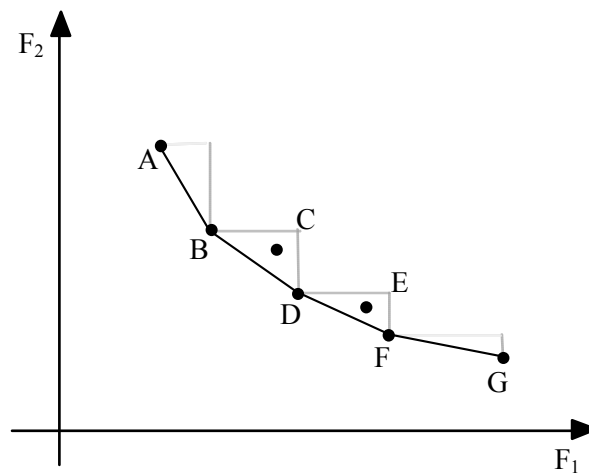


Figura 7.2 Soluções não-dominadas, no espaço dos objectivos, de um problema linear inteiro e bi-objectivo

As soluções C e E da figura 7.2 são soluções não-dominadas, não suportadas uma vez que estão no interior de *gaps* de dualidade.

O método interactivo assenta na proposição de Soland (1979), que tem como consequência ser possível obter a fronteira de Pareto para o PCW (com soluções suportadas e não suportadas) optimizando uma única função resultante da soma ponderada de dois objectivos (ver com mais detalhe Ferreira et al. (1994) e Clímaco et al. (2003)).

Este método, passa por duas fases: a de diálogo e a de pesquisa. Na fase de diálogo, o decisor é chamado a indicar em qual das sub-regiões pretende fazer incidir a pesquisa, de

7. Testes computacionais

modo a encontrar um conjunto de soluções não dominadas. Neste caso, como se pretendia investigar toda a região não se deve, na realidade considerá-lo método interactivo pois a pesquisa é feita até à exaustão, não existindo diálogo com o decisor.

A sub-região de pesquisa é definida fornecendo à custa de β_1 e β_2 , dois intervalos (7.2) e (7.3) onde os valores dos objectivos terão que estar compreendidos.

$$\min \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \quad (7.1)$$

sujeito a

$$f_1 \leq \beta_1 \quad (7.2)$$

$$f_2 \leq \beta_2 \quad (7.3)$$

no espaço das soluções admissíveis.

Tendo em conta que no PCW cada um dos objectivos só pode assumir um valor inteiro, torna-se mais fácil a partir de dois pontos adjacentes, conhecidos até ao momento, determinar os valores adequados para (β_1, β_2) . Por exemplo, no caso em que se conhece dois pontos não dominados, $z^{(a)} = (f_1^{(a)}, f_2^{(a)})$ e $z^{(b)} = (f_1^{(b)}, f_2^{(b)})$, e se pretende pesquisar a existência de outros não dominados entre eles, basta para isso fazer $\beta_1 = f_1^{(b)} + 1$ e $\beta_2 = f_2^{(a)} - 1$.

Os valores iniciais para β_1 e β_2 são calculados com base nos dois mínimos lexicográficos. Caso o ponto utópico, cujas coordenadas são o valor mínimo de cada objectivo, corresponda a uma solução admissível, o processo pára pois não existe conflito entre os dois objectivos.

Nas figuras 7.3 e 7.4 são apresentadas graficamente no espaço dos objectivos, respectivamente, a primeira e a terceira iterações deste método aplicado à instância Mat20, representando os rectângulos a ponteados as regiões já pesquisadas.

7. Testes computacionais

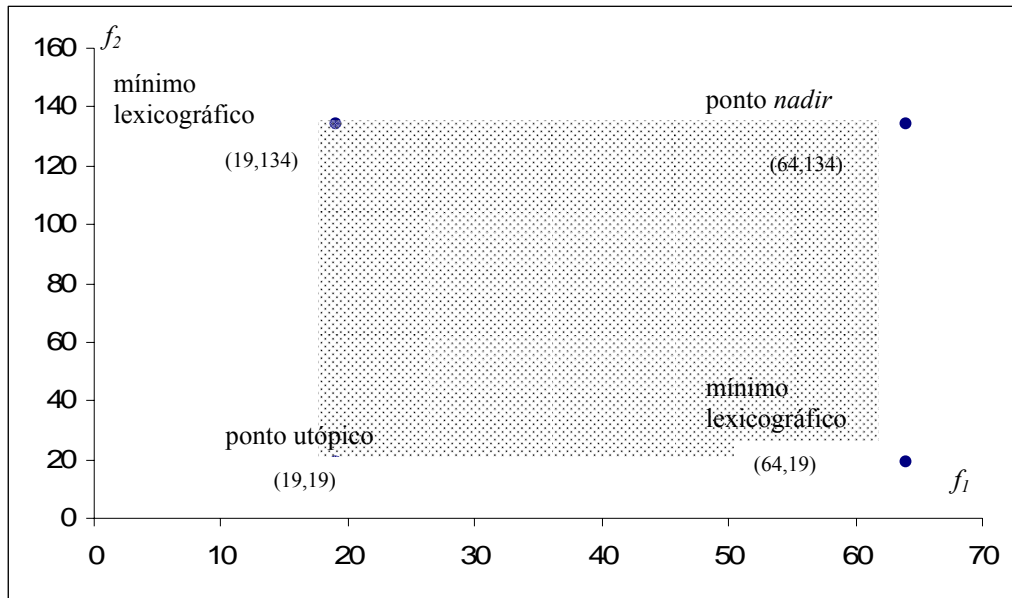


Figura 7.3 Espaço dos objetivos no final da 1ª iteração do método das restrições aplicado a Mat20

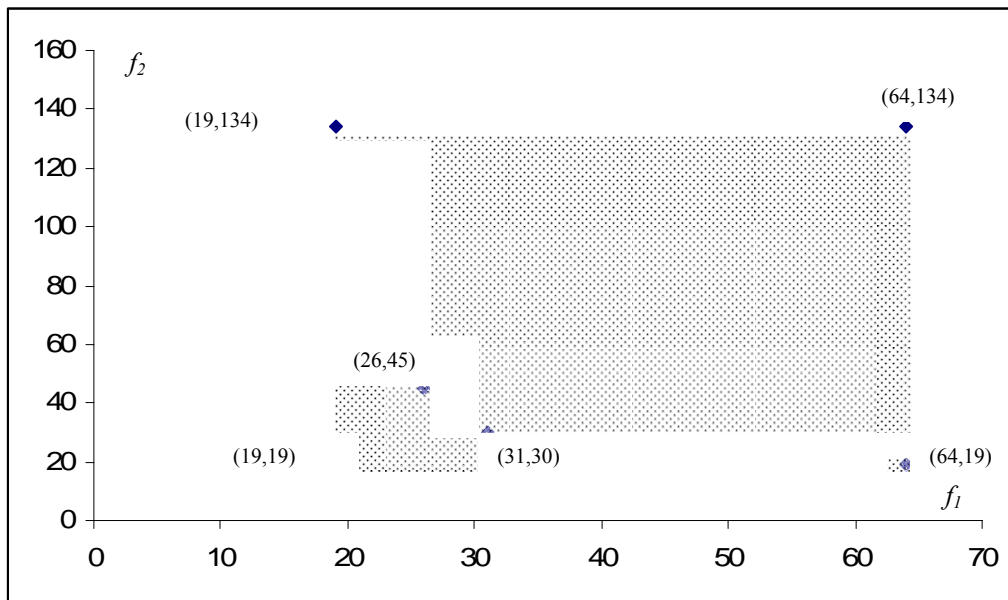


Figura 7.4 Espaço dos objetivos no final da 3ª iteração do método das restrições aplicado a Mat20

7. Testes computacionais

A tabela 7.9 mostra os valores dos dois objectivos correspondentes à fronteira de Pareto e por sua vez a figura 7.4 representa graficamente esta fronteira.

Os pontos assinalados na representação gráfica da fronteira de Pareto (figura 7.4), ilustrados respectivamente pelas figuras 7.5 e 7.6, bem como a figura 7.1 para o ponto intermédio, exemplificam como os objectivos f_1 e f_2 são conflituosos.

O tempo computacional dispendido para obter a totalidade da fronteira exacta desta instância foi muito elevado, cerca de 306 044.3 segundos, o que corresponde a um total aproximado de 85 horas e mostra ser este método inviável para aplicação, pelo menos, às instâncias de maior dimensão deste problema enquanto não se conhecer uma formulação para o PCW menos exigente em termos de tempo computacional.

f_1	f_2
19	134
20	98
21	74
22	69
23	59
25	53
26	45
27	37
28	34
31	30
32	28
38	27
39	25
43	24
48	23
52	22
60	21
64	19

Tabela 7.9 Listagem dos pontos da fronteira de Pareto para Mat20

7. Testes computacionais

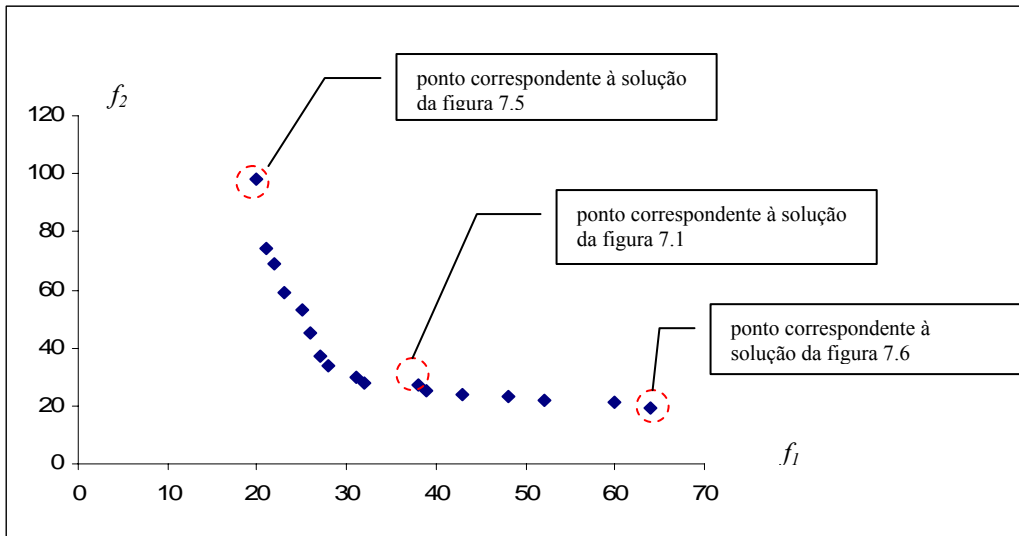


Figura 7.5 Representação gráfica da fronteira de Pareto para Mat20

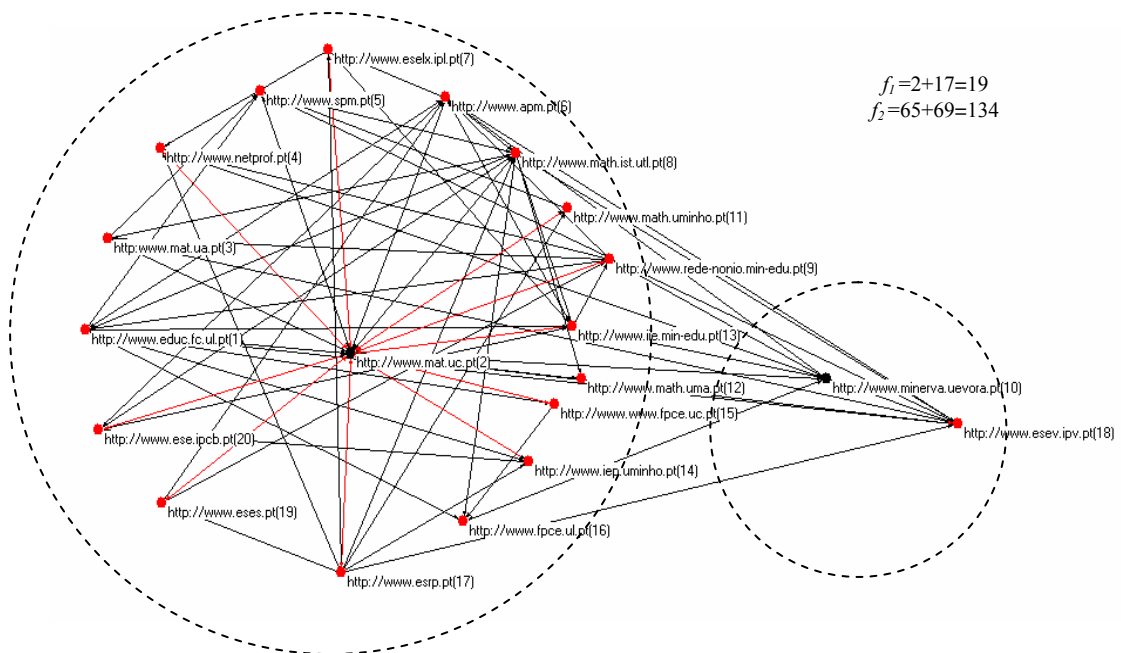


Figura 7.6 Solução da fronteira de Pareto de Mat20 correspondente ao mínimo lexicográfico para f_1

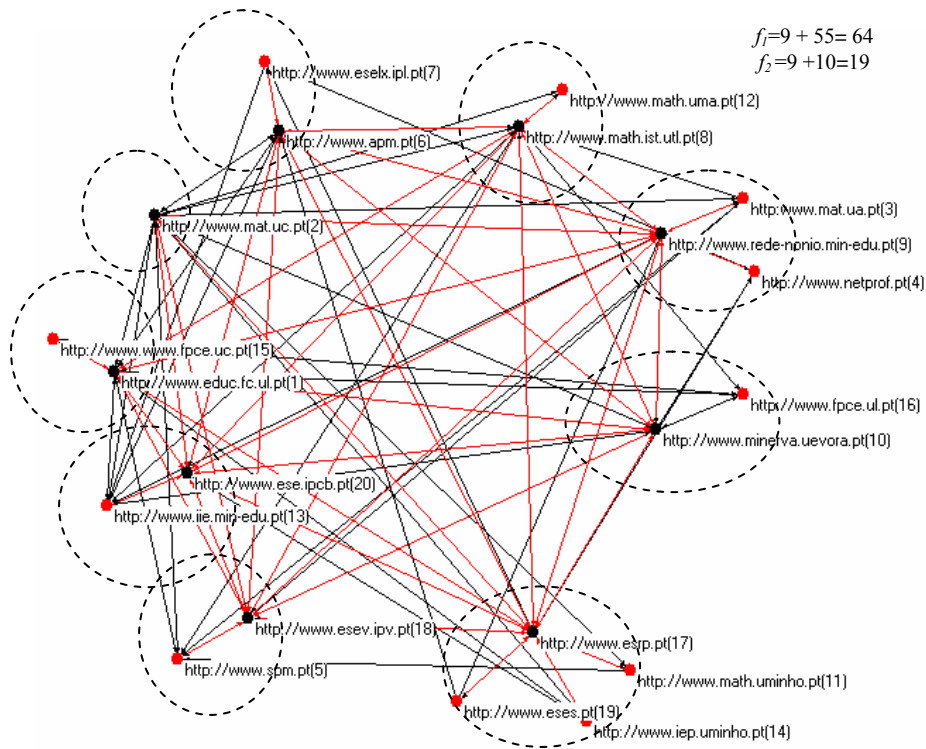


Figura 7.7 Solução da fronteira de Pareto de Mat20 correspondente ao mínimo lexicográfico para f_2

Neste caso em que é conhecida a fronteira de Pareto podemos avaliar com maior precisão a qualidade das fronteiras aproximadas obtidas pelas metaheurísticas desenvolvidas no âmbito desta dissertação.

A metodologia seguida para cada uma das três metaheurísticas (Global GRASP com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ e $maxiter=50$, Global Tabu com oscilação estratégica e a Híbrida) consiste em cinco corridas, no caso da primeira e de três corridas no caso da segunda e da terceira, para cada um dos valores de $\lambda \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ para cálculo da função objectivo ponderada.

Relativamente à instância Mat20, como se viu, a única para a qual foi feito um estudo exaustivo da fronteira de Pareto, foram calculadas algumas medidas de proximidade entre esta fronteira exacta e aproximada obtida por cada um dos três métodos. Nas figuras 7.7,

7. Testes computacionais

7.8 e 7.9, são representadas graficamente as fronteiras aproximadas e os pontos não dominados, respectivamente, para cada um dos métodos.

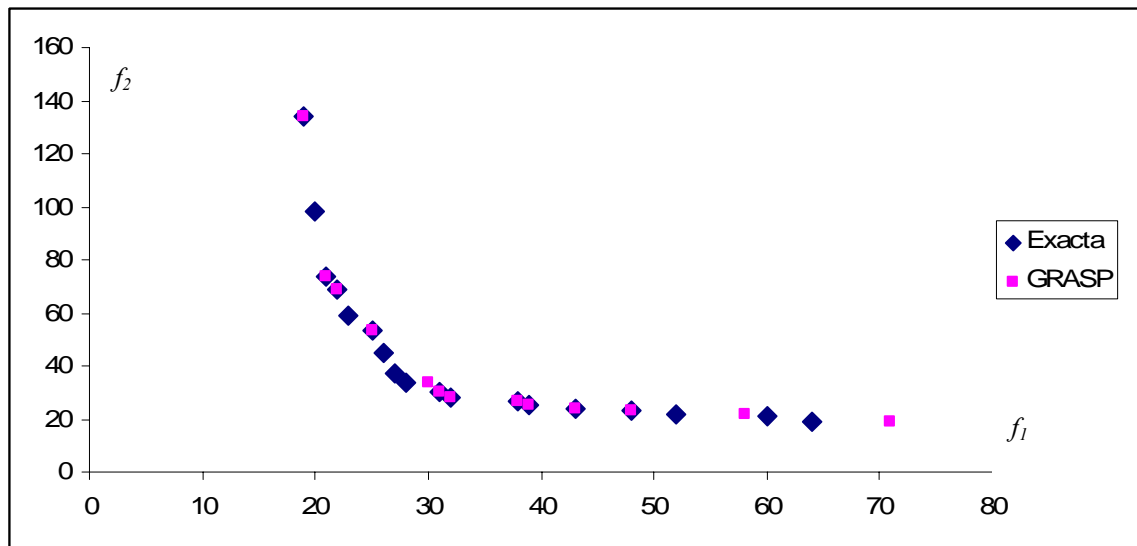


Figura 7.8 Fronteira de Pareto e fronteira aproximada obtida pela Global GRASP para Mat20

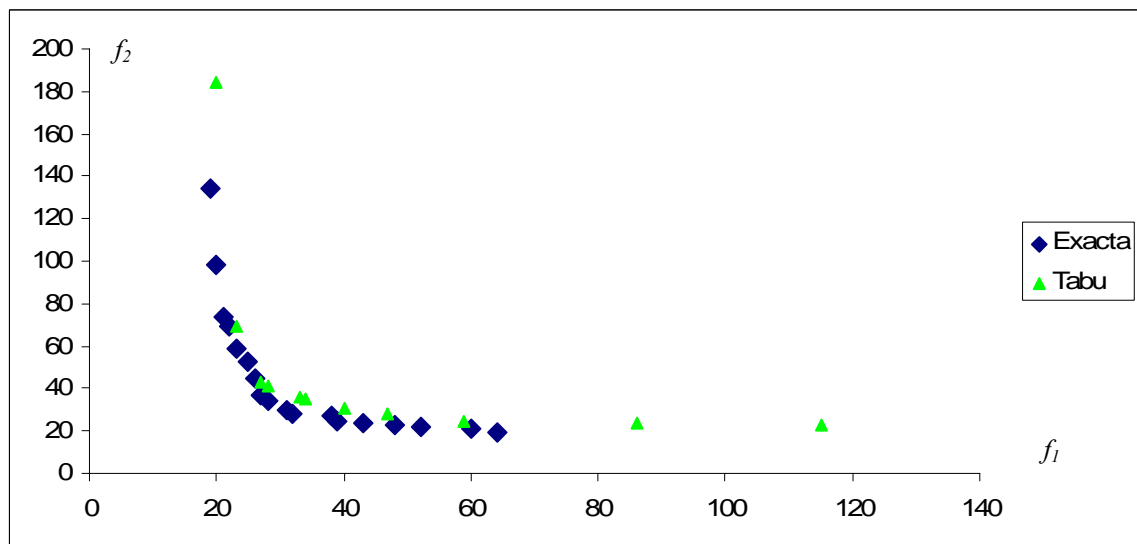


Figura 7.9 Fronteira de Pareto e fronteira aproximada obtida pela Global Tabu para Mat20

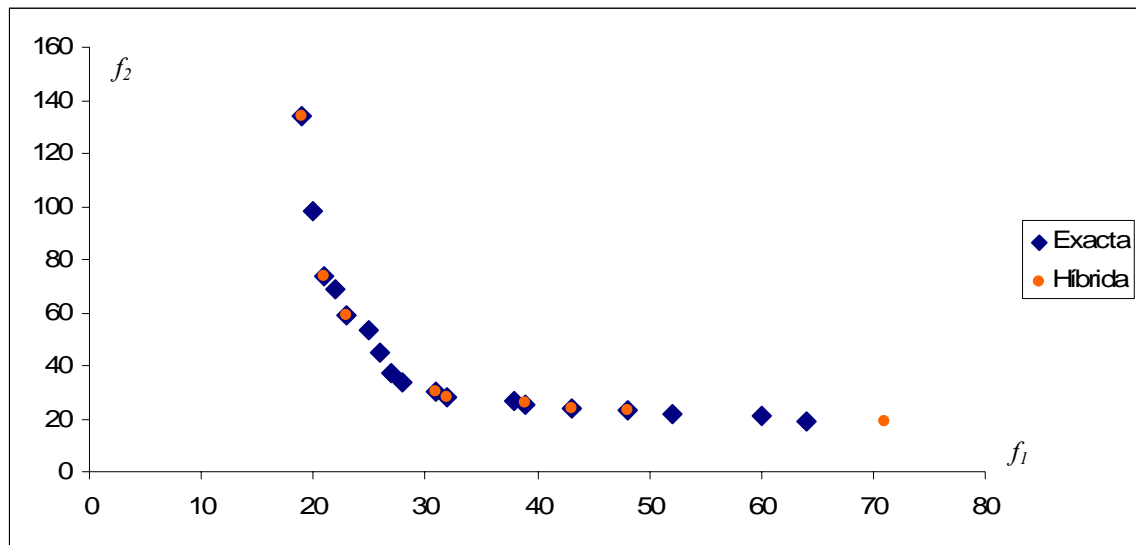


Figura 7.10 Fronteira de Pareto e fronteira aproximada pela Híbrida para Mat20

Observando estas figuras verifica-se, neste caso particular, que os três métodos heurísticos tiveram um bom comportamento quanto à qualidade das soluções, sendo de salientar a excelente aproximação à fronteira de Pareto obtida pela Global GRASP. De facto, apesar de trabalhar com a minimização da soma ponderada das duas funções objectivo consegue determinar soluções eficientes não suportadas em apenas 15.1 segundos. Para um maior detalhe deverá ser consultada a tabela 7.14 com o resumo dos resultados dos testes computacionais para esta instância.

As tabelas 7.10 a 7.13 apresentam as fronteiras aproximadas para as instâncias de PCW reais e geradas obtidas através dos três métodos heurísticos, bem como o candidato a ponto *nadir* na coluna (4), o candidato a ponto utópico na coluna (5) e, ainda, o tempo total de CPU, coluna (6).

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /nº de nodos	(2) (f_1, f_2)	(3) nº de pontos distintos	(4) candidato a ponto <i>nadir</i>	(5) candidato a ponto utópico	(6) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	(19,134); (21,74); (22,69); (25,53); (30,34); (31,30); (32,28); (38,27); (39,25); (43,24); (48,23); (53,22); (71,19)	24	(71,134)	(19,19)	15.1
Mat30/30	(28,122); (30, 107); (36,91); (37,76); (41,71); (47,66); (70,58); (76,41)	32	(76,122)	(28,41)	23.9
Mat53/53	(55,210); (58,203); (60,195); (68,166); (70,162); (71, 154); (76,150); (79,141); (130, 133); (153, 123); (157,117); (166,113)	46	(166,210)	(55,113)	63.6
Clim/68	(124, 162); (126,144); (128,137); (129, 135); (132; 128); (137, 121); (144,115); (146, 114); (153, 110); (165,105); (166,104); (169,102); (178,99); (182, 97); (194,95); (196,93); (236,88); (257,87); (301, 83); (304,81)	28	(304,162)	(124,81)	70.6
Pov/59	(105,152); (106,142); (109,136); (110,134); (115,128); (116,127) (128,116); (136,111); (137,110); (139,109); (146,106); (162,98); (192,92); (195,90); (213,85); (232,84); (256,79); (280,76)	29	(280,152)	(105,76)	60.2
Hiv/55	(100,107); (103,100); (104,88); (126,81); (134,77); (144,73); (157,69); (161,68); (174, 65); (175,64); (210,59); (232,56); (257,52); (284,51); (285,50)	30	(285,107)	(100,50)	54.1

Tabela 7.10 Fronteiras aproximadas obtidas através da Global GRASP para as comunidades *Web* reais

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /nº de nodos	(2) (f_i, f_i)	(3) nº de pontos distintos	(4) candidato a ponto <i>nadir</i>	(5) candidato a ponto utópico	(6) tempo total de CPU (seg.)
Rnd20/20	(20,98); (21,82); (25,55); (28,42); (29,43); (33,39); (34,33); (43,31); (52,27); (61,26); (76,23)	37	(76,98)	(20,23)	13.4
Rnd30/30	(37,273); (39,245); (40,221); (43,203); (52,65); (63,63); (64,54); (65,53); (71,51); (73,48); (84,43); (86,42); (104,40); (116,39); (136,37); (154,36); (163,35); (178,31)	54	(178,273)	(37,31)	29.5
Rnd40/40	(67,207); (69,198); (73,190); (74,188); (81,180); (86,173); (87,171); (89,170); (96,166); (98,165); (109,157); (123,146); (154,133); (155,134); (191,122); (213,109); (239,106); (240,103)	39	(240,207)	(67,103)	41.7
Rnd50/50	(83,350); (84,337); (85,317); (89,304); (94,288); (95, 284); (104,273); (111,259); (120,242); (134,239); (138,235); (147,233); (161,221); (169,229); (170,216); (203,203); (207,199); (223,192); (225,186); (226,183); (247,180); (250,179)	46	(250,350)	(83,179)	70.8
Rnd60/60	(102,384); (103,364); (104,363); (106,345); (111,324); (118,320); (125,316); (127,310); (138,301); (139,291); (140,297); (143,296); (152,287); (153,285); (167,277); (172,276); (184,265); (204,246); (243,237); (245,230); (276,220)	49	(276,384)	(102,220)	107.0
Rnd150/150	(282,829); (283,813); (287,431); (298,422); (304,414); (338,413); (345,406); (363,405); (365,397); (400,394); (403,389)	54	(403,829)	(282,389)	1 283.4

Tabela 7.11 Fronteiras aproximadas obtidas através da Global GRASP para as comunidades *Web* geradas

7. Testes computacionais

(1) comunidade Web/nº de nodos	(2) (f_1, f_2)	(3) nº de pontos distintos	(4) candidato a ponto <i>nadir</i>	(5) candidato a ponto utópico	(6) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	(115,23); (86,24); (59,25); (47,28);(40,31); (34,35);(33,36); (28,41);(27,43); (23,69);(20,184)	18	(115,184)	(20,23)	524.0
Mat30/30	(28,143); (33,138); (34,123); (35,109);(36,107); (37,76); (51,49); (54,44);(52,47); (58,39); (67,36); (70,35);(71,34); (72,33); (80,32); (84,30);(121,26); (140,25)	28	(140,143)	(28,25)	3 304.2
Mat53/53	(59,295);(62,214); (64,196); (66,170); (91,198); (99,123); (129,74); (133,61); (145,56); (160,55); (161,53); (164,52)	28	(164,295)	(59,52)	15 834.0
Clim/68	(124,162); (126,144); (129,135); (132,128);(137,115);(169,102); (199,92); (283,79);(313,76)	11	(313,162)	(124,76)	5 066.4
Pov/59	(105,142); (116,128); (123,121); (124,120);(136,111);(178,96); (234,86); (282,82)	11	(282,142)	(105,82)	3 368.6
Hiv/55	(101,114); (104,99); (109,95); (121, 84); (133,79); (194,62); (282,56)	9	(282,114)	(101,56)	7 206.3
Rnd20/20	(21,130); (34,40); (36,34); (64,25); (76,22)	9	(76,130)	(21,22)	320.1
Rnd30/30	(35,259); (38,216); (40,178); (42,176);(44,71); (45,80); (171,34); (175,31);(178,29)	9	(178,259)	(35,29)	950.8
Rnd40/40	(67,207); (69,198); (73,189); (78,181);(86,165); (106,155); (107,157)	11	(107,257)	(67,157)	1 050.5
Rnd50/50	(84,337); (85,323); (88,303); (93,284);(94,290); (101,272); (121,249); (122,253);(124,248); (136,236); (166,212); (206,192); (225,182);(231,184);(232,40)	23	(232,337)	(84,40)	5 419.1
Rnd60/60	(103,363);(107,344); (116,321); (199,315); (124,300);(127,295); (129,293);(139,284);(155,279); (187,254);(204,244); (225,240)	19	(225,344)	(103,225)	12 904.0
Rnd150/150	(281,822); (286,789);(297,402)	10	(297,822)	(281,402)	247 078.7

Tabela 7.12 Fronteiras aproximadas obtidas através da Global Tabu

7. Testes computacionais

(1) comunidade Web/nº de nodos	(2) (f_i, f_z)	(3) nº de pontos distintos	(4) candidato a ponto <i>nadir</i>	(5) candidato a ponto utópico	(6) tempo total de CPU (seg.)
Mat20/20	(19,134); (21,74); (23,59); (31,30); (32,28); (39,26); (43,24); (48,23); (71,19)	17	(71,134)	(19,19)	236.4
Mat30/30	(28,122); (30,107); (37,76); (41,72); (44,64); (53,43); (64,41); (63,39); (71,34); (78,35); (87,33); (97,30); (101,28); (123,26)	24	(123,122)	(28,26)	1 197.7
Mat53/53	(55,231); (56,200); (71,154); (74,150); (77,144); (83,133); (92,123); (132,69); (134,63); (159,58); (163,54); (203,48)	24	(203,231)	(55,48)	10 880.2
Clim/68	(124,162); (126,144); (128,137); (132,128); (137,121); (144,115); (153,110); (165,105); (168,104); (196,93); (214,90); (257,85); (282,79); (316,77)	19	(316,162)	(124,77)	3 903.3
Pov/59	(105,152); (106,142); (109,136); (110,134); (116,127); (122,122); (128,116); (136,111); (137,110); (147,105); (175,96); (210,87); (233,83); (280,76)	19	(280,152)	(105,76)	3 199.9
Hiv/55	(100,107); (103,100); (109,92); (114,88); (117,85); (134,77); (161,68); (176,64); (192,62); (213,59); (257,54); (286,50)	20	(286,107)	(100,50)	2 945.9
Rnd20/20	(19,134); (21,74); (23,59); (31,30); (32,28); (39,25); (43,24); (48,23); (71,19)	18	(71,134)	(19,19)	236.6
Rnd30/30	(36,278); (43,163); (46,78); (50,66); (52,62); (58,56); (61,55); (65,53); (74,48); (77,47); (87,43); (90,45); (101,39); (104,38); (123,36); (161,32); (180,29)	29	(180,278)	(36,29)	1 212.7
Rnd40/40	(67,207); (69,198); (74,188); (85,175); (87,174); (95,167); (99,160); (159,134); (212,110); (237,108); (238,107); (239,101)	24	(239,207)	(67,101)	1 832.2
Rnd50/50	(83,350); (84,337); (85,317); (89,306); (92,283); (101,277); (102,267); (110,259); (124,239); (167,209); (191,203); (209,191); (224, 192); (225,185); (234,182); (246,178); (249,165)	30	(249,350)	(83,165)	5 741.4
Rnd60/60	(102,384); (103,363); (106,345); (109,330); (110,322); (115,309); (124,302); (138,290); (149,276); (150, 252); (180,263); (182,262); (208,249); (245,237); (271,225); (281,224)	27	(281,384)	(102,224)	11 884.3
Rnd150/150	(281,812); (284,432); (288,420); (293,417); (304,416); (313,411); (314,410); (325,401); (341,398); (378,390); (401,386); (420,377); (444,368); (466,361)	32	(466,812)	(281,361)	632 458.9

Tabela 7.13 Fronteiras aproximadas obtidas através da Híbrida

7.5 Comparação entre os métodos heurísticos

Foram calculados os valores de algumas métricas retiradas de Collette e Siarry (2003 e 2005) para comparar a eficiência dos métodos não só no caso em que é conhecida a fronteira de Pareto como também nos casos em que não é.

A métrica de distância global (*MDG*) fornece a distância absoluta entre a fronteira de Pareto e a fronteira aproximada e é dada pela expressão 7.1:

$$MDG = \frac{\left(\sum_{i=1}^N d_i^2 \right)}{N}, \quad (7.1)$$

onde d_i representa a distância entre o ponto i da fronteira aproximada e o ponto mais próximo da fronteira de Pareto. O conjunto representa os pontos da fronteira aproximada.

A métrica de espaçamento, tem duas versões (ME_1 e ME_2) e permite medir a uniformidade com que os pontos da fronteira $\{1, \dots, i, \dots, N\}$ são distribuídos no plano (f_1, f_2), isto é, no espaço dos objectivos:

$$ME_1 = \left[\frac{1}{N-1} \times \sum_{i=1}^{N-1} (\bar{d}_1 - d_{1i})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d_{1i} = \min_j \left(\left| f_1(\bar{x}_i) - f_1(\bar{x}_j) \right| + \left| f_2(\bar{x}_i) - f_2(\bar{x}_j) \right| \right) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j) \quad (7.2)$$

e

$$ME_2 = \left[\frac{1}{N-1} \times \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{d_{2i}}{\bar{d}_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d_{2i} = \sqrt{\left(f_1(\bar{x}_i) - f_1(\bar{x}_i + 1) \right)^2 + \left(f_2(\bar{x}_i) - f_2(\bar{x}_i + 1) \right)^2} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j) \quad (7.3)$$

onde f_1 e f_2 representam as duas funções objectivo, d_{li} , com $l \in \{1, 2\}$ representa a distância do ponto i ao não-dominado mais próximo, \bar{d}_l , com $l \in \{1, 2\}$ é a média dos

7. Testes computacionais

valores d_{li} , para todos os pontos i , \bar{x}_i, \bar{x}_j são pontos da fronteira aproximada e N é o número de pontos desta fronteira.

De acordo com Collette e Siarry (2005) a métrica ME_2 apresenta vantagens em relação a ME_1 pois, em ME_1 o resultado depende da escala dos valores das funções objectivo. Neste trabalho serão apresentadas as duas versões. Quanto mais próximo os valores desta métricas estiverem de zero mais os pontos estão equidistantes entre si..

A métrica de rácio de Pareto (MRP) foi calculada para o caso em que a fronteira de Pareto é conhecida e é dada pelo quociente entre o número de pontos não dominados da fronteira aproximada pela fronteira exacta e o número de pontos da fronteira de Pareto.

Em Zitler et al. (1999) é proposta uma métrica de dominância relativa (MDR) que permite comparar duas fronteiras aproximadas entre si. Sejam F' e F'' duas fronteiras aproximadas, a função em (7.4) transforma as duas fronteiras num valor real entre 0 e 1, tal que 1 significa que todos os pontos em F' são dominados ou iguais aos de F'' e 0 caso contrário:

$$MDR(F', F'') = \frac{|\{\vec{f}'' \in F'' : \exists \vec{f}' \in F' : \vec{f}' \prec \vec{f}''\}|}{|F''|} \quad (7.4)$$

onde $|F|$ representa o número de soluções em F e $\vec{f}' \prec \vec{f}''$ significa que o ponto \vec{f}' domina ou é igual ao vector \vec{f}'' .

Na tabela 7.14 figuram resultados comparativos dos três métodos não exactos, bem como do método exacto (coluna (1)) em relação à instância Mat20 tendo em conta as métricas MDG , ME_1 , ME_2 e MRP (colunas (2) a (4)). É ainda apresentado o cardinal do conjunto dos pontos não dominados, bem como daqueles que correspondem a soluções não suportadas (coluna (5)) e o tempo computacional correspondente a todas as corridas de cada um dos métodos (coluna (6)).

7. Testes computacionais

(1) método	(2) MDG	(3) ME_1	(4) ME_2	(4) MRP	(5) Card	(6) tempo total de CPU (seg.)
fronteira de Pareto	0.0	8.8	1.2	1.0	18	306 044.3
fronteira aproximada pela Global GRASP	2.4	16.1	1.5	0.5	13	15.1
fronteira aproximada pela Global Tabu	6.9	33.5	1.3	0.6	11	524.0
fronteira aproximada pela Híbrida	0.6	6.3	0.9	0.5	9	236.4

Tabela 7.14 Comparação entre a fronteira de Pareto e a fronteira aproximada para a comunidade Mat20

De acordo com a tabela 7.14 pode ser verificado o bom comportamento da Global GRASP quer em termos do valor de MDG , ME_1 , ME_2 e MRP quer no tempo total gasto para gerar a fronteira aproximada. No entanto a Híbrida apresenta melhores indicadores para MDG e ME . Em tempo computacional foi pior que a Global GRASP, mas atingiu um valor bastante razoável e inferior ao da Global Tabu. Esta última foi a que teve uma pior prestação a todos os níveis, nesta instância em particular. Como veremos nas páginas seguintes nem sempre se observa este comportamento em todas as instâncias.

Visto não ser possível determinar a fronteira de Pareto para todas as instâncias em causa, na tabela 7.15 expõem-se os resultados comparativos relativos aos três métodos não exactos (coluna (2)) aplicados nessas instâncias reais, o número de nodos de cada instância (coluna (1)) e o tempo total de CPU para gerar a fronteira aproximada (coluna (8)). As colunas da (2) à (7) mostram alguns indicadores relativos a cada fronteira aproximada de modo a poder ser feita uma análise comparativa.

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método	(3) candidato a ponto <i>nadir</i>	(4) candidato a ponto utópico	(5) Card	(6) ME_1	(7) ME_2	(8) tempo total de CPU (seg.)
Mat30/30	Global GRASP	(76,122)	(28,41)	8	5.6	0.4	23.9
	Global Tabu	(84,138)	(33,30)	18	6.4	0.7	3304.2
	Híbrida	(123,122)	(28,26)	14	5.9	0.7	1197.7
Mat53/53	Global GRASP	(166,210)	(55,113)	12	7.1	0.6	63.6
	Global Tabu	(164,295)	(59,52)	12	28.4	1.1	15834.0
	Híbrida	(203,231)	(55,48)	12	13.1	0.9	10880.2
Clim/68	Global GRASP	(304,162)	(124,81)	20	6.5	1.0	70.6
	Global Tabu	(313,162)	(124,76)	9	12.6	0.5	5066.4
	Híbrida	(316,162)	(124,77)	14	10.1	0.7	3903.3
Pov/59	Global GRASP	(280,152)	(105,76)	18	9.2	1.0	60.2
	Global Tabu	(282,142)	(105,82)	8	22.7	0.9	3368.6
	Híbrida	(280,152)	(105,76)	14	15.2	1.0	3199.9
Hiv/55	Global GRASP	(285,107)	(100,50)	15	8.5	0.9	54.1
	Global Tabu	(282,114)	(101,56)	7	35.6	1.1	7206.3
	Híbrida	(286,107)	(100,50)	12	9.7	0.4	2945.9

Tabela 7.15 Comparação entre as fronteiras aproximadas para as comunidades *Web* reais

Da análise de 7.15 é interessante verificar que «o melhor» par candidato a ponto *nadir* (coluna (3)) corresponde para todas excepto uma das instâncias (Pov/59) ao método Global GRASP enquanto «o melhor» candidato a ponto utópico (coluna (4)) já se distribui mais pelos três métodos. No que respeita ao número de pontos distintos gerados por cada um dos métodos no espaço dos objectivos (coluna (5)), por observação da tabela

é evidente que este é superior no método da Global GRASP e inferior na Global Tabu, excepto para a instância Mat53 em que os três métodos são equivalentes.

Relativamente ao tempo computacional a Global Tabu é o método que na maioria dos casos consome mais tempo, excepto nas instâncias Mat30 e Hiv onde é ultrapassada pela Híbrida. Sem dúvida, dos três métodos não exactos, a Global GRASP é a heurística mais vantajosa em termos de tempo computacional nesta experimentação com comunidades *Web* reais.

Por último, em relação à métrica de espaçamento já foi referido que esta permite medir a uniformidade da distribuição dos pontos no espaço dos objectivos, quanto mais próximo este valor estiver de zero mais uniformemente os pontos estão distribuídos. Aqui volta a notar-se a vantagem da Global GRASP, logo seguida da Híbrida e finalmente da Global Tabu.

A tabela 7.16 refere-se à métrica (definida em (7.4)) que permite relacionar as fronteiras aproximadas entre si, desconhecendo-se a fronteira exacta. Por exemplo, no caso da instância Mat30, o MDR (Híbrida, Global GRASP) = 0.60, o que significa que 60% dos pontos da fronteira aproximada gerada pela Global GRASP são dominados ou iguais a pontos da fronteira aproximada gerada pela Híbrida.

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método (F')	(3) Global GRASP (F'')	(4) Global Tabu (F''')	(5) Híbrida (F''')
Mat30/30	Global GRASP		30.0%	20.0%
	Global Tabu	30.0%		30.0%
	Híbrida	60.0%	40.0%	
Mat53/53	Global GRASP		27.3%	17.0%
	Global Tabu	33.3%		16.6%
	Híbrida	50.0%	27.3%	
Clim/68	Global GRASP		55.6%	71.4%
	Global Tabu	35.0%		42.9%
	Híbrida	60.0%	44.4%	
Pov/59	Global GRASP		50.0%	64.3%
	Global Tabu	16.7%		21.4%
	Híbrida	50.0%	50.0%	
Hiv/55	Global GRASP		43.0%	67.0%
	Global Tabu	0.0%		0.0%
	Híbrida	27.0%	57.0%	

Tabela 7.16 Comparação das fronteiras aproximadas, utilizando *MDR*, nas comunidades *Web* reais

Na tabela 7.16 estão assinaladas a *bold* as relações de dominância de uma dada metaheurística em relação à outra. Por leitura dos resultados da tabela não existe nenhum método que em todas as instâncias domine todos os outros, no entanto, é nítida a dominância da Global GRASP e da Híbrida relativamente à Global Tabu.

A título ilustrativo é possível observar na figura 7.10 e articulando com os dados da tabela 7.16, que a Global GRASP domina a Global Tabu e que a Híbrida por sua vez domina a Global Tabu.

7. Testes computacionais

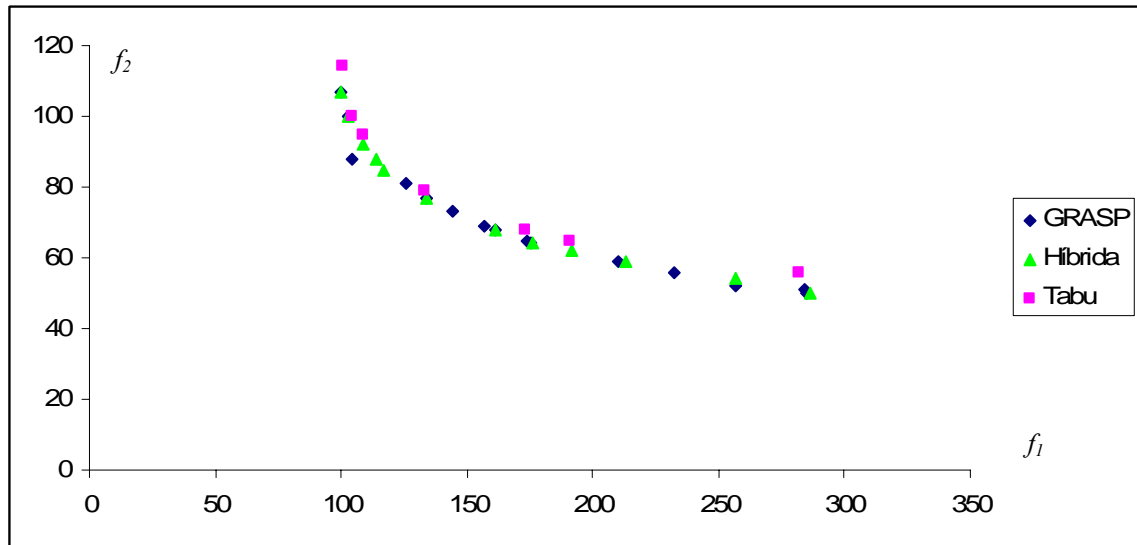


Figura 7.11 Fronteiras aproximadas obtidas pela Global GRASP, Global Tabu e Híbrida, para a instância Hiv

Seguem-se as tabelas 7.17 e 7.18 com resultados similares para as comunidades *Web* geradas aleatoriamente.

7. Testes computacionais

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método	(3) candidato a ponto <i>nadir</i>	(4) candidato a ponto utópico	(5) Card	(6) ME_1	(7) ME_2	(8) tempo total deCPU (seg.)
Rnd20/20	Global GRASP	(76,98)	(20,23)	11	6.4	0.6	13.4
	Global Tabu	(76,130)	(21,22)	5	41.1	1.4	320.1
	Híbrida	(71,134)	(19,19)	9	19.1	1.3	236.6
Rnd30/30	Global GRASP	(178,273)	(37,31)	18	8.5	0.7	29.5
	Global Tabu	(178,259)	(35,29)	9	16.4	1.2	950.8
	Híbrida	(180,278)	(36,29)	17	33.2	1.8	1 212.7
Rnd40/40	Global GRASP	(240,207)	(67,103)	18	10.4	1.1	41.7
	Global Tabu	(107,207)	(67,157)	7	7.1	0.6	1 050.5
	Híbrida	(239,207)	(67,101)	12	20.8	1.4	1 832.2
Rnd50/50	Global GRASP	(250,350)	(83,179)	22	5.6	0.5	70.8
	Global Tabu	(232,337)	(84,40)	15	35.7	1.6	5 419.1
	Híbrida	(249,350)	(83,165)	17	7.6	0.4	5 741.4
Rnd60/60	Global GRASP	(276,384)	(102,220)	21	11.1	0.9	107.0
	Global Tabu	(225,363)	(103,240)	12	8.9	0.6	12 904.0
	Híbrida	(281,384)	(102,224)	16	10.7	0.6	11 884.3
Rnd150/150	Global GRASP	(403,829)	(282,389)	11	4.1	0.3	1 283.4
	Global Tabu	(297,822)	(281,402)	3	207.9	1.4	247 078.7
	Híbrida	(466,812)	(281,361)	14	98.2	2.5	63 2458.9

Tabela 7.17 Comparação entre as fronteiras aproximadas nas comunidades *Web* geradas

Analisando a tabela 7.18 verifica-se que com as comunidades *Web* geradas aleatoriamente se nota uma supremacia da Híbrida e da Global GRASP relativamente à Global Tabu. No entanto, estes resultados não são tão explícitos como os obtidos para as comunidades reais.

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) método	(3) Global GRASP	(4) Global Tabu	(5) Híbrida
Rnd20/20	Global GRASP		60.0%	0.0%
	Global Tabu	9.1%		0.0%
	Híbrida	60.0%	100%	
Rnd30/30	Global GRASP		11.1%	20.0%
	Global Tabu	27.8%		11.8%
	Híbrida	60.0%	11.1%	
Rnd40/40	Global GRASP		28.6%	41.7%
	Global Tabu	27.8%		41.7%
	Híbrida	30.0%	42.9%	
Rnd50/50	Global GRASP		40.0%	23.5%
	Global Tabu	40.9%		41.2%
	Híbrida	60.0%	40.0%	
Rnd60/60	Global GRASP		0.0%	30.0%
	Global Tabu	47.6%		18.8%
	Híbrida	80.0%	33.3%	
Rnd150/150	Global GRASP		0.0%	6.3%
	Global Tabu	54.5%		21.4%
	Híbrida	72.7%	66.7%	

Tabela 7.18 Comparação das fronteiras aproximadas utilizando *MDR*, nas comunidades *Web* geradas

7.6 Discussão de resultados

A resposta à questão inicial deste trabalho ainda não está totalmente elucidada. Será que o grafo reconfigurado desta forma é «mais» balanceado do que era inicialmente? Será que a troca de informação, a partilha de recursos, a preservação da própria comunidade *Web* melhora com esta reconfiguração?

7. Testes computacionais

Tentar-se-á uma resposta a estas questões através de dois exemplos, a comunidade *Web* real de dimensões reduzidas, Mat20 e a comunidade *Web* gerada aleatoriamente de maior dimensão, Rnd150. Para tal, foram calculados alguns indicadores usualmente aplicados na análise da estrutura de redes sociais e que permitem caracterizar as redes com base na distância máxima entre nodos, na centralidade de determinados nodos quer em termos de conectividade com os outros nodos quer em termos de circulação de informação, bem como na densidade e conectividade de determinados nodos e da rede no seu conjunto.

Na tabela 7.19 expõem-se os valores de três indicadores (coluna (2)) de tipo «distância na rede» relativamente às duas comunidades, antes (coluna (3)) e depois da reconfiguração (coluna (4)), obtida por resolução optimal e aproximada do PCW na versão de função objectivo ponderada, respectivamente para as comunidades Mat20 e Rnd150.

(1) comunidade <i>Web</i> /nº de nodos	(2) indicador	(3) valor na comunidade inicial	(4) valor na comunidade reconfigurada
Mat20/20	número de pares de nodos desconexos pelo menos num sentido	88	0
	distância média entre pares de nodos	2.1	1.9
	diâmetro da rede	5	3
Rnd150/150	número de pares de nodos desconexos pelo menos num sentido	6 352	0
	distância média entre pares de nodos	4.2	2.4
	diâmetro da rede	10	3

Tabela 7.19 Comparação de indicadores de distância nas comunidades original e reconfigurada

Os indicadores desta secção foram calculados usando o *software* de análise de redes sociais (UCINET 5.5).

7. Testes computacionais

De acordo com a tabela 7.19 verifica-se que relativamente a qualquer um dos três indicadores houve uma diminuição generalizada após a reconfiguração da rede, logo uma diminuição da «distância entre os domínios da comunidade».

O resultado mais significativo consiste no facto de o grafo inicial possuir um elevado número de nodos não alcançáveis em termos de conectividade pelo menos num determinado sentido. Além disso, para qualquer uma das instâncias analisadas, após reconfiguração todos os nodos são alcançáveis em ambos os sentidos.

Constata-se também que a distância média entre dois quaisquer nodos do grafo diminuiu de forma muito significativa e, ainda, que a distância máxima entre quaisquer nodos diminuiu também significativamente.

De seguida, são feitas comparações com base num conjunto de outros indicadores complementares: de *flow betweenness* e de proximidade. Qualquer um destes permite caracterizar a centralidade quer para cada um dos nodos considerado individualmente quer para o grafo no seu conjunto.

O indicador de *flow betweenness* fornece informação sobre a centralidade de cada um dos nodos em termos da capacidade que cada um desses detém na passagem de um determinado «fluxo» para todos os outros nodos do grafo. O *flow betweenness* de cada nodo consiste, assim, numa medida da contribuição de cada um dos nodos para a comunicação com todos os outros tendo em conta o valor dos fluxos máximos possíveis no grafo.

O *network centralization index*, calculado em termos de *flow betweenness* de toda a rede, é um indicador que representa a soma dos desvios entre o fluxo máximo do grafo relativamente ao valor do *flow betweenness* de cada nodo.

A proximidade (*closeness*) traduz a distância de um nodo em relação a todos os restantes nodos do grafo. Pode ser também considerado um outro indicador recíproco da

7. Testes computacionais

proximidade, que é o distanciamento (*farness*). Ambos são determinados tendo em conta as ligações recebidas por um determinado nodo (*infarness* e *incloseness*) ou as que são originadas a partir de um determinado nodo (*outfarness* e *outcloseness*).

São ainda calculadas medidas agregadas de proximidade para toda a rede (*in-* e *out-centralization*) que comparam os valores acima mencionados.

As tabelas 7.20 e 7.21 apresentam os resultados relativos ao grafo inicial e ao grafo reconfigurado, respectivamente para a comunidade real Mat20 e para a comunidade gerada aleatoriamente Rnd150.

(1) comunidade Web/nº de nodos	(2) tipo de indicador	(3) indicador	(4) valor na comunidade inicial	(5) valor na comunidade reconfigurada
Mat20/20	<i>flow betweeness</i>	<i>network centralization index</i>	16.2%	26.2%
		média	5.9	6.1
		desvio padrão	6.7	7.4
	proximidade	média de <i>infarness</i>	119.2	37.2
		média de <i>outfarness</i>	119.2	37.2
		desvio padrão de <i>infarness</i>	84.2	6.7
		desvio padrão de <i>outfarness</i>	110.4	6.5
		média de <i>incloseness</i>	19.4	53.0
		média de <i>outcloseness</i>	24.1	52.8
		desvio padrão de <i>incloseness</i>	5.1	10.3
		desvio padrão de <i>outcloseness</i>	11.0	9.8
		<i>in-centralization</i>	12.1%	43.5%
<i>out-centralization</i>	72.4%	38.0%		

Tabela 7.20 Comparação de indicadores de *flow betweeness* e proximidade nas comunidades original e reconfigurada de Mat20

(1) comunidade <i>Web</i> /n° de nodos	(2) tipo de indicador	(3) indicador	(4) valor na comunidade inicial	(5) valor na comunidade reconfigurada
Rnd150/150	<i>flow betweeness</i>	<i>network centralization index</i>	12.8%	43.3%
		média	1.4	0.9
		desvio padrão	2.7	4.1
	proximidade	média de <i>infarness</i>	6801.1	360.0
		média de <i>outfarness</i>	6801.1	360.0
		desvio padrão de <i>infarness</i>	4153.2	21.6
		desvio padrão de <i>outfarness</i>	8562.0	21.9
		média de <i>incloseness</i>	2.5	41.6
		média de <i>outcloseness</i>	5.7	41.6
		desvio padrão de <i>incloseness</i>	0.5	3.5
		desvio padrão de <i>outcloseness</i>	2.8	3.7
		<i>in-centralization</i>	0.8%	55.3%
		<i>out-centralization</i>	5.2%	56.0%

Tabela 7.21 Comparação de indicadores de *flow betweeness* e proximidade nas comunidades original e reconfigurada de Rnd150

Como pode ser observado nos valores dos indicadores de *flow betweeness* quer para a comunidade Mat20 quer para a Rnd150 há um impacto significativo na centralidade dos nodos dos grafos causado pela estrutura *hub-and-spoke* imposta pelo modelo base de reconfiguração. De facto, embora o resultado seja mais significativo para a comunidade de maior dimensão, o índice de *network centralization* em termos de *flow betweeness* aumenta consideravelmente da rede inicial para a rede reconfigurada.

Estes resultados continuam a apontar para um impacto estrutural dos métodos propostos em articulação com os resultados já obtidos em termos de redução dos indicadores de «distância da rede».

Contudo, o que parece ser mais relevante do ponto de vista dos objectivos propostos neste trabalho de investigação está relacionado com os valores dos indicadores de proximidade nestas duas comunidades testadas.

Os indicadores médios de distanciamento (*infarness* e *outfarness*) sofreram uma redução extremamente notável com a reconfiguração do grafo inicial, o que comprova a aproximação entre cada nodo e os restantes nodos do grafo. É ainda de salientar a diminuição dos valores do desvio padrão relativamente à média, o que comprova o efeito equalizador dos métodos propostos.

Como seria de esperar, os indicadores recíprocos de proximidade apresentam um comportamento condizente com os resultados obtidos para o distanciamento. Também aqui, os indicadores de centralidade global do grafo, em termos de proximidade sofrem um aumento de relevo na passagem do grafo inicial para o reconfigurado, o que comprova novamente o impacto estrutural global dos métodos propostos em termos de aumento da proximidade entre o conjunto dos nodos das duas comunidades *Web* estudadas nesta secção.

Estes resultados obtidos para a proximidade e para o *flow betweenness*, conjugados com os valores discutidos mais acima, tais como a significativa redução do diâmetro do grafo (em que cada nodo dista no grafo reconfigurado somente 3 ligações de cada outro nodo), a redução muito significativa da distância média entre os nodos e, mais ainda, o facto de nos grafos reconfigurados todos os nodos passarem a estar alcançáveis, são a prova do grande impacto estrutural que os métodos de optimização propostos podem provocar numa comunidade *Web*.

7.7 Conclusões

Neste capítulo apresentaram-se os resultados dos testes computacionais.

Na secção 7.2 foram mostrados os resultados da aplicação de relaxações lineares para a obtenção de minorantes para o valor óptimo do problema na versão de funções objectivo ponderadas, destacando-se no entanto o mau funcionamento desta metodologia por dois motivos. Primeiro, apenas uma das relaxações conseguiu fornecer minorantes para as instâncias com número de nodos superior a 40 e, segundo, pelo elevado *gap* que corresponde aos minorantes.

As secções 7.3, 7.4 e 7.5 discutiram, respectivamente, o estudo computacional das heurísticas, a determinação das fronteiras aproximadas, a comparação destas com a fronteira de Pareto nos dois casos em que tal foi possível e o estudo comparativo das várias heurísticas.

Na secção 7.6 foram analisados e discutidos para o grafo inicial e para o grafo reconfigurado reconfigurada, entre outros indicadores, o número de pares de nodos para os quais não existe nenhum caminho entre eles (em ambos os sentidos); a distância média entre dois pares de nodos e o diâmetro do grafo. Foram ainda avaliados os valores para os indicadores de *flow betweenness* e proximidade quer para os nodos de forma individual, quer para o seu conjunto nos dois grafos analisados.

Os resultados obtidos aparentam comprovar o efeito equalizador dos métodos propostos na estrutura das comunidades *Web* e redutor dos seus desequilíbrios globais iniciais. Embora estes resultados tenham sido avaliados apenas para duas instâncias suspeita-se que possam espelhar o comportamento em qualquer outro caso de balanceamento de comunidades *Web*.

Capítulo 8

Conclusões e desenvolvimentos

The most important thing is never stop questioning

Einstein

8.1 Principais conclusões

São muitos os campos de aplicação para os métodos e modelos da IO, sendo cada vez mais abrangente o seu contexto de aplicação. Em particular, no ensino e aprendizagem da matemática desde o 1º CEB ao ensino secundário são diversificadas e muito ricas as tarefas e trabalhos de projecto que podem ser desenvolvidos e enquadrados no âmbito de IO, considerada por isso uma das áreas, à semelhança da Estatística e Análise de Dados, a incluir mais explicitamente quer no Currículo Nacional quer nos programas de Matemática do básico e secundário.

Também as redes sócio-tecnológicas, nomeadamente o caso particular da *Web*, têm merecido atenção por alguns investigadores de IO.

Por outro lado é prolífica a investigação que tem surgido em redor da *Web*, a maior parte mais orientada para o estudo da sua estrutura e evolução, quer a um nível global quer a um nível mais micro, como é o caso do estudo das comunidades *Web*. Nesta dissertação o enfoque foi dado à estrutura dessas comunidade *Web* e à forma como podem ser reconfiguradas com o objectivo de obter uma estrutura mais equilibrada. Este balanceamento trás consigo uma maior aproximação dos elementos da comunidade permitindo uma distribuição mais uniforme de informação e recursos e, em simultâneo, um maior controle na preservação desses mesmos recursos dentro da comunidade.

Este problema embora tenha merecido menos atenção, foi referido por alguns autores como de extrema importância face à existência de comunidades *Web* com estrutura «distante» do conceito de comunidade democrática. Surge então a necessidade de, numa fase posterior à identificação da comunidade *Web*, encontrar uma forma de organizar essa comunidade em subcomunidades (*clusters*) de modo a facilitar o seu funcionamento mais equilibrado. Esta organização deverá de algum modo contrariar o efeito de núcleo com *hubs* e autoridades evitando a existência de pequenos nichos com poucas ligações e, por isso, com dificuldades em competir com outros mais proeminentes.

Foi neste contexto que se propôs o Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web* (PCW). O modelo delineado para o PCW reconfigura uma dada comunidade *Web*, com uma estrutura do tipo *hub-and-spoke* e é muito semelhante ao problema de cobertura por *hubs* (PCH), inicialmente indicado por Campbell (1996), embora envolva a minimização de dois objectivos conflituosos.

Relativamente ao trabalho desenvolvido no âmbito específico do modelo estudou-se uma variante do problema de cobertura por *hubs* para a qual não se conhece até ao momento nenhuma abordagem. Esta variante torna-se de mais difícil resolução do que o PCH *standard*, sendo impossível utilizar algumas das metodologias usadas no PCH, por vários factores:

- (1) o PCW exige a minimização do número de *hubs* (característica fundamental no PCH) e também a minimização do número de novos arcos necessários para reconfigurar o grafo (objectivo 1);

8. Conclusões e pistas para trabalhos futuros

- (2) o PCW exige a minimização do máximo dos valores de grau aliados aos *clusters* do grafo reconfigurado (objectivo 2);
- (3) além da existência destes dois objectivos conflituosos, a restrição de cobertura característica de qualquer PCH, o PCW envolve um parâmetro que não verifica as propriedades da desigualdade triangular e da simetria.

Decorrente destes factos, foram desenvolvidas para o PCW adaptações de duas metaheurísticas, a GRASP e a pesquisa tabu, que poderão vir a ser aplicadas em qualquer PCH, pois desconhece-se até ao momento qualquer utilização de metaheurísticas na resolução de problemas desta categoria. Além destes dois métodos, designados por Global GRASP e Global Tabu, foi implementada uma terceira metaheurística que resulta da combinação das duas, designada por Híbrida.

Embora as metaheurísticas tenham sido contruídas para a versão do problema com objectivo de minimização da soma ponderada das duas funções objectivo, os resultados computacionais tanto para esta versão como para o próprio PCW (bi-objectivo) são bastante animadores, não só relativamente à qualidade das soluções como ao tempo de execução. É nítida a vantagem da Global GRASP e da Híbrida relativamente à Global Tabu. É também de salientar que embora sejam menos as publicações relativas à aplicação da GRASP para problemas multi-objectivo, comparativamente com a Pesquisa Tabu, a experiência computacional com as instâncias do PCW demonstrou, em muitos casos, prestações da Global GRASP superiores à da Global Tabu.

Verificou-se experimentalmente um aumento no nível de proximidade entre os nodos em articulação com o aumento do indicador de *flow betweenness*, bem como uma diminuição acentuada dos indicadores relacionados com a distância entre os nodos na rede.

8.2 Limitações da investigação e trabalhos futuros

Nesta secção apresentam-se alguns dos limites reconhecidos à investigação realizada.

Considera-se uma limitação do modelo proposto o facto de não entrar em linha de conta no balanceamento dos *clusters* com o número de nodos de cada *cluster*. Poderão assim surgir situações extremas em que *clusters*, embora com o mesmo grau interno e externo, portanto balanceados, possuam cardinalidade muito dispar (um com poucos nodos com elevado grau e outro com muitos nodos todos com baixo grau interno e externo).

O modelo proposto poderá ainda ser enriquecido incorporando nos objectivos deste um número mais alargado de parâmetros que caracterizem os grafos iniciais, em complemento aos parâmetros aqui utilizados, grau interno e grau externo. São disso exemplo, indicadores de densidade do grafo, indicadores de centralidade de cada nodo do grafo como o *flow betweenness* ou ainda outros indicadores que caracterizem de forma particular o papel de cada nodo no grafo inicial. Deverão também ser estudados num futuro próximo custos diferenciados para a localização de *hubs* e para a criação de novos arcos.

Uma das dificuldades metodológicas encontradas no desenvolvimento deste projecto foi a não disponibilidade de dados de instâncias de comunidades *Web* reais, nem em publicações sobre comunidades *Web*, nem mesmo na *Internet*, embora muitos autores as refiram. Face a esta dificuldade foram recolhidas algumas comunidades reais de acordo com a metodologia exposta na secção 4.7. Esta apresenta algumas limitações que se pensa poder ultrapassar num futuro próximo com a divulgação por parte da comunidade de investigação em comunidades *Web* de dados relativos a comunidades identificadas ou com a disponibilização de *software* que incorpore alguns dos algoritmos mais usuais para identificação de comunidades *Web*, como é o caso do HITS.

Uma outra limitação deste projecto de doutoramento é o facto dos dados das comunidades *Web* serem de natureza sectorial e não longitudinal no tempo, o que poderá colocar sérios problemas na investigação da dinâmica da estrutura de redes, por outras palavras, no comportamento da rede ao longo do tempo, que não foi objecto de estudo desta dissertação.

Em relação à metodologia de resolução adoptada para o PCW, refira-se que os minorantes determinados pelas relaxações dos modelos apresentados no capítulo 5 se

8. Conclusões e pistas para trabalhos futuros

revelaram de muito fraca qualidade, logo sem qualquer possibilidade de serem usados para avaliar a qualidade das soluções heurísticas.

Em termos de limitações da metodologia de determinação de soluções admissíveis poderá considerar-se a título de exemplo, a necessidade de introduzir melhorias na heurística Global Tabu urante a fase de diversificação reinicializando com soluções de elite.

Ainda em termos das heurísticas existem também dificuldades no processamento computacional de instâncias do problema com número elevado de nodos e arcos, principalmente no que diz respeito à Global Tabu e à Híbrida.

A investigação realizada no âmbito desta dissertação abriu campos e possibilidades de exploração da Investigação Operacional e, nomeadamente, métodos e modelos de optimização em grafos em trabalhos futuros.

Alguns destes trabalhos poderão passar pela formalização do problema PCW utilizando outros modelos, tais como o modelo de agrupamento e o modelo em grafos com dois níveis. Bem como no aperfeiçoamento dos métodos heurísticos na resolução do problema, incorporando um estudo bi-objectivo mais desenvolvido que não se limite a lidar com a soma ponderada das duas funções objectivo.

Constitui uma motivação a curto prazo para a autora deste estudo a realização de testes computacionais mais alargados, considerando outros dados e casos de estudo, recolhidos de forma diversa (por exemplo com outros métodos de *crawling*). Em particular, a utilização de dados de estruturas de comunidades *Web* observadas ao longo de um período de tempo, por intermédio de simulação computacional ou outras técnicas.

Finalmente, constitui ainda trabalho futuro de investigação a consideração de forma mais extensiva a outros domínios de aplicação, que poderão generalizar os resultados obtidos para áreas muito para além do Problema de Balanceamento de uma Comunidade na *Web*.

Referências Bibliográficas

Aardal, K., Labbé, M., Leung, J., M. Queyranne. On the two-level uncapacitated facility location problem, *Journal on Computing*, 8(3), 289-301, 1996.

S. Abdinnour-Helm. A hybrid heuristic for the uncapacitated hub location problem, *European Journal of Operational Research*, 106, 489-499, 1998.

P. Abrantes. Contagens, grafos e matrizes nos nossos programas? Talvez um dia..., *Educação e Matemática*, 30, 17-20, 1992.

Adamic, L., B. Huberman, The Nature of Markets in the World Wide Web, *Quarterly Journal of Electronic Commerce*, 1(1), 5-12, 2000.

Ahmadi, S., I. Osman. Greedy random adaptive memory programming search for the capacitated clustering problem, *European Journal of Operational Research*, 162(1), 30-44, 2005.

Ahuja, K., Magnanti, T., J. Orlin. *Network flows: Theory, algorithms and applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

Albert, R., A. Barabási. Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, 74, 47-97, 2002.

Albuquerque, C., Nápoles, S., Rocha, I., Santos, L., E. Veloso. *Formação Matemática do Futuro Professor*, SEM/SPCE e APM, Lisboa, 2006.

Alpert, C., A. Kahng. Recent direction in netlist partitioning: a survey, *Integration: The VLSI Journal*, 19, 1-81, 1995.

K. Al-Sultan. A tabu search approach to the clustering problem, *Pattern Recognition*, 28(9), 1443-1451, 1995.

Alumur, S., B. Kara, Network hub problems: the state of the art, *European Journal of Operational Research*, 2007.

Alves, M., J. Clímaco. An interactive method for 0-1 multiobjective problems using simulated annealing and tabu search, *Journal of Heuristics*, 6, 385-403, 2000.

Alves, M., J. Clímaco. A review of interactive methods for multiobjective integer and mixed-integer programming, *European Journal of Operational Research*, 180, 99-115, 2007.

Areibi, S., A. Vannelli. Tabu search: implementation and complexity analysis for netlist partitioning, *ISCA International Journal of Computers & their Applications*, 10(4), 211-232, 2003.

Arnold, P., Peeters, D., I. Thomas. Modelling a rail/road intermodal transportation

system, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 40(3), 255-270, 2004.

Arthanary, T., Y. Dodge. *Mathematical Programming in Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1980.

Aude, J., Diaz, Y., Codani, J., J. Risler. Applications of the pyramidal clustering method to biological objects, *Computers & Chemistry*, 23, 303-325, 1999.

Avella, P., Villacci, D., A. Sforza. A Steiner arborescence model for the feeder reconfiguration in electric distribution networks, *European Journal of Operational Research*, 164(2), 505-509, 2005.

Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., Maniezzo, V., A. Mingozzi. A new method for solving capacitated location problems based on a set partitioning approach, *Computers & Operations Research*, 29, 365-386, 2002.

Barabási, A., Albert, R., Jeong, H., G. Bianconi. Power-Law distribution of the World Wide Web, *Science*, 287, 2000.

Barbas, J., Á. Marín. Maximal covering code multiplexing access telecommunication networks, *European Journal of Operational Research*, 159(1), 219-238, 2004.

Barros, A., Dekker, R., V. Scholten, A two-level network for recycling sand: A case study, *European Journal of Operational Research*, 110, 199-214, 1998.

Batagelj, V., A. Mrvar. Pajek, a program for large network analysis. *Connections*, 21(2), 47-57, 1998.

V. Batagelj. Network analysis of texts. In *Workshop to Introduction to Network Analysis*, ISEG, Feveireiro, Lisboa, 2004.

Barthélemy, J., F. Brucker. NP-hard approximation problems in overlapping clustering, *Journal of Classification*, 18, 159-183, 2001.

M. Benta. Agna 2.1.1, Free Software for Social Networks Analysis. In <http://www.geocities.com/imbenta/agna/>, 2003.

P. Berkhin. Survey of clustering data mining techniques, *Accrue Software*, 2002.

S. Berkowitz. *An introduction to structural analysis: The network approach to social research*, Butterworths, Toronto, 1982.

P. Bertrand. Structural properties of pyramidal clustering. In *Partitioning Data Sets with applications to psychology, vision and target tracking*, Cox, I., Hansen, P., B. Julesz (Eds) 19, AMS, DIMACS, 35-53, 1995.

- J. Bezdek. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*, Springer, London, 1981.
- C. Biehl. Discrete Mathematics: A fresh start for secondary students. In *Discrete Mathematics in the Schools*, (Eds), Rosenstein J., Franzblau, D., F. Roberts, AMS, NCTM, Reston, Virginia, 317-322, 1992.
- L. Bjornebörg. Small-world connector across academic web spaces, *AoIR-ASIST, Web Science Research Methods*, Association of Internet Researchers Conference, Brighton, UK, 2004.
- Borgatti S., Everett M., L. Freeman. *UCINET 6.0 Version 1.00*. Analytic Technologies, Natick, Massachusetts, 1999.
- S. Borgatti. Identifying sets of key players in a social network, *Computational, Mathematical and Organizational Theory*, 12, 21-34, 2006.
- Borrvalho, A., R. Espadeiro. Grafolândia, *Encontro Nacional de Professores de Matemática-ProfMat2003*, Santarém, Novembro, 2003.
- C. Bouma. Design your own city: A discrete mathematics project for high school students. In *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12*, (Eds), Kenney, M., C. Hirsch, NCTM, Reston, Virginia, 235-245, 1991.
- Bourjolly, J., Laporte, G., G. Pesant. An exact algorithm for the maximum k -club problem in an undirected graph, *European Journal of Operational Research*, 138, 21-28, 2002.
- Broder, A., Kumar, R., Maghoulk, F., P. Raghavan. Graph structure in the Web, *Computer Networks*, 33, 309-320, 2000.
- J. Caldas. Cinco métodos de classificação na óptica da Optimização Combinatória, Working paper Cemapre-ISEG, 2-91, 1991.
- A. Caldas. *The structure of electronic scientific communication. Research collaboration, electronic networks and the discovery of digital knowledge bases*, unpublished Doctoral Thesis, Science and Technology Policy, University of Sussex, UK, 2004.
- A. Caldas. Galilei-A multi-agent system for the discovery of digital knowledge bases, Working paper, *Oxford Internet Institute*, 2005.
- Caldas, A., Schroeder, R., Mesch, G., W. Dutton. The World Wide Web of science and democratisation of access to global sources of expertise, accepted for publication in *JCMC-Journal of Computer Mediated Communication, Special Issue on Search Engines*, 2006.

J. Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, 72, 387-405, 1994.

J. Campbell. Hub location and the p -hub median problem, *Operations Research*, 44(6), 923-935, 1996.

Cano, J., Córdon, O., Herrera, F., L. Sánchez. A GRASP algorithm for clustering, *Lecture Notes in Computer Science*, 2527, 214-223, 2002.

Carello, G., Croce, F., Ghirardi, M., R. Tadei. Solving the hub location problem in telecommunication network design: A local search approach, *Networks*, 44(2), 94-105, 2004.

Chakrabarti, S., Joshi, M., Punera, K., D. Pennock. The structure of broad topics on the Web. In *Proceedings of WWW2002*, Honolulu, Hawaii, May, 2002.

Chamberland, S., Sanso, B., O. Marcotte. Topological design of two-level telecommunication networks with modular switches, *Operations Research*, 48(5), 745-760, 2000.

Clímaco, J., Antunes, C., M. Alves. *Programação linear multiobjectivo do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objectivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra, 2003.

Cohen, R., Erez, K., Ben-Avraham, D., S. Havlin. Breakdown of the internet under intentional attack, *Physical Review Letters*, 86(16), 3682-3685, 2001.

Colaço, S., Rebelo, C., M. Pato. Problemas de optimização em redes sociais e tecnológicas. Algumas actividades para a aula de Matemática. In *Actas do ProfMat2005*, Évora, Portugal, Novembro, 2005.

Colaço, S., M. Pato. GRASP and tabu search heuristics for redesigning Web communities, Working paper 10/06, Centro de Investigação Operacional-FCUL, 2006.

Collette, Y., P. Siarry, *Multiobjective optimization*, Springer, New York, 2003.

Collette, Y., P. Siarry. Three new metrics to measure the convergence of metaheuristics towards the pareto frontier and the aesthetic of a set of solutions in biobjective optimization, *Computers & Operations Research*, 32, 773-792, 2005.

Correia, I., M. Captivo, Bounds for the single source modular capacitated plant location problem, *Computers & Operations Research*, 33(10), 2991-3003, 2006.

Cortinhal, M., M. Captivo, Upper and lower bounds for the single source capacitated location problem, *European Journal of Operational Research*, 151, 333-351, 2003.

Cplex, *Using the Cplex Callable Library*, Version 8.0, ILOG, Inc., 2002.

CSIRO, in <http://www.cmis.csiro.au/or/hubLocation>

Curcic S., Ozveren S., Crowe, L., Lo, K., Electric power distribution network restoration: A survey of papers and review of the restoration problem, *Electric Power Systems Research*, 35, 73-86, 1996.

Current, J., ReVelle, C., J. Cohon. The maximum covering/shortest path problem: A multiobjective network design and routing formulation, *European Journal of Operational Research*, 21, 189-199, 1985.

Delmaire, H., Díaz, J., Fernández, E., M. Ortega. Comparing new heuristics for the pure integer capacitated plant location problem, *Technical Report DR97/10*, Department of Statistics and Operations Research, Universitat Politecnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1997.

A. Dekker. Social network analysis in military headquarters using CAVALIER in *5th International Command & Control Research & Technology Symposium*, Canberra, Australia, Outubro, 2000.

Ebery, J., Krishnamoorthy, M., Ernst, A., N. Boland. The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms, *European Journal of Operational Research*, 120, 614–631, 2000.

Edwards, T., K. Chelst. The HSOR project: insinuating OR into high school mathematics classrooms, *INFORMS Transactions on Education*, 4(3), 1999.

Erdős, P., A. Rényi. On random graphs, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 6, 290-297, 1959.

Ernst, A., M. Krishnamoorthy. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem, *Location Science*, 4(3), 139-154, 1996.

Ernst, A., M. Krishnamoorthy. Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem, *European Journal of Operational Research*, 104, 100-112, 1998.

Ernst, A., M. Krishnamoorthy. Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem, *Annals of Operations Research*, 86, 141-159, 1999.

Ernst, A., Jiang, H., M. Krishnamoorthy. Reformulations and computational results for uncapacitated single and multiple allocation hub covering problems, *unpublished*, 2005.

Evans, J., E. Minieka. *Optimization for Networks and Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, EUA, 1992.

Everett, M., S. Borgatti. The centrality of groups and classes, *Journal of Mathematical Sociology*, 23(3), 181-201, 1999.

Everitt, B., Leese, M., S. Landau. *Cluster analysis*, Edward Arnold, London, 2001.

- Ferreira, C., Clímaco, J., J. Paixão. The location-covering problem: a bicriterion approach, *Investigacion Operativa*, 4, 119-139, 1994.
- J. Filipe. Programação linear: relato de uma experiência, *Educação e Matemática*, 49, 25-28, 1998.
- Fischetti, M., Jacur, G., J. González. Optimisation of the interconnecting network of a UMTS radio mobile telephone system, *European Journal of Operational Research*, 144(1), 56-67, 2003.
- Fisher, M., D. Hochbaum. Database location in computer networks, *Journal of the ACM*, 27(4), 718-735, 1980.
- Flake, G., Lawrence, S., C. Giles. Efficient identification of Web communities, in *Proceedings of the Sixth International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 150-160, Boston, EUA, 20-23, August, 2000.
- Flake, G., Lawrence, S., Giles, C., F. Coetzee. Self-Organization and identification of Web communities, *Computer*, 35(3), 66-71, 2002.
- França, P., Sosa, N., V. Pureza, An adaptive tabu search algorithm for the capacitated clustering problem, *International Transactions in Operational Research*, 6(6), 665-678, 1999.
- Garcia, V., P. França. Multiobjective service restoration in electric distribution networks using a local search based heuristic, *European Journal of Operational Research*, *In Press, Corrected Proof, Available online 26 January*, 2007.
- Garey, M., D. Johnson. *Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
- Gendreau, M., Laporte, G., F. Semet. Solving an ambulance location model by tabu search, *Location Science*, 5(2), 75-88, 1997.
- Gendreau, M., Guertin, F., Potylin, J., E. Taillard. Parallel tabu search for real-time vehicle routing and dispatching, *Transportation Science*, 33(4), 381-390, 1999.
- Girvan, M., M. Newman. Community structure in social and biological networks, in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7821-7826, EUA, 2002.
- F. Glover. Tabu search-Part I, *ORSA Journal on Computing*, 1(3), 190-206, 1989.
- F. Glover, M. Laguna. *Tabu search*. Kluwer Academic Publishers: Boston; 1997.
- Gnuwin32 in <http://gnuwin32.sourceforge.net/packages.html>
- A. Gordon. *Classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

- Han, J., Hu, X., N. Cercone. On Graph-based methods for inferring Web Communities in *Workshop on Applications, Products and Services of Web-based Support Systems*, 145-153, San Mary's University, 2003.
- Hasan, M., Osman, I., T. Alkhamis. A meta-heuristic procedure for the three dimension assignment problem, *International Journal of Applied Mathematics*, 8:365–380, 2002.
- M. Hansen. Tabu Search for multiobjective optimization: MOTS, MCDM'97, Cape Town, South Africa, January, 1997.
- Hansen, P., B. Jaumard. Cluster analysis and mathematical programming, *Mathematical Programming*, 79, 191-215, 1997.
- Hansen, P., N. Mladenović. J-means: a new local search heuristic for minimum sum-of-squares clustering. *Pattern Recognition*, 34(2), 405-413, 2001.
- Henriques, M., P. Santos. *Matemática Discreta no 1º CEB. Influência nas Concepções e Atitudes dos Alunos acerca da Matemática*, monografia do curso de professores do 1ºCEB da Escola Superior de Educação de Santarém, 2003.
- Holmqvist, K., Migdalas, A., P. Pardalos. Greedy randomized adaptive search for a location problem with economies of scale. In *Developments in Global Optimization*, (Eds), Bomze I. et al., Kluwer Academic Publishers, 301-313, 1997.
- Iliopoulos, I., Enright, A., C. Ouzounis. Textquest: document clustering of medline abstracts for concept discovery in molecular biology, in *Pacific Symposium on Biocomputing*, 384-95, 2001.
- Jain, S., S. Krishna. Graph theory and the evolution of autocatalytic networks. In *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet*, (Eds), Bornholdt, S., Schuster, H., Wiley-VCH, Berlin, 355-395, 2003.
- James, J., S. Salhi. A tabu Search heuristic for the location of multi-type protection devices on electrical supply tree networks, *Journal of Combinatorial Optimization*, 6(1), 81-98, 2002.
- Jeong, G., Lee, K., Park, S., K. Park, A branch-and-price algorithm for the Steiner tree packing problem, *Computers & Operations Research*, 29(3), 221-241, 2002.
- Johnson, E., Mehrotra, A., G. Nemhauser. Min-cut clustering, *Mathematical Programming*, 62, 133-151, 1993.
- Johnson, A., F. Fotouhi. Adaptive clustering of hypermedia documents, *Journal: Information Systems*, 21(6), 459, 1996.
- Jones, D., Mirrazavi, S., M. Tamiz. Multi-objective meta-heuristics: An overview of the current state-of-the-art, *European Journal of Operational Research*, 137, 1-9, 2002.

- Kara, B., B. Tansel. On the single-assignment p-hub center problem, *European Journal of Operational Research*, 125, 648-655, 2000.
- Kara, B., B. Tansel. The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations, *Journal of the Operational Research Society*, 54, 59-64, 2003.
- Karasoven, B., Rubinov, A., G. Weber. Optimization in Data Mining, *European Journal of Operational Research*, 173, 701-704, 2006.
- Kleinberg, J., Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., A. Tomkins. The Web as a graph: measurements, models, and methods, in *Proceedings of 5th International Conference on Computing and Combinatorics*, Tokyo, 1999.
- Kleinberg, J., S. Lawrence. The structure of the web, *Science*, 294, 1849-1850, 2001.
- Klempous, R., Kotowski, J., E. Szlachcic. Some numerical aspects of the gradient procedure for design of nonlinear transportation networks. Pewne numeryczne aspekty gradientowych procedur do projektowania nieliniowych sieci transportowych, *Mathematics and Computers in Simulation*, 37, 29-35, 1994.
- J. Klincewicz. Heuristics for the p-hub location problem, *European Journal of Operational Research*, 53, 25-37, 1991.
- J. Klincewicz. Avoiding Local Optima in the p-hub location problem using tabu search and GRASP, *Annals of Operations Research*, 40(1), 283-302, 1992.
- J. Klincewicz. A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem, *Location Science*, 4(3), 173-184, 1996.
- J. Klincewicz. Enumeration and search procedures for a hub location problem with economies of scale, *Annals of Operations Research*, 110, 107-122, 2002.
- Kocay, W., D. Kreher. *Graphs, algorithms and optimization*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2005.
- V. Krebs. Uncloaking terrorist networks. *First Monday* 7(4) <http://www.firstmonday.dk/issues/issue74/krebs/index.html>, 2002.
- Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., A. Tomkins. Trawling the Web for emerging cyber-communities, *Computer Networks*, 31, 1481-1493, 1999.
- Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., A. Tomkins. The Web and social networks, *Computer*, 32-35, Novembro, 2002.
- Leiner, B., Vinton, G., Cerf, D., Clark, R., Kahn, E., Kleinrock, L., Lynch, D., Postel, J. Larry G., S. Wolff. A brief history of the Internet, acedido em 27 de Janeiro de 2007 no endereço <http://www.isoc.org/Internet/history/brief.shtml>, 2000.

- F. Lewis. Wireless Sensor Networks, *Smart Environments*, 11-46, 2004.
- Liu, X., Pardalos, P., Rajasekaran, S, M. Resende. A GRASP for frequency assignment in mobile radio networks. In *Mobile Networks and Computing*, (Eds), Badrinath, B., Hsu, F., Pardalos, P., Rajasekaran, S., 52, 195-201, DIMACS, American Mathematical Society, 2000.
- Lockerd, A., T. Selker. DriftCatcher: enhancing social networks through E-mail, in *International Sunbelt Social Networks Conference XXII*, New Orleans, Louisiana, USA, February, 2002.
- Makrogiannis, S., Economou, G., S. Fotopoulos. A region dissimilarity relation that combines feature-space and spatial information for color image segmentation, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet. Part B*, 35(1), 44-53, 2005.
- J. Malkevitch. Bin Packing: A Mathematical Application, *Mathematics Teacher*, 84 29-31, 1991
- Marianov, V., Serra, D., C. ReVelle. Location of hubs in a competitive environment, *European Journal of Operational Research*, 114, 363-371, 1999.
- Mason, J., S. Johnston-Wilder. *Fundamental Constructs in Mathematics Education*, The Open University, London, 2004.
- R. Matthews. Get connected, *NewScientist*, 2215, 1999.
- ME-DEB, *Currículo Nacional do Ensino Básico*, 2001.
- ME-DES, *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais – 10º, 11º e 12º anos*, 2002.
- ME-DES, *Programa de Matemática A – 11º ano*, 2002.
- Mehrotra, A., M. Trick. Cliques and clustering: A combinatorial approach, *Operations Research Letters*, 22, 1-12, 1998.
- J. Mendes. Física de redes complexas, *Gazeta da Física*, 28(4), 10-16, 2005.
- Mirkin, B., I. Muchnik. Combinatorial optimization in clustering. In *Handbook of Combinatorial Optimization*, (Eds), Du, D., Pardalos, P., Kluwer Academic Publishers, 261-329, 1998.
- M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Mathematics*, 1, 2003.
- R. Mokken. Cliques, clubs and clans, *Quality and Quantity*, 13, 161-173, 1979.

Montané, F., D. Galvão. A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with simultaneous pick-up and delivery service, *Computers & Operations Research*, 33(3), 595-619, 2006.

Murphey, R., Pardalos, P., L. Pitsoulis. A parallel GRASP for the data association multidimensional assignment problem. In *Parallel processing of discrete problems*, (Eds), P. Pardalos, 106, *The IMA volumes in Mathematics and Its Applications*, 159-180, Springer-Verlag, 1998.

M. Nascimento. Uma proposta para ensinar programação linear a futuros professores de matemática, *3º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática*, Lisboa, 2004.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*, traduzido pela APM (Associação de Professores de Matemática) e pelo IIE (Instituto de Inovação Educacional), Lisboa, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, Virginia, 2000.

T. Nelson. A file structure for the complex, the changing and the indeterminate in *Proceedings of the ACM National Conference*, 1965.

M. Newman. The structure and function of complex networks, *technical report*, 2003.

Ng., A., Zheng, A., M. Jordan. Link analysis, eigenvectors and stability, in *Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 903-910, Seattle, Washington, EUA, August, 2001.

M. O'Kelly. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20, 92-106, 1986.

M. O'Kelly. Hub facility location with fixed costs, *The Journal of the Regional Science Association International*, 71(3), 293-306, 1992.

Oninet em <http://homepage.oninet.pt>

Pacheco, J., O. Valencia. Design of hybrids for the minimum sum-of-squares clustering problem, *Computational Statistics & Data Analysis*, 43(2), 235-248, 2003.

J. Padgett. Marriage and elite structure in Renaissance, Florence, 1282-1500, *unpublished SSHA conference paper*, 1994.

Park, K., Lee, K., Park, S., H. Lee. Telecommunication node clustering with node compatibility and network survivability requirements, *Management Science*, 46(3), 363-374, 2000.

- Pastor-Satorras, R., A. Vespigani. *Evolution and Structure of the Internet*, Cambridge University, Cambridge, 2004.
- Pearson, D., V. Bryant. *Decision Maths*, Heinemann Educational Publishers, Oxford, 2004.
- N. Pendegraft. Lego of my simplex, *OR/MS Today*, 24(1), 30-31, 1997.
- Polak, G., R. Ahuja. A polynomial-time algorithm for message routing in hierarchical communication, *European Journal of Operational Research*, 80, 139-146, 1995.
- C. Rego. Uma heurística tabu para a determinação de rotas de veículos, *Investigação Operacional*, 207-232, 1994.
- Rego, C., C. Roucairol. Using tabu search for solving a dynamic multi-terminal truck dispatching problem, *European Journal of Operational Research*, 83, 411-429, 1995.
- M. Resende. GRASP: Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. A metaheuristic for combinatorial optimization, ECCO'2000, Capri, Italy, 2000.
- Resende, M., C. Ribeiro. Greedy randomized adaptive search procedures. In *State-of-the-Art Handbook of Metaheuristics*, (Eds), F. Glover, G. Kochenberger, Kluwer, 219-249, 2002.
- Rosenstein J., Franzblau, D., F. Roberts. *Discrete Mathematics in the Schools*, AMS, NCTM, Reston, Virginia, 1992.
- Ross, G., R. Soland. A multicriteria approach to the location of public facilities, *European Journal of Operational Research*, 5, 307-321, 1980.
- P. Rousseeuw. Fuzzy clustering at the intersection, *Technometrics*, 37, 283-286, 1995.
- Scaparra, M., R. Church. A GRASP and path relinking heuristic for rural road network development, *Journal of Heuristics*, 11, 89-108, 2005.
- J. Scott. *Social Network Analysis: A Handbook.*, CA: Sage Publications, Newbury Park 1991.
- Sheralli, H., W. Adams. *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous NonConvex Problems*, Kluwer, Netherlands, 1999.
- C. Shirky. Power-Laws, weblogs and inequality, [Acedido em 4 de Junho de 2007] <http://extremedemocracy.com/chapters/Chapter%20Three-Shirky.pdf>, 2003.
- Skorin-Kapov, D., J. Shorin-Kapov. On tabu search for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operational Research*, 73, 502-509, 1994.

Skorin-Kapov, D., Shorin-Kapov, J., M. O'Kelly. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems, *European Journal of Operational Research*, 94(3), 582-593, 1996.

Slomka, F., Albers, K., R. Hofmann. A multiobjective tabu search algorithm for the design space exploration of embedded systems, *Personal Communication*, 2004.

J. Smith. Algorithms for distributing telecommunication traffic on multiple-ring SONET-based network, *European Journal of Operational Research*, 154(3), 659–672, 2004.

R. Soland. Multicriteria optimization: a general characterization of efficient solutions, *Decision Sciences*, 10, 26-38, 1979.

Su, Z., Yang, Q., Zhang, H., Xu, X., Y. Hu. Correlation-based document clustering using web logs, Working paper, Microsoft Research China, 2004.

Topcuoglu, H., Corut, F., Ermis, M., G. Yilmaz. Solving the uncapacitated hub location problem using genetic algorithms. *Computers & Operations Research*, 32(4), 967-984, 2005.

Toyoda, M., M. Kitsuregawa. A web community chart for navigating related communities, *Conference Proceedings of ACM conference on Hypertext and Hypermedia* table of contents, 103-112, Århus, Denmark, 2001.

Tuzun, D., L. Burke. A two-phase tabu search approach to the location routing problem. *European Journal of Operational Research*, 116, 87-89, 1999.

Veloso, G., C. Loureiro. Matemática discreta e competências matemáticas, *Encontro Nacional de Professores de Matemática –ProfMat98*, Vila Real, Novembro, 1998.

K. Verbeurgt, Inferring emergent Web communities, *SSGRR 2003s - International Conference on Advances in Infrastructure for e-Business, e-Education, e-Science, and e-Medicine on the Internet*, January, 2003.

B. Wagner, Model formulations for hub covering problems, Working paper, Institute of Operations Research Darmstadt University of Technology, 2004.

Wasserman, S., K. Faust. *Social Network Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Watts, D., S. Strogatz. Collective dynamics of «small-world» networks, *Nature*, 393, 440-442, 1998.

Web Data Extractor (WDE) 4.3. Disponível em: <http://www.rafasoft.com/index.htm>, [Acedido em 5/06/07].

Webopedia, *online Dictionary for Computer and Internet Technology*, , disponível em: <http://www.webopedia.com/TERM/d/domain.html>, [Acedido em 19 de Dezembro de 2005].

- B. Wellman. Computer networks as social networks, *Science*, 293, 20131-2034, 2001.
- Wellman, B., Salaff, J., Dimitrova, D., Garton, L., Gulia, M., C. Haythornthwaite. Computer networks as social networks: collaborative work, telework, and virtual community, *Annual Reviews Sociology*, 22, 213-238, 1996.
- B. Wellman. An electronic group is virtually a social network. In *Culture of the Internet*, (Eds), S. Kiesler, 179-205, 1997.
- B. Wellman. Structural Analysis: From method and metaphor to theory and substance. In *Social Structures: A new approach*, (Eds) Wellman, B., S. Berkowitz, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- Whitaker, R., S. Hurley. On the optimality of facility location for wireless transmission infrastructure, *Computers & Industrial Engineering*, 46(1), 171-191, 2004.
- Yaman, H., G. Carello. Solving the hub location problem with modular link capacities, *Computers & Operations Research*, 32, 3227-3245, 2005.
- Yoon, M., Baek, Y., D. Tcha. Design of a distributed fiber transport network with hubbing topology, *European Journal of Operational Research*, 104(3), 510-520, 1998.
- Zamir, O., O. Etzioni. Web document clustering: A feasibility demonstration, Working paper, Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, 1998.
- Zäpfel, G., M. Wasner. Planning and optimization of hub-and-spoke transportation networks of cooperative third-party logistics providers, *International Journal of Production Economics*, 78(2), 207-220, 2002.
- Zhang, Y., Zhang, Z., Y. Zhou. Research on the fuzzy and dynamic monitoring of the diesel engine operating in *Institution of Mechanical Engineers*, 1998.
- Zhang, Y., Yu Xu, J., J. Hou. *Web Communities*, Springer, New-York, 2006.
- Zhong, N., Liu, J., Y. Yao. *Web intelligence*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Zitler, E., Deb, K., L. Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results, technical report 70, *Computer Engineering and Networks Laboratory*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1999.
- Zou, C., Towsley, D., W. Gong. E-mail virus propagation modeling and analysis, Working paper, <http://tennis.ecs.umass.edu/~czou/research/E-mailvirus-techreport.pdf>, [Access Date, 2004].