UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Templates e Elos de Órbitas Periódicas em Fluxos de Dimensão 3

Paulo Jorge Ferreira de Oliveira Coelho

MESTRADO EM MATEMÁTICA

(Análise Matemática)

2008

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Templates e Elos de Órbitas Periódicas em Fluxos de Dimensão 3

Paulo Jorge Ferreira de Oliveira Coelho

MESTRADO EM MATEMÁTICA

(Análise Matemática)

Dissertação orientada pelo
Professor Doutor Pedro Miguel Duarte

2008

À memória de meus avós

Heliodoro e Gertrudes
José e Mariana

Resumo

No que diz respeito à estrutura topológica das soluções de equações diferenciais ordinárias, o conjunto das órbitas periódicas de um fluxo definido numa variedade, X, de dimensão três constitui um elo, *i.e.* a união disjunta de curvas fechadas, simples, em X, designadas nós.

O estudo de fluxos de um ponto de vista topológico tem início, cerca de 1880, com Henri Poincaré, mas foi somente cerca de 1983 e baseando-se no estudo, desenvolvido por Robert Williams, do sistema de Lorenz do ponto de vista da estrutura/tipo dos elos de órbitas periódicas, que Joan Birman e R. Williams introduzem uma estrutura, designada *template*, que modela a colecção de órbitas periódicas de fluxos definidos em variedades de dimensão três e com conjuntos recorrentes por cadeias hiperbólicos.

O presente trabalho divide-se em três partes. Na primeira apresentamos alguns conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Nós.

Na segunda parte consideramos a noção de *template*, a respectiva descrição simbólica, e analisamos que nós e elos estão contidos num dado *template*.

Na terceira parte apresentamos o conceito de *template* universal introduzido por Robert Ghrist em 1997, e que resolve pela negativa uma conjectura de Birman e Williams.

Palavras-chave: difeomorfismo/fluxo hiperbólico, conjunto recorrente por cadeias, nó, elo, trança, *template*, *template* universal

Abstract

Concerning the topological structure of the solutions of ordinary differential equations, the set of periodic orbits of a flow in a three-dimensional manifold X, is a link, *i.e.* the disjoint union of simple closed curves in X, known as knots.

The study of flows from the topological viewpoint starts, around 1880, with Henri Poincaré, but it was only around 1983 and based on the study, developed by Robert Williams, of the Lorenz system, that Joan Birman and R. Williams introduce a structure, the template, that mould the periodic orbits collection of three-dimensional flows with hyperbolic chain-recurrent sets.

This paper falls into three parts. In the first, we provide some basic concepts from Dynamical Systems and Knot Theory.

In the second part, we consider the notion of template, its symbolic description, and analyze what knots and links can be found on a given template.

In the third part, we provide the notion of universal template introduced by Robert Ghrist in 1997, which resolves in the negative a conjecture due to Birman and Williams.

Keywords: hyperbolic diffeomorphism/flow, chain-recurrent set, knot, link, braid, template, universal template

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, o Professor Pedro Miguel Duarte, por toda a orientação científica e por todo o apoio e encorajamento que me dedicou, revelando-se sempre disponível para esclarecer qualquer dúvida e avançando valiosas sugestões.

Queria também agradecer à Manuela, à Rita e à Joana por todo o carinho e infinita paciência que demonstraram ao longo de todo este percurso, e ainda aos meus Pais que, entre muitas outras coisas, me transmitiram:

O Homem faz-se a si próprio.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

No presente capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos e de Teoria dos Nós, necessários ao trabalho a desenvolver.

Como referências, na área dos Sistemas Dinâmicos mencionamos os livros [10, 17, 29]; na área da Teoria dos Nós os livros [6, 30] são referências clássicas, mais recentes são os livros [23, 24, 25].

1.1 Teoria dos Nós: Tópicos Fundamentais

O estudo matemático dos nós não possui uma história recente, e podemos afirmar que grande parte do trabalho inicial foi motivado pelas aplicações. Cerca de 1833 Carl Gauss (1777–1855) estudou o campo magnético produzido por uma corrente eléctrica que percorre um fio eléctrico atado num nó, e Lord Kelvin (1824–1907) conjecturou que os átomos não são objectos pontuais mas pequenos nós, e que o tipo de nó determinava as propriedades físicas e químicas do átomo.

Actualmente, a Teoria dos Nós é um dos campos mais activos de investigação em topologia, e tem produzido resultados extraordinários com aplicações na Física (mecânica estatística), na Química (polímeros, nós moleculares) e na Biologia (reconhecimento de enzimas, ADN).

1.1.1 Nós e Elos

Grosso modo, a teoria clássica dos nós estuda os modos como uma curva simples, fechada, pode estar mergulhada no espaço.

Definição 1.1.1. Dados dois espaços topológicos, de Hausdorff, X e Y, uma aplicação $f : X \hookrightarrow Y$ é um mergulho se $f : X \to f(X)$ é um homeomorfismo.

Definição 1.1.2. Um nó é um mergulho $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3$, onde M^3 é uma variedade fechada (compacta, sem bordo) e orientável de dimensão três (por exemplo $M^3 = \mathbb{S}^3$).

Alguns autores consideram os nós como subconjuntos de $\mathbb{S}^3$ (ou $\mathbb{R}^3$), e não como mergulhos, identificando um nó K com a imagem $K\left(\mathbb{S}^1\right)$.

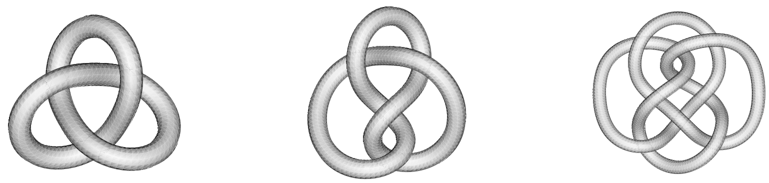


Figura 1.1: Exemplos de nós

Definição 1.1.3. Um $k-$elo é um mergulho $E : \bigsqcup_k \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3$, onde $\bigsqcup_k \mathbb{S}^1$ representa a união disjunta de k cópias de $\mathbb{S}^1$. Deste modo, todo nó é um $1-$elo.

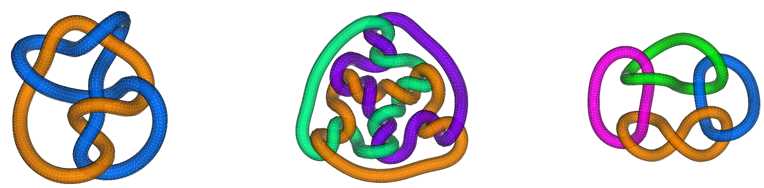


Figura 1.2: Exemplos de $k-$elos, $k > 1$: $2-$elo, $3-$elo e $4-$elo.

Apesar de os nós serem curvas no espaço, em teoria dos nós todo o nó é representado pela sua projecção (regular) num plano, construindo-se um diagrama, designado *diagrama do nó*, no qual se representam as partes de um nó que passam sobre as outras. Esta informação é transmitida por $\times$, onde o segmento quebrado passa sob o segmento sólido, formando um ponto de cruzamento.

Definição 1.1.4. A projecção de um nó K é regular se

1. contém apenas um número finito de pontos múltiplos;[1]

2. todos os pontos múltiplos são duplos e pontos de cruzamento.

É usual considerar elos e nós orientados, — uma orientação num diagrama de um elo é a escolha de uma direcção em cada uma das componentes, representada por uma seta.

A cada cruzamento num diagrama de um $k-$elo orientado, $k \geq 1$, é atribuído um sinal. Adoptamos a convenção usada em [15], notando que é a convenção oposta daquela que é habitualmente adoptada em teoria dos nós. Observamos ainda que, no caso dos nós, o sinal do cruzamento não depende da orientação do nó, pois invertendo as setas em cada um dos segmentos de um cruzamento mantém-se inalterado o sinal do cruzamento.

[1] Dada uma projecção $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ plano de projecção, um ponto $A \in \pi\left(\mathbb{R}^3\right) \subset \mathbb{P}$ diz-se um ponto múltiplo se a pré-imagem $\pi^{-1}(A)$ contém mais do que um ponto.

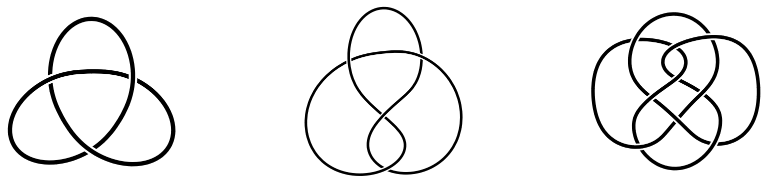


Figura 1.3: Diagramas para os nós da figura 1.1

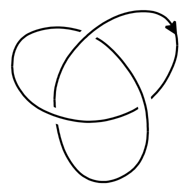


Figura 1.4: Nó orientado

Figura 1.5: Convenção do sinal para cruzamentos

Um dos problemas centrais em teoria dos nós é o de decidir quando dois nós são o mesmo, ou nós distintos, o que permitirá obter uma classificação dos nós.

Definição 1.1.5. Uma isotopia ambiente entre dois nós K_1 e K_2, é uma homotopia $h_t : M^3 \to M^3,\ t \in [0,1]$, que verifica as condições,

1. $h_0 = \mathrm{id}_{M^3}$;
2. para cada $t \in [0,1]$, h_t é um homeomorfismo;
3. $h_1(K_1) = K_2$.

Diz-se então que K_1 e K_2 são ambiente isotópicos.

Observação 1.1.1. Considerando o parâmetro t como a variável tempo, h_t é uma deformação de M^3 que, gradualmente, deforma K_1 em K_2. A deformação é realizada de modo que todo o espaço ambiente é deformado.

É de salientar que a restrição $h_1|_{M^3\setminus K_1} : M^3 \setminus K_1 \to M^3 \setminus K_2$, do homeomorfismo $h_1 : M^3 \to M^3$, é igualmente um homeomorfismo sempre que K_1 e K_2 são ambiente isotópicos.

Definição 1.1.6. Dois nós K_1 e K_2 são *equivalentes*, e escreve-se $K_1 \simeq K_2$, se são ambiente isotópicos. A classe de equivalência de um nó é o seu *tipo de nó*.

Observação 1.1.2. É conveniente chamar a atenção para o facto de a relação de equivalência entre nós ter por base o conceito de isotopia ambiente. O conceito, mais fraco, de isotopia não é suficiente.

De facto, dados dois nós K_1 e K_2, se existir uma isotopia $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M^3$ tal que $H(x,0) = K_1(x)$ e $H(x,1) = K_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$, então K_1 e K_2 são isotópicos ao nó trivial (cf. figura 1.6), pelo que só existiria um tipo de nó.

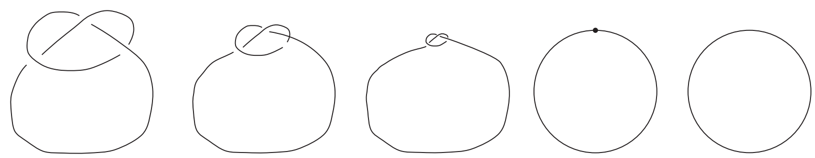


Figura 1.6: O nó trevo é isotópico (mas não ambiente isotópico!) ao nó trivial

Observação 1.1.3. Existem vários diagramas distintos para um dado nó. Justificaremos adiante (figura 1.9) que o nó trivial pode ser representado por qualquer um dos diagramas na figura 1.7.

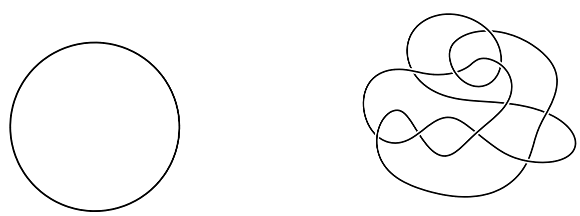


Figura 1.7: Dois diagramas do nó trivial

Doravante iremos considerar $M = \mathbb{R}^3$ ou $M = \mathbb{S}^3$. Uma vantagem em considerar esta restrição é o seguinte teorema de J. W. Alexander, [32]:

Teorema 1.1.1. *Dois nós, K_1 e K_2, são equivalentes em $\mathbb{S}^3$ se, e somente se, existe um difeomorfismo de $\mathbb{S}^3$ que preserva a orientação, e que transforma K_1 em K_2.* □

Apesar de ser possível representar nós equivalentes por vários diagramas distintos, dois diagramas de nó são equivalentes se estão relacionados por uma sequência finita de três movimentos R_1, R_2 e R_3 (e respectivos inversos), designados *movimentos de Reidemeister*, descritos na figura 1.8.

Os movimentos de Reidemeister efectuam alterações locais no diagrama do nó, deixando inalterado o diagrama fora da zona local na qual se executou o movimento. Uma vez que cada um dos movimentos de Reidemeister pode ser realizado por uma isotopia ambiente do nó, diagramas equivalentes definem nós equivalentes.

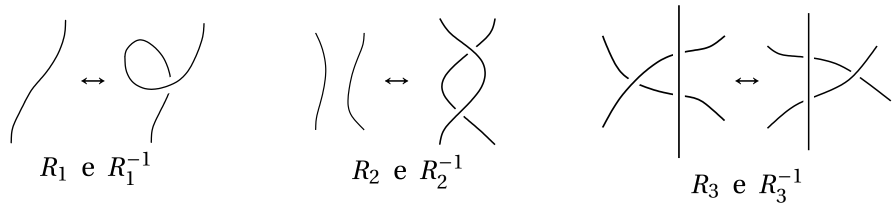


Figura 1.8: Movimentos de Reidemeister

Reciprocamente, Kurt Reidemeister demonstrou, em 1935, o próximo resultado (uma demonstração pode ser consultada em [6]):

Teorema 1.1.2. *Dois nós são equivalentes se, e só se, todos os seus diagramas são equivalentes.* □

Na figura 1.9 uma sequência de movimentos de Reidemeister permite concluir que os diagramas da figura 1.7 são equivalentes.

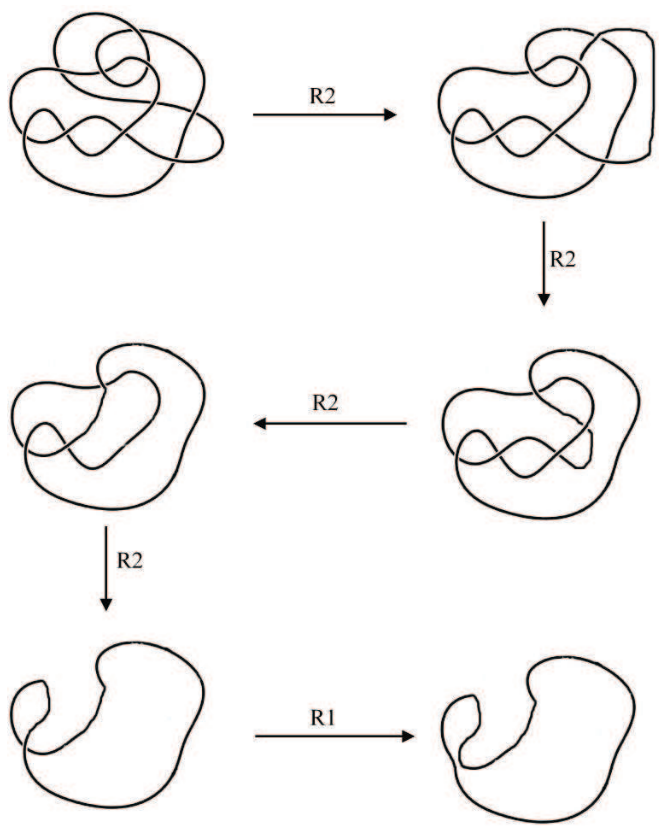


Figura 1.9: Equivalência dos diagramas da figura 1.7

Dados nós K_1 e K_2, não necessariamente distintos, definimos um novo nó removendo um pequeno arco de cada um dos nós, unindo os quatro pontos obtidos com dois novos arcos, sem introduzir cruzamentos adicionais, como na figura 1.10.

O nó assim obtido representa-se por $K_1\#K_2$, e designa-se *soma conexa*, ou *produto*, dos nós K_1 e K_2.

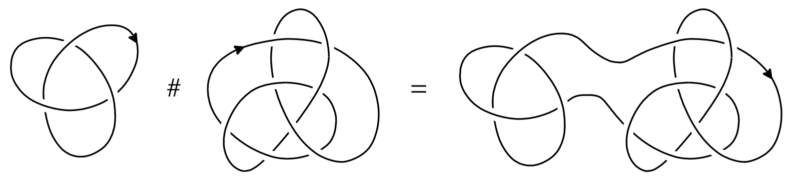
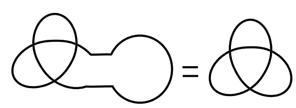


Figura 1.10: Soma conexa de dois nós orientados

Observação 1.1.4. Dado um nó K, seja 0_1 o nó trivial.[2] Então $K\#0_1 = K$.



Definição 1.1.7. Um nó obtido por soma conexa de dois nós não triviais designa-se *composto*. Um nó, distinto do nó trivial, que não é composto, designa-se *primo*.

A analogia entre nós primos e números primos vai mais longe, como revela o teorema da unicidade e decomposição em nós primos, demonstrado por H. Schubert em 1949.

Teorema 1.1.3. *Todo o nó não trivial se pode decompor como o produto (soma conexa) finito de nós primos. Mais, a decomposição é única, a menos da ordem dos factores.* □

Uma classe particular de nós é a dos nós no toro $\mathbb{T}^2$. O nó no toro $T(m,n)$ do tipo (m,n) é o nó que passa em torno de $\mathbb{T}^2$ m vezes longitudinalmente e n vezes meridionalmente, ou seja, intersecta m vezes o meridiano e n vezes a longitude de $\mathbb{T}^2$ (figura 1.11).

Definição 1.1.8. Uma superfície de Seifert para um $k-$elo é uma superfície orientada, com bordo, conexa e compacta, cujo bordo coincide com o $k-$elo.

Teorema 1.1.4 (Frankl e Pontrjagin, 1930)**.** *Todo o $k-$elo é o bordo de uma superfície de Seifert.* □

[2] Na notação, datada de 1926, de J. W. Alexander o nó trivial é representado por 0_1, nó com zero cruzamentos, enquanto, por exemplo, 3_1 representa o nó trevo e 5_2 é o segundo nó, na tabela de Rolfsen [30], com cinco cruzamentos.

(a) (b)

Figura 1.11: (a) $T(2,3)$ – o nó trevo; (b) $T(3,10)$

Observação 1.1.5. O nó trivial é o único nó que admite $\overline{\mathbb{D}}^2$ como superfície de Seifert, com $\overline{\mathbb{D}}^2$ homeomorfa a $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Em 1934 H. Seifert apresentou um algoritmo (*vide* [25]) que permite obter, a partir de um diagrama de um $k-$elo, uma superfície de Seifert para o respectivo $k-$elo. (Na figura 1.12 representam-se duas superfícies de Seifert para os dois primeiros nós representados na figura 1.1).

(a) (b)

Figura 1.12: Superfícies de Seifert para os nós: (a) 3_1; (b) 4_1

Funções que associam um número inteiro a cada classe de isotopia de um elo, designam-se *invariantes numéricos* do elo. Refira-se que até ao momento não foram construídos invariantes numéricos completos, o que significa que tais funções não são injectivas. Apesar disso estes invariantes revelam a sua utilidade na distinção de elos não-equivalentes.

O *genus* de um elo é um desses invariantes numéricos.

Definição 1.1.9. Dado um $k-$elo E, o *genus* de E, $g(E)$, é o mínimo de todos os *genus* das superfícies de Seifert de E.

Teorema 1.1.5 ([25])**.** *Seja $\mathbb{S}$ uma superfície orientável com bordo. Se $\chi(\mathbb{S})$ é a característica de Euler de $\mathbb{S}$ e k o número de curvas fechadas que compõe $\partial\mathbb{S}$,* *então*

$$g(\mathbb{S}) = \frac{2-\chi(\mathbb{S})-k}{2}\,.$$

□

Além de invariantes numéricos, também se definem invariantes polinomiais para $k-$elos. Entre muitos outros referimos o clássico polinómio de Alexander (1923), ou o polinómio de Jones (1985).

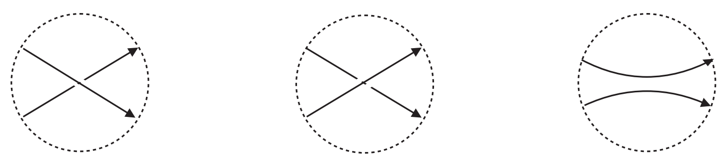
Em [9] J. Conway considera uma variante do polinómio de Alexander, introduzindo um polinómio que pode ser descrito por três axiomas.

Definição 1.1.10. Seja E um $k-$elo orientado. O *polinómio de Conway* de E, $\nabla_E(z) \in \mathbb{Z}[z]$ [3], é o polinómio definido pelos axiomas:

Axioma 1. Se $E \simeq E'$ então $\nabla_E(z) = \nabla_{E'}(z)$;

Axioma 2. Se $E \simeq 0_1$ então $\nabla_E(z) = 1$;

Axioma 3. Sejam K, $\overline{K}$ e K_0 três $k-$elos orientados que diferem apenas numa pequena vizinhança como indicado na figura:



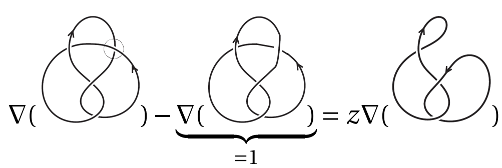
K $\overline{K}$ K_0

Então $\nabla_K(z) - \nabla_{\overline{K}}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$.

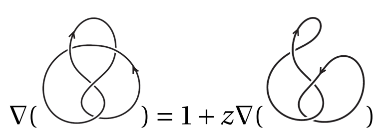
A demonstração de que os três axiomas são consistentes, assim como a demonstração do lema 1.1.1, pode ser consultada em [22].

Lema 1.1.1. *Se E é um $k-$elo separável, ou seja, E é equivalente a um $k-$elo cujo diagrama contém duas partes não vazias contidas em vizinhanças disjuntas homeomorfas a discos, então* $\nabla_E(z) = 0$. □

Exemplo 1.1.1. Para o nó 4_1 temos, representando $\nabla_{4_1}(z)$ por $\nabla(4_1)$:



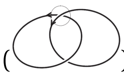
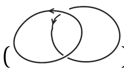
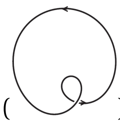
A igualdade anterior é equivalente a estoutra



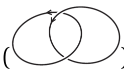
(1.1.1)

[3] $\mathbb{Z}[z]$ representa o anel de polinómios na variável z com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Considerando o 2−elo na equação (1.1.1) podemos escrever

$-\nabla($  $) + \nabla($  $)_{=0} = z\nabla($  $)_{=1}$

ou, o que é equivalente,

$\nabla($  $) = -z$ (1.1.2)

Combinando as equações (1.1.1) e (1.1.2) obtemos o polinómio de Conway para o nó 4_1,

$$\nabla_{4_1}(z) = 1 - z^2 \tag{1.1.3}$$

1.1.2 Tranças

O estudo matemático das tranças foi iniciado por Emil Artin em 1925, com o propósito de utilizar estes objectos matemáticos para estudar nós e elos.

Das várias definições, equivalentes, de trança, no presente texto vamos considerar a definição original de Artin, de $n-$trança geométrica como um sistema de n fios entre dois planos paralelos do espaço.

Considerem-se em $\mathbb{R}^3$ os planos

$$\mathbb{P}_0 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\right\}$$

estando o referencial orientado como na figura 1.13.

Definição 1.1.11. Seja $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ um conjunto de n pontos colineares, distintos, do plano $\mathbb{P}_0$, que projectamos ortogonalmente no plano $\mathbb{P}_1$, obtendo o conjunto de pontos $\mathscr{P}' = \{P'_1, \ldots, P'_n\}$. A n–trança geométrica suportada por $\mathscr{P}$, é um n–uplo $\beta = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de caminhos $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{P}_0 \times [0, 1]$ verificando as condições:

1. $\gamma_i(0) = P_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n;$
2. cada caminho γ_i une um ponto $P_i \in \mathbb{P}_0$, ao ponto $\gamma_i(1)$ do plano $\mathbb{P}_1$, onde $\gamma_i(1) = P'_{\tau(i)}$, τ permutação de $\{1, \ldots, n\}$;
3. γ_i é monótona crescente na direcção de z;
4. $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t), \quad \forall\, t \in [0, 1]$, com $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n$.

Os caminhos (ou arcos) γ_i denominam-se *fios da trança* β, e τ *permutação da trança*. Quando τ é a permutação identidade, $\tau(i) = i$, $i = 1, \ldots, n$, dizemos que β é a *trança pura*, ou não permutada.

Para que o conceito de $n-$trança seja útil e livre de ambiguidades, é necessário definir equivalência de tranças.

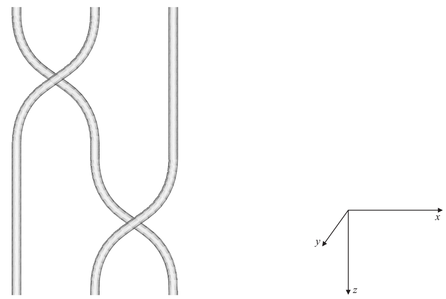


Figura 1.13: Uma 3–trança

Definição 1.1.12. Duas $n-$tranças β_1 e β_2 são equivalentes, e escreve-se $\beta_1 \simeq \beta_2$, se são ambiente isotópicas em $\mathbb{R}^3$, por uma isotopia ambiente que mantém os pontos dos semi-espaços fechados $z \leq 0$ e $z \geq 1$, fixos.

Proposição 1.1.1. *A relação $\simeq$, definida no conjunto $\mathscr{B}_n$ das $n-$tranças geométricas, é uma relação de equivalência.* $\square$

Por $n-$trança β entendemos um elemento do conjunto $B_n = \mathscr{B}_n \diagup_{\simeq}$, ou seja, β é a classe de equivalência de uma $n-$trança geométrica.

Tal como no caso dos nós, será conveniente considerar o diagrama de uma $n-$trança β, *i.e.*, a projecção ortogonal de um representante de β no plano contendo os pontos $P_1, \ldots, P_n$ e $P'_{\tau(1)}, \ldots, P'_{\tau(n)}$, (cf. figura 1.14).

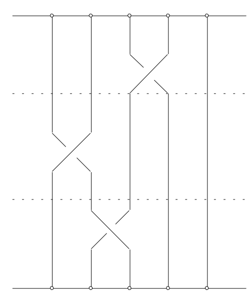


Figura 1.14: Diagrama de uma 5-trança

Como se pode observar no diagrama da figura 1.14, podemos decompor o diagrama de uma n–trança em diferentes níveis, de forma que em cada nível ocorre apenas um cruzamento entre dois fios da trança.

Cada um destes níveis é o diagrama de uma n–trança, denominada trança elementar, e que representaremos por σ_i, ou σ_i^{-1}, $1 \leq i \leq n-1$, dependendo do tipo de cruzamento entre o fio γ_i e o fio γ_{i+1}, como indicado na figura 1.15.

É possível munir o conjunto B_n de uma estrutura de grupo, definindo uma operação, produto de $n-$tranças, do seguinte modo.

Dados dois representantes de β_1 e β_2 (que designaremos igualmente β_1 e β_2) em B_n, identificamos a parte inferior de β_1 com a parte superior de β_2, de

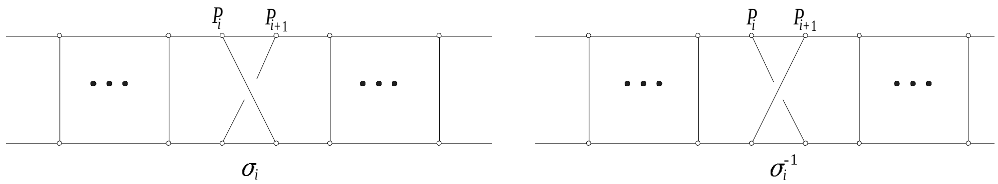


Figura 1.15: Tranças elementares ou tranças de Artin

forma que as extremidades dos fios de cada uma das tranças resultam igualmente identificadas.

Deste modo obtemos uma nova n–trança, denotada $\beta_1 \cdot \beta_2$, *trança produto* de β_1 por β_2, (cf. figura 1.16) .

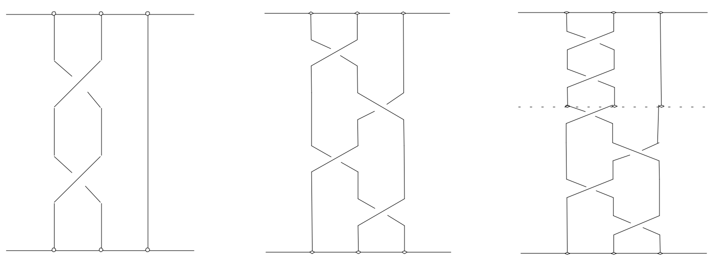


Figura 1.16: Produto de duas 3-tranças

A trança identidade obtém-se considerando cada caminho γ_i a aplicação constante $\gamma_i(t) = (x, i, t)$ de modo que cada fio γ_i da trança é o segmento $\left[P_i P_i'\right]$.

Teorema 1.1.6. *Com a operação binária acima definida, o conjunto das $n-$tranças, B_n, é um grupo não comutativo.* □

O grupo B_n, denominado *grupo de Artin*, admite uma representação, tendo como conjunto de geradores o conjunto das tranças elementares $\sigma_i^{\pm 1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Por exemplo, sendo β a $5-$trança da figura 1.14, temos $\beta = \sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2$.

É válida a proposição

Proposição 1.1.2. *Todo o elemento β de B_n pode ser escrito como produto de tranças elementares. Mais precisamente,*

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

com $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n-1$ *e* $\varepsilon_i = \pm 1$ *para* $i = 1, 2, \ldots, k$. □

Para definir uma representação de B_n, e uma vez que $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ é um conjunto de geradores, basta determinar um conjunto de relações entre os elementos de B_n.

Demonstra-se serem válidas as relações

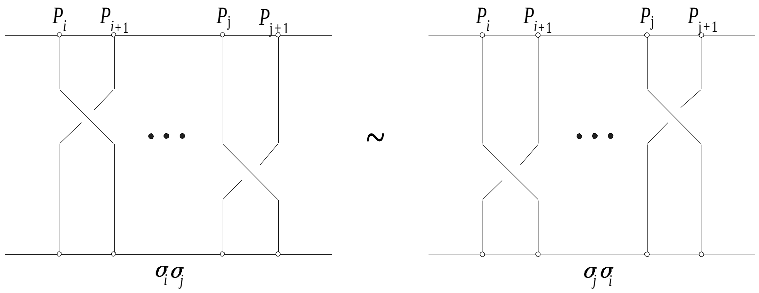


Figura 1.17: $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$

1. $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, para $\left|i-j\right| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n-1$, (figura 1.17)
2. $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-2$, (figura 1.18)

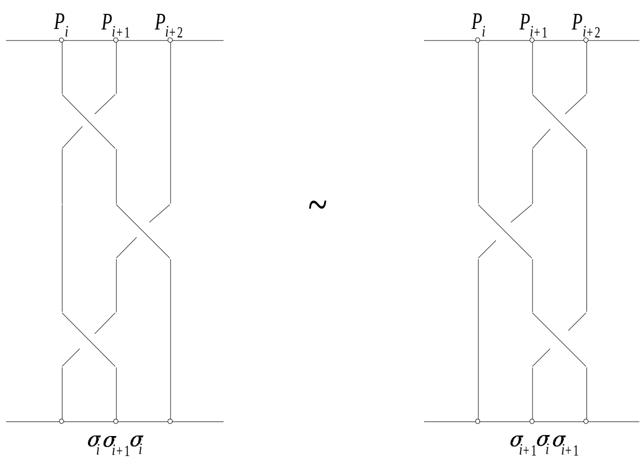


Figura 1.18: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$

Teorema 1.1.7. *O grupo B_n admite uma representação com geradores $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, e relações*

1. $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, *para* $\left|i-j\right| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n-1$
2. $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, *para* $1 \leq i \leq n-2$ □

Observação 1.1.6. O grupo B_1 é o grupo trivial, e o grupo B_2 é um grupo livre de característica 1, gerado por σ_1, isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Definição 1.1.13. Seja β uma $n-$trança suportada por $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$. O fecho de β, denotado $\hat{\beta}$, é um $k-$elo, $k \geq 1$, obtido de β unindo os pontos P_i a P'_i, $i = 1, \ldots, n$, com arcos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Com a excepção dos pontos P_i e P'_i, os arcos α_i

não possuem outros pontos em comum com β, e $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ se $i \neq j$, como na figura 1.19.

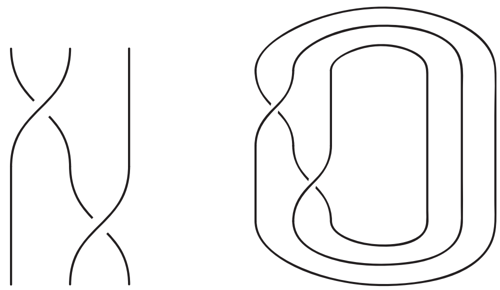
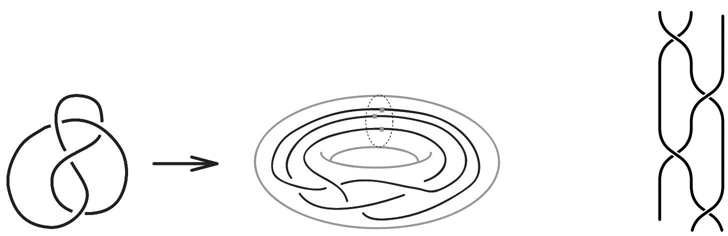


Figura 1.19: Uma 3-trança e respectivo fecho

Teorema 1.1.8 (Alexander, 1923)**.** *Seja E um $k-$elo arbitrário. Então existe uma $n-$trança β tal que $\hat{\beta} \simeq E$.* □



(a) (b)

Figura 1.20: (a) Entrançamento do nó 4_1, ($4_1 \simeq \hat{\beta}$); (b) $\beta = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$

Uma demonstração deste teorema de J. Alexander pode ser consultada em [6]. Em 1990 P. Vogel [37] apresenta um algoritmo facilmente implementável em computador, que permite obter uma trança cujo fecho é um $k-$elo dado.

Definição 1.1.14. Um $k-$elo diz-se positivo se é obtido a partir de uma $n-$trança β cuja expressão nos geradores $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ não envolve potências negativas de σ_i. Se pelo menos um dos σ_i na expressão de β apresenta um expoente negativo, diz-se que o $k-$elo é negativo.

Assim, por exemplo, o nó 4_1 é negativo (figura 1.20), enquanto o nó $3_1 \simeq \widehat{\sigma_1^3}$ é positivo.

A expressão que permite calcular o *genus* de um elo, apresentada no teorema 1.1.5, pode ser simplificada no caso dos elos positivos:

Teorema 1.1.9 (Birman e Williams [2])**.** *Seja E um $k-$elo positivo e não-separável*[4]*, tal que $E \simeq \hat{\beta}$, onde β é uma $N-$trança cujo diagrama apresenta c cruzamentos.*

[4] *Grosso modo*, um $k-$elo é separável se as suas componentes podem ser deformadas de modo a que fiquem situadas em lados opostos de um plano no espaço.

Então,

$$g(E) = \frac{c - N - k}{2} + 1 \,.$$

□

Eliminando a condição de positividade do $k-$elo, D. Bennequin [1] generalizou o teorema 1.1.9:

Teorema 1.1.10 (Bennequin)**.** *Seja E um $k-$elo não-separável tal que $E \simeq \hat{\beta}$, onde β é uma $N-$trança cujo diagrama apresenta c_+ cruzamentos positivos e c_- cruzamentos negativos, então*

$$\frac{|c_+ - c_-| - N - k}{2} + 1 \leq g(E) \leq \frac{|c_+ + c_-| - N - k}{2} + 1 \,.$$

□

1.2 Sistemas Dinâmicos: Tópicos Fundamentais

Em termos gerais, um sistema dinâmico é constituído por um conjunto, X, designado *espaço de fase* do sistema, cujos elementos representam todos os estados possíveis do sistema, e por uma lei que descreve a evolução temporal do sistema, ou seja, as alterações dos estados, $x \in X$, do sistema com o decorrer do tempo, t, o qual pode ser considerado discreto ($t \in \mathbb{Z}$) ou contínuo ($t \in \mathbb{R}$).

Observação 1.2.1. Consideraremos somente sistemas dinâmicos deterministas, nos quais cada estado é determinado de modo único pela lei de evolução, o estado actual pode ser determinado dos estados anteriores, por oposição, por exemplo, aos sistemas dinâmicos estocásticos.

Definição 1.2.1 (Sistema Dinâmico)**.** Sejam $X \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade de dimensão n, e $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$. Um *sistema dinâmico* de classe C^r, $r \geq 0$, em X é um terno $\left(X, T, \varphi\right)$, onde

$$\varphi : X \times T \to X$$

é uma função de classe C^r, satisfazendo as propriedades

1. $\varphi(x, 0) = x, \quad \forall x \in X$

2. $\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s), \quad \forall x \in X, \forall s, t \in T$ (propriedade de grupo)

O sistema dinâmico diz-se *contínuo*, ou um *fluxo*, quando $T = \mathbb{R}$, e *discreto* quando $T = \mathbb{Z}$.[5]

Observação 1.2.2. Fixando $t \in T$, φ determina a função $\varphi^t : X \to X$, pelo que as propriedades 1. e 2. na definição 1.2.1 podem reescrever-se, para todo $x \in X$,

1. $\varphi^0(x) = x$

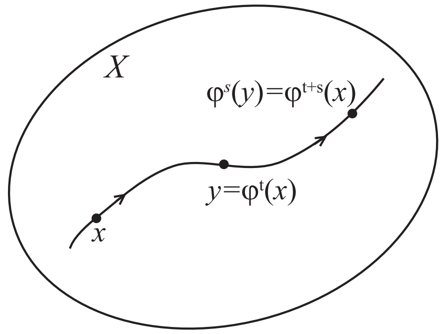


Figura 1.21: Propriedade de grupo

2. $\left(\varphi^s \circ \varphi^t\right)(x) = \varphi^{t+s}(x)$

Proposição 1.2.1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $\varphi^t : X \to X$ é um difeomorfismo de classe C^r, com inversa $\left(\varphi^t\right)^{-1} = \varphi^{-t}$.* □

Observação 1.2.3. Sejam X uma variedade compacta, sem bordo, e f um campo vectorial[6] suave em X.

A equação diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

define um fluxo diferenciável. De facto (Cf. [8], pgs. 187–189), nestas condições, o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, garante a existência de uma única função suave

$$\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$$

tal que

1. $\varphi^t : X \to X$ é um difeomorfismo, para todo $t \in \mathbb{R}$
2. $\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{t+s}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$
3. $\frac{d}{dt}\left(\varphi(x,t)\right)|_{t=0} = f\left(\varphi(x,t)\right)$, $x \in X$,

Reciprocamente, se $\varphi(x,t)$ define um fluxo em X, a função

$$f(x) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(x,t)\right)|_{t=0}$$

define um campo vectorial em X, e para cada $x_0 \in X$, $\varphi(x_0, t)$ é solução do problema de valores iniciais

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0\,.$$

[5] Quando $T = \mathbb{R}^+$ temos um semi-fluxo, e quando f não é invertível consideramos $T = \mathbb{N}$.

[6] Um campo vectorial em X é uma função $f : X \to \mathbb{R}^p$ tal que $f(x) \in T_x(X)$, para todo $x \in X$, sendo $T_x(X)$ o espaço vectorial tangente a X em x.

Um sistema dinâmico $(X, \mathbb{R}, \varphi)$ pode dar origem a um sistema dinâmico discreto $(X, \mathbb{Z}, f)$, pelo menos de dois modos:

1. Fixemos $t_0 \in \mathbb{R}$, e considere-se $f = \varphi^{t_0}$. Deste modo, para $n \in \mathbb{Z}$ temos
$$f^n = \left(\varphi^{t_0}\right)^n = \varphi^{n t_0}$$
pelo que faz sentido considerar o sistema dinâmico discreto $(X, \mathbb{Z}, f)$;

2. **Aplicação de Poincaré**. Sejam $\varphi^t : X \to X$ um fluxo e γ_0 uma órbita periódica de período $\tau_0 > 0$. Considere-se uma sub-variedade $S \subset X$ de codimensão um, verificando

   (a) $\gamma_0 \cap S = \{x_0\}$

   (b) $\frac{d}{dt}\varphi(x,t) \notin T_x S$, $\forall\, x \in S$. Por outras palavras, $\gamma_0 \pitchfork S$.

   Dado x numa vizinhança $V_{x_0} \subset S$ de x_0, defina-se a aplicação
$$P : V_{x_0} \to S$$
   por $P(x) = \varphi^{\tau}(x)$, $x \in V_{x_0}$, onde τ é o menor valor positivo de t para o qual $\varphi^t(x) \in S$.

   A aplicação P designa-se *aplicação de Poincaré*, e a sub-variedade S, *secção de Poincaré* (figura 1.22).

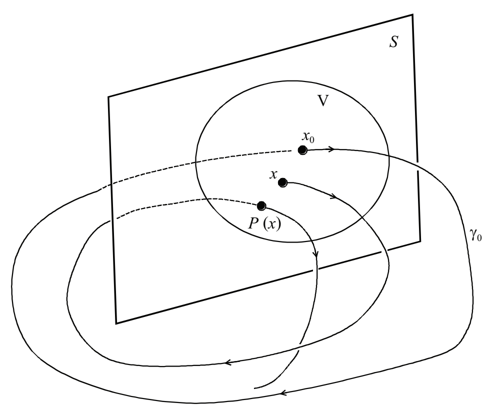


Figura 1.22: Aplicação de Poincaré

Reciprocamente, dado um sistema dinâmico discreto $(X, \mathbb{Z}, f)$, é possível construir um fluxo definido num espaço de dimensão igual a $\dim(X) + 1$. Tal fluxo denomina-se *suspensão* da aplicação f.

Descrevamos o processo que permite construir o fluxo suspensão.

Seja $f : X \to X$ uma aplicação de classe C^r, $r \geq 0$, e considere-se o produto cartesiano $X \times I$, onde $I = [0,1]$. Definindo a relação de equivalência $(x,1) \underset{s}{\sim} (f(x), 0)$, obtemos o espaço quociente
$$X_f = (X \times I) \big/ \underset{s}{\sim}$$

no qual consideramos o fluxo $\varphi^t(x,s) = (x, s+t)$, com $s+t \in [0,1]$, para todo t, (Cf. figura 1.23). Note-se que, localmente, a suspensão e a aplicação de Poincaré são construções inversas uma da outra. De facto, identificando X com a secção $S = X \times \{0\}$ do fluxo φ^t, obtemos como aplicação de Poincaré a aplicação f.

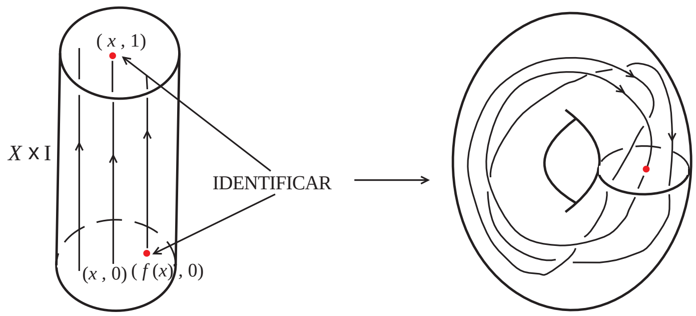


Figura 1.23: Suspensão de uma aplicação

A cada sistema dinâmico (X, T, φ) associamos conjuntos de pontos, designados *órbitas*.

Definição 1.2.2. Por órbita com início em $x_0 \in X$ entendemos o conjunto

$$\mathscr{O}(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t(x_0),\ t \in T\} \subset X.$$

Para $T = \mathbb{R}$, os conjuntos $\mathscr{O}(x_0)$ são curvas em X, parametrizadas por $t \in \mathbb{R}$, enquanto que para $T = \mathbb{Z}$ uma órbita é uma sucessão de pontos em X.

Casos particulares de órbitas são os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas.

Definição 1.2.3. Um ponto $x_0 \in X$ é um *p*onto de equilíbrio (ou um *p*onto fixo), se $\varphi^t(x_0) = x_0$, para todo $t \in T$.

Definição 1.2.4. Uma *ó*rbita periódica γ_0, é uma órbita para a qual existe $k \in T^+$ ($T^+ = \mathbb{R}^+$ ou $T^+ = \mathbb{N}$), tal que $\varphi^{t+k}(x_0) = \varphi^t(x_0)$, para todo $x_0 \in \gamma_0$ e todo $t \in T$.

O mínimo valor de $k \in T^+$ nas condições acima designa-se *p*eríodo.

No contexto dos fluxos $(X, \mathbb{R}, \varphi)$, γ_0 é uma curva fechada, enquanto no caso discreto $(X, \mathbb{Z}, f)$, $\gamma_0 = \{x_0 = f^k(x_0), f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}$ é um conjunto finito de pontos, (cf. figura 1.24).

Proposição 1.2.2. *Sejam $\mathscr{O}(x)$ e $\mathscr{O}(y)$ duas órbitas de um sistema dinâmico contínuo $(X, \mathbb{R}, \varphi)$. Se $\mathscr{O}(x) \cap \mathscr{O}(y) \neq \emptyset$, então $\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}(y)$.*

DEMONSTRAÇÃO Por hipótese existe $z \in \mathscr{O}(x) \cap \mathscr{O}(y)$, pelo que podemos garantir a existência de números reais s, t, tais que $\varphi^t(x) = z = \varphi^s(y)$, donde $x = \varphi^{-t}(z)$.

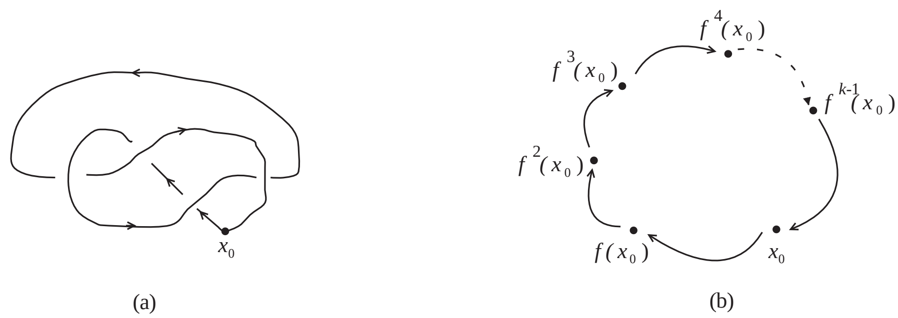


Figura 1.24: Órbitas periódicas: (a) $(X,\mathbb{R},\varphi)$; (b) $(X,\mathbb{Z},f)$

Para $x' \in \mathscr{O}(x)$, existe um real r tal que $x' = \varphi^r(x)$, pelo que

$$x' = \varphi^r\left(\varphi^{-t}(z)\right) = \varphi^r\left(\varphi^{-t}\left(\varphi^s(y)\right)\right) = \varphi^{r-t+s}(y)$$

e portanto $\mathscr{O}(x) \subset \mathscr{O}(y)$. De modo análogo se conclui que $\mathscr{O}(y) \subset \mathscr{O}(x)$, concluindo-se então que $\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}(y)$. $\square$

Um conceito, devido a C. Conley, mais fraco que o de periodicidade, mas crucial na descrição do comportamento assimptótico das órbitas de um sistema dinâmico, é o de *recorrência por cadeias.*

Definição 1.2.5 (Recorrência por cadeias)**.** Apresentamos a definição para os casos discreto e contínuo,

1. (Difeomorfismos). Um ponto $x \in X$ é um ponto recorrente por cadeias para o difeomorfismo $f : X \to X$, se para todo o $\varepsilon > 0$ existem pontos $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_k = x$, tais que $d\left(f(x_i), x_{i+1}\right) < \varepsilon$, para $0 \le i < k = k(\varepsilon)$, onde $d(\cdot,\cdot)$ é uma métrica em X.

2. (Fluxos). Dado um fluxo $\varphi^t : X \to X$, um ponto $x \in X$ é recorrente por cadeias se para todo o $\varepsilon > 0$ existem pontos $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_k = x$, e números reais $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$, com $t_i \ge 1$, tais que $d\left(\varphi^t(x_i), x_{i+1}\right) < \varepsilon$, para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. (Cf. figura 1.25).

O conjunto dos pontos recorrentes por cadeia designa-se conjunto recorrente por cadeias, e será denotado por $\mathscr{R}(f)$, (resp. $\mathscr{R}\left(\varphi^t\right)$).

Note-se que órbitas periódicas são exemplos de conjuntos recorrentes por cadeias, no entanto nem todos o conjunto recorrente por cadeias é uma órbita periódica.

Definição 1.2.6. Seja φ^t (resp. f), um fluxo (resp. um difeomorfismo) em X. Um conjunto $\Lambda \subset X$ diz-se invariante para φ^t (resp. f), se $\varphi^t(\Lambda) \subset \Lambda$ (resp. $f(\Lambda) \subset (\Lambda)$).

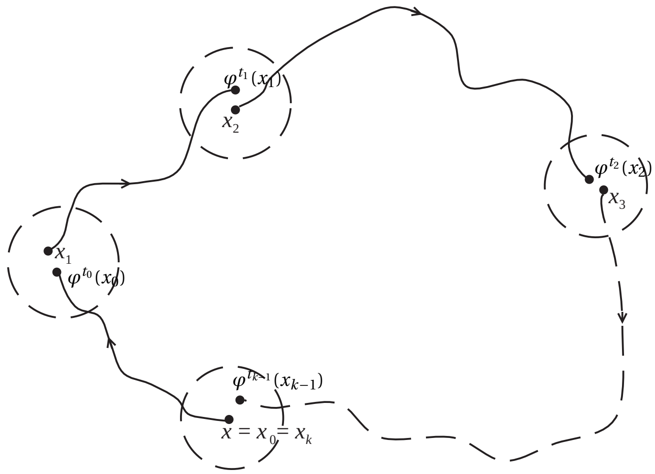


Figura 1.25: Ponto recorrente por cadeias

Proposição 1.2.3. *O conjunto $\mathscr{R}(f)$, (resp. $\mathscr{R}\left(\varphi^t\right)$) é fechado e invariante para f, (resp. φ^t).* □

Definição 1.2.7 (Estrutura hiperbólica para difeomorfismos)**.** Seja $f : X \to X$ um difeomorfismo. Um conjunto invariante $\Lambda \subset X$ diz-se hiperbólico se a restrição da variedade tangente a Λ, $T_\Lambda X = \bigcup_{x\in\Lambda}\{x\}\times T_x X$, se pode escrever como a soma directa $T_\Lambda X = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, com E^s_Λ e E^u_Λ invariantes para a derivada Df, e existem constantes $C > 0$, $\lambda \in]0,1[$, verificando

$$|Df^n(v)| \le C\lambda^n|v|, \qquad \forall\, v \in E^s_\Lambda, \forall\, n > 0$$

e

$$|Df^{-n}(v)| \le C\lambda^{-n}|v|, \qquad \forall\, v \in E^u_\Lambda, \forall\, n > 0\,.$$

Definição 1.2.8 (Estrutura hiperbólica para fluxos)**.** Seja $\varphi^t : X \to X$ um fluxo. Um conjunto $\Lambda \subset X$, invariante para φ^t, diz-se hiperbólico se

1. $T_\Lambda X = E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda \oplus \langle V(x)\rangle$, com E^s_Λ, E^u_Λ e $\langle V(x)\rangle$ invariantes para a derivada $D\varphi^t$, sendo $\langle V(x)\rangle$ o espaço gerado pelo campo vectorial associado a φ^t;

2. E^u_x e E^s_x variam continuamente com $x \in \Lambda$;

3. existem constantes $C, a > 0$ verificando, para todo $t \ge 0$

$$|D\varphi^t_x(v)| \le Ce^{-at}|v|, \qquad \forall\, v \in E^s_\Lambda$$

e

$$|D\varphi^{-t}_x(v)| \le Ce^{-at}|v|, \qquad \forall\, v \in E^u_\Lambda\,.$$

Demonstra-se que, ([32], proposição 8.6), se o conjunto recorrente por cadeias $\mathscr{R}$ é hiperbólico, as órbitas periódicas do sistema são densas em $\mathscr{R}$.

Proposição 1.2.4. *O conjunto $\mathscr{R}$ é igual ao fecho do conjunto das órbitas periódicas do sistema.* □

A existência de uma estrutura hiperbólica no conjunto $\mathscr{R}$ tem ainda como consequência importante, o Teorema da Decomposição Espectral de Smale, [33].

Teorema 1.2.1 (Decomposição Espectral)**.** *Dado um fluxo, ou difeomorfismo, em X, com um conjunto recorrente por cadeias $\mathscr{R}$, hiperbólico, então*

$$\mathscr{R} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r\,,$$

união disjunta, onde cada conjunto B_i, $i = 1, \ldots, r$, é compacto, invariante e contém uma órbita do sistema densa em B_i. □

Os conjuntos B_i a que faz referência o teorema 1.2.1, designam-se *conjuntos básicos.*

Observação 1.2.4. Se $\varphi^t : X \to X$ é um fluxo para o qual $\mathscr{R}\left(\varphi^t\right)$ é hiperbólico, resulta do teorema 1.2.1 que os conjuntos básicos na decomposição de $\mathscr{R}\left(\varphi^t\right)$ são as componentes conexas deste conjunto.

Enunciamos um resultado importante, devido a M. Hirsch, C. Pugh e M. Shub, e no qual se definem as variedades estável e instável.

Teorema 1.2.2 (Teorema da variedade estável)**.** *Seja Λ um conjunto invariante e hiperbólico para um difeomorfismo $f : X \to X$. Então para cada $x \in \Lambda$, os conjuntos*

$$W^s(x) = \left\{y \in X : \lim_{n\to+\infty} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0\right\}$$

e

$$W^u(x) = \left\{y \in X : \lim_{n\to+\infty} d\left(f^{-n}(x), f^{-n}(y)\right) = 0\right\}$$

são imersões suaves de E^s_x e E^u_x, respectivamente. Além disso,

$$T_x\left(W^s(x)\right) = E^s_x$$

e

$$T_x\left(W^u(x)\right) = E^u_x\,.$$

O conjunto $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$), designa-se variedade estável (resp. instável), de x. □

Observação 1.2.5. É válido um resultado análogo para fluxos, com

$$W^s(x) = \left\{y \in X : \lim_{t\to+\infty} d\left(\varphi^t(x), \varphi^t(y)\right) = 0\right\}$$

e

$$W^u(x) = \left\{y \in X : \lim_{t\to-\infty} d\left(\varphi^t(x), \varphi^t(y)\right) = 0\right\}$$

Definição 1.2.9. Sejam $\varphi^t : X \to X$ um fluxo e γ uma órbita periódica para φ^t. Definimos as variedades, estável $W^s(\gamma)$, e instável $W^u(\gamma)$, como

$$W^s(\gamma) = \left\{x \in X : \lim_{t\to+\infty} d\left(\varphi^t(x), \gamma\right) = 0\right\}$$

e

$$W^u(\gamma) = \left\{x \in X : \lim_{t\to-\infty} d\left(\varphi^t(x), \gamma\right) = 0\right\}.$$

Dada uma vizinhança de γ, $V(\gamma)$, definimos as variedades estável e instável locais,

$$W^s_{\text{loc}}(\gamma) = \left\{x \in V(\gamma) : \lim_{t\to+\infty} d\left(\varphi^t(x), \gamma\right) = 0, \text{ e } \varphi^t(x) \in V(\gamma), t \geq 0\right\}$$

e

$$W^u_{\text{loc}}(\gamma) = \left\{x \in V(\gamma) : \lim_{t\to-\infty} d\left(\varphi^t(x), \gamma\right) = 0, \text{ e } \varphi^t(x) \in V(\gamma), t \leq 0\right\}.$$

Outro exemplo significativo de conjunto invariante é o dos conjuntos, que denotaremos $\mathscr{A}$, para os quais todas as órbitas, numa vizinhança V de $\mathscr{A}$, convergem para $\mathscr{A}$.

Definição 1.2.10 (Atractor)**.** Seja $f : X \to X$ um difeomorfismo. Um conjunto $\mathscr{A} \subset X$ é um atractor se existe um compacto $V \subset X$ para o qual $f(V) \subset \text{int}(V)$ e tal que,

1. $\mathscr{A} = \bigcap_{n\geq 0} f^n(V)$
2. $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}(f)$.

Se $f|_{\mathscr{A}}$ possui uma estrutura hiperbólica, o atractor diz-se hiperbólico e se, além disso, a dimensão topológica[7] de $\mathscr{A}$ é igual à dimensão da variedade instável $W^u(x)$, $x \in \mathscr{A}$, o atractor diz-se *expansivo*.

Proposição 1.2.5. *Sejam $f : X \to X$ um difeomorfismo, e $\mathscr{A}$ atractor hiperbólico para f.*

As variedades instáveis dos pontos de $\mathscr{A}$ estão totalmente contidas em $\mathscr{A}$.

DEMONSTRAÇÃO A definição de atractor garante a existência de um compacto $N \subset X$, tal que $\mathscr{A} = \bigcap_{n\geq 0} f^n(N)$.

Para cada $x \in \mathscr{A}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$W^u_\varepsilon\left(f^n(x)\right) = \left\{y \in X : d\left(f^{-k}(y), f^{-k-n}(x)\right) < \varepsilon, \ \forall\ k \geq 0\right\} \subset N$$

[7]Um espaço métrico compacto Λ tem dimensão topológica inferior ou igual a n, $n \in \mathbb{N}_0$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura $\mathscr{C} = \left\{A_1, A_2, \cdots, A_k\right\}$, A_i abertos com $\text{diam}\left(A_i\right) \leq \varepsilon, i = 1, \cdots, k$, tal que todo o ponto de Λ pertence a pelo menos $n+1$ dos abertos A_i. Um conjunto tem dimensão topológica 0 se é totalmente desconexo, ou seja, a componente conexa de cada ponto x é $\{x\}$.

Então, para cada $n \geq 0$,

$$W^u\left(f^{-n}(x)\right) = \bigcup_{k\geq 0} f^k\left(W^u_\varepsilon\left(f^{-k-n}(x)\right)\right) \subset N\,,$$

donde resulta

$$W^u(x) = f^n\left(W^u\left(f^{-n}(x)\right)\right) \subset f^n(N)$$

concluindo-se, tomando a intersecção de $f^n(N)$ para $n \geq 0$

$$W^u(x) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(N) = \mathscr{A}\,.$$

□

Observação 1.2.6. Resulta da proposição anterior que a dimensão topológica de um atractor hiperbólico $\mathscr{A}$ é maior ou igual à dimensão de $W^u(x)$. Assim, quando $\dim(\mathscr{A}) = 0$ temos que a dimensão de $W^u(x)$ é igual a zero e $\mathscr{A}$ é um conjunto finito.

Definição 1.2.11. Um difeomorfismo $f : X \to X$ diz-se Anosov se a variedade X é hiperbólica.

Apresentamos um exemplo de um difeomorfismo de Anosov definido no toro $\mathbb{T}^2$.

Exemplo 1.2.1. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $L\left(\mathbb{Z}^2\right) = \mathbb{Z}^2$, e considere-se o toro $\mathbb{T}^2$ definido como espaço de identificação $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \diagup \mathbb{Z}^2$, $q(x, y) = q(x + m, y + n)$, $\forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.

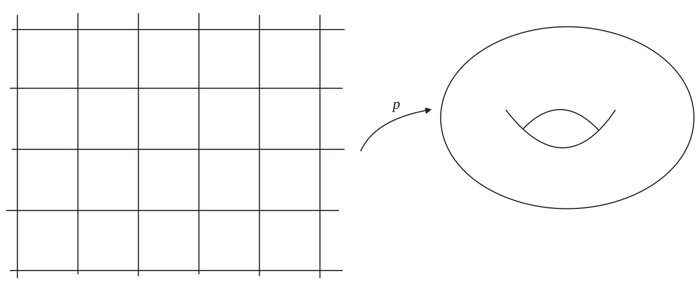


Figura 1.26: $\left(\mathbb{R}^2, p\right)$ como espaço de cobertura de $\mathbb{T}^2$

Uma vez que $L\left(\mathbb{Z}^2\right) = \mathbb{Z}^2$, a aplicação L induz uma aplicação f, definida em $\mathbb{T}^2$, tal que $f \circ q = q \circ L$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Note-se que $f \circ q$ está bem definida:

$$q(x',y') = q(x,y) \Rightarrow (x',y') = (x+m, y+n),\ m,n \in \mathbb{Z}$$

portanto

$$(q\circ L)(x',y') = (q\circ L)(x+m,y+n) = (q\circ L)(x,y) + (q\circ L)(m,n) = (q\circ L)(x,y)\,.$$

Se L é representada por uma matriz 2 por 2, $A = \left(a_{ij}\right)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, hiperbólica[8] e tal que $|\det(A)| = 1$, então a aplicação $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um difeomorfismo (f^{-1} é induzida por A^{-1}).

Em particular, considerando a matriz hiperbólica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, temos $\det(A) = 1$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ tem entradas inteiras, pelo que fica definido o difeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$,

$$f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ (mod\ 1)\,.$$

Os valores próprios de A são

$$\lambda^s = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \quad \text{e} \quad \lambda^u = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1\,,$$

associados aos vectores próprios

$$v^s = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Resulta da equação $f(x,y) = (x,y)$,

$$2x + y = x + m \ \wedge\ x + y = y + n\,, \quad n,m \in \mathbb{Z}$$

e portanto $x = n$ e $y = m - n$, pelo que x e y são inteiros, concluindo-se que $(x,y) = (0,0) \in \mathbb{T}^2$ é o único ponto fixo de f.

Para $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, no espaço de cobertura do toro, $W^s(x,y)$ é uma recta contendo $(0,0)$ com declive irracional igual a $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, enquanto $W^u(x,y)$ é uma recta contendo $(0,0)$ com declive irracional igual a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Visualizando o toro como espaço de identificação de $[0,1[\times[0,1[$ (cf. figura 1.27), observe-se que, por exemplo, $W^u(x,y)$ sai de $[0,1[\times[0,1[$ no ponto de coordenadas $\left(1,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, voltando a $[0,1[\times[0,1[$ no ponto $(x,y) = \left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, saindo novamente no ponto $(x,y) = (\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$, e assim sucessivamente (cf. figura 1.28).

Para cada $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, as variedades invariantes $W^s(x,y)$ e $W^u(x,y)$ são densas no toro, enrolando em torno desta superfície. Mais, o conjunto dos pontos periódicos de f, $\mathrm{Per}(f)$, é denso em $\mathbb{T}^2$.

---

[8] Ou seja, 1 e -1 não fazem parte do espectro de A.

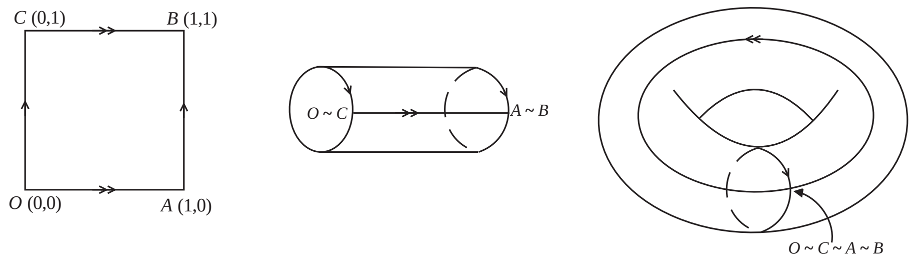


Figura 1.27: $\mathbb{T}^2$ como espaço de identificação

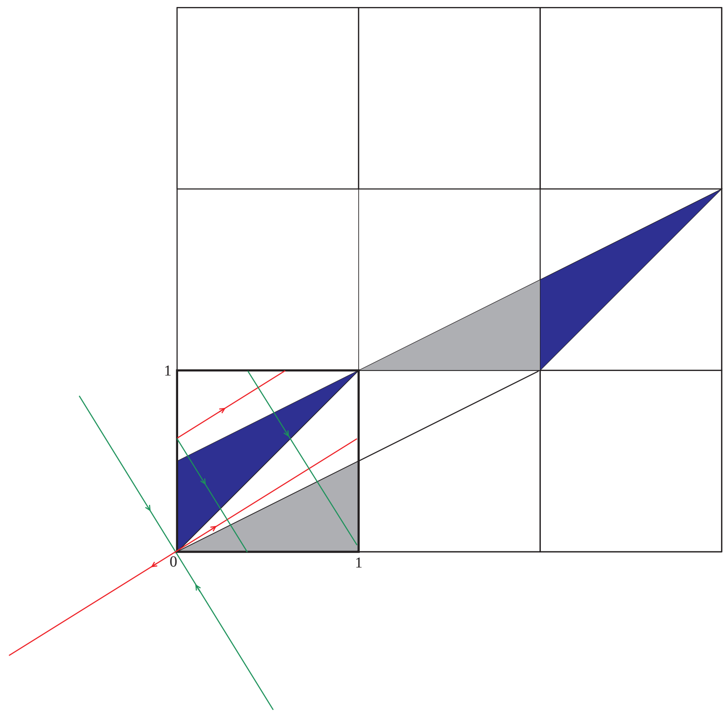


Figura 1.28: O difeomorfismo de Anosov $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$

De facto, dado um ponto no toro com coordenadas racionais, podemos considerá-lo na forma $(x, y) = \left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$, com $n, r, s \in \mathbb{Z}$. Note-se que existem exactamente n^2 pontos da forma $\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$, com $r, s \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, no toro, e $f\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) = \left(\frac{2r+s}{n}, \frac{r+s}{n}\right)$ é igualmente um ponto de coordenadas racionais com denominador igual a n.

Uma vez que existem somente n^2 pontos desta forma, as iteradas $f^k\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$ devem repetir-se, ou seja, existem inteiros j, k tais que $f^j\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) = f^k\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$ e $|j-k| \leq n^2$. Aplicando f^{-k} à igualdade anterior, obtemos

$$f^{j-k}\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$$

concluindo-se então que $\left(\frac{r}{n}, \frac{s}{n}\right)$ é um ponto periódico de período menor ou igual a n^2, e então Per(f) é denso em $\mathbb{T}^2$, (os pontos da forma $\left(\frac{r}{n},\frac{s}{n}\right)$ são densos em $\mathbb{T}^2$, dada a arbitrariedade de $n \in \mathbb{Z}$).

Em [33] Smale refere um tipo de difeomorfismo, que designou difeomorfismo DA (derivado de Anosov), obtido por modificação (cirurgia de Smale) do difeomorfismo de Anosov $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ do exemplo 1.2.1, numa vizinhança do ponto fixo de f correspondente a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.2.2. Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ como no exemplo 1.2.1, e considere-se $p_0 = q(0,0) \in \mathbb{T}^2$ tal que $f\left(p_0\right) = p_0$.

Para

$$v^s = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v^u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix},$$

considere-se, numa vizinhança V_{p_0} de p_0, um sistema de coordenadas $\left(p_0; \tilde{v}^s, \tilde{v}^u\right)$, onde $\tilde{v}^s = \frac{v^s}{|v^s|}$ e $\tilde{v}^u = \frac{v^u}{|v^s|}$.

Seja $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave como na figura 1.29, e com as seguintes propriedades,

1. $\rho(-t) = \rho(t)$, ρ é par;
2. $\rho(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1 \\ 2-\lambda^s, & t \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[\end{cases}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e $\lambda^s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$;
3. $\rho(t) > -\lambda^s$;
4. $\int_0^1 \rho(t)dt = 0$;
5. $\rho(a) = 1-\lambda^s$;
6. $\rho(t) \begin{cases} < 1-\lambda^s, & \text{se} |t| > a \\ > 1-\lambda^s, & \text{se} |t| < a \end{cases}$.

Considere-se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \lambda^s x + \int_0^x \rho(t)dt.$$

Uma vez que, para todo x, $g'(x) = \lambda^s + \rho(x) \neq 0$, concluímos que g é um difeomorfismo. Além disso, $g(x) = \lambda^s x$ para $|x| \geq 1$ (propriedades 2. e 4.) e, para $x \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$g(x) = \lambda^s x + \int_0^x \left(2-\lambda^s\right) dt = 2x, \quad \text{(prop. 2.)}.$$

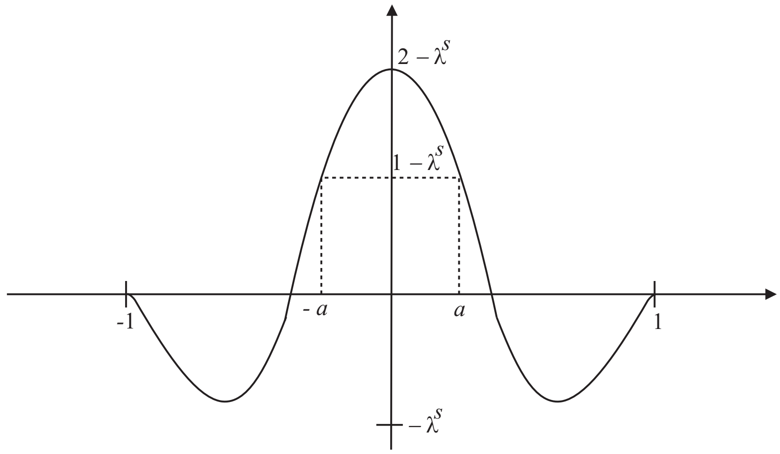


Figura 1.29: A função $\rho(t)$

Observamos ainda que

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\lambda^s x + \int_0^{-x} \rho(t)dt \\ &= -\lambda^s x + \int_0^{x} \rho(-t)\times(-1)dt \\ &= -\lambda^s x - \int_0^{x} \rho(t)dt \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

pelo que g é ímpar.

Resulta da desigualdade $\rho(t) > 1-\lambda^s$, para $|t| < a$, que podemos assegurar a existência de $b \in\,]a,1[$ tal que, para qualquer $t \in\,]0,b]$

$$g(t) > \lambda^s t + \int_0^t \left(1-\lambda^s\right) dx = t\,.$$

Defina-se $\overline{\lambda} = \sup_{|x|\geq b} g'(x)$, e note-se que então $\overline{\lambda} < 1$, pois $\rho(t) < 1-\lambda^s$ sempre que $|t| > a$.

Seja $\beta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, uma função real suave de suporte compacto, tal que

1. $|\beta(t)| \leq 1$

2. $\beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} |t| \geq 1 \\ 1, & \text{se} t \in [-b,b] \end{cases}$.

Definimos o difeomorfismo DA $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, modificando o difeomorfismo de Anosov f do exemplo 1.2.1 na vizinhança V_{p_0}, por

$$F(x,y) = \left(g(x)\beta(y) + \lambda^s x(1-\beta(y)), \lambda^u y\right).$$

Observamos que, em V_{p_0}, $f(x,y) = \left(\lambda^s x, \lambda^u y\right)$ e, além disso, $F(x,y) = f(x,y)$ para $(x,y) \notin \mathbb{D}^1\left(p_0\right) = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\right\} \subset V_{p_0}$, uma vez que $g(x) = \lambda^s x$ sempre que $|x| \geq 1$.

Por construção, F não admite pontos fixos no complementar de V_{p_0}. Em V_{p_0}, a equação $F(x,y) = (x,y)$ pode escrever-se

$$\begin{cases} g(x)\beta(y) + \lambda^s x(1-\beta(y)) = x \\ \lambda^u y = y \end{cases}$$

Da segunda equação resulta $y = 0$, donde se conclui, uma vez que $\beta(0) = 1$, que a primeira equação é equivalente à equação $g(x) = x$. Temos então $g(0) = 0$ e $(0,0)$ é um ponto fixo de F.

Atendendo a que, como verificámos, $g(x) > x$ para todo $x \in \left]0,b\right]$, a existir, a solução de $g(x) = x$ terá que pertencer ao intervalo $[b,1]$.

Dado $x \in [b,1]$, temos $g\left([b,1]\right) \subset [b,1]$, pois g é crescente uma vez que $g'(x) = \lambda^s + \rho(x) > 0$ para todo x, e $g(1) = \lambda^s < 1$, pelo que g admite um ponto fixo, digamos $\overline{x}$, em $\left]b,1\right[$. A paridade de g permite agora concluir que $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ admite três pontos fixos,

$$p_0 = q(0,0)\,,\; p_1 = q(\overline{x},0) \text{ e } p_2 = q(-\overline{x},0)\,.$$

Determinemos o tipo de estabilidade de cada um dos pontos fixos p_i, $i = 0,1,2$.

Temos,

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} g'(x)\beta(y) + \lambda^s(1-\beta(y)) & \left(g(x) - \lambda^s x\right)\beta'(y) \\ 0 & \lambda^u \end{bmatrix}$$

pelo que

$$DF_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \lambda^u \end{bmatrix}$$

e p_0 é um ponto fixo repulsor.

Quanto ao ponto fixo p_1 temos,

$$DF_{(\overline{x},0)} = \begin{bmatrix} g'(\overline{x}) & 0 \\ 0 & \lambda^u \end{bmatrix}$$

donde, uma vez que $\overline{x} \in \left]b,1\right[$ e $g'(\overline{x}) < \overline{\lambda} < 1$, concluímos que p_1 é um ponto de sela. A mesma conclusão é válida para p_2, por simetria.

Resumindo, uma cirurgia de Smale executada na vizinhança V_{p_0} modifica o difeomorfismo de Anosov $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ num difeomorfismo DA $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, o qual possui um atractor hiperbólico $\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} F^n\left(\mathbb{T}^2 \setminus V_{p_0}\right)$, designado atractor DA. O difeomorfismo F mantém invariante a folheação (*vide* definição 1.2.12) cujas folhas são variedades estáveis de f, exceptuando-se a folha que contém

p_0. (Observe-se que, em V_{p_0}, o difeomorfismo F mantém invariantes as rectas y =constante). Simbolicamente, $F\left(W^s(x)\right) = W^s\left(F(x)\right)$, para todo $x \in \mathbb{T}^2 \setminus \{p_0\}$.

Após a cirurgia de Smale, a variedade instável do ponto p_0 dá origem a duas novas folhas, uma contendo p_1 e outra p_2, enquanto o ponto fixo p_0 é transformado num ponto fixo repulsor (ou fonte) como se representa na figura 1.30.

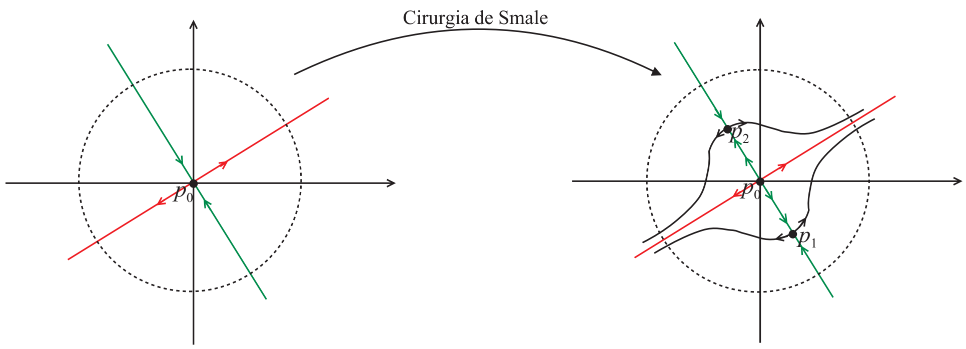


Figura 1.30: Cirurgia de Smale

Definição 1.2.12. Dada uma variedade X de dimensão n, uma folheação de dimensão p de X é uma partição, $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, de X com F_α sub-variedades conexas de X, designadas folhas da folheação, e tais que dado um ponto a em X existe uma carta $\left(U_i, \phi_i\right)$ em torno de a, de modo que para F_α com $U_i \cap F_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \in A$, cada componente conexa de $\phi_i\left(U_i \cap F_\alpha\right)$ é da forma (cf. figura 1.31)

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \phi_i\left(U_i\right) : x_{p+1} = c_{p+1}, x_{p+2} = c_{p+2}, \ldots, x_n = c_n\right\}$$

onde as constantes $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$ são determinadas pelas componentes conexas de $\phi_i\left(U_i \cap F_\alpha\right)$.

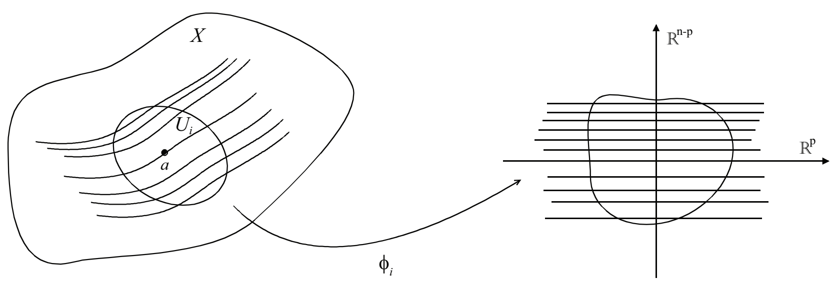


Figura 1.31: Folheação

Observação 1.2.7. Dada uma variedade de dimensão n, X, uma folheação $\mathscr{F}$ de X é uma relação de equivalência, cujas classes de equivalência, as folhas, são sub-variedades conexas de X, todas da mesma dimensão.

Noção importante é a de *conjugação topológica* de sistemas dinâmicos. Sistemas dinâmicos topológicamente conjugados são equivalentes em termos da sua dinâmica.

Definição 1.2.13. Dois sistemas dinâmicos $\left(X,\mathbb{Z},f\right)$ e $\left(Y,\mathbb{Z},g\right)$ dizem-se topológicamente conjugados, se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $g \circ h = h \circ f$.

Definição 1.2.14. Dois sistemas dinâmicos $\left(X,\mathbb{R},\varphi\right)$ e $\left(Y,\mathbb{R},\psi\right)$ dizem-se topológicamente equivalentes, se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ que transforma órbitas de φ^t em órbitas de ψ^t, preservando a orientação e a parametrização no tempo.

Dinâmica simbólica

A dinâmica simbólica é um conceito fundamental no estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos. *Grosso modo* pode considerar-se uma forma de modelar sistemas dinâmicos utilizando sequências de símbolos.

Sejam $\mathbb{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ um conjunto finito, designado *alfabeto*, de N símbolos chamados *letras*, e

$$\Sigma_N = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots a_{-2}a_{-1} \cdot a_0 a_1 a_2 \dots) : a_i \in \mathbb{A},\ \forall\, i \in \mathbb{Z}\}$$

o espaço das sequências bi-infinitas $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, que designaremos *itinerários*.

Uma *palavra* (ou *bloco*) em $\mathbb{A}$ é uma sequência finita de letras de $\mathbb{A}$. O *comprimento* de uma palavra w, denotado $|w|$, é o número de letras que w contém. Por exemplo, se $\mathbb{A} = \{x_1, x_2\}$, $w = x_1x_1x_2x_2x_2x_1 = x_1^2x_2^3x_1$ é uma palavra de comprimento 6, $|w| = 6$. Denotamos $(\dots ww \cdot ww \dots)$ por w^∞.

Munimos $\mathbb{A}$ da estrutura de espaço métrico, considerando a métrica

$$\delta\left(x_i, x_j\right) = 1 - \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Desta forma dotamos $\mathbb{A}$ da topologia discreta e Σ_N da topologia produto.

Obtemos a mesma topologia em Σ_N se considerarmos a métrica $d(\cdot,\cdot)$ definida em Σ_N por

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\delta\,(a_i, b_i)}{2^{|i|}}\,,$$

onde $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ são itinerários.

Proposição 1.2.6. *O espaço métrico* $(\mathbb{A},\delta)$ *é compacto e totalmente desconexo, i.e., a componente conexa de cada* $x_i \in \mathbb{A}$ *é* $\{x_i\}$. ☐

Proposição 1.2.7. *O espaço métrico* (Σ_N, d) *é compacto, totalmente desconexo e perfeito.*[9] ☐

[9] Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se perfeito, se A é fechado e não tem pontos isolados.

Define-se uma aplicação, designada *aplicação shift*, $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ por

$$(\sigma(\boldsymbol{a}))_i = a_{i+1}.$$

A aplicação σ é bijectiva e contínua, logo um homeomorfismo uma vez que Σ_N é um espaço de Hausdorff compacto.

O terno $(\Sigma_N, \mathbb{Z}, \sigma)$ é um sistema dinâmico, designado $N-$*shift completo*.

Definição 1.2.15. Um ponto $\boldsymbol{a} \in \Sigma_N$ é periódico para a aplicação σ se $\sigma^p(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$, para algum inteiro $p \geq 1$. O inteiro p designa-se período de $\boldsymbol{a}$.

Observação 1.2.8. Um ponto de período p tem a forma w^∞, onde w é uma palavra de comprimento p. Todo o ponto de Σ_N da forma x_i^∞, para $x_i \in \mathbb{A}$, é um ponto fixo: $\sigma(x_i) = x_i$.

Seja $A = \left[A_{i,j}\right]$ uma matriz quadrada $N \times N$ tal que $A_{i,j} \in \{0,1\}$. Associamos à matriz A, designada *matriz de transição*, um grafo $G(A)$, cujo conjunto dos vértices é $\mathbb{A} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ e com aresta $x_i \to x_j$ sempre que $A_{i,j} = 1$. Diz-se que A é *irredutível* se para cada par de vértices x_i, x_j existe um caminho em $G(A)$ com início em x_i e fim em x_j.

Um itinerário $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é *admissível* em relação à matriz de transição A em i se, para $a_i a_{i+1} = x_j x_k$, $j,k \in \{1,\ldots,N\}$, $A_{j,k} = 1$. Dizemos que o itinerário $\boldsymbol{a}$ é admissível se $\boldsymbol{a}$ é admissível em relação a A em todo $i \in \{1,\ldots,N\}$.

Definição 1.2.16. Dada uma matriz de transição A, define-se o sistema dinâmico $(\Sigma_A, \mathbb{Z}, \sigma_A)$, denominado *subshift de tipo finito* associado a A, onde $\Sigma_A \subset \Sigma_N$ é o conjunto dos itinerários admissíveis,

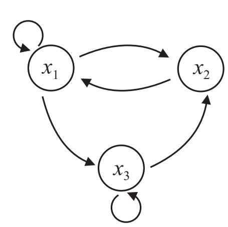
$$\Sigma_A = \left\{\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} : A_{j,k} = 1, \text{ para } a_i a_{i+1} = x_j x_k, \ \forall\, i\right\}$$

e σ_A é a restrição de σ a Σ_A.

Exemplo 1.2.3. Seja $\mathbb{A} = \{x_1, x_2, x_3\}$ e considere-se a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo grafo $G(A)$ é



Uma vez que $A_{2,2} = A_{2,3} = A_{3,1} = 0$, então Σ_A contém, por exemplo, as sequências constantes $(\ldots x_1 x_1 x_1 \ldots) = x_1^\infty$ e $(\ldots x_3 x_3 x_3 \ldots) = x_3^\infty$ mas não contém a sequência constante $(\ldots x_2 x_2 x_2 \ldots) = x_2^\infty$, nem qualquer sequência que contenha a palavra $x_2 x_3$.

Considere-se de novo a relação $\underset{s}{\sim}$ que identifica, agora em $\widetilde{\Sigma_A} = \Sigma_A \times [0,1] \big/ \underset{s}{\sim}$, os pontos $(\boldsymbol{a}, 1)$ e $(\sigma(\boldsymbol{a}), 0)$. Obtemos o fluxo suspensão

$$\operatorname{sus}_t(\sigma) : \widetilde{\Sigma_A} \to \widetilde{\Sigma_A}$$

designado *fluxo hiperbólico simbólico*.

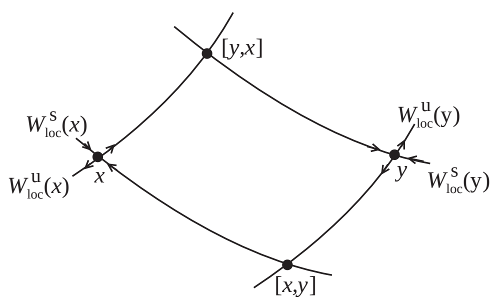
O próximo resultado deve-se a Bowen [4]:

Teorema 1.2.3. *Seja $\varphi^t : X \to X$ um fluxo e B um conjunto básico, de dimensão um, para φ^t. Então $\varphi^t|_B$ é topológicamente conjugado com um fluxo hiperbólico simbólico.* □

Conceito importante na descrição da dinâmica simbólica de alguns sistemas é o de *partição de Markov*.

Seja B um conjunto básico hiperbólico para um difeomorfismo f. Para $x, y \in B$ suficientemente próximos, definimos

$$[x, y] = W^s_{\text{loc}}(x) \cap W^u_{\text{loc}}(y)$$



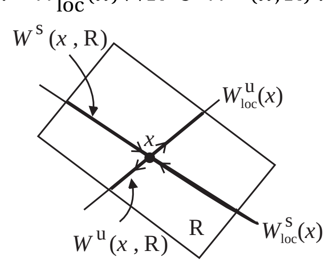
Observação 1.2.9. Sabemos do teorema 1.2.2 que $T_x(W^s(x)) = E^s_x$ e $T_x(W^u(x)) = E^u_x$. Dado que E^s_x e E^u_x são complementares, temos então $W^s(x) \pitchfork W^u(x)$ pelo que, quaisquer que sejam y e z numa vizinhança suficientemente pequena de x, $W^s_{\text{loc}}(y) \pitchfork W^u_{\text{loc}}(z)$ é um conjunto singular, o que garante a unicidade de $[y, z]$.

Definição 1.2.17. Um conjunto fechado $R \subset B$ é um *rectângulo* se

1. $x, y \in R \Rightarrow [x, y] \in R$
2. o interior de R, como subconjunto de B, é denso em R.

O diâmetro de R deve ser suficientemente pequeno, de modo que seja possível definir $[x, y]$.

Escrevemos $W^s(x, R) := W^s_{\text{loc}}(x) \cap R$ e $W^u(x, R) := W^u_{\text{loc}}(x) \cap R$



Definição 1.2.18. Seja f um difeomorfismo e B um conjunto básico hiperbólico para f. Uma *partição de Markov* para B, é uma cobertura finita $\boldsymbol{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ de B por rectângulos, verificando

1. $\operatorname{int}(R_i) \cap \operatorname{int}(R_j) = \emptyset$, para $i \neq j$
2. para $x \in \operatorname{int}(R_i)$ e $f(x) \in \operatorname{int}(R_j)$,
$$f\left(W^s(x, R_i)\right) \subset W^s\left(f(x), R_j\right)$$
e
$$f\left(W^u(x, R_i)\right) \supset W^u\left(f(x), R_j\right)$$

Teorema 1.2.4 (Bowen [5])**.** *Seja B um conjunto básico hiperbólico. Então B admite uma partição de Markov $\boldsymbol{R}$ constituída por rectângulos de diâmetro arbitrariamente pequeno.* □

Apresentamos um exemplo sobejamente conhecido, mas bastante importante no estudo dos sistemas dinâmicos, e que voltaremos a considerar no próximo capítulo.

Exemplo 1.2.4 (A ferradura de Smale)**.** A aplicação que consideramos neste exemplo foi introduzida por Smale [33].

Considere-se o conjunto S constituído por um quadrado Q e dois semi-círculos C_0 e C_1, como na figura 1.32.

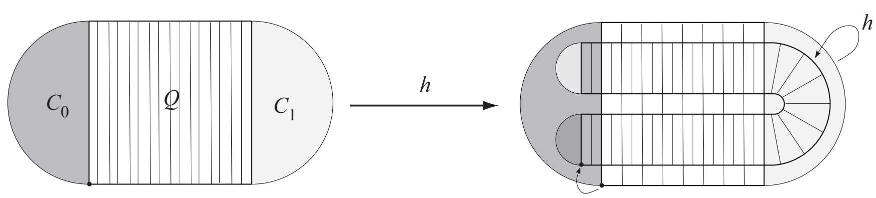


Figura 1.32: Ferradura de Smale

A ferradura de Smale é uma aplicação $h : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ que verifica as seguintes condições:

1. a imagem $h(\mathsf{S}) \subset \mathsf{S}$ tem a forma de uma ferradura, h contrai Q na direcção vertical com um factor $\lambda < \frac{1}{2}$ e dilata Q com um factor λ^{-1}, figura 1.32;
2. em cada uma das componentes verticais V_0 e V_1 de $Q \cap h^{-1}(Q)$ h é linear, transformando V_0 e V_1 nas componentes horizontais H_0 e H_1 de $h(Q) \cap Q$, figura 1.33;

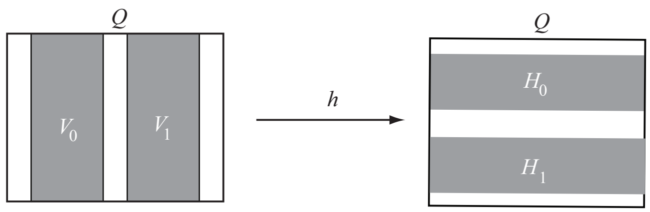


Figura 1.33: $V_0 \cup V_1 = h^{-1}(Q \cap h(Q)) = Q \cap h^{-1}(Q)$

3. por linearidade de $h : V_i \to H_i$, $i = 0, 1$, h preserva segmentos horizontais e verticais em Q;

4. $h|_{C_0} : C_0 \to C_0$ é uma contracção, logo possui um único ponto fixo.

O conjunto $h^n(Q) \cap h^{-n}(Q)$ dos pontos que permanecem em Q após n iterações de h e h^{-1}, é constituído por 2^{2n} quadrados. Na figura 1.34 representa-se o conjunto $\bigcap_{n=-2}^{2} h^n(Q)$.

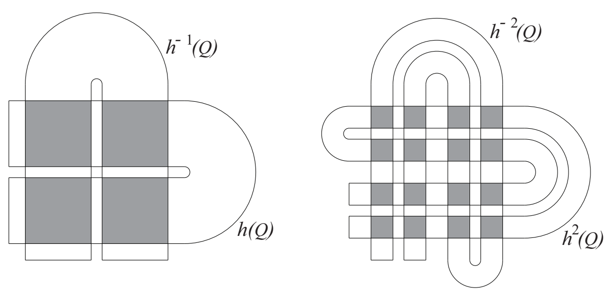


Figura 1.34: $\bigcap_{n=-2}^{2} h^n(Q)$

O conjunto de todos os pontos que permanecem em Q para todas as iterações de h é então

$$\Lambda = \cap_{n \in \mathbb{Z}} h^n(Q)$$

Associamos cada ponto de Λ a um itinerário em Σ_2, no alfabeto $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, e definimos uma aplicação $\tau : \Lambda \to \Sigma_2$, onde $\tau(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, do seguinte modo

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad h^n(x) \in V_0 \\ 1, & \text{se} \quad h^n(x) \in V_1 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

É válido o teorema (cf. [10, 17]):

Teorema 1.2.5. *A aplicação $\tau : \Lambda \to \Sigma_2$ é um homeomorfismo tal que $\tau(h(x)) = \sigma(\tau(x))$, para todo $x \in \Lambda$. Por outras palavras, $h|_\Lambda$ é topológicamente conjugada com o shift σ, pelo que é comutativo o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "h|_\Lambda"] \arrow[d, "\tau"'] & \Lambda \arrow[d, "\tau"] \\
\Sigma_2 \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma_2
\end{tikzcd}$$

$\square$

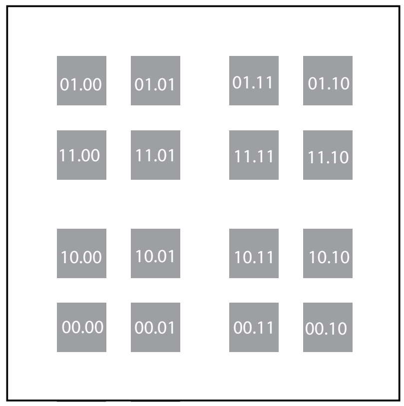


Figura 1.35: Itinerários em $\bigcap_{n=-2}^{2} h^n(Q)$

Entropia topológica

A *entropia topológica* é um invariante numérico que, *grosso modo*, se pode interpretar como um indicador da complexidade de um sistema dinâmico.

Dado um sistema dinâmico $(X, \mathbb{Z}, f)$, com X munido de uma métrica d, considerem-se para $x, y \in X$, os segmentos de órbita de comprimento n:

$$x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)$$

e

$$y, f(y), f^2(y), \ldots, f^{n-1}(y)\,,$$

que entendemos distintos se existir um inteiro não negativo k inferior a n, para o qual $d\big(f^k(x), f^k(y)\big) > \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ pode ser interpretado como erro de observação (se $d(x, y) \leq \varepsilon$ não distinguimos os estados x e y).

Designemos por $s(n, \varepsilon, f)$ o número de segmentos de órbita de comprimento n que podem ser distinguidos para um dado $\varepsilon > 0$. O número $s(n, \varepsilon, f)$ aumenta com n.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos a taxa de crescimento

$$h(\varepsilon, f) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln(s(n, \varepsilon, f))}{n}\,.$$

Considerando $\varepsilon \to 0$ (observações mais finas), obtemos a entropia topológica

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon, f) .$$

No caso de um fluxo $\varphi : X \times \mathbb{R} \to X$ definimos a entropia topológica $h(\varphi)$ como:

$$h(\varphi) = h(\varphi^1) .$$

Se $\left(X, \mathbb{Z}, f\right)$ e $\left(X, \mathbb{Z}, g\right)$ são topológicamente conjugados, então $h(f) = h(g)$ (*vide* [29]). No caso de fluxos topológicamente equivalentes a entropia topológica varia com o tempo t, pelo que para fluxos este invariante distingue fluxos com entropia nula de fluxos com entropia positiva.

Capítulo 2

Nós, Elos e Tranças em Fluxos de Dimensão Três

2.1 Introdução

Para fluxos $\varphi^t : X \to X$, X variedade de dimensão três, as órbitas periódicas são curvas fechadas mergulhadas em X, pelo que cada órbita periódica define um nó, trivial ou não, e qualquer conjunto finito de órbitas periódicas constitui um elo.

Estes nós e elos encontram-se bem definidos, uma vez que uma órbita periódica não admite auto-intersecções, nem intersecta qualquer outra órbita, caso contrário teríamos duas soluções distintas com a mesma condição inicial, contradizendo o teorema da unicidade para equações diferenciais.

Deste modo, o tipo de nó comporta-se como um invariante para órbitas periódicas.

Observação 2.1.1. Quando é possível definir uma secção de Poincaré, qualquer órbita periódica da aplicação de Poincaré de período n intersecta a secção em n pontos. Considerando-se uma parametrização segundo o tempo, podemos considerar a evolução dos n pontos em simultâneo, partindo e chegando a uma secção de Poincaré escolhida, pelo que cada um dos n pontos descreve um fio de uma trança.

Atendendo a que a suspensão de uma dada aplicação de Poincaré não é única, – suspensões diferindo por um múltiplo arbitrário de torções completas possuem a mesma aplicação de Poincaré, – Natiello e Solari [26], consideram o grupo quociente B_n/Z_n, B_n grupo das tranças e Z_n o subgrupo de B_n gerado por $\Delta_n^2 = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1})^n$, como instrumento para caracterizar as órbitas periódicas de fluxos para os quais é possível definir uma secção de Poincaré.[1]

[1] Uma rotação de $2k\pi$ do fluxo em torno de si próprio pode ser representada por Δ_n^{2k}. Em 1966 J. M. Van Buskirk demonstrou que Δ_n^2 gera o centro de B_n, portanto $Z_n = \{\gamma \in B_n : \gamma\beta = \beta\gamma, \forall\ \beta \in B_n\}$.

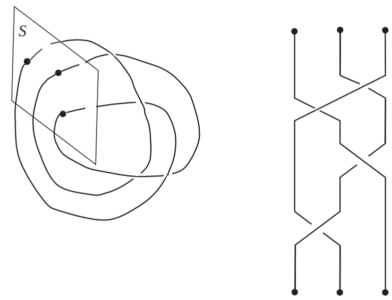


Figura 2.1: Secção de Poincaré S. Órbita de período 3 e respectiva trança

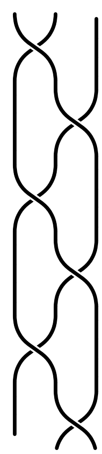


Figura 2.2: Δ_3^2

Fluxos em dimensão três podem apresentar um comportamento bastante complexo, com soluções periódicas definindo diferentes tipos de nós. Graças ao trabalho de R. Williams e J. Birman ([39, 2, 3]) é possível, sobre determinadas condições, definir uma estrutura de variedade ramificada de dimensão dois, onde coexistem todas as órbitas periódicas do sistema. Para sermos mais precisos, as órbitas do sistema são isotópicas às órbitas periódicas de um semi-fluxo definido na variedade ramificada, como veremos adiante.

A estrutura a que nos referimos acima, inicialmente designada *knot-holder* e posteriormente *template*, foi utilizada por Birman e Williams [2] para estudar a dinâmica do sistema de Lorenz, considerando para o efeito a complexidade topológica das suas órbitas periódicas: o tipo de nó e o tipo de elo.

O sistema de Lorenz,[2]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 10(-x+y) \\
\dot{y} &= 28x - y - xz \qquad (2.1.1)\\
\dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy
\end{aligned}
$$

define um fluxo em $\mathbb{R}^3$, com três pontos de equilíbrio $(0,0,0)$ e $(\pm 2\sqrt{6}, \pm 2\sqrt{6}, 27)$, para o qual todas as órbitas, distintas dos pontos de equilíbrio, se aproximam de um mesmo conjunto: o atractor de Lorenz.

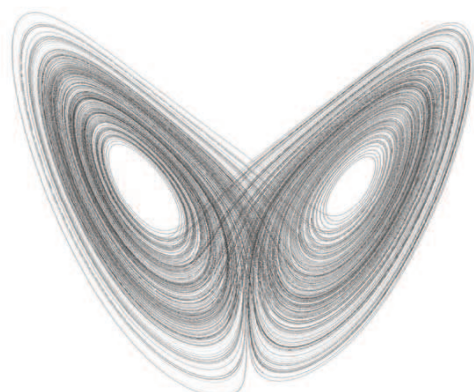


Figura 2.3: Atractor de Lorenz

2.2 *Templates*

2.2.1 Variedades ramificadas de dimensão um

Ao estudar atractores expansivos para difeomorfismos de dimensão dois [38], R. Williams utiliza variedades ramificadas de dimensão um, isto é, variedades construídas localmente a partir de um número finito de 1-células[3] (ramos da variedade), com um, ou ambos os bordos, identificados num número finito de pontos (pontos de ramificação), de tal modo que os ramos definem ângulos nulos ou rasos, (cf. figura 2.4).

Exceptuando a existência de pontos de ramificação, a definição de variedade ramificada de dimensão um é análoga à de variedade de dimensão um.

Definição 2.2.1. Dizemos que $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma variedade ramificada de dimensão um, se Γ é localmente difeomorfa a um dos três espaços,

[2]Edward Lorenz (1917–2008), matemático e meteorologista norte-americano.
[3]Subconjuntos de $\mathbb{R}$ homeomorfos a intervalos.

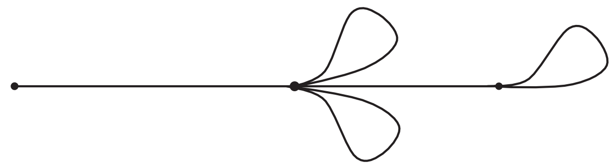


Figura 2.4: Uma variedade ramificada, com bordo, de dimensão 1, obtida a partir de 5 1-células e 2 pontos de ramificação

1. $(\mathbb{R}, 0)$
2. $(H, 0)$, com $H = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
3. $(Y_k, (0,0))$, onde Y_k é a união dos gráficos de k funções de classe C^∞ que são:
   (a) coincidentes e iguais a zero para $x \leq 0$
   (b) disjuntos para $x > 0$

Definimos o conjunto dos pontos de ramificação de Γ como o conjunto

$$\mathfrak{R} = \left\{a \in \Gamma : (\Gamma, a) \text{ é localmente difeomorfo a } (Y_k, (0,0)) \text{ para algum } k \geq 2\right\}.$$

Como habitual,

$$\partial\Gamma = \{x \in \Gamma : (\Gamma, x) \text{ é localmente difeomorfo a } (H, 0)\}.$$

Ainda em [38], R. Williams introduz pela primeira vez no estudo de atractores expansivos, um caso particular de uma construção conhecida como *sistema limite inverso.*

Definição 2.2.2. Seja $\left\{X_n, f_n\right\}_{n\geq 0}$ uma sequência de espaços métricos compactos, e de aplicações contínuas, representada pelo diagrama

$$X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} \cdots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} \cdots$$

Define-se o *espaço limite inverso*, e escreve-se $\varprojlim \left\{X_n, f_n\right\}_{n\geq 0}$, como sendo o subconjunto do espaço produto $\prod_{n\geq 0} X_n$,

$$\varprojlim \left\{X_n, f_n\right\}_{n\geq 0} = \left\{(x_n) \in \prod_{n\geq 0} X_n : x_n = f_n(x_{n+1}),\ \forall\ n \geq 0\right\}$$

Ficam definidas, de modo natural, as projecções do espaço produto em cada um dos espaços factor

$$p_n : \varprojlim \left\{X_n, f_n\right\}_{n\geq 0} \to X_n\ ,\ \forall\ n \geq 0\ .$$

Observação 2.2.1. A topologia do espaço $\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n\geq 0}$ é a topologia induzida pela métrica

$$\tilde{\delta}\left((x_n),(y_n)\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{\tilde{d}\left(x_n, y_n\right)}{2^n}$$

onde $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$ representa a métrica em X_n. Relativamente à métrica $\tilde{\delta}$, $\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n\geq 0}$ é conexo e compacto.

Proposição 2.2.1. *Se a sequência $\{X_n, i_n\}_{n\geq 0}$, nas condições da definição 2.2.2, é tal que $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ e $i_n : X_{n+1} \to X_n$ é a inclusão, então $\varprojlim \{X_n, i_n\}_{n\geq 0}$ é homeomorfo a $\bigcap_{n\geq 0} X_n$.*

DEMONSTRAÇÃO Dado $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim \{X_n, i_n\}_{n\geq 0}$, temos

$$\begin{aligned}
&x_0 = i_0(x_1) \in X_1\\
&x_0 = i_0 \circ i_1(x_2) \in X_2\\
&x_0 = i_0 \circ i_1 \circ i_2(x_3) \in X_3\\
&\dots\\
&x_0 = i_0 \circ i_1 \circ \dots \circ i_n(x_{n+1}) \in X_{n+1}\\
&\dots
\end{aligned}$$

então a aplicação

$$h : \varprojlim \{X_n, i_n\}_{n\geq 0} \to \bigcap_{n\geq 0} X_n$$

definida por $h(x, x, x, \dots) = x$, é um homeomorfismo. □

Proposição 2.2.2. *Se na sequência inversa*

$$X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots$$

cada X_n é homeomorfo a X_0 e cada f_n é um homeomorfismo, então $\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n\geq 0}$ é homeomorfo a X_0.

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, para cada $n \geq 0$ temos um homeomorfismo $h_n : X_0 \to X_n$. Uma vez que cada f_n, $n \geq 0$, é um homeomorfismo, o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[d, "h_{n+1}"] \\
X_n & X_{n+1} \arrow[l, "f_n"]
\end{tikzcd}$$

define o homeomorfismo $\alpha_n : X_0 \to X_n$.

Temos então um homeomorfismo, $h : X_0 \to \varprojlim \{X_n, f_n\}_{n\geq 0}$, definido por $h(x_0) = (x_0, \alpha_1(x_0), \alpha_2(x_0), \dots)$. □

Considerando, na construção apresentada na definição 2.2.2, $X_n = \Gamma$, e $f_n = g$, para todo $n \geq 0$, obtemos o limite inverso

$$\Gamma \xleftarrow{g} \Gamma \xleftarrow{g} \cdots \xleftarrow{g} \Gamma \xleftarrow{g} \cdots$$

que denotaremos $(\Gamma, g)_\infty$.

Neste caso particular, existe uma aplicação induzida por g, designada *shift* no limite inverso,

$$\sigma_g : (\Gamma, g)_\infty \to (\Gamma, g)_\infty$$

definida por

$$\sigma_g\left((x_0, x_1, x_2, \cdots)\right) = \left(g(x_0), g(x_1), g(x_2), \cdots\right) = \left(g(x_0), x_0, x_1, \cdots\right)$$

e é a única aplicação que torna comutativo, para todo $n \geq 0$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} (\Gamma, g)_\infty \arrow[r, "\sigma_g"] \arrow[d, "p_n"'] & (\Gamma, g)_\infty \arrow[d, "p_n"] \\ \Gamma \arrow[r, "g"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

A aplicação σ_g é um homeomorfismo com inverso dado por

$$\sigma_g^{-1}\left((x_0, x_1, x_2, \cdots)\right) = (x_1, x_2, \cdots) \ ,$$

a aplicação *shift* da dinâmica simbólica.

As técnicas de Williams permitem obter uma caracterização topológica dos atractores hiperbólicos, expansivos, associados a difeomorfismos de dimensão dois (cf. [38]), situação na qual o atractor possui dimensão topológica igual a um. Em particular, o atractor é caracterizado em termos de limite inverso de variedades ramificadas de dimensão um.

Observação 2.2.2. A estrutura hiperbólica de um atractor associado a um difeomorfismo de dimensão dois, apresenta variedades instável e estável de dimensão um. Mais, a proposição 1.2.5 assegura que a variedade instável de qualquer ponto do atractor está contida no próprio atractor pelo que, em dimensão dois, qualquer atractor hiperbólico, $\mathscr{A}$, é a união de curvas contidas nas variedades instáveis de pontos de $\mathscr{A}$.

Resultado chave na teoria de R. Williams, da relação entre atractores expansivos e variedades ramificadas de dimensão $n \geq 1$, é o teorema 2.2.1. Enunciamos o teorema apenas para o caso particular dos difeomorfismos de dimensão dois. Para o caso geral veja-se [39], teorema 4.4.

Teorema 2.2.1. *Suponhamos que Λ é um atractor expansivo de um difeomorfismo $f : X \to X$, definido numa variedade X de dimensão dois. Então existe uma variedade ramificada de dimensão um, Γ, mergulhada em X, e uma aplicação não invertível $g : \Gamma \to \Gamma$, tal que $f|_\Lambda$ é conjugado com a aplicação shift no limite inverso $\sigma_g : (\Gamma, g)_\infty \to (\Gamma, g)_\infty$.* □

Ilustramos o teorema 2.2.1 com o exemplo de um atractor construído por R. Plykin [27] em 1974.

Exemplo 2.2.1 (Atractor de Plykin)**.** Considere-se o compacto $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^2$, uma região do plano à qual se removeram três conjuntos homeomorfos a $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, como representado na figura 2.5.

Consideramos que por cada ponto de $\mathscr{P}$ passa um segmento, de modo que todos os segmentos assim obtidos são disjuntos. Por outras palavras, dotamos $\mathscr{P}$ de uma folheação, $\mathscr{F}$, cujas folhas são os segmentos considerados.

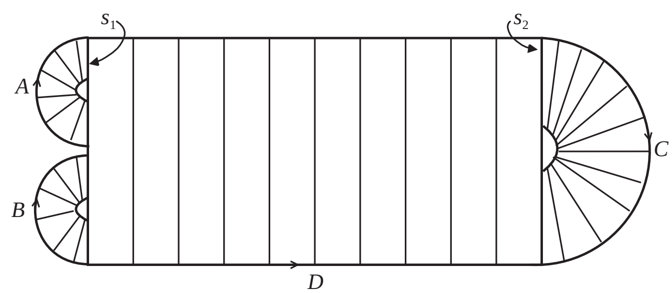


Figura 2.5: O compacto $\mathscr{P}$ munido da folheação $\mathscr{F}$

Definimos, geometricamente, a aplicação $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ como indicado na figura 2.6

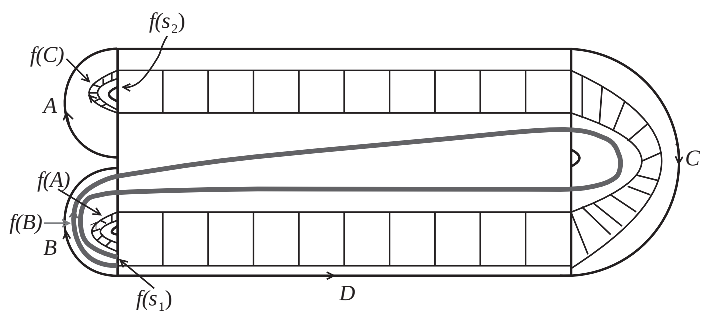


Figura 2.6: $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$

Esta aplicação transforma cada folha $s \in \mathscr{F}$ numa folha de $\mathscr{F}$, $f(s) \in \mathscr{F}$, contrai ao longo das folhas, e além disso $f(\mathscr{P}) \subset int(\mathscr{F})$. Note-se que quaisquer dois pontos de uma mesma folha se comportam de modo idêntico por iteração de f.

Definimos o atractor de Plykin como sendo o conjunto,

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\mathscr{P}) .$$

O conjunto Λ é hiperbólico. Observe-se que os elementos de $\mathscr{F}$ estão contidos nas variedades $W^s(x)$, $x \in \Lambda$.

A relação de equivalência

$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in \mathscr{P}$, pertencem à mesma componente conexa de $W^s(z) \cap \mathscr{P}$, para algum $z \in \mathscr{P}$

permite a construção do espaço quociente $\Gamma = \mathscr{P} \big/ \sim$. Deste modo cada folha é identificada a um ponto, pelo que pontos de uma mesma folha têm o mesmo futuro assimptótico.

O espaço Γ é uma variedade ramificada de dimensão um, com dois pontos de ramificação correspondentes às classes de equivalência definidas pelas folhas s_1 e s_2 (cf. figura 2.7).

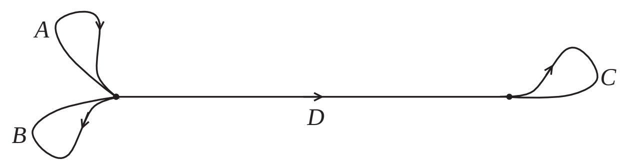


Figura 2.7: A variedade ramificada Γ

Definimos em Γ uma aplicação $g : \Gamma \to \Gamma$. A aplicação g é expansiva, uma vez que em Γ as direcções estáveis são identificadas com pontos. Na figura 2.8 representamos o modo como a aplicação contínua g actua em Γ. O comportamento dinâmico de g em Γ pode ser descrito pelo modo como g transforma cada um dos intervalos A, B, C e D, (o símbolo (+) representa a composição de caminhos e (−) representa composição com o caminho inverso):

$$A \xrightarrow{g} B \qquad B \xrightarrow{g} B + D + C - D - B$$
$$C \xrightarrow{g} A \qquad D \xrightarrow{g} D - C - D$$

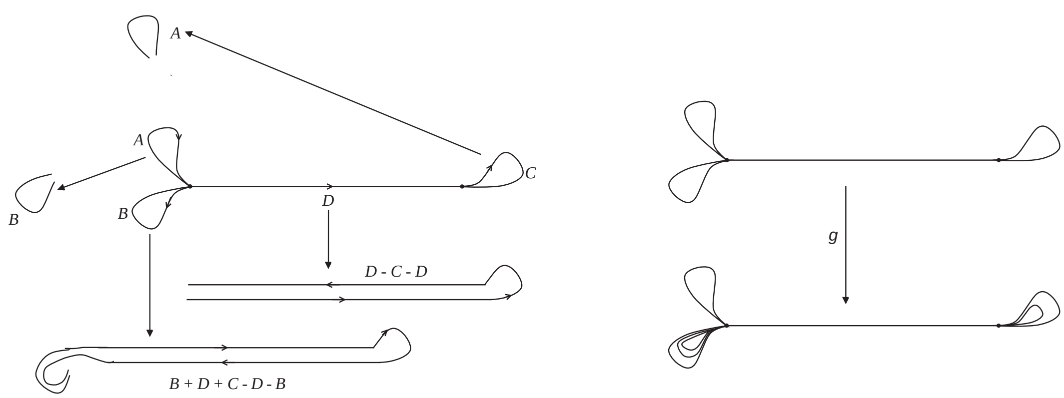


Figura 2.8: A função g

O teorema 2.2.1 garante que $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugada com a aplicação $\sigma_g : (\Gamma, g)_\infty \to (\Gamma, g)_\infty$.

De facto, seguindo a demonstração do teorema 2.2.1, considere-se o diagrama comutativo, onde i representa a inclusão,

$$\begin{tikzcd}
f(\mathscr{P}) \arrow[d, "i"'] & \mathscr{P} \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "q"] \\
\mathscr{P} \arrow[d, "q"'] & \\
\Gamma & \Gamma \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

Este diagrama induz a construção do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "i"'] & \vdots \arrow[d, "i"'] & \vdots \arrow[d, "i"'] & \cdots \\
f^2(\mathscr{P}) \arrow[d, "i"'] & f(\mathscr{P}) \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{P} \arrow[l, "f"'] \arrow[ddd, "q"'] & \\
f(\mathscr{P}) \arrow[d, "i"'] & \mathscr{P} \arrow[l, "f"'] \arrow[dd, "q"'] & & \\
\mathscr{P} \arrow[d, "q"'] & & & \\
\Gamma & \Gamma \arrow[l, "g"] & \Gamma \arrow[l, "g"] & \cdots \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

Cada limite inverso vertical é a intersecção $\Lambda = \bigcap_{n\geq 0} f^n(\mathscr{P})$, (proposição 2.2.1). Temos então o diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[d] & \Lambda \arrow[l, "f|_\Lambda"'] \arrow[d] & \Lambda \arrow[l, "f|_\Lambda"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "f|_\Lambda"'] \\
\Gamma & \Gamma \arrow[l, "g"] & \Gamma \arrow[l, "g"] & \cdots \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

Uma vez que $f|_\Lambda$ é um homeomorfismo, o limite inverso da sequência

$$\Lambda \xleftarrow{f|_\Lambda} \Lambda \xleftarrow{f|_\Lambda} \Lambda \xleftarrow{f|_\Lambda} \cdots$$

é, pela proposição 2.2.2, homeomorfo a Λ.

Concluímos o exemplo 2.2.1, observando que o diagrama (2.2.1) permite definir uma aplicação $R:\Lambda\to\left(\Gamma,g\right)_\infty$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[d, "R"'] & \Lambda \arrow[l, "f|_\Lambda"'] \arrow[d, "R"] \\ \left(\Gamma,g\right)_\infty & \left(\Gamma,g\right)_\infty \arrow[l, "\sigma_g"] \end{tikzcd}$$

estando R definida por $R(x)=\left(qx,q\circ f^{-1}(x),\ldots,q\circ f^{-n}(x),\ldots\right)$, $x\in\Lambda$.

2.2.2 Variedades ramificadas de dimensão dois e *templates*

Na secção anterior observámos o papel que as variedades ramificadas, de dimensão um, desempenham no estudo de difeomorfismos hiperbólicos de dimensão dois. Na presente secção iremos considerar o papel que as variedades ramificadas, de dimensão dois, podem desempenhar, no estudo de fluxos hiperbólicos em dimensão três, situação à qual nos restringiremos, salvo menção em contrário, daqui em diante.

Por forma a tornar possível a extracção de informação topológica de um fluxo hiperbólico

$$\varphi^t : X\to X\,,$$

Birman e Williams definem uma relação de equivalência num conjunto Λ, invariante para o fluxo, do seguinte modo

$$x\underset{\mathcal{T}}{\sim}y \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\left|\varphi^t(x)-\varphi^t(y)\right|=0,\quad \forall\, x,y\in\Lambda\,. \tag{2.2.2}$$

Esta relação identifica pontos com o mesmo futuro assimptótico, e não introduz intersecções entre órbitas periódicas, pelo que não altera a sua organização topológica, dado que dois pontos na mesma órbita periódica, ou em órbitas periódicas distintas, não podem apresentar o mesmo comportamento assimptótico.

Grosso modo, a relação de equivalência acima definida permite reduzir a dimensão de três para dois, e o fluxo hiperbólico induz, no espaço quociente, um semi-fluxo.

A estrutura do espaço quociente é a de uma variedade ramificada de dimensão dois, – com a excepção de um conjunto de pontos (pontos de ramificação) é uma variedade de dimensão dois mergulhada em X.

No quadro dos fluxos hiperbólicos em dimensão três, $\varphi^t:X\to X$, a relação $\underset{\mathcal{T}}{\sim}$ definida em (2.2.2) sugere uma generalização do teorema 2.2.1, considerando agora variedades ramificadas de dimensão dois.

Dada uma variedade X, que consideraremos de dimensão três, uma variedade ramificada, $\mathcal{B}$, de dimensão dois mergulhada em X, é um conjunto localmente difeomorfo a um dos modelos representados na figura 2.9. O conjunto

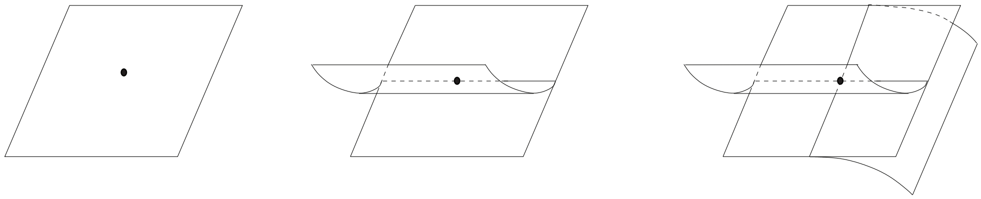


Figura 2.9: Cartas locais de uma 2–variedade ramificada

dos pontos de ramificação $\mathfrak{R}$ de $\mathscr{B}$, pode conter pontos duplos, como na terceira carta representada na figura 2.9, os quais são pontos isolados.

Definição 2.2.3. Designa-se *template* o par $\left(\mathscr{T},\overline{\varphi}^t\right)$, onde $\mathscr{T}$ é uma variedade ramificada de dimensão dois, compacta e com bordo, com um atlas constituído por cartas de dois tipos (j) e (s), como na figura 2.10, e $\overline{\varphi}^t$ é um semi-fluxo expansivo definido em $\mathscr{T}$. Nas cartas de tipo (s) o semi-fluxo escapa ao longo de um conjunto ϖ, enquanto nas cartas de tipo (j) não está definido, para $t<0$, ao longo do segmento de ramificação.

Por *expansivo* entendemos que a aplicação de Poincaré, definida no segmento de ramificação pelo semi-fluxo, é uma aplicação expansiva, ou seja, qualquer intervalo suficientemente pequeno é expandido num intervalo maior. (Uma definição formal pode ser consultada em [32], definição 7.3).

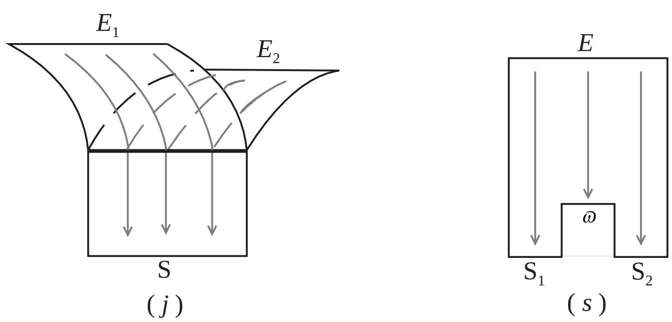


Figura 2.10: Cartas dos tipos (j) e (s)

A variedade ramificada $\mathscr{T}$ é construída identificando segmentos de saída, S, S_1, S_2, de uma carta, com segmentos de entrada, E, E_1, E_2, de outra carta, de modo a respeitar as direcções do semi-fluxo.

Sendo $\mathscr{T}$ compacta, o número de cartas usadas é necessariamente finito e não é possível a existência de segmentos de entrada e de saída por identificar, (cf. figura 2.11).

Observamos que dado $\left(\mathscr{T},\overline{\varphi}^t\right)$, somente nos interessam as órbitas periódicas, razão pela qual desprezamos o conjunto ϖ na representação do *template*, como na figura 2.12.

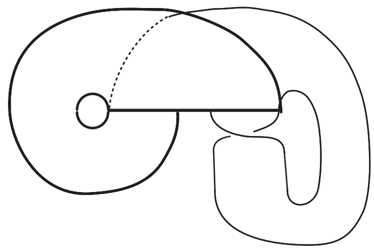


Figura 2.11: Exemplo de um *template*

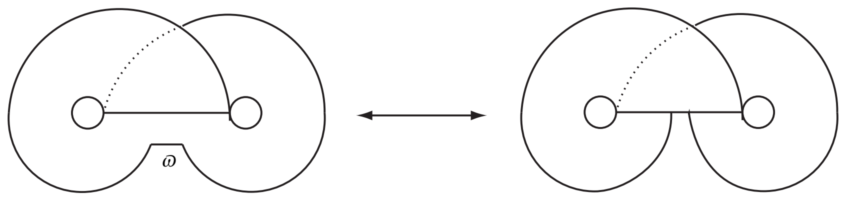


Figura 2.12: Templates equivalentes

A certos fluxos hiperbólicos (com o conjunto recorrente por cadeias hiperbólico) $\varphi^t : X \to X$, é possível associar um semi-fluxo $\overline{\varphi}^t : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ em que a variedade ramificada $\mathscr{T}$ é obtida por quociente de uma região de X pela relação $\underset{\mathscr{T}}{\sim}$ definida em (2.2.2).

A relação entre o elo de órbitas periódicas E_φ, *i.e.*, o conjunto de órbitas periódicas de φ^t considerado como um elo em X, e o elo de órbitas periódicas, $E_{\mathscr{T}}$, do semi-fluxo num *template* $\left(\mathscr{T}, \overline{\varphi}^t\right)$, é estabelecida mediante um resultado chave, – o Teorema do *Template*, – obtido por Birman e Williams em 1983, [3].

Teorema 2.2.2 (TEOREMA DO *Template*). *Seja $\varphi^t : X \to X$ um fluxo numa variedade de dimensão três, possuindo uma estrutura hiperbólica no seu conjunto recorrente por cadeias. Então, existe um template $\left(\mathscr{T}, \overline{\varphi}^t\right)$ mergulhado em X, tal que o elo de órbitas periódicas E_φ está em correspondência bijectiva com o elo de órbitas periódicas $E_{\mathscr{T}}$, (salvo a possível existência de uma ou duas órbitas periódicas em $E_{\mathscr{T}}$). Em qualquer sub-elo finito, a correspondência é via isotopia ambiente.*

Apresentamos um esboço da demonstração do teorema 2.2.2. Uma demonstração detalhada pode ser consultada em [15].

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathscr{R}$ o conjunto recorrente por cadeias de φ^t. O Teorema da Decomposição Espectral de Smale (teorema 1.2.1) garante a existência de uma decomposição num número finito de conjuntos básicos

$$\mathscr{R} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r\,.$$

Uma vez que a variedade X tem dimensão três, a dimensão topológica de cada conjunto básico B_i não é superior a três. A demonstração do teorema baseia-se na redução à dimensão um dos conjuntos básicos, B_i, com dimensão superior a um, através de perturbações convenientes que preservam a estrutura das órbitas periódicas e a hiperbolicidade do conjunto recorrente por cadeias.

Efectuada esta redução, o *template* é definido como o espaço quociente de uma vizinhança $V(B)$, das componentes com dimensão igual a um pela relação (2.2.2).

Dado B conjunto básico na decomposição anterior, distinguimos quatro casos:

1. $\dim(B) = 0$. Neste caso B não contém órbitas periódicas, pelo que o teorema é trivialmente verificado;

2. $\dim(B) = 3$. Agora φ^t é um fluxo de Anosov em X.

   Seja então γ_0 uma órbita periódica de φ^t, na qual vamos efectuar uma cirurgia de Smale, considerando um fluxo DA ψ^t.

   Identificando o fluxo ψ^t com a suspensão do difeomorfismo DA do exemplo 1.2.2, γ_0 é uma órbita periódica repulsora para ψ^t e, por hipótese, $W^u\left(\gamma_0, \varphi^t\right)$ é denso em X.

   O conjunto $\Lambda = X \setminus W^u\left(\gamma_0, \varphi^t\right)$ é um atractor hiperbólico expansivo de dimensão dois, (*vide* [15], Proposição 2.2.12, pg. 43).

   Distinguimos duas situações (*vide* [15], Lema 2.2.11, pg. 43):

   (a) $W^s\left(\gamma_0, \varphi^t\right)$ orientável. São criadas duas novas órbitas periódicas γ_1 e γ_2, para ψ^t em Λ. As órbitas periódicas de φ^t são isotópicas às órbitas periódicas de $\psi^t|_\Lambda$ com a excepção de γ_0, que é substituída por γ_0, γ_1 e γ_2 (cf. figura 2.13 a));

   (b) $W^s\left(\gamma_0, \varphi^t\right)$ não-orientável. Agora Λ é uma banda de Möbius, e ao passar de φ^t em B para ψ^t em Λ, obtemos uma órbita γ_1, por duplicação de período de γ_0, (cf. figura 2.13 b)).

   Resumindo, efectuando uma cirurgia de Smale ao longo de γ_0, reduzimos a dimensão topológica do conjunto básico B para dois, criando-se uma ou duas novas órbitas periódicas.

3. $\dim(B) = 2$. Como B é hiperbólico, de dimensão dois, e X tem dimensão três, então para cada $x \in B$,

   $$\dim\left(E_x^s\right) = \dim\left(E_x^u\right) = \dim\left(\langle \frac{d\varphi^t(x)}{dt}\Big|_{t=0} \rangle\right) = 1\,.$$

   Uma vez que, necessariamente, $\langle \frac{d\varphi^t(x)}{dt}\Big|_{t=0} \rangle \subset B$, temos que, ou $E_x^s \subset B$ ou $E_x^u \subset B$, e portanto B é um atractor ou um repulsor, respectivamente.

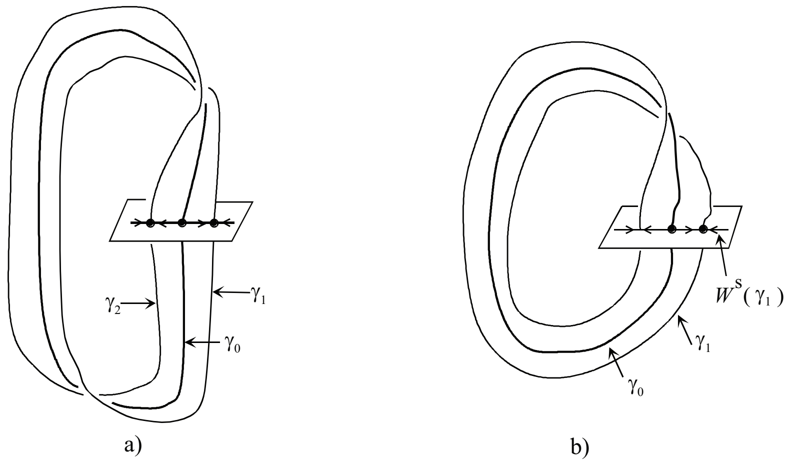


Figura 2.13: Órbitas obtidas por cirurgia de Smale

Suponhamos que B é um atractor (o caso B repulsor é semelhante, bastando considerar $-t$ ao invés de t).

Escolhida uma órbita periódica $\widetilde{\gamma}_0$ em B, procedemos como no caso $\dim(B) = 3$. Distinguimos dois casos, dependendo da orientabilidade de $W^s\left(\widetilde{\gamma}_0, \varphi^t\right)$. Recorrendo de novo à proposição 2.2.12 em [15], conclui-se que $\widetilde{\Lambda} = X \setminus W^u\left(\widetilde{\gamma}_0, \varphi^t\right)$ é um conjunto básico de dimensão um.

Concluímos então que, efectuando uma ou duas cirurgias de Smale, consoante $\dim(B) = 2$ ou $\dim(B) = 3$, respectivamente, o fluxo φ^t dá origem a um fluxo $\widetilde{\psi}^t$ com um conjunto básico $\widetilde{\Lambda}$ de dimensão um.

4. $\dim(B) = 1$. Pelo exposto acima, é suficiente considerar este caso pois o fluxo $\varphi^t : X \to X$ é transformado, após cirurgia de Smale, num fluxo $\widetilde{\psi}^t$ com um conjunto básico de dimensão um.

   Se B tem dimensão um, pelo teorema 1.2.3 o fluxo $\varphi^t|_B$ é topológicamente conjugado com a suspensão de um *subshift* de tipo finito. Existe então uma secção de Poincaré S para o fluxo $\varphi^t|_B$, tal que a aplicação de Poincaré $P : S \to S$ é um *subshift* de tipo finito.

   Pelo teorema 1.2.4, $B \cap S$ admite uma partição de Markov $\boldsymbol{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$. Note-se que $B \cap S$ tem dimensão zero (é homeomorfo a um conjunto de Cantor pela proposição 1.2.7), e então a condição 1. da definição 1.2.18 é desnecessária.

   Em [15] os autores constroem uma vizinhança $V(B)$, que designam *vizinhança caixa-fluxo de Markov*, obtendo um espaço quociente (o *template* $\left(\mathcal{T}, \overline{\varphi}_t\right)$) por identificação dos pontos nas componentes conexas de $W^s(x) \cap V(B)$, para $x \in B$. $\square$

Observação 2.2.3. O *template* $\mathcal{T}$ [4] não é único, pois a cirurgia de Smale pode ser efectuada numa órbita periódica distinta de γ_0, digamos γ_0', originando um template $\mathcal{T}'$ possivelmente distinto de $\mathcal{T}$.

Definição 2.2.4. Dois templates mergulhados em $\mathbb{S}^3$ são equivalentes se é possível transformar um template no outro por intermédio de uma sequência finita dos seguintes movimentos no template:

1. isotopia ambiente
2. corte (cf. figura 2.14 (a))
3. deslizamento (cf. figura 2.14 (b))

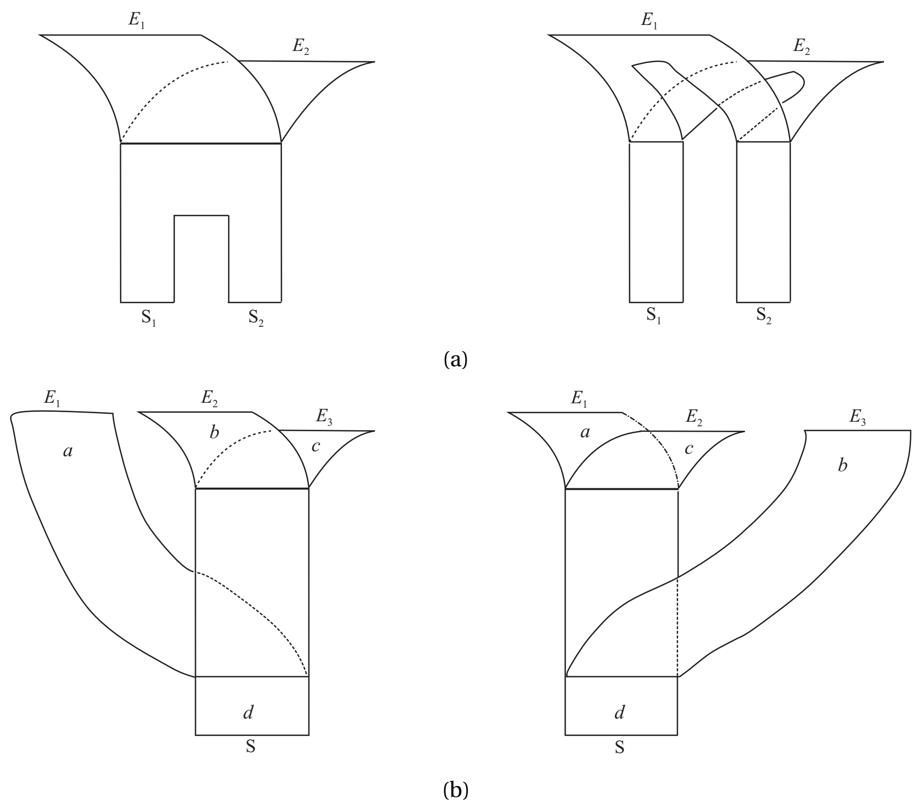


Figura 2.14: Movimentos no *template*: (a) corte; (b) deslizamento

Observação 2.2.4. Dois templates equivalentes possuem o mesmo elo de órbitas periódicas.

[4] Sempre que não se afigure necessário referir o semi-fluxo, passaremos a representar um *template* $(\mathcal{T}, \overline{\varphi}_t)$ por $\mathcal{T}$.

2.2.3 Descrição simbólica dos *templates*

A dinâmica simbólica revela-se um instrumento fundamental na descrição/organização de nós e elos num template.

Seja $\mathcal{T}$ um *template* para o qual a variedade ramificada é constituída por $N \geq 2$ faixas, que passaremos a designar por *braços*, entre dois segmentos de ramificação, distintos ou não.

Atribuímos a cada um dos N braços de $\mathcal{T}$ os símbolos $x_1, x_2, \dots, x_N$, o que permite obter para a aplicação de Poincaré, induzida pelo semi-fluxo de $\mathcal{T}$ nos segmentos de ramificação, uma partição de Markov.

Assim, associamos a cada nó uma palavra nas letras do alfabeto $\mathbb{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ e a cada órbita no template é associado um itinerário $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, que designaremos *itinerário no template*, onde $a_0 a_1 a_2 \dots$ representa a ordem segundo a qual a órbita percorre cada um dos braços do template.

Representamos o espaço dos itinerários de um template $\mathcal{T}$ por

$$\Sigma_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}_0}.$$

Por *geradores* de $\Sigma_{\mathcal{T}}$ entendemos os elementos da partição de Markov $\{x_1, \dots, x_N\}$.

Proposição 2.2.3. *Seja $\mathcal{T}$ um template com partição de Markov $\{x_1, \dots, x_N\}$, e matriz de transição $A(\mathcal{T}) = \left[A_{i,j}(\mathcal{T})\right]$, onde $A_{i,j}(\mathcal{T}) = 1$ se o braço x_i encontra o braço x_j num segmento de ramificação, e $A_{i,j}(\mathcal{T}) = 0$ caso contrário. Então $\Sigma_{\mathcal{T}}$ é precisamente o subshift de tipo finito associado a $A(\mathcal{T})$.* □

Definição 2.2.5. Seja $\mathcal{T}$ um template com partição de Markov $\{x_1, \dots, x_N\}$ e denotemos $s_1, s_2, \dots, s_M$ o conjunto dos segmentos de ramificação de $\mathcal{T}$. Cada segmento de ramificação s_j, $j = 1, \dots, M$, pode ser decomposto em *sub-segmentos de ramificação*, por intermédio da partição de Markov, que denotaremos $\beta_i(\mathcal{T})$, $i = 1 \dots, N$,

$$\beta_i(\mathcal{T}) := \left\{\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \Sigma_{\mathcal{T}} : a_0 = x_i\right\}.$$

Cada $\beta_i(\mathcal{T})$ representa o intervalo fechado de s_j do qual sai o braço x_i. Representamos o conjunto de todas as órbitas com início no segmento de ramificação s_j por $\Sigma_{s_j} \subset \Sigma_{\mathcal{T}}$. Por *conjunto de ramificação* entendemos o conjunto

$$\beta(\mathcal{T}) = \bigcup_{i=1}^{N} \beta_i(\mathcal{T}).$$

Cada segmento de ramificação s_j tem dimensão um, pelo que definimos em Σ_{s_j} uma ordem $\lhd$ do seguinte modo:[5]

Escolhe-se uma orientação em cada s_j e ordenamos Σ_{s_j} com a ordem lexicográfica. Por exemplo, no *template* $\mathcal{U}$ da figura 2.16 (a):

$$x_1 \lhd x_2 \quad \text{em } s_1 \quad \text{e} \quad x_4 \lhd x_3 \quad \text{em } s_2$$

[5]Consideramos somente o caso em que $\mathcal{T}$ é orientável (Definição 2.2.11); para o caso não-orientável referimos [15].

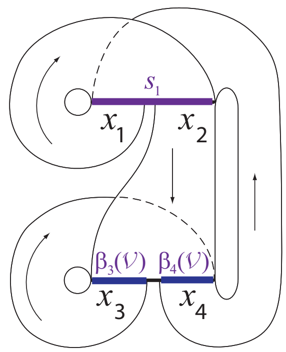


Figura 2.15: s_1, $\beta_3(\mathscr{V})$ e $\beta_4(\mathscr{V})$

enquanto no *template* $\mathscr{V}$ da figura 2.16 (b):

$$x_1 \lhd x_2 \quad \text{em } s_1 \quad \text{e} \quad x_3 \lhd x_4 \quad \text{em } s_2$$

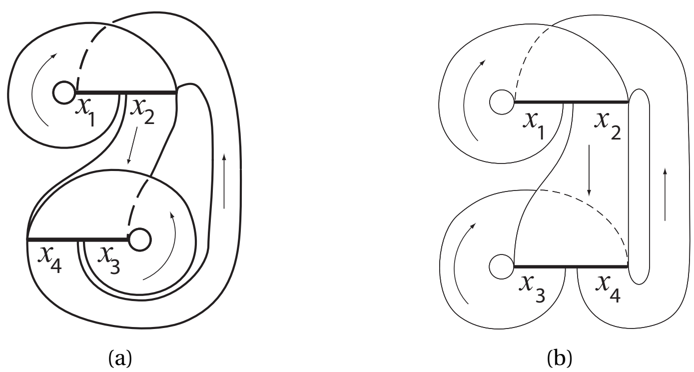


Figura 2.16: Os *templates*: (a) $\mathscr{U}$; (b) $\mathscr{V}$

Observação 2.2.5. Uma vez que cada um dos templates $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ tem dois segmentos de ramificação, existem duas $\lhd$-ordens, uma para cada s_j, $j = 1, 2$. No segmento s_2 do template $\mathscr{U}$ vem, por exemplo,

$$x_4^2 x_3 x_1 x_2 \ldots \lhd x_4 x_3 x_1 x_2 \ldots \lhd x_4 x_3 x_2 \ldots$$

Dados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Sigma_{s_j}$, seja J o índice do primeiro símbolo onde $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ não são iguais, portanto $J = \min\{j : a_j \neq b_j\}$. Então $\boldsymbol{a} \lhd \boldsymbol{b}$ se $a_J \lhd b_J$, caso contrário $\boldsymbol{b} \lhd \boldsymbol{a}$. Naturalmente que pontos em conjuntos Σ_{s_j} distintos não são $\lhd$-comparáveis.

Definição 2.2.6. Seja $\mathscr{T}$ um *template* com $N \geq 2$ braços $x_1, \ldots, x_N$ e conjunto de ramificação $\beta(\mathscr{T})$. Os pontos no bordo esquerdo (resp. direito), relativamente à ordem $\lhd$, de cada $\beta_i(\mathscr{T})$ serão denotados $\partial_i^{\mathrm{e}}(\mathscr{T})$ (resp. $\partial_i^{\mathrm{d}}(\mathscr{T})$). O conjunto $\partial(\mathscr{T})$, dado pela união em i de $\partial_i^{\mathrm{e}}(\mathscr{T}) \cup \partial_i^{\mathrm{d}}(\mathscr{T})$, designa-se *conjunto bordo*.

Exemplo 2.2.2. Para o template $\mathscr{V}$ da figura 2.15 temos:

$$\beta(\mathscr{V}) = \beta_1(\mathscr{V}) \cup \beta_2(\mathscr{V}) \cup \beta_3(\mathscr{V}) \cup \beta_4(\mathscr{V})$$

$$\beta_1(\mathscr{V}) = \partial_1^{\mathrm{e}}(\mathscr{V}) \cup \partial_1^{\mathrm{d}}(\mathscr{V}) = \left\{x_1^{\infty}, x_1\,(x_2x_4)^{\infty}\right\}$$

$$\beta_2(\mathscr{V}) = \partial_2^{\mathrm{e}}(\mathscr{V}) \cup \partial_2^{\mathrm{d}}(\mathscr{V}) = \left\{x_2x_3^{\infty}, (x_2x_4)^{\infty}\right\}$$

$$\beta_3(\mathscr{V}) = \partial_3^{\mathrm{e}}(\mathscr{V}) \cup \partial_3^{\mathrm{d}}(\mathscr{V}) = \left\{x_3^{\infty}, x_3\,(x_4x_2)^{\infty}\right\}$$

$$\beta_4(\mathscr{V}) = \partial_4^{\mathrm{e}}(\mathscr{V}) \cup \partial_4^{\mathrm{d}}(\mathscr{V}) = \left\{x_4x_1^{\infty}, (x_4x_2)^{\infty}\right\}$$

Removendo parte de um *template* $\left(\mathscr{T}, \overline{\varphi}^t\right)$, "cortando"ao longo de órbitas do semi-fluxo $\overline{\varphi}^t$, obtemos um *sub-template*.

Definição 2.2.7. Sejam $(\mathscr{S}, \overline{\psi}^t)$ e $\left(\mathscr{T}, \overline{\varphi}^t\right)$ dois templates. Diz-se que $\left(\mathscr{S}, \overline{\psi}^t\right)$ é um sub-*template* de $\left(\mathscr{T}, \overline{\varphi}^t\right)$, e escreve-se $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$, se $\mathscr{S}$ é um subconjunto de $\mathscr{T}$ e $\overline{\psi}^t = \overline{\varphi}^t|_{\mathscr{S}}$.

Exemplo 2.2.3. Na figura 2.17 a) representa-se o *template* $\mathscr{L}(0,0)$, designado *template* de Lorenz (a notação e a designação para este *template* serão justificadas na secção 2.3) e um sub-*template* $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}(0,0)$ (figura 2.17 b)). Neste caso particular o sub-*template* está mergulhado em $\mathbb{R}^3$ de modo distinto de $\mathscr{L}(0,0)$, mas é difeomorfo ao próprio *template* $\mathscr{L}(0,0)$. A isotopia apresentada é usualmente designada *belt trick*.[6]

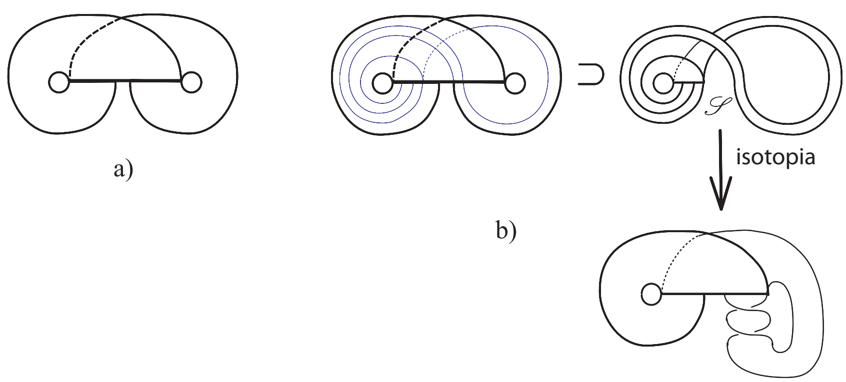
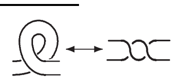


Figura 2.17: a) $\mathscr{L}(0,0)$; b) $\mathscr{S}$ e sua transformação por isotopia

[6]A isotopia *belt trick*: 

Definição 2.2.8. Sejam $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}$ dois templates. Uma aplicação $\mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{T}$ que transforma órbitas em órbitas e tal que $\mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathfrak{r}(\mathscr{S})$ é um difeomorfismo, designa-se *template inflation*. Quando $\mathscr{S} = \mathscr{T}$, $\mathfrak{r} : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathscr{T}$ diz-se uma *renormalização* do *template* $\mathscr{T}$.

Observação 2.2.6. Dada uma renormalização $\mathfrak{r}$ temos $\mathfrak{r}(\mathscr{T}) \subset \mathscr{T}$, pelo que iterações sucessivas de $\mathfrak{r}$ produzem uma sequência de sub-*templates* difeomorfos ao template $\mathscr{T}$.

Proposição 2.2.4. *Seja* $\mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{T}$ *como na definição 2.2.8. Então* $\mathfrak{r}$ *induz uma aplicação, que denotaremos ainda* $\mathfrak{r}$,

$$\mathfrak{r} : \Sigma_{\mathscr{S}} \hookrightarrow \Sigma_{\mathscr{T}}$$

cuja acção é expandir cada gerador da partição de Markov $\{x_1, \ldots, x_N\}$ *de* $\Sigma_{\mathscr{S}}$ *numa palavra admissível* w *nos geradores de* $\Sigma_{\mathscr{T}}$.

DEMONSTRAÇÃO Os segmentos de ramificação de $\mathscr{S}$ são transformados nos segmentos de ramificação de $\mathscr{T}$, por continuidade de $\mathfrak{r}$. Deste modo cada braço de $\mathscr{S}$, ao qual corresponde um gerador x_i de $\Sigma_{\mathscr{S}}$, é transformado numa sequência finita de braços de $\mathscr{T}$, à qual corresponde uma palavra admissível nos geradores de $\Sigma_{\mathscr{T}}$. $\square$

Exemplo 2.2.4. O sub-*template* $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}(0,0)$ do exemplo 2.2.3 é a imagem da renormalização $\mathfrak{r} : \mathscr{L}(0,0) \hookrightarrow \mathscr{L}(0,0)$, dada em $\Sigma_{\mathscr{L}(0,0)}$ por

$$\mathfrak{r} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_1 x_2 \end{cases} .$$

Considerando uma órbita em $\Sigma_{\mathscr{L}(0,0)}$, por exemplo $\left((x_1 x_2)^2\right)^\infty$, temos $\mathfrak{r}\left(\left((x_1 x_2)^2\right)^\infty\right) = \left(x_1 (x_1 x_2)^2\right)^\infty$.

Definição 2.2.9. Seja $\mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{T}$ uma *template inflation* e denotemos as inclusões de $\mathscr{S}$ e $\mathscr{T}$ em $\mathbb{S}^3$ por $i_{\mathscr{S}}$ e $i_{\mathscr{T}}$, respectivamente. Se $i_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ e $i_{\mathscr{T}} \circ \mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ são isotópicas, *i.e.*, se existe uma isotopia ambiente $h_t : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ (cf. Definição 1.1.5) tal que $i_{\mathscr{T}} \circ \mathfrak{r} = h_1 \circ i_{\mathscr{S}}$, então $\mathfrak{r}$ diz-se uma *template inflation isotópica.*

Observação 2.2.7. Qualquer *template inflation* $\mathfrak{r}$ transforma órbitas periódicas em órbitas periódicas, logo transforma o elo de órbitas periódicas, em geral alterando o tipo de nó. Quando $\mathfrak{r}$ é uma *template inflation isotópica* tal não sucede, ou seja, $\mathfrak{r}$ preserva a classe de isotopia do elo de órbitas periódicas.

Observação 2.2.8. A imagem de uma *template inflation isotópica* $\mathfrak{r} : \mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{T}$ é um sub-*template* $\mathfrak{r}(\mathscr{S})$ isotópico a $\mathscr{S}$.

Exemplo 2.2.5. Considere-se o template $\mathcal{V}$ representado na figura 2.18 a). O sub-*template* de $\mathcal{V}$ representado na figura 2.18 b) induz uma renormalização isotópica $\boldsymbol{D}:\mathcal{V}\hookrightarrow\mathcal{V}$ dada em $\Sigma_{\mathcal{V}}$ por

$$\boldsymbol{D}:\Sigma_{\mathcal{V}}\hookrightarrow\Sigma_{\mathcal{V}}:\begin{cases} x_1\mapsto x_1\\ x_2\mapsto x_1x_2\\ x_3\mapsto x_3\\ x_4\mapsto x_3x_4\end{cases}$$

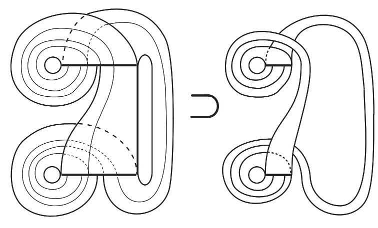


Figura 2.18: a) $\mathcal{V}$ e um *sub-template*; b) o *sub-template*

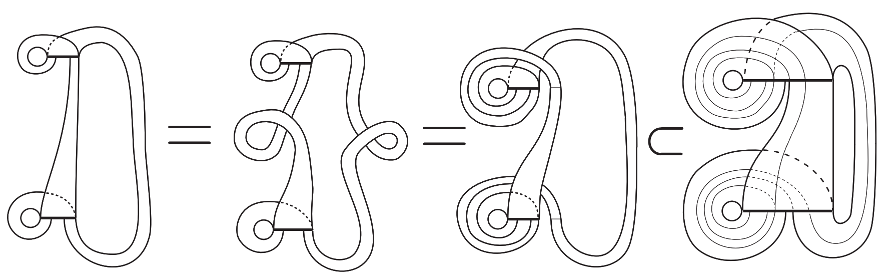


Figura 2.19: A renormalização isotópica $\boldsymbol{D}$

2.2.4 Nós nos *templates*

A descrição simbólica das órbitas num template permite concluir (*vide* teorema 2.2.4), que todo o template $\mathcal{T}$ contém um nó não trivial.

Em [12], J. Franks e R. Williams recorrem ao teorema de Alexander 1.1.8 para transformar mediante isotopia, um template numa forma que designaram *template entrançado*.

Definição 2.2.10. Um *template* $\mathcal{T}$ diz-se *entrançado* se $\mathcal{T}$ está mergulhado em $\mathbb{D}^2\times\mathbb{S}^1$ de tal forma que toda a órbita periódica em $\mathcal{T}$ é o fecho de uma trança. Se toda a órbita periódica é um nó positivo (resp. negativo), (cf. definição 1.1.14) o *template* $\mathcal{T}$ diz-se positivo (resp. negativo).

Definição 2.2.11. Um *template* $\mathcal{T}$ diz-se orientável, se a translação de um qualquer sistema de coordenadas ao longo de órbitas periódicas em $\mathcal{T}$ preserva a orientação.

Exemplo 2.2.6. O template $\mathcal{L}(0,0)$ representado na figura 2.17 é orientável, enquanto que o *template* da figura 2.11 é não-orientável, pois contém uma banda de Möbius no braço da direita.

Teorema 2.2.3 (Entrançamento do *template*, [12])**.** *Todo o template $\mathcal{T}$ pode ser transformado, por isotopia, num template entrançado. Mais, se o template é orientável é sempre possível encontrar uma sua projecção plana na qual os braços de $\mathcal{T}$ não apresentam torção.* □

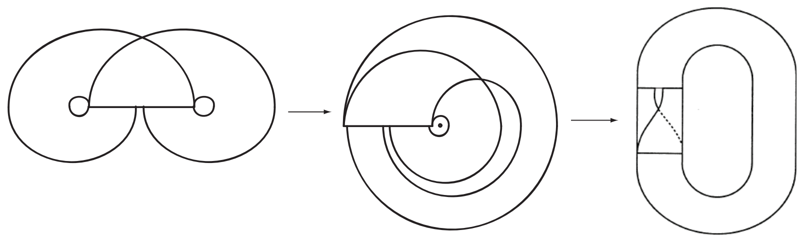


Figura 2.20: Entrançamento de $\mathcal{L}(0,0)$

Definição 2.2.12. Sejam $\boldsymbol{a}^\infty$ e $\boldsymbol{b}^\infty$ dois pontos periódicos, distintos, de Σ_{s_j}. Defina-se em Σ_{s_j} a operação *concatenamento* de $\boldsymbol{a}^\infty$ e $\boldsymbol{b}^\infty$, representada por $\boldsymbol{a}^\infty \oplus \boldsymbol{b}^\infty$, como sendo o ponto $(\boldsymbol{ab})^\infty$.

Observação 2.2.9. Uma vez que $\boldsymbol{a}^\infty$ e $\boldsymbol{b}^\infty$ são pontos de Σ_{s_j}, portanto órbitas com início em s_j, $(\boldsymbol{ab})^\infty$ é ainda uma órbita com início em s_j, logo um ponto de Σ_{s_j}, o que justifica que a operação $\oplus$ está bem definida.

Exemplo 2.2.7. Sejam $\boldsymbol{a}^\infty = \left(x_1^2 x_2 x_1\right)^\infty$, $\boldsymbol{b}^\infty = \left(x_1^2 x_3\right)^\infty$ e $\boldsymbol{c}^\infty = (x_1 x_2)^\infty$. Então

$$\boldsymbol{a}^\infty \oplus \boldsymbol{b}^\infty = \left(x_1^2 x_2 x_1^3 x_3\right)^\infty \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a}^\infty \oplus \boldsymbol{c}^\infty = \left(x_1^2 x_2 x_1 x_1 x_2\right)^\infty = \left(x_1^2 x_2\right)^\infty .$$

Recorrendo à desigualdade de Bennequin (teorema 1.1.10), ao teorema 2.2.3 e considerando, quando necessário, a operação $\oplus$ da definição 2.2.12, Ghrist *et al* [15] obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 2.2.4. *Seja $\mathcal{T}$ um template arbitrário. Então o elo de órbitas periódicas $E_{\mathcal{T}}$ contém um nó não trivial. Mais, $E_{\mathcal{T}}$ contém um número infinito de tipos de nó distintos.* □

O teorema 2.2.4 permite obter o resultado principal de [12]:

Teorema 2.2.5 (Franks-Williams)**.** *Seja $\overline{\varphi}^t$ um fluxo de classe C^r, $r \geq 2$, em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Se $\overline{\varphi}^t$ tem entropia topológica positiva, então entre as órbitas periódicas de φ^t existe um número infinito de tipos de nó.* □

2.3 Exemplos

Os *templates* mais simples são os constituídos por somente duas cartas: uma carta do tipo (s) e outra do tipo (j).

Para estes *templates* adoptamos a notação $\mathscr{L}(m,n)$, $m,n \in \mathbb{Z}$ de Williams [41], onde m (resp. n) representa o número de torções de amplitude 180° do braço x_1 (resp. x_2) como se representa na figura 2.21.

Destacamos em particular o *template* $\mathscr{L}(0,0)$, designado *template de Lorenz*, e o template $\mathscr{L}(0,1)$, designado *template ferradura*. Em geral, os *templates* $\mathscr{L}(m,n)$, $m,n \neq 0$, recebem a designação *templates do tipo de Lorenz*.

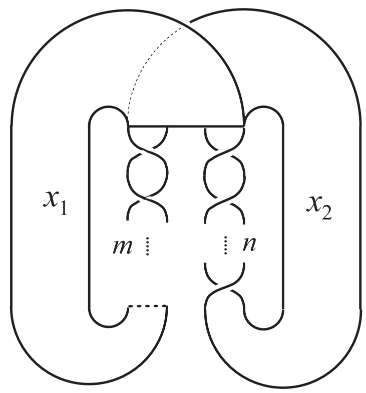


Figura 2.21: *Template* $\mathscr{L}(m,n)$. (Na figura, $m>0$ e $n<0$)

2.3.1 O *Template* de Lorenz

O *template* de Lorenz é um modelo, inicialmente proposto por Williams [40], que resulta da análise qualitativa da dinâmica do atractor de Lorenz (figura 2.3).

É de referir que a construção do template de Lorenz está intimamente associada ao modelo geométrico, proposto por J. Guckenheimer em 1976 [16], para o atractor de Lorenz. Somente em 1999 ficou demonstrado (W. Tucker [36]) que o modelo geométrico proposto por Guckenheimer é conjugado com o atractor de Lorenz.

Em [2] Birman e Williams iniciam o estudo topológico das órbitas periódicas, consideradas como $k-$elos, do sistema (2.1.1). O estudo topológico dos $k-$elos presentes no sistema (2.1.1) é reduzido ao estudo de itinerários em $\mathscr{L}(0,0)$, (cf. Proposição 2.2.3).

Definição 2.3.1. Dizemos que um $k-elo$ E é um *$k-$elo de Lorenz*, se existe um $k-$elo de órbitas periódicas do semi-fluxo em $\mathscr{L}(0,0)$ equivalente a E.

Na figura 2.22 representa-se uma órbita periódica, equivalente ao nó trevo, dada simbolicamente por $\left(x_1^2x_2x_1x_2\right)^{\infty}$, ou por qualquer permutação cíclica de $w = x_1^2x_2x_1x_2$. Portanto, o nó trevo é um nó de Lorenz.

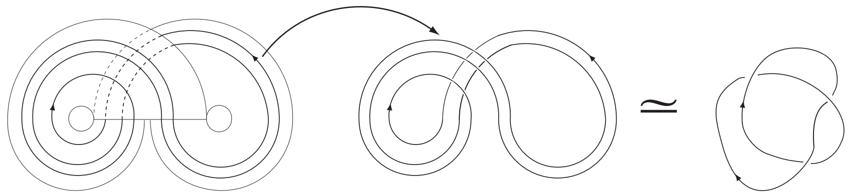


Figura 2.22: Órbita $\left(x_1^2x_2x_1x_2\right)^\infty$ em $\mathscr{L}(0,0)$. $\left(x_1^2x_2x_1x_2\right)^\infty \simeq 3_1$

Note-se que dado um nó de Lorenz K não é difícil obter uma palavra w que represente K. A direcção do semi-fluxo no tempo permite obter uma orientação natural para o nó.

A construção de um nó de Lorenz a partir de uma palavra w é um processo mais complexo, pois obriga a que se tenha conhecimento da ordem dos pontos de intersecção da órbita com o segmento de ramificação. Este processo fica facilitado mediante a utilização de um algoritmo introduzido por Birman e Williams em [2]. Exemplificamos este algoritmo no exemplo 2.3.1, remetendo a descrição geral para [2] (algoritmo 2.4.3).

Exemplo 2.3.1. Considere-se uma órbita em $\mathscr{L}(0,0)$ dada simbolicamente pela palavra $w=\left(x_1^2x_2\right)^2(x_1x_2)^2$, de comprimento $|w|=10$.[7] Considerem-se ainda as palavras $\sigma^p(w)$, $p=0,1,\dots 9$, obtidas aplicando o *shift* σ a w, que ordenamos de acordo com a ordem $\lhd$ (cf. observação 2.2.5 e os dois parágrafos imediatamente anteriores a esta). Por comodidade de escrita consideramos $x_1 := x$ e $x_2 := y$, portanto $w=\left(x^2y\right)^2(xy)^2$.

PALAVRA	ORDEM
$w = xxyxxyxyxy\dots$	1
$\sigma(w) = xyxxyxyxyx\dots$	4
$\sigma^2(w) = yxxyxyxyxx\dots$	8
$\sigma^3(w) = xxyxyxyxxy\dots$	2
$\sigma^4(w) = xyxyxyxxyx\dots$	6
$\sigma^5(w) = yxyxyxxyxx\dots$	10
$\sigma^6(w) = xyxyxxyxxy\dots$	5
$\sigma^7(w) = yxyxxyxxyx\dots$	9
$\sigma^8(w) = xyxxyxxyxy\dots$	3
$\sigma^9(w) = yxxyxxyxyx\dots$	7

Atendendo à tabela anterior, a órbita intersecta o segmento de ramificação em dez pontos P_i, $i=1,\dots 10$, unidos de acordo com o esquema,

$$P_1 \mapsto P_4 \mapsto P_8 \mapsto P_2 \mapsto P_6 \mapsto P_{10} \mapsto P_5 \mapsto P_9 \mapsto P_3 \mapsto P_7 \mapsto P_1$$

[7] Para sermos mais precisos, estamos a representar $w^\infty=\left(x_1^2x_2\right)^2(x_1x_2)^2\dots$ por w.

Obtemos deste modo a órbita representada na figura 2.23.

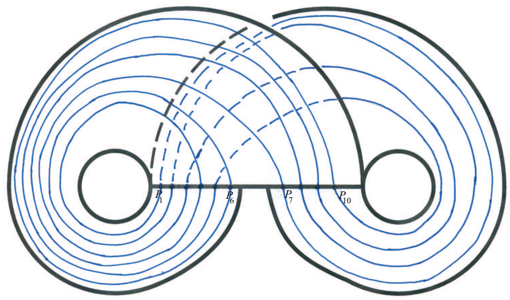


Figura 2.23: $\left(\left(x_1^2x_2\right)^2(x_1x_2)^2\right)^\infty$

Pelo teorema 2.2.4 existe uma infinidade de nós e elos de Lorenz, no entanto $E_{\mathscr{L}(0,0)}$ não contém alguns nós simples como o nó oito (vide Proposição 2.3.1), por exemplo.

A classe dos nós de Lorenz apresenta algumas particularidades, das quais destacamos, entre outras,

Teorema 2.3.1. *1. Todo o nó no toro é um nó de Lorenz;*

2. Todo o nó de Lorenz é um nó positivo (no sentido da definição 1.1.14);

3. Todo nó de Lorenz é um nó primo. □

Para uma demonstração do teorema 2.3.1 referimos [2] e [41].

Na demonstração da proposição 2.3.1 usamos o seguinte teorema de J. Buskirk:

Teorema 2.3.2 (Buskirk, [7])**.** *Seja K um nó positivo (no sentido da definição 1.1.14). Se $\nabla_K(z)$ tem grau $2m$ então,*

$$\nabla_K(z) = z^{2m} + a_{2m-2}z^{2m-2} + \cdots + a_4z^4 + a_2z^2 + 1$$

onde

$$\binom{m}{k} \leq a_{2(m-k)} \leq \binom{2m-k}{k}.$$

□

Proposição 2.3.1. *O nó oito 4_1 não é um nó de Lorenz.*

DEMONSTRAÇÃO O template $\mathscr{L}(0,0)$ é positivo (teorema 2.3.1, 2.). Deste modo, se 4_1 estiver contido em $\mathscr{L}(0,0)$ terá que ser um nó positivo pelo que, atendendo ao teorema de Buskirk, com $m=1$, o respectivo polinómio de Conway será um polinómio positivo[8], em contradição com o exemplo 1.1.1 onde se concluiu que $\nabla_{4_1}(z) = -z^2+1$. Portanto, 4_1 não é um nó positivo. □

[8] Um polinómio diz-se positivo se os seus coeficientes não nulos são positivos.

2.3.2 O *Template* da Ferradura de Smale

Philip Holmes *et al* (cf. [17, 19, 20, 21]) estudaram elos de órbitas periódicas em suspensões da ferradura de Smale, tendo considerado a equação de Duffing,

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos(\omega t) \tag{2.3.1}$$

A equação (2.3.1) pode ser reescrita como um sistema autónomo de ordem um,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y + \gamma\cos(\omega\theta) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

cujo espaço de fase é o toro sólido $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ (cf. [17]).

Sendo φ^t o fluxo de 2.3.2 definimos a aplicação de Poincaré $P : \Sigma \to \Sigma$, onde Σ é a secção de Poincaré $\Sigma = \{(x, y, \theta) \in \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 : \theta = 0\}$, como

$$P(x, y) = \pi_{(x,y)}\left(\varphi^T(x, y, 0)\right) \tag{2.3.3}$$

com $\pi_{(x,y)}$ projecção em $\mathbb{D}^2$.

Demonstra-se (cf. [17]) que para δ, γ suficientemente pequenos, existe uma iterada P^k da aplicação de Poincaré (2.3.3) conjugada com a aplicação *shift* em Σ_2, portanto (teorema 1.2.5) conjugada com a ferradura de Smale h do exemplo 1.2.4.

A suspensão de h origina um fluxo no toro sólido $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, como representado na figura 2.24. A relação de equivalência $\underset{\mathcal{T}}{\sim}$ definida em (2.2.2) conduz ao template $\mathcal{L}(0,1)$ representado na figura 2.24.

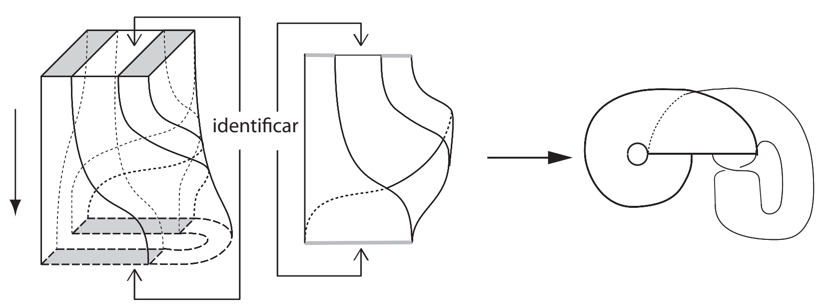


Figura 2.24: Suspensão da Ferradura de Smale (cf. exemplo 1.2.4)

Para um estudo dos tipos de nó contidos em $\mathcal{L}(0,1)$ e aplicações ao estudo da equação de Duffing (2.3.1), indicamos as referências [21, 19, 20].

2.3.3 *Templates* do Tipo de Lorenz

Os *templates* do tipo de Lorenz modelam equações diferenciais diferentes das consideradas nas secções 2.3.1 e 2.3.2. Um exemplo é o sistema (2.3.4):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= x - 2x^3 + \alpha y + \xi x^2 y + yz\\ \dot{z} &= -\gamma z + \delta x^2\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

estudado por C. Robinson. Em [28] Robinson demonstra que, para determinados valores dos parâmetros α, ξ, γ e δ, o sistema 2.3.4 possui um atractor semelhante ao atractor de Lorenz.

O atractor do sistema 2.3.4 pode ser modelado pelo *template* do tipo de Lorenz $\mathscr{L}(-1,-1)$, (cf. [35]).

No caso particular dos *templates* $\mathscr{L}(0,n)$, $n \geq 0$, enunciamos um resultado de Williams [41]:

Proposição 2.3.2. *Seja K um nó não trivial associado a uma órbita periódica em* $\mathscr{L}(0,n)$, $n \geq 0$. *Então K é um nó primo positivo (no sentido da definição 1.1.14), representado por uma trança positiva contendo pelo menos uma torção completa* Δ^2. □

Observação 2.3.1. Em [2] Birman e Williams consideram uma modificação do *template* de Lorenz. Esta modificação permite obter um *template* equivalente ao *template* $\mathscr{L}(0,0)$ e no qual se exibe a torção completa Δ^2, (cf. figura 2.25).

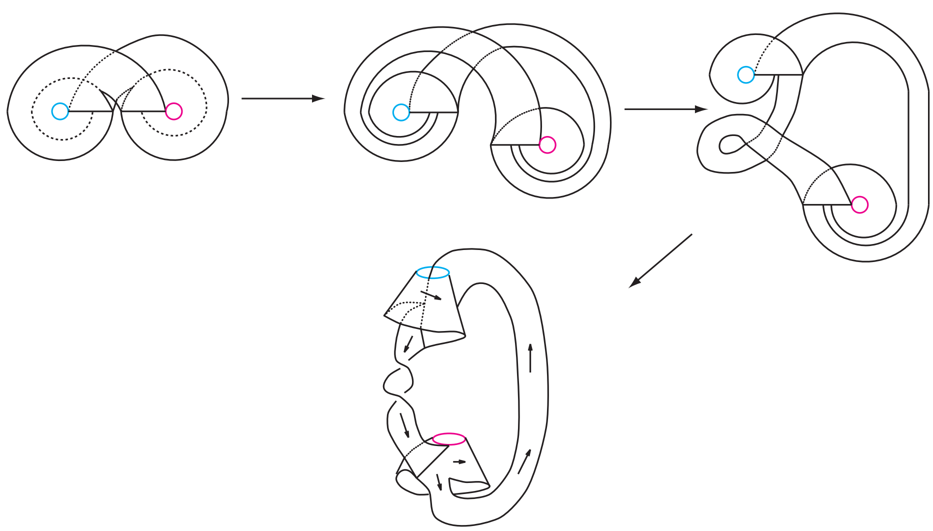


Figura 2.25: Cirurgia de Birman-Williams em $\mathscr{L}(0,0)$

Note-se que cada órbita deste *template* pode ser vista como o fecho de uma trança positiva. Assim, a figura 2.25 mostra-nos a forma como o nó K é representado por uma trança.

Definição 2.3.2. O *índice de trança* de uma trança β é o menor inteiro p tal que $\hat{\beta}$ é isotópico ao fecho de uma $p-$trança. (O inteiro p pode ser entendido como o menor número de fios necessários para representar um dado nó K como o fecho de uma trança).

Para determinadas tranças positivas J. Franks e R. Williams demonstraram:

Teorema 2.3.3 (Franks-Williams, [13])**.** *Seja β uma $N-$trança positiva que contém uma torção completa $\Delta_N^2 = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{N-1})^N$. Então N é o índice de trança de β.* □

A proposição 2.3.2 e o teorema de Bennequin (teorema 1.1.10) permitem concluir que,

Proposição 2.3.3. *Para cada $n>2$, com n par, o template $\mathscr{L}(0,n)$ não contém o nó trevo 3_1. Mais geralmente, o template $\mathscr{L}(0,n)$, com n par, não contém nós positivos de genus um se $n>2$.*

DEMONSTRAÇÃO Seja K um nó não trivial associado a uma órbita periódica em $\mathscr{L}(0,n)$. A proposição 2.3.2 garante a existência de uma $N-$trança positiva β tal que $\hat{\beta} \simeq K$. (Note-se que N é precisamente o número de fios que segue ao longo do braço x_2). Dado que todos os cruzamentos são positivos, resulta do teorema de Bennequin

$$2g(K) = c - N + 1,$$

onde N é o índice de trança (teorema 2.3.3).

Os N fios de $\hat{\beta}$ seguem ao longo do braço x_2 de $\mathscr{L}(0,n)$, o qual possui n meias torções. Cada torção de 180º no braço x_2 de $\mathscr{L}(0,n)$ produz $\frac{N(N-1)}{2}$ cruzamentos (note-se que uma torção completa $\Delta_N^2 = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{N-1})^N$ possui $N(N-1)$ cruzamentos), pelo que o número de cruzamentos de K não é inferior a

$$n \times \frac{N(N-1)}{2}.$$

Não esquecendo que pretendemos obter um nó e não um $k-$elo, $k>1$, considere-se o número mínimo de cruzamentos que é possível obter quando os dois braços de $\mathscr{L}(0,n)$ reentram no segmento de ramificação. Necessariamente, o fio de $\hat{\beta}$ mais à esquerda no braço x_2 reentra no sub-segmento de ramificação $\beta_1(\mathscr{L}(0,n))$ e, percorrendo o braço x_1, cruza sobre todos os N fios reentrando no ponto mais à direita de $\beta_2(\mathscr{L}(0,n))$. Caso contrário os fios mais à direita de $\hat{\beta}$ formam nós triviais, pelo que K seria pelo menos um $2-$elo e não um nó. Deste modo obtemos, no mínimo, N cruzamentos adicionais o que justifica que podemos minorar o número de cruzamentos:

$$c \geq n \times \frac{N(N-1)}{2} + (N-1).$$

Resulta da desigualdade anterior,

$$c - N + 1 \geq n \times \frac{N(N-1)}{2}$$

e então

$$g(K) \geq \frac{N(N-1)}{4} \times n \tag{2.3.5}$$

Para o nó $3_1 \simeq \widehat{\sigma_1^3}$ temos $g(3_1) = 1$ e $N = 2$. Atendendo à desigualdade (2.3.5),

$$1 \geq \frac{2(2-1)}{4} \times n$$

daqui se concluindo que $n \leq 2$. De um modo geral, se K é um nó positivo contido em $\mathscr{L}(0,n)$, $n \geq 0$, tal que $g(K) = 1$, a desigualdade 2.3.5 permite escrever estoutra

$$N^2 - N \leq \frac{4}{n}.$$

Sendo N o índice de trança temos necessariamente $N \geq 2$, logo

$$2 \leq N^2 - N \leq \frac{4}{n},$$

donde resulta $n \leq 2$. □

Exemplo 2.3.2. O *template* $\mathscr{L}(0,1)$ contém o nó 3_1.

Em [17] P. Holmes e R. Williams consideraram uma generalização do algoritmo de Birman e Williams (cf. Exemplo 2.3.1), para o caso dos *templates* $\mathscr{L}(0,n)$ com n ímpar, portanto templates não-orientáveis.

Para o efeito, dada uma palavra $w = w_1 w_1 \dots w_n$ definem a *coordenada invariante* da palavra w, $\theta(w) = \theta_1\theta_2\dots\theta_n$, onde $\theta_i = w_i$ se em $w_1 w_2 \dots w_{i-1}$, x_2 surge um número par de vezes, caso contrário $\theta_i = \hat{w}_i$, onde $\hat{x}_1 = x_2$ e $\hat{x}_2 = x_1$.

Para representar em $\mathscr{L}(0,1)$ a órbita dada simbolicamente pela palavra $w = x_1 x_2^3$, procedemos como no exemplo 2.3.1, agora ordenando as coordenadas invariantes de acordo com a ordem $x_1 \lhd x_2$. (A ordem $\lhd$ reflecte a ordem das órbitas no segmento de ramificação s). Considerando, por comodidade de escrita, $x_1 := x$ e $x_2 := y$, vem:

PALAVRA	COORDENADA INVARIANTE	ORDEM
$w = xyyy\dots\dots$	$\theta(w) = xyxy\dots$	1
$\sigma(w) = yyyx\dots$	$\theta(\sigma(w)) = yxyy\dots$	3
$\sigma^2(w) = yyxy\dots$	$\theta(\sigma^2(w)) = yxxy\dots$	2
$\sigma^3(w) = yxyy\dots$	$\theta(\sigma^3(w)) = yyxy\dots$	4

Atendendo à tabela anterior, a órbita intersecta o segmento de ramificação em quatro pontos P_i, $i = 1,\dots 4$, unidos de acordo com o esquema,

$$P_1 \mapsto P_3 \mapsto P_2 \mapsto P_4 \mapsto P_1$$

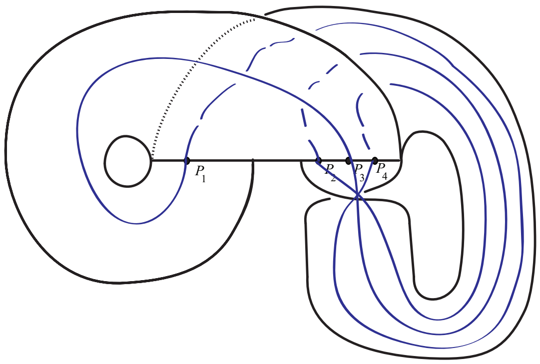


Figura 2.26: A órbita $\left(x_1 x_2^3\right)^\infty$

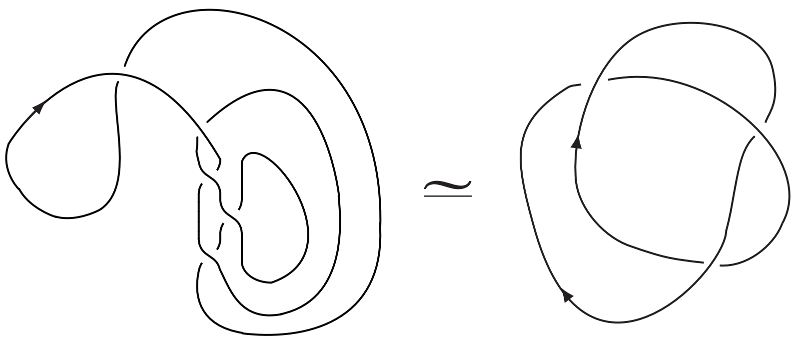


Figura 2.27: O nó $\left(x_1 x_2^3\right)^\infty$ é isotópico ao nó 3_1

Obtemos deste modo a órbita representada na figura 2.26, órbita esta que é isotópica ao nó 3_1 , (cf. figura 2.27).

Proposição 2.3.4. *Considerando* $\mathscr{L}(0,n)$, $n \in \mathbb{Z}$, *como conjuntos de nós, são válidas as relações,*

1. $\mathscr{L}(0,n) \subset \mathscr{L}(0,n-2)$

2. $\mathscr{L}(0,-2) \subset \mathscr{L}(0,-1)$

Temos então a cadeia de inclusões,

$$\begin{array}{c} \cdots \subset \mathscr{L}(0,2) \subset \mathscr{L}(0,0) \subset \mathscr{L}(0,-2) \subset \mathscr{L}(0,-4) \subset \cdots \\ \cap \\ \cdots \subset \mathscr{L}(0,3) \subset \mathscr{L}(0,1) \subset \mathscr{L}(0,-1) \subset \mathscr{L}(0,-3) \subset \cdots \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO A relação 1. generaliza o exemplo 2.2.3 (figura 2.17). A demonstração recorre à isotopia *belt trick* e consiste em justificar que cada uma das *template inflations* $\mathfrak{r}_1 : \mathscr{L}(0, n+2) \hookrightarrow \mathscr{L}(0, n)$ e $\mathfrak{r}_2 : \mathscr{L}(0, -2) \hookrightarrow \mathscr{L}(0, -1)$ dadas por

$$\mathfrak{r}_1 : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_1 x_2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{r}_2 : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_2 x_2 \end{cases}$$

é uma *template inflation* isotópica.

Nas figuras 2.28 e 2.29 ilustramos, respectivamente, as isotopias das *template inflations* $\mathfrak{r}_1$ e $\mathfrak{r}_2$. A cadeia de inclusões segue sem dificuldade das relações 1. e 2. $\square$

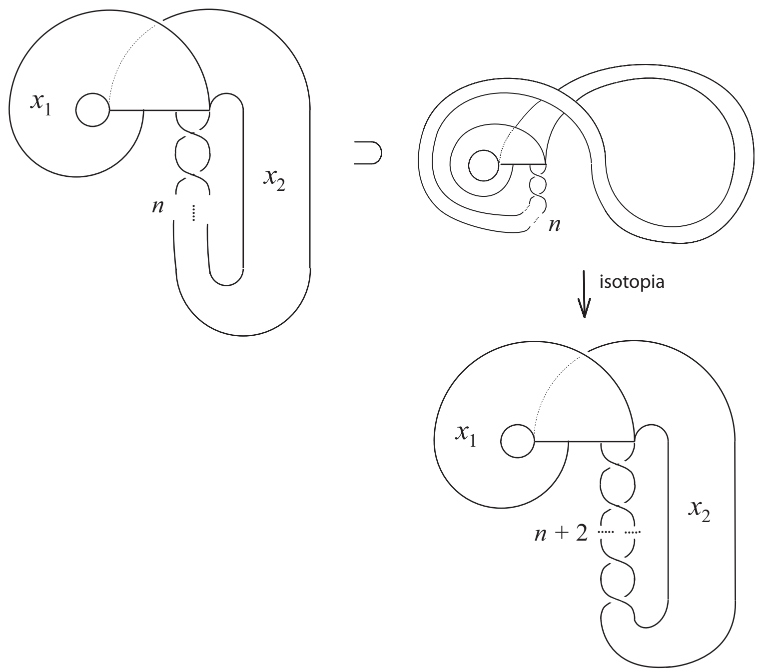


Figura 2.28: $\mathscr{L}(0, n+2) \hookrightarrow \mathscr{L}(0, n)$

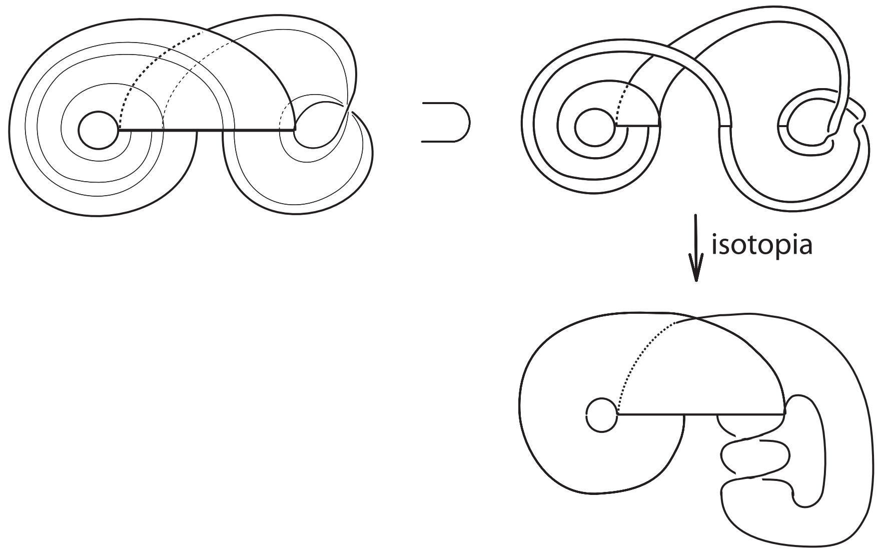


Figura 2.29: $\mathscr{L}(0,-2) \hookrightarrow \mathscr{L}(0,-1)$

Capítulo 3

Templates Universais

Das proposições 2.3.1 e 2.3.3 podemos concluir acerca da existência de *templates* onde não estão contidos todos os tipos de nó.

Em 1983 Birman e Williams ([3]) conjecturam que não existe um *template* que contém todos os tipos de nó como órbitas periódicas. No entanto, em 1997 Robert Ghrist ([14]) demonstra que o *template* $\mathscr{V}$ representado na figura 2.15 contém todos os tipos de nó e elo, mostrando ser falsa a conjectura inicial de Birman e Williams.

Neste capítulo apresentamos os aspectos fundamentais da teoria de Ghrist que se relacionam com a existência de *templates* contendo todos os tipos de nó e elo.

3.1 Existência de *templates* universais

Definição 3.1.1. Um *template* $\mathscr{T}$ mergulhado em $\mathbb{S}^3$ é *universal* se todo o $k-$elo, $k \geq 1$, $E \subset \mathbb{S}^3$ está representado entre as componentes do elo de órbitas periódicas $E_{\mathscr{T}}$.

Na demonstração da proposição 2.3.1 concluímos que o nó 4_1 não é um nó positivo, portanto se $\mathscr{T}$ é um *template* positivo $\mathscr{T}$ não pode ser um *template* universal. (Todos os exemplos de *templates* conhecidos para os quais é verdadeira a conjectura de Birman-Williams, são *templates* $\mathscr{T}$ que apresentam em comum o facto de $E_{\mathscr{T}}$ apenas admitir $k-$elos com o mesmo tipo de cruzamentos: ou todos positivos ou todos negativos).

Os templates $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ (figura 2.16) e as *template inflations* isotópicas (cf. figuras 3.1 e 3.2)

$$\mathfrak{f} : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{V} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{g} : \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{U}$$

dadas, respectivamente, por

$$\mathfrak{f}:\begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_1x_2x_3 \\ x_3 \mapsto x_4x_2 \\ x_4 \mapsto x_4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}:\begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto x_1 \\ x_3 \mapsto x_2x_4 \\ x_4 \mapsto x_2x_3x_4 \end{cases},$$

são fundamentais no trabalho de Ghrist ([14, 15]). Resulta de $\mathfrak{f}$ e $\mathfrak{g}$ serem *template inflations* isotópicas que $\mathscr{U}$ é um sub-*template* de $\mathscr{V}$ e vice-versa (cf. observação 2.2.8).

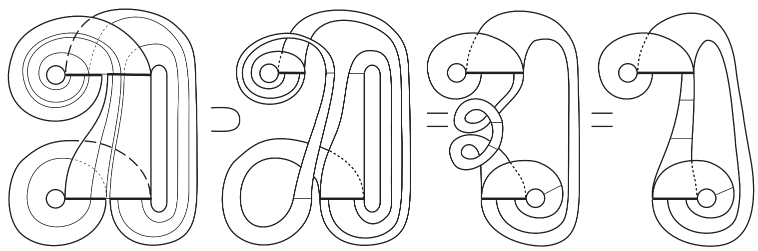


Figura 3.1: *Template inflation* isotópica $\mathfrak{f}$

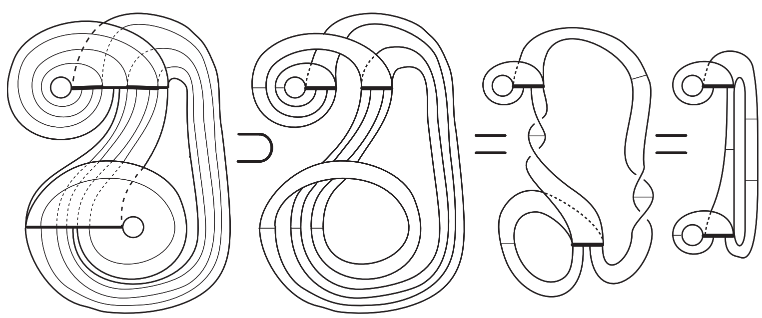


Figura 3.2: *Template inflation* isotópica $\mathfrak{g}$

Ghrist introduz ainda a *template inflation* χ definida em $\mathscr{U}$ ($\mathscr{V}$) e com imagem em $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$), definida por

$$\chi:\begin{cases} x_1 \mapsto x_3 \\ x_2 \mapsto x_4 \\ x_3 \mapsto x_1 \\ x_4 \mapsto x_2 \end{cases}.$$

A *template inflation* χ é uma involução ($\chi^2 = id$) que actua nos segmentos de ramificação s_1 e s_2 de $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$) permutando s_i com s_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, pelo que χ inverte os cruzamentos em $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$), (cf. figura 3.3 e 3.4).

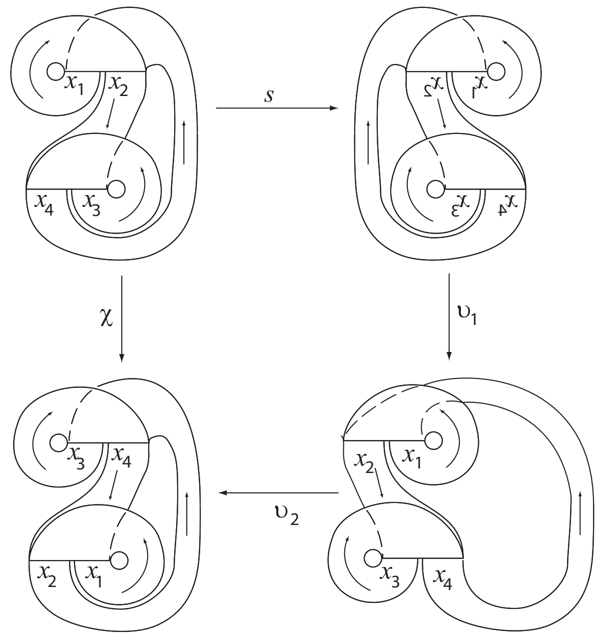


Figura 3.3: $i_{\mathscr{U}} \circ \chi = g \circ i_{\mathscr{U}}$, com $g = \phi \circ s$ e $\phi = \upsilon_2 \circ \upsilon_1$ isotópica à identidade

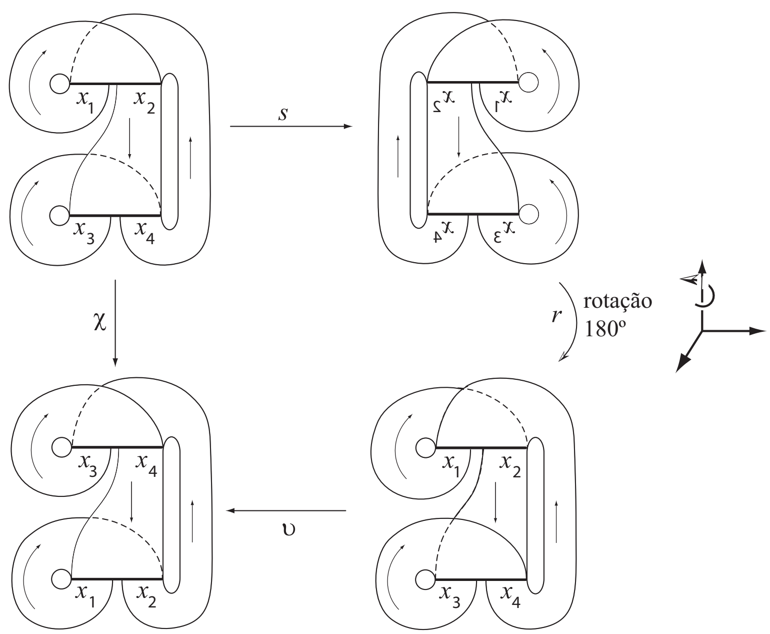


Figura 3.4: $i_{\mathscr{V}} \circ \chi = g' \circ i_{\mathscr{V}}$, com $g' = \phi' \circ s$ e $\phi' = \upsilon \circ r$ isotópica à identidade

Dada uma *template inflation* $\mathfrak{r}$ definida em $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{V}$ e com valores em $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{V}$, χ permite a construção da *template inflation* $\mathfrak{r}^* = \chi\mathfrak{r}\chi$, designada *template inflation conjugada.*

Lema 3.1.1. *Seja* $\mathfrak{r} : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}'$ *uma template inflation isotópica, onde* $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{T}'$ *representam qualquer um dos templates* $\mathcal{U}$ *ou* $\mathcal{V}$*. Então, a template inflation conjugada* $\mathfrak{r}^* : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}'$ *é isotópica.*

DEMONSTRAÇÃO Por hipótese, $\mathfrak{r} : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}'$ é uma *template inflation* isotópica pelo que existe um difeomorfismo $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ isotópico à identidade tal que $f \circ i_{\mathcal{T}} = i_{\mathcal{T}'} \circ \mathfrak{r}$. Atendendo às figuras 3.3 e 3.4, podemos concluir que existem difeomorfismos $g = \phi \circ s$ e $g' = \phi' \circ s$, com ϕ, ϕ' difeomorfismos isotópicos à identidade e s uma simetria, tais que $g \circ i_{\mathcal{T}} = i_{\mathcal{T}} \circ \chi$ e $g' \circ i_{\mathcal{T}'} = i_{\mathcal{T}'} \circ \chi$.

Suponhamos que $\mathcal{T} = \mathcal{V}$ e $\mathcal{T}' = \mathcal{U}$. Portanto $g' \circ g = (\phi' \circ s) \circ (\phi \circ s)$ é isotópico a $s \circ s = id$, ou seja, dadas duas isotopias: ϕ_t, entre id e ϕ, e ϕ'_t, entre id e ϕ', conclui-se então que $(\phi'_t \circ s) \circ (\phi_t \circ s)$ é uma isotopia entre id e $g' \circ g$. Analogamente se verifica que $g \circ g'$, $g \circ g$ e $g' \circ g'$ são isotópicos a $s \circ s = id$.

O argumento acima garante que o difeomorfismo $h = g' \circ f \circ g$ é isotópico a $g' \circ g$ logo isotópico à identidade. Este difeomorfismo satisfaz,

$$\begin{aligned} h \circ i_{\mathcal{T}} &= (g' \circ f \circ g) \circ i_{\mathcal{T}} \\ &= g' \circ f \circ i_{\mathcal{T}} \circ \chi \\ &= g' \circ i_{\mathcal{T}'} \circ \mathfrak{r} \circ \chi \\ &= i_{\mathcal{T}'} \circ (\underbrace{\chi \circ \mathfrak{r} \circ \chi}_{\mathfrak{r}^*}), \end{aligned}$$

o que demonstra que as *template inflations* $i_{\mathcal{T}}$ e $i_{\mathcal{T}'} \circ \mathfrak{r}^*$ são isotópicas, ou seja, $\mathfrak{r}^*$ é uma *template inflation* isotópica. Os restantes três casos demonstram-se do mesmo modo. □

Na figura 3.6 representa-se um elemento da família de *templates* $\{\mathcal{W}_q,\ q \in \mathbb{N}\}$, família que desempenha um papel chave na teoria de Ghrist.

O *template* $\mathcal{W}_1$ é idêntico ao *template* $\mathcal{V}$, e $\mathcal{W}_{q+1}$ obtém-se de $\mathcal{W}_q$ por concatenação circular de um "par de orelhas", constituído por:

- dois braços ímpares (conectam o segmento de ramificação consigo mesmo)
- dois braços pares (conectam distintos segmentos de ramificação)
- duas "orelhas", O^+ e O^- (cada uma formada por um braço par mais um braço ímpar)
- um segmento de ramificação de entrada e outro de saída (conectado com o segmento de ramificação de entrada do "par de orelhas" seguinte)

Deste modo $\mathcal{W}_q$ apresenta $4q$ braços e possui q "pares de orelhas" (O^+, O^-).

Temos então a sequência de inclusões

$$\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_q \subset \cdots$$

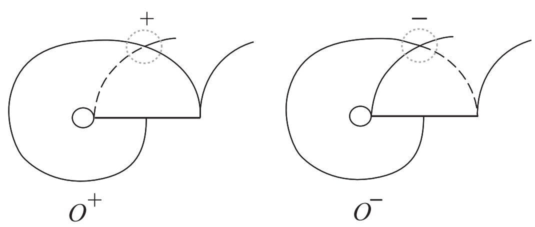


Figura 3.5: As "orelhas" O^+ e O^-

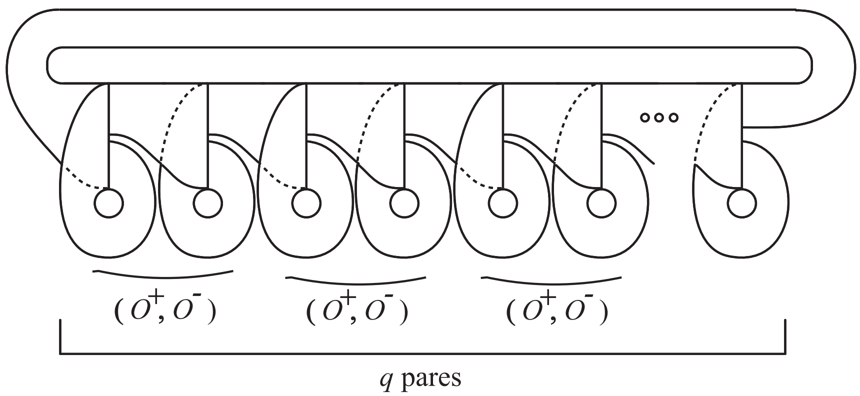


Figura 3.6: *Template* $\mathscr{W}_q$

Proposição 3.1.1. *Seja β uma $N-trança$. Então existe um $k-$elo, isotópico a $\hat{\beta}$, como conjunto de órbitas periódicas (como órbita periódica se $k=1$) em $\mathscr{W}_q$, para $q<\infty$ suficientemente grande.*

DEMONSTRAÇÃO A demonstração depende do facto de a sequência de $2q$ "orelhas" em $\mathscr{W}_q$ ir alternando de sinal. Tal situação permite-nos considerar em $\mathscr{W}_q$ tranças com cruzamentos positivos e negativos.

É possível construir em $\mathscr{W}_q$ os elementos de B_N

$$\tau_i=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_i \qquad \text{e} \qquad \tau_i'=\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_i^{-1}$$

com $i=1,\ldots N-1$. Na figura 3.7 representamos os elementos de B_5, τ_2 e τ_2'.

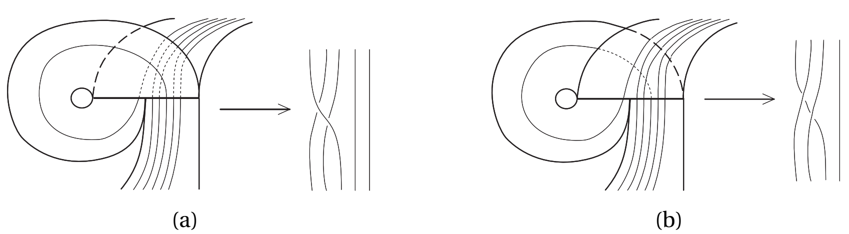


Figura 3.7: τ_2 e τ_2' em B_5: (a) $\tau_2=\sigma_1\sigma_2$; (b) $\tau_2'=\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$

Os elementos τ_i e τ'_i geram o grupo B_N. De facto, dado que qualquer $\beta \in B_N$ pode ser representada por uma palavra da forma

$$\beta = \sigma_{j_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{j_k}^{\varepsilon_k},$$

com $j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ e $\varepsilon_j = 0, 1, 2, \ldots, k$, basta verificar que qualquer $\sigma_i^{\pm 1}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, se pode escrever como um produto representado por uma palavra nas letras τ_i e τ'_i. A conclusão sai por indução em k, atendendo às igualdades em 3.1.1 (cf. figura 3.8):

$$\sigma_1 = \tau_1 \quad \text{e} \quad \sigma_1^{-1} = \tau'_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_1^{-1}\tau_2 = \tau'_1\tau_2 \quad \text{e} \quad \sigma_2^{-1} = \sigma_1\tau'_2 = \tau_1\tau'_2$$

$$\ldots$$

$$\sigma_{k+1} = \left(\sigma_k^{-1}\right)\cdots\left(\sigma_2^{-1}\right)\left(\sigma_1^{-1}\right)(\tau_{k+1}) \quad \text{e} \quad \sigma_{k+1}^{-1} = (\sigma_k)\cdots(\sigma_2)(\sigma_1)\left(\tau'_{k+1}\right) \tag{3.1.1}$$

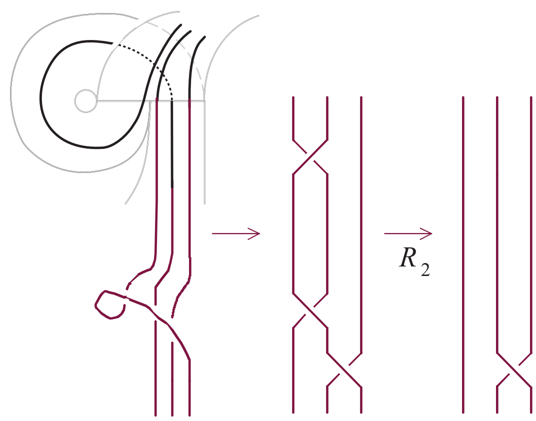


Figura 3.8: $\sigma_2 = \left(\sigma_1^{-1}\right)\sigma_1\sigma_2$

Queremos ver que para qualquer $N-$trança β existe q suficientemente grande tal que β é construída a partir do produto de uma sequência finita de geradores contidos em $\mathscr{W}_q$.

Para tal, represente-se β por uma palavra de comprimento q,

$$\beta = \tau_{j_1}^* \tau_{j_2}^* \cdots \tau_{j_q}^*,$$

onde para cada j, $\tau_j^* = \tau_j$ ou $\tau_j^* = \tau'_j$.

Em seguida, construa-se em $\mathscr{W}_q$ um elo E de curvas fechadas (que não têm de ser órbitas periódicas), formado por N fios que percorrem circularmente os N "pares de orelhas" seguindo a direcção do fluxo mas sem estarem condicionados a descrever as suas órbitas. Cada fio atravessa uma única vez cada braço par. No i-ésimo "par de orelhas" todos os N fios, excepto o mais à esquerda, seguem em frente evitando os braços ímpares. Por sua vez o fio que entra à esquerda no i-ésimo "par de orelhas" percorre um (e um só) dos seus braços ímpares, o da primeira "orelha" O^+ se $\tau^*_{j_i} = \tau_{j_i}$, ou o da segunda "orelha" O^- quando $\tau^*_{j_i} = \tau'_{j_i}$, retornando ao segmento de ramificação dessa "orelha" e continuando depois pelo braço par seguinte, na posição j_i a contar da esquerda.

Na construção do elo E, sempre que um fio percorre O^+ (resp. O^-) e retorna ao seu segmento de ramificação na posição k, seguindo ao longo do braço par sem cruzar os restantes $N-1$ fios, obtemos τ_k (resp. τ'_k), (cf. figuras 3.7 e 3.8). Portanto, a concatenação de orelhas corresponde ao produto

$$\tau^*_{j_1} \cdot \tau^*_{j_2} \ldots \cdot \tau^*_{j_q}$$

concluindo-se que o elo E é isotópico a $\hat{\beta}$.

Falta-nos verificar que $\hat{\beta} \in E_{\mathscr{W}_q}$.

Considerem-se os itinerários em $\Sigma_{\mathscr{W}_q}$ das componentes do elo E. Podemos supor, sem perda de generalidade, que toda a componente do elo E percorre um braço ímpar de alguma "orelha", pois não se verificando esta situação basta, atendendo às relações (3.1.1), modificar β numa trança equivalente β', contendo $\sigma_{N-1}\sigma^{-1}_{N-1}$:

$$\beta' = \sigma_{N-1}\sigma^{-1}_{N-1}\beta.$$

Assim, como cada componente do elo E algum braço ímpar de uma das "orelhas" O^+ ou O^-, e porque nenhum destes braços é atravessado por mais de um fio, os itinerários do elo E em $\Sigma_{\mathscr{W}_q}$ são todos distintos.

Para concluir, considere-se o elo E' de órbitas periódicas de $\mathscr{W}_q$ com os itinerários acima. Por definição da ordem $\lhd$, as componentes dos elos E e E' com o mesmo itinerário cruzam os segmentos de ramificação na mesma ordem, *i.e.*, se uma componente do elo E cruza um certo segmento de ramificação s na k-ésima posição (a contar da esquerda), então a componente do elo E' com o mesmo itinerário também cruza s na k-ésima posição. Resulta então que os elos E e E' são isotópicos, logo $\hat{\beta} \in E_{\mathscr{W}_q}$. □

Exemplo 3.1.1. O fecho de $\beta = \left(\sigma_1\sigma_2^{-1}\right)^2$ é equivalenta ao nó 4_1. As relações (3.1.1) permitem escrever

$$\beta = (\sigma_1)\,(-)\,(\sigma_1)\left(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\right)(\sigma_1)\,(-)\,(\sigma_1)\left(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\right)$$

onde $(-)$ representa uma "orelha"O^- que não é percorrida por qualquer fio de β. Daqui resulta que 4_1 está contido em $\mathscr{W}_4$, (cf. figura 3.9).

O processo de adição das "orelhas"O^+ e O^- a $\mathscr{W}_q$ para obter $\mathscr{W}_{q+1}$ é fundamental, e consiste numa modificação do conjunto de ramificação de sub-*templates* de $\mathscr{V}$ como se exemplifica na figura 3.10.

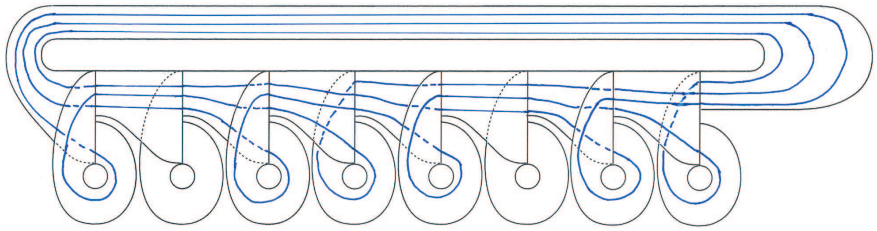


Figura 3.9: O nó 4_1 em $\mathscr{W}_4$

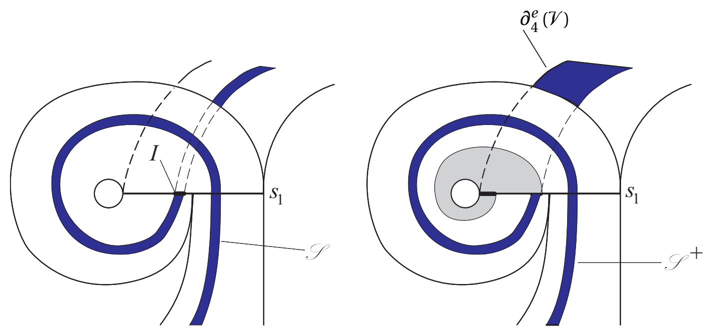


Figura 3.10: Adição de O^+ ao sub-*template* $\mathscr{S}$ ($\mathscr{S}$ não contém o bordo x_1^∞)

Proposição 3.1.2 ([14, 15])**.** *Seja $\mathscr{S}$ um sub-template de $\mathcal{V}$ que não contém a órbita x_1^∞ (resp. x_3^∞). Defina-se I como sendo a componente de $\mathscr{S} \cap \big(\beta_1(\mathcal{V}) \cup \beta_2(\mathcal{V})\big)$ (resp. $\mathscr{S} \cap \big(\beta_3(\mathcal{V}) \cup \beta_4(\mathcal{V})\big)$) que é minimal em relação à ordem $\lhd$ no segmento de ramificação s_1 (resp. s_2). Então, existe um template $\mathscr{S}^+$ (resp. $\mathscr{S}^-$), verificando $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}^+ \subset \mathcal{V}$ (resp. $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}^- \subset \mathcal{V}$), isotópico a $\mathscr{S} \cup O^+$ (resp. $\mathscr{S} \cup O^-$), sendo a "orelha"O^+ (resp. O^-) adicionada ao longo do novo sub-segmento de ramificação $\big[x_1^\infty, \partial^d(I)\big]$ (resp. $\big[x_3^\infty, \partial^d(I)\big]$). Mais, o sub-template $\mathscr{S}^+$ (resp. $\mathscr{S}^-$) contém a órbita $\partial_4^e(\mathcal{V})$ (resp. $\partial_2^e(\mathcal{V})$).*

DEMONSTRAÇÃO

1. Seja $I := \big[\partial^e(I), \partial^d(I)\big]$ a componente $\lhd$-minimal de $\mathscr{S} \cap \big(\beta_1(\mathcal{V}) \cup \beta_2(\mathcal{V})\big)$ e suponhamos que o sub-*template* $\mathscr{S}$ não contém a órbita x_1^∞. Então, o intervalo I não faz parte do conjunto de ramificação $\beta(\mathscr{S})$ (cf. Definição 2.2.5) pois, se esse fosse o caso, um dos braços de $\mathscr{S}$ que termina em s_1 estaria contido no braço x_1, o que contradiz a hipótese de I ser $\lhd$-minimal.

   Assim, uma vez que a intersecção de $\mathscr{S}$ com o conjunto dos pontos de $\beta(\mathscr{S})$ entre x_1^∞ e $\partial^e(I)$ é vazia, construímos um novo segmento de ramificação $\big[x_1^\infty, \partial^d(I)\big]$ adicionando uma "orelha"O^+, como representado na figura 3.10.

Obtemos então por modificação de $\beta(\mathscr{S})$ o conjunto de ramificação

$$\beta\left(\mathscr{S}^{+}\right) = \beta(\mathscr{S}) \cup \left[x_1^{\infty}, x_1\partial^{d}(I)\right] \cup I$$

de um sub-*template* $\mathscr{S}^{+}$.

Cada ponto no bordo de algum sub-segmento de ramificação em $\beta\left(\mathscr{S}^{+}\right)$ e contido numa órbita que termina em $\partial^{e}(I)$ é substituído por x_1^{∞}. Isto corresponde a um "alargamento"do braço que chega a s_1 ao longo do braço x_4 de $\mathcal{V}$ (figura 3.10), o que assegura que incluímos a órbita $\partial_4^{e}(\mathcal{V})$ em $\mathscr{S}^{+}$.

2. Para $\partial^{e}(I) \neq x_3^{\infty}$, onde I é a componente $\lhd$-minimal de $\mathscr{S} \cup \left(\beta_3(\mathcal{V}) \cup \beta_4(\mathcal{V})\right)$, consideramos a *template inflation* $\chi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, a qual transforma $\mathscr{S}$ num sub-*template* $\mathscr{S}^{*}$ de modo que $\chi\left(\beta_i(\mathcal{V})\right) = \beta_j(\mathcal{V})$, $i, j = 1, 3$, $i \neq j$ e $\chi\left(\beta_k(\mathcal{V})\right) = \beta_l(\mathcal{V})$, $k, l = 2, 4$, $k \neq l$. Assim, $\chi(I) \subset s_1$ satisfaz as condições em 1., pelo que podemos adicionar uma "orelha" O^{+} obtendo um sub-*template* $(\mathscr{S}^{*})^{+}$. Aplicando de novo χ, o sub-*template* $(\mathscr{S}^{*})^{+}$ é transformado num sub-*template* isotópico a $\mathscr{S}$ com uma "orelha" O^{-} adicionada ao longo de $\chi^2(I) = I \subset s_2$.

□

Para demonstrar que é possível adicionar pares $\left(O^{+}, O^{-}\right)$ ao *template* $\mathcal{V}$, Ghrist considera as renormalizações $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}^{*}\mathfrak{g}\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*} : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$ e $\mathfrak{h}^{*} = \mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*}\mathfrak{f}^{*}\mathfrak{g} : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$ definidas em $\Sigma_{\mathcal{V}}$ por,

$$\mathfrak{h} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2 x_3^2 x_4 x_1 \left(x_2 x_4\right)^2 x_2 x_3 x_4 x_1 \\ x_2 \mapsto x_2 x_3^2 x_4 x_1 \left(x_2 x_4\right)^3 x_2 x_3 x_4 x_1 \\ x_3 \mapsto x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 \\ x_4 \mapsto x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 \end{cases}, \tag{3.1.2}$$

e

$$\mathfrak{h}^{*} : \begin{cases} x_1 \mapsto x_4 x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_2 \\ x_2 \mapsto x_4 x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_2 \\ x_3 \mapsto x_4 x_1^2 x_2 x_3 \left(x_4 x_2\right)^2 x_4 x_1 x_2 x_3 \\ x_3 \mapsto x_4 x_1^2 x_2 x_3 \left(x_4 x_2\right)^3 x_4 x_1 x_2 x_3 \end{cases}. \tag{3.1.3}$$

Resulta de $\mathfrak{f}$ e $\mathfrak{g}$ serem *template inflations* isotópicas e do lema 3.1.1, que as renormalizações $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^{*}$ são isotópicas.

Proposição 3.1.3 ([14, 15])**.** *Consideremos as renormalizações isotópicas* $\mathfrak{h} : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$ *e* $\mathfrak{h}^{*}\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$*. Então,*

1. *de todos os pontos em* $\mathfrak{h}(\mathcal{V}) \cap s_1$ *o ponto minimal, em relação à ordem* $\lhd$*, está contido na órbita* $\mathfrak{h}\left(\partial_2^{e}(\mathcal{V})\right)$*;*

2. *de todos os pontos em* $\mathfrak{h}^{*}(\mathcal{V}) \cap s_2$ *o ponto minimal, em relação à ordem* $\lhd$*, está contido na órbita* $\mathfrak{h}^{*}\left(\partial_4^{e}(\mathcal{V})\right)$*).*

DEMONSTRAÇÃO

1. Para determinar o ponto $\lhd$-minimal em $\mathfrak{h}(\mathcal{V}) \cap s_1$, em primeiro lugar vamos explicitar $\mathfrak{h}(\partial(\mathcal{V}))$.

   O bordo $\partial(\mathcal{V})$ é dado por (cf. exemplo 2.2.2):

$$\mathfrak{h}: \begin{cases} \partial_1^e(\mathcal{V}) = x_1^\infty \\ \partial_1^d(\mathcal{V}) = x_1\,(x_2 x_4)^\infty \\ \partial_2^e(\mathcal{V}) = x_2 x_3^\infty \\ \partial_2^d(\mathcal{V}) = (x_2 x_4)^\infty \\ \partial_3^e(\mathcal{V}) = x_3^\infty \\ \partial_3^d(\mathcal{V}) = x_3\,(x_4 x_2)^\infty \\ \partial_4^e(\mathcal{V}) = x_4 x_1^\infty \\ \partial_4^d(\mathcal{V}) = (x_4 x_2)^\infty \end{cases}$$

   donde resulta para $\mathfrak{h}(\partial(\mathcal{V}))$:

$$\begin{aligned}
&\partial_1^e(\mathcal{V}) \xmapsto{h} \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^2\,x_2 x_3 x_4 x_1\right)^\infty \\
&\partial_1^d(\mathcal{V}) \xmapsto{h} x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^2\,x_2 x_3 x_4 x_1 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty \\
&\partial_2^e(\mathcal{V}) \xmapsto{h} x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty \\
&\partial_2^d(\mathcal{V}) \xmapsto{h} \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1 x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty \\
&\partial_3^e(\mathcal{V}) \xmapsto{h} \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty \\
&\partial_3^d(\mathcal{V}) \xmapsto{h} x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1\right)^\infty \\
&\partial_4^e(\mathcal{V}) \xmapsto{h} x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^2\,x_2 x_3 x_4 x_1\right)^\infty \\
&\partial_4^d(\mathcal{V}) \xmapsto{h} \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4 x_2 x_3^2 x_4 x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1\right)^\infty
\end{aligned}$$

   Resulta da expressão (3.1.2) que a imagem por $\mathfrak{h}$ de x_2 em $\partial_2^e(\mathcal{V})$ contém dois símbolos x_1. Considerem-se as duas palavras

$$\sigma^4\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] = x_1\,(x_2 x_4)^3\,x_2 x_3 x_4 x_1 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty \qquad \text{e}$$

$$\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] = x_1 \left(x_2 x_3^2 x_4 x_1 x_2 x_4\right)^\infty$$

   onde σ é o *shift*.

   Daqui se conclui que

$$\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] \lhd \sigma^4\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right].$$

Temos ainda, por exemplo,

$$\sigma^4\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right] = x_1\,(x_2x_4)^3\,x_2x_3x_4x_1x_2x_3^2x_4x_1x_2x_4x_2x_3^2x_4x_1\,(x_2x_4)^3\ldots$$

$$\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right] = x_1x_2x_3^2x_4x_1x_2x_4x_2x_3^2x_4x_1\,(x_2x_4)^3\ldots$$

$$\sigma^{19}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right] = x_1x_2x_4x_2x_3^2x_4\ldots$$

logo

$$\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] \lhd \sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right] \lhd \sigma^{19}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right] \lhd \sigma^{4}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] \lhd \sigma^{4}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^d(\mathcal{V})\right)\right].$$

Procedendo de modo análogo com os restantes pontos de $\mathfrak{h}\left(\partial_i^e(\mathcal{V})\right)$ e $\mathfrak{h}\left(\partial_i^d(\mathcal{V})\right)$, $i = 1,3,4$, conclui-se que $\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right]$ é $\lhd$-minimal no conjunto de todas as órbitas em $\mathfrak{h}(\mathcal{V}) \cap s_1$.

2. Aplicando a *template inflation* χ a $\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right]$ obtemos:

$$\chi\sigma^{14}\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] = \chi\left(x_1\left(x_2x_3^2x_4x_1x_2x_4\right)^\infty\right)$$

que é $\lhd$-minimal em $\chi(s_1)$.

Observando que χ comuta com o operador σ vem:

$$\sigma^{14}\chi\left[\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] = x_3\left(x_4x_1^2x_2x_3x_4x_2\right)^\infty$$

que é minimal em s_2.

Atendendo a que χ é uma involução, concluímos:

$$\sigma^{14}\chi\left[\mathfrak{h}\chi\left(\chi\partial_2^e(\mathcal{V})\right)\right] = \sigma^{14}\mathfrak{h}^*\left(\partial_4^e(\mathcal{V})\right) = x_3\left(x_4x_1^2x_2x_3x_4x_2\right)^\infty.$$

□

O próximo resultado é central na teoria de Ghrist:

Teorema 3.1.1 (Ghrist)**.** *O template $\mathcal{W}_q$ é um sub-template de $\mathcal{V}$ para todo $q > 0$.*

Apresentamos as ideias base na demonstração do teorema 3.1.1. Para uma demonstração mais detalhada referimos [14, 15].

DEMONSTRAÇÃO Na demonstração vamos considerar várias iteradas das renormalizações isotópicas $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^* : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$, pelo que para distinguir as diferentes cópias de $\mathcal{V}$ introduzimos uma sequência $\left\{\mathcal{V}^i : i = 1,2,\cdots\right\}$ de *templates*, onde cada $\mathcal{V}^i$ é isotópico a $\mathcal{V}$.

Tomando $\mathcal{W}_1 = \mathcal{V}^1$ aplicamos sucessivas vezes, e alternadamente, as renormalizações $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}^*$, construindo a sucessão de *templates*,

$$\mathcal{V}^1 \xrightarrow{\mathfrak{h}} \mathcal{V}^2 \xrightarrow{\mathfrak{h}^*} \mathcal{V}^3 \xrightarrow{\mathfrak{h}} \mathcal{V}^4 \xrightarrow{\mathfrak{h}^*} \cdots$$

Resulta da proposição 3.1.3 (1) que no conjunto $\lhd$-ordenado de todas as órbitas de $\mathfrak{h}(\mathcal{V}^1) \cap \beta_1(\mathcal{V}^2)$, $\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V})\right)$ é minimal. Assim, a proposição 3.1.2 torna possível a adição de uma "orelha"O^+, ao longo da componente $\lhd$-minimal de $\mathfrak{h}\left(\partial_2^e(\mathcal{V}^1)\right) \cap \beta_1(\mathcal{V}^2)$, dando origem a um sub-*template* $\mathcal{W}_1^+ \subset \mathcal{V}^2$ como representado na figura 3.11.

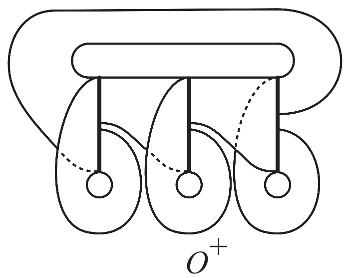


Figura 3.11: O template $\mathcal{W}_1^+$, obtido por adição de O^+ a $\mathcal{V}$

Considerando agora $\mathfrak{h}^* : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}^3$ e a proposição 3.1.3 (2), adicionamos uma "orelha"O^- ao sub-*template* $\mathfrak{h}^*\left(\mathcal{W}_1^+\right)$ ao longo de $\mathfrak{h}^*\left(\partial_4^e(\mathcal{V}^2)\right) \cap \beta_3\mathcal{V}^3$. Note-se que a "orelha"$O^-$ precede (atendendo ao sentido do fluxo) a "orelha"O^+ adicionada anteriormente ao *template* $\mathcal{W}_1$ pois, em $\mathcal{V}^2$, $\partial_4^e(\mathcal{V}^2)$ precede O^+. Obtemos deste modo um sub-*template* de $\mathcal{V}^3$ isotópico a $\mathcal{W}_2$ que contém a órbita $\partial_2^2(\mathcal{V}^3)$, (cf. figura 3.12).

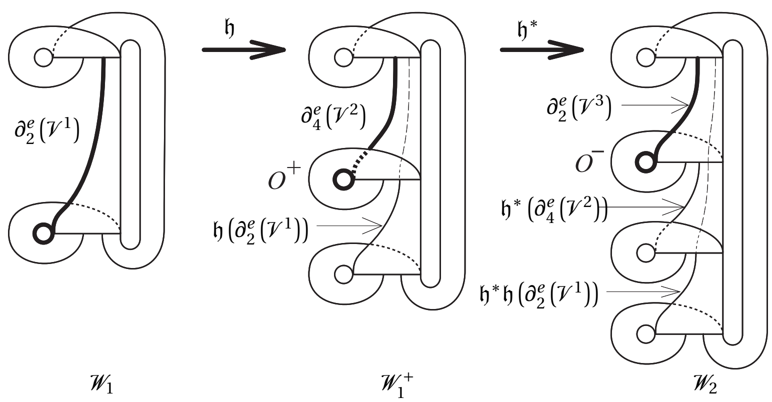


Figura 3.12: Construção de $\mathcal{W}_2$

Temos agora $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{V}^3$ e o sub-*template* $\mathcal{W}_2$ contém a órbita $\partial_2^e(\mathcal{V}^3)$. Dado que $\mathcal{V}^3$ é isotópico a $\mathcal{V}^1$, com $\partial_2^2(\mathcal{V}^3)$ correspondendo a $\partial_2^e(\mathcal{V}^1)$, é possível iterar o processo de adição de pares $\left(O^+, O^-\right)$ acima descrito:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{W}_1 \arrow[r, "\cup O^+"] \arrow[d, "\|"'] & \mathscr{W}_1^+ \arrow[r, "\cup O^-"] \arrow[d, "\subset"] & \mathscr{W}_2 \arrow[r, "\cup O^+"] \arrow[d, "\subset"] & \mathscr{W}_2^+ \arrow[r, "\cup O^-"] \arrow[d, "\subset"] & \cdots \\
\mathscr{V}^1 \arrow[r, "\mathfrak{h}"'] & \mathscr{V}^2 \arrow[r, "\mathfrak{h}^*"'] & \mathscr{V}^3 \arrow[r, "\mathfrak{h}"'] & \mathscr{V}^4 \arrow[r, "\mathfrak{h}^*"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots$ vão-se construindo sub-*templates* isotópicos a $\mathscr{W}_i$ e contidos no *template* $\mathscr{V}^{i+1}$, isotópico a $\mathscr{V}$. □

Teorema 3.1.2. *O template $\mathscr{U}$ e o template $\mathscr{V}$ são templates universais.*

DEMONSTRAÇÃO Pelo teorema de Alexander (teorema 1.1.8) todo o $k-$elo E pode ser representado pelo fecho de uma $n-$trança β.

Por outro lado, a proposição 3.1.1 assegura que $\hat{\beta}$ está contido em $\mathscr{W}_q$, para algum $q > 0$. Portanto, uma vez que pelo teorema 3.1.1 $\mathscr{W}_q \subset \mathscr{V}$, o *template* $\mathscr{V}$ contém todos os nós e todos os elos.

O *template* $\mathscr{U}$ é universal pois a *template inflation* $\mathfrak{g} : \mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{U}$ é isotópica, logo $\mathfrak{g}(\mathscr{V})$ é um sub-*template* de $\mathscr{U}$ isotópico ao template universal $\mathscr{V}$. □

O próximo resultado é da autoria de Michael Sullivan, [34]:

Proposição 3.1.4. *O template $\mathscr{U}$ é um sub-template do template $\mathscr{L}(0, -2)$.* □

Proposição 3.1.5. *Todos os templates $\mathscr{L}(0, n)$, com $n < 0$, são templates universais.*

DEMONSTRAÇÃO Pela proposição 3.1.4 o *template* $\mathscr{U}$ é um sub-*template* de $\mathscr{L}(0, -2)$. Da cadeia de inclusões na proposição 2.3.4 resulta,

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{U} \subset \mathscr{L}(0,-2) & \subset & \mathscr{L}(0,-4) \subset \cdots \\
& \cap & \\
\mathscr{L}(0,-1) & \subset & \mathscr{L}(0,-3) \subset \cdots
\end{array}$$

donde se conclui, atendendo ao teorema 3.1.2, o resultado. □

Observe-se a diferença entre $\mathscr{L}(0, 1)$ e $\mathscr{L}(0, -1)$: enquanto o *template* $\mathscr{L}(0, -1)$ é universal, o *template* $\mathscr{L}(0, 1)$ apenas contém nós primos (proposição 2.3.2).

Concluímos com uma conjectura de Ghrist *et al*, [15]:

Conjectura 1. Um *template* $\mathscr{T} \subset \mathbb{S}^3$ é universal se, e somente se, $\mathscr{V}$ é um sub-*template* de $\mathscr{T}$.

Bibliografia

[1] D. BENNEQUIN, Entrelacements et équations de Pfaff, *Astérisque*, 107–108, 87–161, 1983.

[2] J. BIRMAN, R. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems–I: Lorenz's equations, *Topology*, 22(1), 47–82, 1983.

[3] J. BIRMAN, R. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems–II: knotted holders for fibered knots, *Cont. Math.*, 20, 1–60, 1983.

[4] R. BOWEN, One-Dimensional Hyperbolic Sets for Flows, *J. Differential Equations*, 12, 173–179, 1972.

[5] R. BOWEN, *On Axiom A Diffeomorphisms*, Regional Conference Series in Mathematics 35, American Mathematical Society, 1978.

[6] G. BURDE, H. ZIESCHANG, *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[7] J. BUSKIRK, Positive knots have positive Conway polynomials. In *Knot Theory and Manifolds*, D. Rolfsen (ed.), 146–159, volume 1144 *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[8] D. CHILLINGWORTH, *Differential topology with a view to applications*, Pitman Publishing, London, 1976.

[9] J. CONWAY, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstrac Algebra*, J. Leech (ed.), 329–358, Pergamon Press, New York, 1970.

[10] R. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (2.ª Ed.) 1989.

[11] J. FRANKS, C. ROBINSON, A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov, *Trans. Am. Math. Soc.*, 223(1), 267–278, 1976.

[12] J. FRANKS, R. WILLIAMS, Entropy and knots, *Trans. Am. Math. Soc.*, 279(1), 241–253, 1985.

[13] J. FRANKS, R. WILLIAMS, Braids and the Jones polynomial, *Trans. Am. Math. Soc.*, 303(1), 97–108, 1987.

[14] R. GHRIST, Branched two-manifolds supporting all links, *Topology*, 36(2), 423–448, 1997.

[15] R. GHRIST, P. HOLMES, M. SULLIVAN, *Knots and Links in Three-Dimensional Flows*, volume 1654 *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[16] J. GUCKENHEIMER, A strange, strange attractor. In *The Hopf Bifurcation and its Applications*, J. Marsden e M. McCracken (eds.), 368–381, Springer-Verlag, New York, 1976.

[17] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[18] V. L. HANSEN, *Braids and Coverings: selected topics*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1989.

[19] P. HOLMES, Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: period multiplying and cabled knots, *Phys. D*, 21, 7–41, 1986.

[20] P. HOLMES, Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: extended families and bifurcation sequences, *Phys. D*, 40, 42–64, 1989.

[21] P. HOLMES, R. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: torus knots and bifurcation sequences, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90, 115–193, 1985.

[22] L. KAUFFMAN, *On Knots*, Princeton University Press, New Jersey, 1987.

[23] W. LICKORISH, *An Introduction to Knot Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[24] V. MANTUROV, *Knot Theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

[25] K. MURASUGI, *Knot Theory & Its Applications*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[26] M. NATIELLO, H. SOLARI, Remarks on Braid Theory and the characterization of periodic orbits, *J. Knot Theory and Ramifications*, 3(4), 511–529, 1994.

[27] R. PLYKIN, Sources and sinks for A-diffeomorphisms on surfaces, *Mathematics of the USSR, Sbornik*, 23, 233–253, 1974.

[28] C. ROBINSON, Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, *Nonlinearity*, 2, 495–518, 1989.

[29] C. ROBINSON, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, (2.ª Ed.) 1999.

[30] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, Publish or Perish, Houston, Texas, (2.ª Impressão) 1990.

[31] M. SCHARLEMANN, Topology of knots. In *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*, H. Moffatt, G. Zaslavsky, P. Comte e M. Tabor (eds.), 65–82, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[32] M. SHUB, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[33] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.*, 73, 747–817, 1967.

[34] M. SULLIVAN, The prime decomposition of knotted periodic orbits in dynamical systems, *J. of Knot Th. and Its Ramifications*, 3 (1), 83–120, 1994.

[35] M. SULLIVAN, Positive knots and Robinson's attractor, *J. of Knot Th. and Its Ramifications*, 7 (1), 115–121, 1998.

[36] W. TUCKER, The Lorenz attractor exists, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328, 1197–1202, 1999.

[37] P. VOGEL, Representation of links by braids: A new algorithm, *Comment. Math. Helvetici*, 65, 104–113, 1990.

[38] R. WILLIAMS, One-dimensional non-wandering sets, *Topology*, 6, 473–487, 1967.

[39] R. WILLIAMS, Expanding attractors, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 43, 169–203, 1974.

[40] R. WILLIAMS, The structure of Lorenz attractors, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 50, 73–99, 1979.

[41] R. WILLIAMS, Lorenz knots are prime, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 4, 147–163, 1983.