A PÉNZÜGYI ESZKÖZÖK ÁRAZÁSÁNAK ALAPTÉTELE, LOKÁLISAN KORLÁTOS SZEMIMARTINGÁL ÁRFOLYAMOK ESETÉN[1]

Budapesti Corvinus Egyetem

A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele – kissé pongyolán megfogalmazva – azt állítja, hogy egy értékpapírpiacon akkor nincs arbitrázs, ha létezik egy az eredetivel ekvivalens valószínűségi mérték, amelyre vonatkozóan az értékpapírok árait leíró folyamat egy bizonyos értelemben "martingál". Az első ilyen jellegű állítást M. Harrison és S. R. Pliska bizonyították arra esetre, amikor a valószínűségi mező végesen generált. Azóta a tételnek számos általánosítása született. Ezek közül az egyik legismertebb a Dalang–Morton–Willinger-tétel, ami már teljesen általános valószínűségi mezőből indul ki, de felteszi, hogy az időparaméter diszkrét, és az időhorizont véges. Időközben a tételnek számos folytonos időparaméterű folyamatokra vonatkozó változata is született. Az alaptételt általános esetben, vagyis amikor valószínűségi mező teljesen általános, és az értékpapírok piaci árait leíró folyamat lokálisan korlátos szemimartingál, Delbaen és W. Schachermayer bizonyították be. A Delbaen–Schachermayer-féle alaptétel a maga nemében egy igen általános állítás. A tétel bizonyítása igen hosszadalmas, és a funkcionálanalízis valamint a sztochasztikus folyamatok általános elméletének mély eredményeit használja. Utóbbi tudományterület nagy részét P. A. Meyer és a francia strassbourgi iskola matematikusai dolgozták ki a 60-as évek végétől kezdve. A terület megértését tehát alaposan megnehezíti, hogy a felhasznált matematikai apparátus viszonylag friss, egy része pedig csak francia nyelven érhető el. Meggyőződésünk szerint az eredeti, 1994-es Delbaen és Schachermayer-féle bizonyítás csak kevesek által hozzáférhető. A tételnek tudomásunk szerint azóta sem született tankönyvi feldolgozása, annak ellenére, hogy maga az állítás közgazdász körökben is széles körben ismerté vált, és az eredeti cikket számos szerző idézi. Az itt bemutatott bizonyítás Delbaen és Schachermayer 1992 és 2006 közötti írásain alapul.

1 Az alaptétel

A továbbiakban S legyen egy rögzített szemimartingál. Miként ismert, szemimartingálok szerint lehet integrálni. Valamely H folyamat S szerinti sztochasztikus integrálját, amennyiben az létezik, $H \bullet S$ módon, az integrálfolyamat értékét a t időpontban $(H \bullet S)_t$ módon fogjuk jelölni. $(H \bullet S)_\infty$ alatt értelemszerűen a $(H \bullet S)_t$ végtelenben vett határértékét értjük, feltéve, hogy az

[1] Beérkezett: 2008. december 6. E-mail: medvegyev@math.bke.hu.

létezik. Emlékeztetünk, hogy a $H \bullet S$ sztochasztikus integrál interpretálható, mint egy S árfolyammal rendelkező eszközbe való olyan befektetés nettó eredménye, amely befektetés nagyságát a H folyamat írja le. Miként ismert, a sztochasztikus integrálhatóság „minimál feltétele”, hogy az integrandus előrejelezhető legyen. Az alábbiakban ezt minden további említés nélkül automatikusan feltételezzük. A véges számú időpontból álló időhorizont és a végtelen számú időpontból álló időhorizont közötti eltérés egyik oka[2], hogy végtelen számú lehetséges időpont esetén általában lehet „duplázni”. Ez másképpen azt jelenti, hogy a végtelen sok időpont miatt általában lehet olyan stratégiát választani, amely eredményeként biztos nyereményhez juthatunk[3]. Ezt a végtelen számú megengedett időpontból származó nyilvánvaló arbitrázs lehetőséget a lehetséges portfóliók alulról való korlátosságával zárhatjuk ki:

1.1 Definíció. *Valamely S-integrálható H folyamatot u-megengedettnek nevezünk, ha minden $t \geq 0$-ra $(H \bullet S)_t \geq -u$. Valamely H folyamatot megengedettnek mondunk, ha létezik egy u valós szám, amelyre a H folyamat u-megengedett.*

Hangsúlyozni kell hogy az alulról való korlátosságból nem következik a felülről való korlátosság, így az alulról való korlátosság feltételezésének fontos következménye, hogy a lehetséges portfóliók nem feltétlenül alkotnak lineáris teret, csak konvex kúpot. Definiáljuk a K_0 konvex kúpot a következőképpen[4]:

$$\mathrm{K}_0 \overset{\circ}{=} \{(\mathrm{H} \bullet \mathrm{S})_\infty : \text{A } H \text{ megengedett folyamat, és a határérték létezik és véges}\} .$$

A későbbiek során be fogjuk látni, hogy amennyiben az alább ismertetett „arbitrázsmentesség” feltétele teljesül, akkor a $(H \bullet S)_\infty$ változó minden megengedett stratégia esetén értelmes és véges[5]. Ezt tudva

$$K_0 = \{(H \bullet S)_\infty : \text{A } H \text{ megengedett folyamat}\} .$$

Most, a tárgyalás kezdetén, azonban evvel a feltételezéssel még nem élhetünk. A véges időhorizton való arbitrázs elméletből ismert, hogy a lehetséges származtatott termékek halmazáról fel kell tenni, hogy az teljesíti a díjtalan lomtalanítás megkötését. Ez így van a folytonos időparaméter esetében is.

[2] Az alaptétel véges számú időpontból álló, illetve folytonos időhorizonton való igazolása nagyon különböző. A folytonos időhorizontra való igazolás, miként látni fogjuk, igen hosszadalmas és igen „technikás”. A két időhorizont tárgyalása közötti eltérés elsősorban abból adódik, hogy véges számú időpontból álló időhorizonton a sztochasztikus integrál egy közönséges véges összeg, folytonos időhorizonton azonban egy igen bonyolult, és nem túlzottan könnyen kezelhető matematikai konstrukció.

[3] A duplázási stratégia azt a közismert eljárást jelenti, hogy fej vagy írás játékot játszva veszteség esetén minden lépésben megduplázzuk a feltett összeget. Mivel egy valószínűséggel előbb vagy utóbb nyerünk, a nyeremény nettó összege egy valószínűséggel egy egység lesz. A példa lényege, hogy bizonyos esetekben egy játékot végtelenszer játszva és korlátlan erőforrásokra támaszkodva biztos nyereményhez lehet jutni. Mivel az alkalmazásokban erre valójában nincsen mód, ezt ki kell a modellből zárni.

[4] A nulla alsó index arra utal, hogy a K_0 halmaz az L^0 térben van. Az L^0 tér a valószínűségi változók tere a sztochasztikus konvergenciával, mint metrikával. Amennyiben valamely halmaznak nincsen alsó indexe, akkor a halmaz általában az L^∞ térben van.

[5] V.ö.: 3.1 állítás.

Jelöljük C_0-al a K_0-beli elemekkel dominálható függvények kúpját, azaz legyen $C_0 \overset{\circ}{=} K_0 - L^0_+$. Folytonos időparaméter esetén az ekvivalens mértéket megadó Radon–Nikodym deriváltról már a legegyszerűbb esetben is[6] csak annyi tudható, hogy eleme az L^1 térnek. Ez a folytonos és a véges számosságú időparaméter közötti eltérés egyik fontos eleme[7]. Mivel az ekvivalens mértékcserét biztosító Radon–Nikodym deriváltat ismét szeparációval akarjuk meghatározni, és a szeparáló hipersík normálisát az L^1 térben keressük, ezért a „primál teret", vagyis a „lehetséges" származtatott termékek halmazát le kell szűkíteni az L^∞ térre: $C \overset{\circ}{=} C_0 \cap L^\infty$. Jelöljük $\overline{C}$-sal a C kúp L^∞ normája szerinti lezártját. Ezekkel a jelölésekkel definiáljuk az „arbitrázsmentesség" fogalmát. A szakirodalomban az arbitrázsmentesség fogalmának jó néhány, egymással nem ekvivalens alakja használatos. Az alább megadott fogalmat az angol szakirodalom a „no free lunch with vanishing risk" elnevezéssel illeti. Ennek egy lehetséges magyar fordítása a következő: elhalványuló kockázat nélkül nincsen ingyen ebéd[8]. Természetesen az angol nyelvű irodalom ismeri az arbitrázsmentesség fogalmát is, ami alatt a $C_0 \cap L^0_+ = \{0\}$ reláció teljesülését szokás érteni. Ugyancsak ismert a nincsen ingyen ebéd megkötés fogalma is, amely annyiban különbözik az elhalványuló kockázat nélküli ingyen ebédtől, hogy a fenti lezárást az L^∞ tér gyenge* topológiájában és nem a norma szerinti topológiában kell venni. Hangsúlyozni kell, hogy a Delbaen–Schachermayer elmélet lényege éppen az, hogy a jóval kisebb, norma szerinti lezártat veszik a szerzők. Így a megkötés jóval enyhébb, ugyanis egy szűkebb halmaztól követelik meg, hogy csak a nullában metszheti az L^∞_+ térnegyedet[9]. Ugyanakkor az angol terminológia némiképpen nehézkes, ezért az alábbiakban egyszerűen nincsen arbitrázs feltételt fogunk mondani, de mindig az alábbi megkötésre fogunk gondolni:

1.2 Definíció (Arbitrázsmentesség). *Azt mondjuk, hogy az S szemimartingál eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének*[10]*, ha* $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$.

A dolgozatban a következő állítás igazolását fogjuk bemutatni:

[6] Vagyis a klasszikus Black–Scholes modellben is.

[7] Ugyanis véges számosságú lehetséges időpont esetén a szeparációval kapott derivált L^∞-be esett, így ott a duális tér volt az L^∞, következésképpen a „primális" tér volt az L^1 tér. Most azonban a „duális" tér, vagyis az a tér, ahol a szeparáló hipersíkok „normálisai" vannak, lesz az L^1 tér. Mivel az L^1 nem duálisa az L^∞ térnek, ezért az alábbiakban egy sor technikai nehézség fog fellépni.

[8] Vagy esetleg elhalványuló kockázat nélkül nincsen üzlet. Hogy miért halványul el a kockázat, az később ki fog derülni. V.ö.: 2.6 lemma.

[9] Az alaptétel érdemi része a martingálmérték létezését garantáló irány igazolása. Ennek megfelelően minél enyhébb feltételek között létezik a martingálmérték, annál erősebb a tétel. A Kreps–Yan tételből egyszerűen következik, hogy ha valamely lokálisan korlátos szemimartingálra „nincsen ingyenebéd" akkor a szemimartingálhoz létezik ekvivalens lokális martingál mérték. A fő nehézség, illetve ennek következtében az igazoláshoz szükséges matematikai bravúr tehát abban van, hogy egy igen enyhe kritérium teljesülése esetén akarjuk a lokális martingálmérték létezését indokolni.

[10] Mivel tárgyalásunkban az 1.2 definíciótól eltérő arbitrázsmentességi fogalmak nem játszanak szerepet, és a szóban forgó fogalomra tudomásunk szerint magyar terminológia nem létezik, ezért az egyszerűség kedvéért használjuk az arbitrázsmentesség fogalmát, nyomatékosan és ismételten megjegyezve, hogy az angol „no arbitrage" kifejezés alatt általában a $C_0 \cap L^0_+ = \{0\}$ feltételt szokás érteni.

1.3 Tétel (Pénzügyi eszközök árazásának alaptétele). *Legyen S egy korlátos valós értékű, valamely $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerinti szemimartingál. Pontosan akkor létezik a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amelyre nézve az S martingál, ha az S eleget tesz az arbitrázsmentesség imént megfogalmazott feltételének.*

Az elégségesség bizonyítása: Tegyük fel, hogy az S folyamat a $\mathbf{Q}$ ekvivalens valószínűségi mérték szerint lokális martingál. Legyen H egy tetszőleges, a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint megengedett integrandus. Ekkor a $H \bullet S$ integrál a $\mathbf{Q}$ szerint is létezik, és a két integrál megkülönböztethetetlen[11]. Érdemes hangsúlyozni, hogy az integrál a $\mathbf{Q}$ alatt is csak szemimartingál értelemben létezik, bár az S a $\mathbf{Q}$ alatt lokális martingál. Természetesen a H folyamat a $\mathbf{Q}$ szerint is megengedett. Az alább ismertetett Ansel–Stricker tétel[12] alapján a $H \bullet S$ az alulról való korlátosság miatt szupermartingál[13]. Ezért tetszőleges t-re $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left((H \bullet S)_t\right) \leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left((H \bullet S)_0\right) = 0$. A nemnegatív szupermartingálok[14] konvergencia tétele miatt a $(H \bullet S)_\infty$ érték létezik. Ugyancsak az alulról való korlátosság miatt alkalmazható a Fatou-lemma, ami alapján

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left((H \bullet S)_\infty\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\lim_t (H \bullet S)_t\right) \leq \liminf_t \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left((H \bullet S)_t\right) \leq 0\,.$$

Mivel ez minden megengedett H integrandusra igaz, ezért minden $f \in C_0$ esetén $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f) \leq 0$. Vagyis $C_0 \cap L^0_+ = \{0\}$. Meg kell még nézni, hogy mi történik a lezárással. Legyen most $g \in \overline{C} \cap L^\infty_+$. Ekkor létezik C-beli (g_n) sorozat, amelyre $g_n \xrightarrow{L^\infty} g$. Az L^∞ konvergenciából következik a várható értékek konvergenciája[15], így $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(g) \leq 0$. Ebből a $g \geq 0$ miatt majdnem mindenhol értelemben $g = 0$, vagyis $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$ a $\mathbf{Q}$ mérték esetén. Mivel a két mérték szerinti nullhalmazok megegyeznek, ezért az arbitrázsmentesség az eredeti $\mathbf{P}$ mérték szerint is teljesül. □

A nehézség az állítás megfordításának igazolásban rejlik. A technikai problémákat a következő állításban foglaljuk össze:

1.4 Tétel (Előre hozott állítás). *Ha az S egy korlátos szemimartingál, amely eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének, akkor a C kúp $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt része az L^∞ térnek.*

A szükségesség bizonyítása: Tegyük fel, hogy az S folyamat eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének. Ekkor még inkább a $C \cap L^\infty_+ = \{0\}$ is teljesül,

[11]Lásd: Medvegyev [2007a]: Proposition 4.59. A két mérték ekvivalens, így mind a két mérték szerint megkülönböztethetetlenek.

[12]V.ö.: 2.11 tétel. Az Ansel–Stricker tétel azt állítja, hogy az alulról való korlátosság miatt a sztochasztikus integrál lokális martingál. Erre azért kell hivatkozni, mert $H \bullet S$ integrál csak szemimartingál értelemben létezik, így nem lesz automatikusan lokális martingál.

[13]Medvegyev [2007*a*]: Proposition 1.141.

[14]Emlékeztetünk, hogy egy H stratégia definíció szerint akkor megengedett, ha a sztochasztikus integrál alulról korlátos.

[15]Ugyanis a mérték véges.

és $L_{-}^{\infty} \subseteq C$. Tegyük fel, hogy beláttuk[16] az előre hozott állítást. Ekkor a C definíciója miatt teljesülnek a már említett és alább pontosan idézett Kreps–Yan tétel feltételei. Így létezik egy a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, hogy minden $f \in C$ esetén $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f) \leq 0$. Legyenek $s < t$ tetszőleges időpontok. Mivel az S korlátos[17], ezért tetszőleges α valós számra és $B \in \mathcal{F}_s$ halmazra

$$\alpha \chi_B \chi((s,t)) \bullet S = \alpha (S_t - S_s) \chi_B \in C ,$$

vagyis $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\alpha (S_t - S_s) \chi_B) \leq 0$. Mivel ez minden α-ra teljesül, ezért

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}((S_t - S_s) \chi_B) = 0 . \tag{1}$$

Az S feltételezett korlátossága miatt integrálható. Ezért az (1) feltétel pontosan azt jelenti, hogy az S folyamat a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték szerint martingál. □

A bemutatott gondolatmenetből evidens, hogy a C kúp $\sigma(L^{\infty}, L^1)$ zártságának igazolása jelenti a fő problémát. A dolgozat hátralevő részét ennek igazolásának fogjuk szentelni. Az előző állítás egyszerű következménye a következő:

1.5 Következmény. *Legyen S egy lokálisan korlátos, valós értékű szemimartingál a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint. Pontosan akkor létezik a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amelyre nézve az S lokális martingál, ha az S eleget tesz az arbitrázsmentesség fenti feltételének.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $S(0) = 0$. Tegyük fel, hogy az S eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének. Mivel az S lokálisan korlátos, léteznek $a_n \geq 1$ valós számok és $\tau_n \nearrow \infty$ megállási idők, hogy $|S^{\tau_n}| < a_n$. A $\chi((\tau_k, \tau_{k+1}])$ folyamatok adaptáltak és balról folytonosak, így előrejelezhetőek. Legyen $\tau_0 \overset{\circ}{=} 0$. Az

$$Y_k \overset{\circ}{=} \chi((\tau_k, \tau_{k+1}]) \bullet S = S^{\tau_{k+1}} - S^{\tau_k}$$

kifejezés egy korlátos szemimartingál, ugyanis kisebb, mint $a_k + a_{k+1}$. Ha

$$c_k \overset{\circ}{=} \frac{2^{-k}}{a_k + a_{k+1}} ,$$

akkor az $\widetilde{S} \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k Y_k$ módon definiált folyamat korlátos, ugyanis $|\widetilde{S}| \leq 2$. Tetszőleges n-re az

$$\widetilde{S}^{\tau_n} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k Y_k$$

egy szemimartingál, vagyis az $\widetilde{S}$ megállításai mind szemimartingálok, így az $\widetilde{S}$ is egy szemimartingál. Megmutatjuk, hogy az $\widetilde{S}$-hoz tartozó C_0 kúp része

[16] Természetesen, miként látni fogjuk, éppen ez a bizonyítás érdemi része!

[17] Vegyük észre, hogy a korlátosságra szükség van, ugyanis a szeparációnál a ,,primál" tér az L^{∞}.

az S-hez tartozó C_0 kúpnak. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az $\widetilde{S}$-hoz tartozó $\widetilde{K}_0$ része a K_0-nak. Legyen H megengedett az $\widetilde{S}$-ra nézve, és tegyük fel, hogy a $(H \bullet \widetilde{S})_\infty$ létezik.

$$\begin{aligned}(H \bullet \widetilde{S})(\tau_n) &= (H \bullet \widetilde{S})_\infty^{\tau_n} = (H \bullet \widetilde{S}^{\tau_n})_\infty = \left(H \bullet \sum_{k=0}^{n-1} c_k Y_k\right)_\infty = \\ &= \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k H \chi\left([\tau_k, \tau_{k+1})\right)\right) \bullet S\right)(\tau_n) \ .\end{aligned}$$

Mivel ha egy folyamat minden lokalizáltja integrálható, akkor a folyamat integrálható, ezért könnyen belátható, hogy a $Z \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k H \chi\left([\tau_k, \tau_{k+1})\right)$ integrálható az S-re nézve. Az egyenlőségből az is következik, hogy a Z megengedett az S-re nézve. Ha $n \to \infty$, akkor a jobb oldalon álló kifejezésnek létezik határértéke. Mivel a $H \bullet \widetilde{S}$ alulról korlátos, ezért a $Z \bullet S$ is alulról korlátos, így a határérték eleme a K_0 halmaznak, vagyis $\widetilde{K}_0 \subseteq K_0$. Mivel a feltételek szerint az S eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének, ezért az $\widetilde{S}$ is eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének. Az előző tétel alapján létezik tehát a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, melyre nézve az $\widetilde{S}$ martingál. Ekkor az

$$\widetilde{S}^{\tau_1} = c_0 S^{\tau_1} \ ,$$

és ezért az S^{τ_1} is martingál, amiből következik, hogy az

$$\widetilde{S} - c_0 S^{\tau_1}$$

is martingál. A gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy az S lokális martingál.

A fordított irány bizonyítása a korlátos eset bizonyításával azonos. □

2 Néhány előzetes eredmény

Az alaptétel igazolása számos mély matematikai eredményre épül. Először ezeket tekintjük át.

2.1 Szeparációs tétel: a Kreps–Yan tétel

Miként jeleztük, a tétel bizonyítása a szeparációs tételre épül. Kiindulásképpen vezessünk be néhány jelölést: Legyen $1 \leq p \leq \infty$ és $1 \leq q \leq \infty$, ahol $1/p + 1/q = 1$, és legyen $E \overset{\circ}{=} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valamint $F \overset{\circ}{=} L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, és tekintsük (E, F)-en a szokásos kanonikus bilineáris leképezést, valamint jelölje E_+ az $\{f \in L^p \mid f \geq 0 \text{ m.m.}\}$ és E_- pedig az $\{f \in L^p \mid f \leq 0 \text{ m.m.}\}$ halmazt. Miként láttuk, az alaptétel bizonyítása a következő, korábban már idézett, bizonyítás nélkül közölt állításra épül:

2.1 Tétel (Kreps–Yan). *Legyen $C \subseteq E$ egy $\sigma(E, F)$-zárt konvex kúp, ami tartalmazza E_--t, és tegyük fel, hogy $C \cap E_+ = \{0\}$. Ekkor létezik $\mathcal{F}$-en egy az eredetivel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amelyre $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in F$, és amelyre teljesül, hogy minden $f \in C$ esetén $\mathbf{E_Q}(f) \leq 0$.*

A tétel bizonyítása megtalálható Delbaen és Schachermayer [2006] könyvében, illetve egy speciális esetének bizonyítása Medvegyev [2006] cikkében[18].

2.2 A kompaktsági lemma

Miként láttuk, az alaptétel bizonyítása lényegében egy kúp alkalmas topológiában való zártságának igazolását jelenti. A konvex analízist ismerő olvasó számára nem túl meglepő, hogy ehhez kompaktsági megfontolásokat fogunk használni. Igen gyakran fogunk hivatkozni a következő egyszerű észrevételre:

2.2 Lemma. *Ha (f_n) valószínűségi változók*[19] *egy alulról korlátos sorozata, akkor létezik $g_n \in \operatorname{conv}\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$ sorozat, hogy a (g_n) sorozat majdnem biztosan konvergál egy g függvényhez. A g függvény felveheti a $+\infty$ értéket is.*

Bizonyítás. Az alulról való korlátosság miatt feltehető, hogy minden n-re $f_n \geq 0$. Elegendő belátni, hogy van olyan (g_n), amely sztochasztikusan konvergál egy g-hez. (A majdnem mindenhol való konvergenciához elegendő egy részsorozatra áttérni.) Legyen

$$u(x) \overset{\circ}{=} 1 - \exp(-x) .$$

Az u szigorúan konkáv és korlátos. Legyen

$$s_n \overset{\circ}{=} \sup\left(\mathbf{E}(u(g)) \mid g \in \operatorname{conv}(f_n, f_{n+1}, \ldots)\right) ,$$

és legyen $g_n \in \operatorname{conv}(f_n, f_{n+1}, \ldots)$ olyan, hogy

$$\mathbf{E}(g_n) \geq s_n - \frac{1}{n} .$$

Az $\overline{I\!R}_+ \overset{\circ}{=} [0, \infty]$ halmaz a

$$d(x, y) \overset{\circ}{=} |\arctan x - \arctan y|$$

metrikával nyilvánvalóan teljes metrikus tér. Az (x_n) pontosan akkor Cauchy-sorozat az $\left(\overline{I\!R}_+, d\right)$ térben, ha minden $\alpha > 0$ számhoz létezik n_0, hogy minden $m, n \geq n_0$ esetén vagy

$$|x_n - x_m| \leq \alpha \quad \text{vagy} \quad \min(x_n, x_m) \geq \alpha^{-1} .$$

[18] Érdemes hangsúlyozni, hogy az általános eset bizonyítása szinte szó szerint azonos a cikkben közölt speciális eset indoklásával.

[19] Emlékeztetünk, hogy a valószínűségi változók definíció szerint nem vehetik fel a végtelen értéket.

Az u tulajdonságai alapján tetszőleges $\alpha > 0$ számhoz található olyan β, hogy

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y) + \beta\,,$$

valahányszor az (x,y) eleme a

$$V \overset{\circ}{=} \left\{(x,y) \mid |x-y| \geq \alpha \text{ és } \min(x,y) \leq \alpha^{-1}\right\}$$

halmaznak. (A $\min(x,y) \leq \alpha^{-1}$ feltétel miatt a V kompakt, és a folytonos

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}u(y) \geq 0$$

függvény felveszi a minimumát. Mivel az u szigorúan konkáv, ezért ha $x \neq y$, akkor a fenti egyenlőtlenség szigorú, így a minimum is pozitív. A β számnak vehetjük a minimum felét.) A sztochasztikus konvergencia igazolásához elegendő belátni, hogy a (g_n) Cauchy-sorozat a sztochasztikus konvergenciában, vagyis elegendő belátni, hogy tetszőleges $\alpha > 0$ esetén

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\left(|g_n - g_m| \geq \alpha,\, \min(x,y) \leq \alpha^{-1}\right) = 0\,.$$

Tetszőleges α és hozzá tartozó β esetén

$$\mathbf{E}\left(u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(u(g_n)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(u(g_m)\right) + \\ + \beta\mathbf{P}\left(|g_n - g_m| \geq \alpha,\, \min(x,y) \leq \alpha^{-1}\right)\,,$$

ugyanis triviálisan a β definíciója miatt

$$u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right) \geq \frac{1}{2}u(g_n) + \frac{1}{2}u(g_m) + \beta\chi_V(g_n, g_m)\,.$$

Definíció szerint, ha $n \leq m$, akkor

$$bfE\left(u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right) \leq s_n, \quad s_m \leq s_n\,.$$

Így a konstrukció szerint

$$\beta\mathbf{P}\left(|g_n - g_m| \geq \alpha,\, \min(x,y) \leq \alpha^{-1}\right) \leq \\ \leq \mathbf{E}\left(u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(u(g_n)\right) - \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(u(g_m)\right) \leq \\ \leq s_n - \frac{1}{2}\left(s_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(s_m - \frac{1}{m}\right) = \\ \leq \frac{1}{2}(s_n - s_m) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\,.$$

Az (s_n) alulról korlátos és csökkenő, így Cauchy-sorozat. Így ha $n, m \to \infty$, akkor, mivel $\beta > 0$,

$$\mathbf{P}\left(|g_n - g_m| \geq \alpha,\, \min(x, y) \leq \alpha^{-1}\right) \to 0\,.$$

□

Természetesen a g felvehet végtelen értéket is! A kompaktsági elv érdemi része ennek a kizárása:

2.3 Lemma. *Ha az előző lemmában a* $\operatorname{conv}((f_n))$ *korlátos az* L^0 *térben, akkor a* g *majdnem mindenhol véges.*

Bizonyítás. Ha $\operatorname{conv}((f_n))$ korlátos az L^0 térben, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan N, hogy $\mathbf{P}(|g_n| \geq N) \leq \varepsilon$. Mivel $g_n \stackrel{\text{m.m.}}{\longrightarrow} g$, a Fatou-lemma miatt

$$\mathbf{P}(|g| \geq N) \leq \varepsilon\,,$$

így majdnem mindenhol $g < \infty$. □

Mielőtt tovább mennénk, a lemma tartalmának jobb megvilágítása céljából érdemes megemlíteni a következő példát:

2.4 Példa. *Ha* $p \geq 1$ *és az* $(f_n) \subseteq L^p$ *egy korlátos sorozat, akkor létezik*

$$g_n \in \operatorname{conv}(f_n, f_{n+1}, \ldots)\,,$$

amely majdnem mindenhol konvergál egy $g \in L^p$ *függvényhez. Ha* $p > 1$, *akkor a konvergencia az* L^1 *térben is teljesül.*

Az L^p korlátosságból a Csebisev-egyenlőtlenség miatt következik az L^0 korlátosság, így a g határérték létezik. Egyedül azt kell megmutatni, hogy a határérték is eleme az L^p térnek. Tegyük fel, hogy minden n-re $\|f_n\|_p \leq k$. Nyilván a $\|g_n\|_p \leq k$ is teljesül. A Fatou-lemma miatt

$$\mathbf{E}(|g|^p) = \mathbf{E}\left(\lim_n |g|_n^p\right) \leq \liminf_n \mathbf{E}(|g_n|^p) \leq k^p\,.$$

Az állítás második része következik abból, hogy ha $p > 1$, akkor a korlátos sorozatok egyenletesen integrálhatóak. □

Miként a kompaktsági lemma használata során gondot jelenthet, hogy a (g_n) bizonyos pontokban végtelenhez tarthat, ugyancsak gondot jelenthet az is, hogy a „pozitív" pontok határértéke esetleg nulla lesz. Ezt zárja ki a következő észrevétel:

2.5 Lemma. *Ha a lemmában* $f_n \geq 0$, *és létezik* $\alpha > 0$ *és* $\delta > 0$, *hogy minden* n*-re* $\mathbf{P}(f_n > \alpha) > \delta$, *akkor van olyan* γ, *amely csak a* δ *és az* α *számoktól függ, hogy*

$$\mathbf{P}(g > \gamma) > 0\,,$$

pontosabban

$$\mathbf{P}\left(g > \delta(1 - e^{-\alpha})\right) > 0\,.$$

Bizonyítás. $\mathbf{P}(f_n > \alpha) > \delta$ minden n-re, ezért az u monoton növekedő volta és az $f_n \geq 0$ miatt $\mathbf{E}(u(f_n)) \geq \delta u(\alpha)$. Mivel a g_n az f_n függvények konvex kombinációja, ezért az u konkavitása miatt

$$\mathbf{E}(u(g_n)) = \mathbf{E}\left(u\left(\sum_i \lambda_i f_i\right)\right) \geq \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(u(f_i)) \geq \sum_i \lambda_i \delta u(\alpha) = \delta u(\alpha) .$$

A majorált konvergencia tétel miatt $\mathbf{E}(u(g)) \geq \delta u(\alpha) = \delta(1 - e^{-\alpha})$. Mivel ha $x > 0$, akkor $u(x) < x$, ezért ha az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor

$$\mathbf{E}(u(g)) \leq u\left(\delta\left(1 - e^{-\alpha}\right)\right) < \delta\left(1 - e^{-\alpha}\right)$$

lenne, ami lehetetlen. □

A kompaktsági megfontolások számtalan alkalmazása közül példaként tekintsük a következőt: Tegyük fel, hogy már beláttuk, hogy az arbitrázsmentesség teljesülése esetén a megengedett folyamatok integráljának létezik a végtelenben vett határértéke[20]. A következő lemma valójában azt magyarázza, hogy miért „halványul el" a kockázat.

2.6 Lemma. *Egy S szemimartingál pontosan akkor elégíti ki az arbitrázsmentesség feltételét, ha minden K_0-beli (g_k) sorozatra a $\lim_{k\to\infty} \left\|g_k^-\right\|_\infty = 0$ feltételből következik, hogy*

$$g_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 .$$

Bizonyítás. Legyen (g_k) egy K_0-beli sorozat, amelyre $\lim_{k\to\infty} \left\|g_k^-\right\|_\infty = 0$. Tegyük fel, hogy az állításunkkal ellentétben a $g_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ nem teljesül. Ekkor létezik $\delta > 0$ és $1 > \alpha > 0$, valamint egy (g_{k_n}) részsorozat, hogy minden n-re $\mathbf{P}(g_{k_n} > \alpha) > \delta$. A díjtalan lomtalanítás feltétele miatt az $f_n \overset{\circ}{=} \min\{g_{k_n}, 1\}$ függvények C-ben vannak, és $\mathbf{P}(f_n > \alpha) > \delta$. Mivel az (f_n) sorozat nyilván alulról korlátos, ezért a kompaktsági lemma alapján létezik egy (l_n) sorozat, ahol $l_n \in \operatorname{conv}\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$, amely majdnem biztosan konvergál egy l függvényhez. A $\lim_{n\to\infty} \|f_n^-\|_\infty = 0$ feltétel miatt a sorozat alsó korlátjának választható tetszőleges $1/m$ konstans, így

$$\mathbf{P}\left(l > \frac{\delta(1 - e^{-\alpha})}{2} - \frac{1}{m}\right) > 0 .$$

Mivel ez minden m-re igaz, ezért a $\mathbf{P}(l > 0) > 0$ is igaz, valamint abból, hogy az l minden m-re $\left[-\frac{1}{m}, \infty\right]$-beli értékeket vesz fel, következik, hogy $l \geq 0$. Legyen $\beta \overset{\circ}{=} \mathbf{P}(l > 0)$. Ekkor Jegorov tétele miatt[21] $l_n \to l$ egy legalább $1 - \frac{\beta}{2}$ valószínűségű Ω' halmazon egyenletesen. A díjtalan lomtalanítás feltétele miatt a $h_n \overset{\circ}{=} \min\{l_n, \chi_{\Omega'}\}$ függvények C-ben vannak, és $h_n \to l\chi_{\Omega'}$ az L^∞ normája szerint, vagyis $l\chi_{\Omega'} \in \overline{C}$. Ez pedig a $\mathbf{P}(l\chi_{\Omega'} > 0) \geq \frac{\beta}{2} > 0$ miatt ellentmondásban áll az arbitrázsmentesség feltevésével. Megfordítva, tegyük

[20] V.ö.: 3.1 állítás.

[21] Medvegyev [2002]: 3.3 Állítás.

fel, hogy a feltétel teljesül. Legyen $f_n \overset{\circ}{=} g_n - l_n \in C$ és az L^∞ térben $f_n \to f \geq 0$. Ekkor a $g_n^- \leq (g_n - l_n)^- \to 0$, így $g_n \to 0$ sztochasztikusan. De nyilván $f_n = g_n - l_n \leq g_n$, tehát $f = 0$, így az arbitrázsmentesség feltétele teljesül. □

A lemma alapján az arbitrázsmentesség közgazdasági interpretációja teljesen evidens. Az arbitrázsmentesség feltétele pontosan azt jelenti, hogy ha a kockázat egyenletesen nullához tart[22], akkor annak a valószínűsége, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál többet tudunk keresni, nullához tart.

2.3 Az L^0 korlátos és zárt részhalmazainak van maximális eleme

2.7 Lemma. *Ha az alaptér mértéke véges, akkor L^0 minden korlátos és zárt részhalmaza tartalmaz maximális elemet.*

A lemma elemi következménye a következő lemmának[23]:

2.8 Lemma. *Legyen X egy teljes metrikus tér, és legyen $\preceq$ egy folytonos, reflexív és tranzitív parciális rendezés az X téren. Ha minden az $\preceq$ szerint monoton növekedő (x_k) sorozatra $d(x_k, x_{k+1}) \to 0$, akkor az $(X, \preceq)$ rendezett térben van maximális elem.*

Az első lemma bizonyítása. Az L^0 tér teljes metrikus tér, így ha K zárt, akkor a K is teljes metrikus tér. Ha $\xi_n \leq \eta_n$ és $\xi_n \to \xi$ és $\eta_n \to \eta$ a K térben, vagyis sztochasztikusan, akkor van olyan részsorozatuk, ahol a konvergencia majdnem mindenhol teljesül, így nyilván $\xi \leq \eta$, vagyis a rendezés folytonos. Meg kell mutatni, hogy ha $\xi_n \leq \xi_{n+1}$, akkor $d(\xi_n, \xi_{n+1}) \to 0$. Mivel a $(\xi_n(\omega))$ sorozatok monoton nőnek, ezért alkalmas ξ-re a $\xi_n \nearrow \xi$ kimenetelenként. Mivel a feltételek szerint a mértéktér véges, ezért a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így $\xi_n \to \xi$ az L^0 tér konvergenciájában, feltéve ha $\xi \in L^0$, vagyis ha a ξ majdnem mindenhol véges. Tegyük fel, hogy $\varepsilon \overset{\circ}{=} \mu(\xi = \infty) > 0$. A K feltételezett korlátossága miatt van olyan N, hogy minden n-re

$$\mu\left(|\xi_n| \geq \frac{N}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

A Fatou-lemma miatt

$$\varepsilon \quad \leq \quad \mu(|\xi| \geq N) = \mu\left(\lim_n |\xi_n| \geq N\right) =$$

[22] Ezért „halványodik” el a kockázat.

[23] Az állítás a Zorn-lemma segítségével könnyen igazolható: Ha (f_α) egy lánc, vagyis egy lineárisan rendezett részhalmaz, akkor az (f_α) halmaznak az alaptér végessége miatt létezik lényeges szuprémuma. A lényeges szuprémum egy felső korlát, amely a halmaz korlátossága miatt majdnem mindenhol véges, és a zártság miatt eleme a halmaznak. Így a Zorn-lemma miatt van maximális elem. Az alábbi gondolatmenet lényege, hogy nem kell hivatkozni a Zorn-lemmára, amelyet éppen a lemma helyettesít.

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \chi_{\{|x|\geq N\}}\left(\lim_n |\xi_n|\right) d\mu \leq \int_X \lim_n \chi_{\{|x|\geq N/2\}}\left(|\xi_n|\right) d\mu \leq \\
&\leq \liminf_n \int_X \chi_{\{|x|\geq N/2\}}\left(|\xi_n|\right) d\mu = \liminf_n \mu\left(|\xi_n| \geq \frac{N}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

ami lehetetlen. □

A második lemma bizonyítása. Definiáljuk a

$$\Phi(x) \overset{\circ}{=} \{y \mid y \succeq x\}$$

halmazértékű leképezést. A Φ következő tulajdonságai triviálisan teljesülnek:

1. $\Phi(x)$ minden x-re zárt, ugyanis a rendezés folytonos,
2. $x \in \Phi(x)$, ugyanis a rendezés reflexív,
3. $x_2 \in \Phi(x_1)$ implikálja a $\Phi(x_2) \subseteq \Phi(x_1)$ tartalmazást, ugyanis a rendezés tranzitív,
4. ha $x_{k+1} \in \Phi(x_k)$, akkor $d(x_k, x_{k+1}) \to 0$.

A maximális elem létezéséhez elég megmutatni, hogy van olyan $\overline{x}$ pont, hogy $\Phi(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Nyilván a d metrika helyett vehetjük a $d/(1+d)$ metrikát is, így feltehető, hogy a d metrika korlátos. Valamely A halmaz esetén jelölje $\delta(A)$ az A átmérőjét. A metrika feltételezett korlátossága miatt $\delta(A) < \infty$. A 2. miatt a $\Phi(x)$ soha sem üres, így egy tetszőleges x_0-ból kiindulva megkonstruálhatjuk az

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &\in \Phi(x_k) \\
d(x_{k+1}, x_k) &\geq \delta(\Phi(x_k))/2 - 1/2^{k-1}
\end{aligned}
$$

iterációt. A 3. miatt $\Phi(x_{k+1}) \subseteq \Phi(x_k)$ és a 4. miatt $\delta(\Phi(x_k)) \to 0$. Az X feltételezett teljessége miatt az $(\Phi(x_k))$ halmazok egyetlen $\overline{x}$ pontra húzódnak össze. Nyilván $\overline{x} \in \Phi(x_n)$ és ezért

$$\Phi(\overline{x}) \subseteq \cap_n \Phi(x_n) = \{\overline{x}\},$$

amiből a lemma már triviális. □

2.4 Gyenge* topológia és a sztochasztikus konvergencia

Az alábbiakban tekintsük a (L^1, L^∞) duális párt a $\langle \xi, \eta \rangle \overset{\circ}{=} \mathbf{E}(\xi\eta)$ kanonikus dualitással, és a továbbiakban jelöljük B_∞-nel az L^∞ tér zárt egységgömbjét. Először emlékeztetünk a következő nevezetes tételre[24]:

2.9 Tétel (Krein–Šmulian). *Legyen E egy Banach-tér, és jelöljük E'-vel az E duálisát, valamint B'-vel a duális tér egységgömbjét. Ekkor egy $C \subseteq E'$ konvex halmaz pontosan akkor $\sigma(E', E)$-zárt, ha minden λ pozitív számra a $\lambda B' \cap C$ halmaz $\sigma(E', E)$-zárt.*

[24] Dunford–Schwartz [1958], 429 oldal.

A tétel egyszerű következménye, hogy egy E'-beli C konvex kúp pontosan akkor $\sigma(E', E)$-zárt, ha a $B' \cap C$ halmaz $\sigma(E', E)$-zárt. A $\sigma(L^\infty, L^1)$ gyenge* zártság egy nehezen ellenőrizhető feltétel. Ezért rendkívül fontos a következő:

2.10 Állítás. *Az $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tér C konvex kúpja pontosan akkor $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt, ha a $C \cap B_\infty$ metszet zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve.*

Bizonyítás. A Krein–Šmulian-tétel kúpokra kimondott fenti alakja alapján elég annyit bizonyítani, hogy $C \cap B_\infty$ pontosan akkor $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt, ha a $C \cap B_\infty$ zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve.

1. Lássuk be hogy ha a $C \cap B_\infty$ halmaz $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt, akkor a $C \cap B_\infty$ zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve. Tegyük fel, hogy az (f_n) sorozat, ahol $f_n \in C \cap B_\infty$, sztochasztikusan konvergál egy $f_0 \in L^\infty$-hez. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $f_n \longrightarrow f_0$ m.m., amiből a domináns konvergencia tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(f_n g) = \mathbf{E}(f_0 g) \ ,$$

vagyis minden $g \in L^1$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}((f_n - f_0) g) = 0 \ .$$

Emlékeztetünk, hogy a $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológia azonos az L^1 véges részhalmazainak $\mathcal{S}$ halmazából származó dualitás által meghatározott L^∞ feletti topológiával, melynek 0 körüli környezetbázisát az

$$U(S, \varepsilon) \overset{\circ}{=} \{x \in L^\infty \mid \forall y \in S : |\mathbf{E}(xy)| \le \varepsilon\}$$

alakú halmazok alkotják, ahol (S, ε) befutja az $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+$ halmazt. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}((f_n - f_0) g) = 0$$

minden $g \in L^1$-re, ezért ha $S \overset{\circ}{=} \{g\}$ valamely $g \in L^1$-re, akkor tetszőleges ε esetén elég nagy n-re $f_n - f_0 \in U(S, \varepsilon)$, és hasonlóképpen ugyanez minden $S \overset{\circ}{=} \{g_i\}_{i \le k}$ véges elemszámú halmaz esetén, vagyis az $\mathcal{S}$ minden elemére is teljesül. Mivel az $U(S, \varepsilon)$ alakú halmazok a $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológia szerint a 0-nak környezetbázisát alkotják, ezzel beláttuk, hogy $f_n \to f_0$ a $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológia szerint. Mivel a feltevés szerint a $C \cap B_\infty$ halmaz $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt, ezért $f_0 \in C \cap B_\infty$, vagyis a $C \cap B_\infty$ zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve.

2. Most lássuk be, hogy ha a C konvex kúpra a $C \cap B_\infty$ halmaz zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve, akkor a $C \cap B_\infty$ egyúttal $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt. Legyen $g_0 \in L^1$ eleme $C \cap B_\infty$ halmaz L^1-beli lezártjának az L^1-norma topológia szerint. Ekkor létezik (g_n) sorozat $C \cap B_\infty$ -ből, melyre $g_n \to g_0$ a norma topológia szerint, amiből $g_n \xrightarrow{\mathbf{P}} g_0$, ez viszont a sztochasztikus zártság miatt azt jelenti, hogy $g_0 \in C \cap B_\infty$, vagyis $C \cap B_\infty$ zárt L^1-ben a norma topológia szerint. Tekintsük a (L^1, L^∞) duális párt az $\langle \xi, \eta \rangle = \mathbf{E}(\xi\eta)$ kanonikus dualitással. Mivel az $(L^1, \|\cdot\|_1)$ lokálisan konvex Hausdorff-topologikus vektortér, és a $C \cap B_\infty$ konvex, ezért a norma zártságból következik a $\sigma(L^1, L^\infty)$ zártság[25]. A leszűkített topológia definíciója alapján a $C \cap B_\infty$ halmaz zárt $\sigma(L^1, L^\infty)$ topológia L^∞-re vonatkozó leszűkítésére nézve[26]. Megjegyezzük, hogy a $\sigma(L^1, L^\infty)$ topológia leszűkítése az L^∞-téren durvább, mint $\sigma(L^\infty, L^1)$. Ennek igazolásához elegendő a környezetbázisokat felírni és felhasználni, hogy ha τ egy X téren valamely $\mathcal{A}$ család által generált legszűkebb topológia, akkor az $\mathcal{A}$ család leszűkítése egy $Y \subseteq X$ halmazra éppen a τ Y-ra való leszűkítését generálja. Így tehát, mivel a $C \cap B_\infty$ halmaz zárt az L^∞-ben az $\sigma(L^1, L^\infty)$ leszűkítésére vonatkozólag, a $\sigma(L^\infty, L^1)$ egy a $\sigma(L^1, L^\infty)$ leszűkítésénél finomabb topológia, ezért a $C \cap B_\infty$ halmaz $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt[27]. □

2.5 Mikor lesz egy sztochasztikus integrál lokális martingál

Miként már jeleztük, sztochasztikus integrálon mindig szemimartingál értelemben vett integrált értünk. Éppen ezért a lokális martingálok szerint vett sztochasztikus integrálok nem lesznek automatikusan lokális martingálok. Ezen segít a következő állítás:

2.11 Tétel (Ansel–Stricker). *Legyen M egy lokális martingál, és tegyük fel, hogy a H előrejelezhető sztochasztikus folyamat szemimartingál értelemben integrálható az M szerint. Ha a H stratégia megengedett, vagyis egy u valós számra, minden $t \geq 0$-ra $(H \bullet M)_t \geq -u$, akkor a $H \bullet M$ lokális martingál*[28].

2.6 A sztochasztikus analízis néhány további tétele

Ebben az alpontban a könnyebb követhetőség érdekében néhány később felhasználásra kerülő tételt idézünk. Ezek megtalálhatóak Medvegyev [2007a,

[25] Rudin [1973], Theorem 3.12, vagy figyelembe véve, hogy az L^1 tér lokálisan konvex Hausdorff-tér, felhasználhatjuk a Hahn–Banach-tételnek azt az – előbbinél általánosabb – következményét, hogy egy konvex halmaz dualitással kompatibilis topológiák szerinti lezártja ugyanaz a halmaz. Ld.: Kristóf János: Az analízis elemei IV (lelőhely: http://www.cs.elte.hu/~krja) 112. o.

[26] Ha valamely $z \in L^\infty$ elem nincsen benne a halmazban, akkor mivel egyúttal $z \in L^1$, van olyan környezete a $\sigma(L^1, L^\infty)$-ben, amely nem metsz bele a halmazba. Nyilván ennek a környezetnek a leszűkítése az L^∞-re sem metsz bele, vagyis a halmaz komplementere nyílt.

[27] Egy másik gondolatmenet a következő: Ha a halmaz zárt a sztochasztikus konvergenciában, akkor zárt az $L^2(\Omega)$ térben is, ugyanis az L^2-konvergens sorozatoknak van majdnem mindenhol, így a mérték végessége miatt sztochasztikusan is konvergens részsorozata. Mivel a halmaz konvex, ezért a zárt és a gyengén zárt halmazok egybeesnek, így a halmaz $\sigma(L^2, L^2)$ zárt. De mivel a halmaz része az L^∞ zárt egységgömbjének, ezért $\sigma(L^\infty, L^2)$ zárt, ugyanis ha egy L^∞-ből vett elem nem lenne benne az L^2 által generált topológia szerinti lezártban, akkor a mérték végessége miatt az L^2-ben sem lenne benne a lezártban. De ismételten a mérték végessége miatt $L^2 \subseteq L^1$, így a $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológiában több a nyílt halmaz, mint a $\sigma(L^\infty, L^2)$ topológiában, így több a zárt halmaz is, tehát a halmaz $\sigma(L^\infty, L^1)$ zárt.

[28] A tétel különféle alakjai megtalálhatók: Émery [1979], valamint Ansel–Stricker [1994]-ben, ld. még: Medvegyev [2007b].

2007b]-ben.

2.12 Tétel (Speciális szemimartingálok sztochasztikus integrálása). *Legyen X egy speciális szemimartingál, amelynek kanonikus felbontása legyen $X = X(0) + M + A$. Ha a H folyamat X-integrálható, akkor a $H \bullet X$ szemimartingál pontosan akkor speciális szemimartingál, ha a H lokális martingál értelemben M-integrálható, és a H Lebesgue–Stieltjes értelemben A-integrálható. Ebben az esetben a $H \bullet X$ kanonikus felbontása $H \bullet X = H \bullet M + H \bullet A$.*

2.13 Tétel (Korlátos változású folyamat Hahn-felbontása). *Legyen A egy véges változású előrejelezhető folyamat, amelyre $A_0 = 0$. Ekkor léteznek a diszjunkt és előrejelezhető B_+ és B_- halmazok, amelyek uniója az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmaz, és amelyekre teljesül, hogy a $\chi_{B_+} \bullet A$ és a $-\chi_{B_-} \bullet A$ folyamatok növekvőek, és*[29]

$$\operatorname{Var}(A) = \left(\chi_{B_+} - \chi_{B_-}\right) \bullet A\,.$$

2.7 A szemimartingál topológia és Mémin tétele

A szemimartingálok terének topologizálása távolról sem egyszerű feladat. Ennek oka, hogy még a trajektóriák egyenletes konvergenciája sem biztosítja, hogy szemimartingálok határértéke szemimartingál maradjon. Példaként érdemes a következőre gondolni: egy determinisztikus folyamat pontosan akkor szemimartingál, ha korlátos változású. Emlékeztetünk, hogy a mindenhol folytonos, de sehol sem deriválható függvény konstrukciója során egy nem korlátos változású függvényt korlátos változású függvények[30] egyenletesen konvergens határértékeként állítunk elő. A korlátos változású függvények azonosíthatók a mértékekkel[31]. A véges mértékek körében a természetes norma a teljes megváltozás. Ha μ egy véges mérték, akkor

$$\|\mu\| \overset{\circ}{=} \sup_{(A_i)} \sum_i |\mu(A_i)| = \sup_{|K| \le 1} \left| \int_\Omega K\, d\mu \right| ,$$

ahol az első szuprémumot az alaphalmaz összes legfeljebb megszámlálható elemből álló mérhető partícióján kell venni. A második egyenlőség világos, és természetesen a szuprémumot az egynél nem nagyobb abszolút értékkel rendelkező mérhető függvények szerint kell venni. Ebből következően az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett véges megváltozású függvények[32] körében a természetes topológiát a

$$\|V\|_n \overset{\circ}{=} |V(0)| + \sup_{|K| \le 1} \left| \int_0^n K\, dV \right| \overset{\circ}{=} |V(0)| + \sup_{|K| \le 1} \left| (K \bullet V)_n \right|$$

---

[29] Medvegyev [2007b]: Theorem 26 bizonyításának 2. pontja.

[30] Lineáris törtfüggvények!

[31] Pontosabban csak egy konstans értéktől eltekintve azonosíthatók a mértékekkel. Az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen a nulla pontban nulla értéket felvevő korlátos változású függvények azonosíthatók a véges mértékekkel. Ezért szükséges a szemimartingál topológia definíciójában az $S(0)\,K(0)$ szerepeltetése.

[32] Vagyis az olyan függvények, amelyek megváltozása minden kompakt intervallumon véges.

félnormákkal érdemes definiálni. Ha V véges megváltozású trajektóriákkal rendelkező folyamat, akkor a topológiát érdemes a trajektóriák által definiált mértékekhez rendelt félnormák által alkotott valószínűségi változók sztochasztikus konvergenciájával definiálni. Emlékeztetünk, hogy valószínűségi változók egy (ξ_n) sorozata pontosan akkor tart sztochasztikusan nullához, ha $\mathbf{E}(|\xi_n| \wedge 1) \to 0$. A szemimartingál topológia a teljes megváltozás által definiált topológiát általánosítja:

2.14 Definíció. *A szemimartingálok terén az*

$$\|S\|_{\mathcal{S}} \overset{\circ}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(|K(0)\,S(0) + (K \bullet S)_n| \wedge 1\right)$$

kvázinorma által generált topológiát szemimartingál topológiának nevezzük.

2.15 Tétel (A szemimartingál topológia jellemzése). *Szemimartingálok egy (S^k) sorozata pontosan akkor konvergál a 0-hoz a szemimartingál topológia szerint, ha minden t-re $S^k(0) \xrightarrow{\mathbf{P}} S(0)$ és $(K \bullet S^k)_t \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ a K-ban egyenletesen, ahol a K befutja az összes $|K| \leq 1$ előrejelezhető folyamatot.*

Az alaptétel igazolása során kiemelkedően fontos szerepet fog játszani a következő tétel:

2.16 Tétel (Mémin). *Ha $\mathcal{S}$ jelöli a szemimartingálok halmazát, akkor egy rögzített szemimartingál szerinti sztochasztikus integrálként felírható szemimartingálok az $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$ kvázi-normált tér zárt alterét alkotják*[33].

3 Mémin tételére való visszavezetés

Most térjünk rá az alaptétel bizonyítására. A bizonyítás első lépéseként az alaptétel bizonyítását visszavezetjük Mémin tételére.

3.1 A sztochasztikus integrálok értékének kiterjesztése a végtelenbe

Először lássuk be a következő, már többször hivatkozott állítást:

3.1 Állítás. *Ha az S kielégíti az arbitrázsmentesség feltételét, és ha a H egy megengedett stratégia, akkor a $(H \bullet S)_\infty$ létezik és véges.*

Bizonyítás. Természetesen az állítás nyilvánvaló lenne, ha már tudnánk az alaptételt, ugyanis akkor a $H \bullet S$ egy alulról korlátos lokális martingál lenne a $\mathbf{Q}$ alatt, és így egyúttal egy alulról korlátos szupermartingál is lenne a $\mathbf{Q}$ alatt, és a nem negatív szupermartingálok konvergencia tételéből már következne az állítás. Ennek fényében nem túl meglepő, hogy a bizonyítás emlékeztet a nem negatív szupermartingálok konvergenciájának igazolására. Vegyünk tehát tetszőleges $\beta < \gamma$ számokat. Megmutatjuk, hogy az olyan

[33]V.ö.: Mémin [1980].

kimenetelek halmaza, amelyre a $H \bullet S$ végtelen sokszor alulról átmetszi a $[\beta, \gamma]$ szakaszt, nulla valószínűségű. Definiáljuk a $\sigma_0 \overset{\circ}{=} \tau_0 \overset{\circ}{=} 0$ megállási időkből kiindulva a

$$\begin{aligned} \sigma_n &\overset{\circ}{=} \inf \{t \geq \tau_{n-1} : (H \bullet S)_t \leq \beta\} \\ \tau_n &\overset{\circ}{=} \inf \{t \geq \sigma_n : (H \bullet S)_t \geq \gamma\} \end{aligned}$$

megállási időket. A szokásos módon, ha az infimum mögötti halmaz üres, akkor definiáljuk az infimum értékét $+\infty$-nek. A $(\sigma_n, \tau_n]$ intervallumokon a $H \bullet S$ alulról átmetszi a $[\beta, \gamma]$ szakaszt. Legyen

$$K \overset{\circ}{=} H\chi \left(\cup_n (\sigma_n, \tau_n]\right) .$$

A $\chi \left(\cup_n (\sigma_n, \tau_n]\right)$ folyamat balról folytonos és adaptált, tehát előrejelezhető, így a K is előrejelezhető. A $H \bullet S$ megengedett, így alulról korlátos egy u számmal. Világos, hogy ez a tulajdonsága a $K \bullet S$-nek is megmarad. Ugyanakkor nyilvánvalóan, ha valamely kimenetelre $\sigma_n < \tau_n < \infty$, akkor erre a kimenetelre

$$H\chi \left((\sigma_n, \tau_n]\right) \bullet S \geq \gamma - \beta > 0 ,$$

következésképpen ha valamely kimenetelre $\tau_n < \infty$ minden n-re, vagyis ha valamely kimenetelre végtelen sok átmetszés van, akkor

$$\lim_{n \to \infty} (K \bullet S) (\tau_n) = \infty .$$

Tegyük fel, hogy ez egy pozitív valószínűségű C halmazon teljesül. A C komplementerén nem tudjuk, miként viselkedik a $K \bullet S$, így be kell vezetnünk egy (t_n) időpontsorozatot és a τ_n megállási idő helyett a $\tau_n \wedge t_n$ korlátos megállási időket kell tekinteni. Definiáljuk a

$$K^n \overset{\circ}{=} K \frac{1}{n} \chi \left([0, \tau_n \wedge t_n]\right)$$

integrandusokat. Világos, hogy mindegyik K^n megengedett, $(K^n \bullet S)_\infty$ értelmes, ugyanis a $\tau_n \wedge t_n < \infty$ időpont után az integrálfolyamat már nem változik. Az is világos, hogy a $K^n \bullet S$ negatív része egyenletesen nullához tart. Az is világos, hogy ahol az átmetszések száma végtelen, vagyis a C halmazon, az integrálok növekedése a $[0, \tau_n]$ szakaszon legalább $\gamma - \beta$. A C halmazon a τ_n minden n-re véges, így ha $t \nearrow \infty$, akkor

$$C \cap \{\tau_n > t\} \searrow \emptyset .$$

Válasszuk a t_n számokat úgy, hogy

$$\mathbf{P} \left(C \cap \{\tau_n > t_n\}\right) \leq \frac{\mathbf{P}(C)}{2^{n+1}} .$$

Ha $B \overset{\circ}{=} C \cap \left(\cap_n \{\tau_n \leq t_n\}\right)$, akkor

$$\mathbf{P}(B) \;=\; \mathbf{P}(C \setminus B^c) = \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(C \cap B^c) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(C \cap \left(\cup_n \{\tau_n \leq t_n\}^c\right)\right) = \\
&= \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(\cup_n C \cap \{\tau_n > t\}\right) \geq \\
&\geq \mathbf{P}(C) - \sum_n \mathbf{P}\left(C \cap \{\tau_n > t_n\}\right) \geq \\
&\geq \mathbf{P}(C) - \sum_n \frac{\mathbf{P}(C)}{2^{n+1}} \geq \frac{\mathbf{P}(C)}{2} > 0 .
\end{aligned}$$

Ha szükséges, akkor a B halmazon a $\gamma - \beta$ feletti felesleges növekményeket, illetve a B^c halmazon a nem negatív értékeket a díjmentes lomtalanítás feltétele segítségével elhagyhatjuk. Ezért alkalmas $l_n \geq 0$ sorozat segítségével az L^∞ térben

$$(K^n \bullet S_n)_\infty - l_n \to (\gamma - \beta)\,\chi_B ,$$

amely ellentmond a nincsen arbitrázs feltételnek. Így az átmetszések száma majdnem mindenhol véges. Ebből következően egy nulla mértékű halmaztól eltekintve a határérték létezik. Mivel a $H \bullet S$ alulról korlátos, a határérték vagy véges, vagy $+\infty$, de ez utóbbit a már bemutatott módon ki tudjuk zárni[34]. □

3.2 A lehetséges „kaszálások" terének korlátossága

Először vizsgáljuk meg a lehetséges „kaszálások" terét, vagyis azt a halmazt, amely elemei megengedett befektetések szerinti sztochasztikus integrálként állíthatók elő. Kezdjük néhány viszonylag egyszerű lemmával.

3.2 Lemma. *Rögzítsünk egy u számot. Ha az S szemimartingál eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének, akkor a*

$$\{(H \bullet S)_\infty : H \ u\text{-megengedett}\} \tag{2}$$

korlátos az L^0-ban[35]*. Az arbitrázsmentesség feltételének teljesülésekor a* (2) *halmaz L^0 térben való lezártja is korlátos az L^0 térben.*

Bizonyítás. Az alulról való u-korlátosság elemi következménye, hogy ha (H_n) egy u-megengedett sorozat és $\alpha_n \searrow 0$ tetszőleges, akkor az $f_n\alpha_n \overset{\circ}{=} (H_n\alpha_n \bullet S)_\infty$ sorozat negatív része egyenletesen nullához tart. Ebből következően, miként láttuk, az $(f_n\alpha_n)$ sztochasztikusan nullához tart. Ha most az (f_n) nem lenne korlátos, akkor létezne olyan $\varepsilon > 0$, hogy egy részsorozatra

[34]Legyen τ_n az első olyan időpont, ahol a $H \bullet S$ átmetszi az n értéket. Jelölje C azon kimenetelek halmazát, ahol végtelen sok τ_n véges, vagyis ahol az integrál végtelenhez tart. Világos, hogy $\tau_n \nearrow \infty$, ugyanis a sztochasztikus integrálok trajektóriái véges szakaszon korlátosak. Definiáljuk a K^n integrálokat, majd ezt követően ismételjük meg a már bemutatott gondolatmenetet.

[35]Emlékeztetünk, hogy az L^0 térben a korlátosság, vagyis a sztochasztikus konvergenciában a korlátosság definíciója a következő: Egy A halmaz akkor korlátos a sztochasztikus konvergenciában, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N, hogy $\mathbf{P}(|f| > N) < \varepsilon$ minden $f \in A$ esetén.

$\mathbf{P}(f_{n_k} > k) > \varepsilon$. De ez lehetetlen, mert az (f_{n_k}/k) sztochasztikusan nullához tart és ezért

$$\mathbf{P}(f_{n_k} > k) = \mathbf{P}(f_{n_k}/k > 1) \leq \mathbf{P}(|f_{n_k}/k| > 1) \leq \varepsilon \ .$$

Az állítás második fele egy általános észrevétel: ha egy halmaz korlátos az L^0 térben, akkor a lezártja is korlátos[36]. Legyen ugyanis az (f_n) a lezárásból vett olyan sorozat, amelyre $\mathbf{P}(|f_n| > n+1) > \varepsilon > 0$. Minden n-re legyen g_n olyan függvény, amely közel van az f_n-hez, vagyis amelyre $\mathbf{P}(|f_n - g_n| > 1) < \varepsilon/4$. A (g_n) korlátossága miatt van olyan N, hogy $\mathbf{P}(|g_n| > N) < \varepsilon/4$. Ekkor ha $n \geq N$, akkor

$$\mathbf{P}(|f_n| > n+1) \leq \mathbf{P}(|f_n - g_n| > 1) + \mathbf{P}(|g_n| > n) \leq \varepsilon/2 \ ,$$

ami lehetetlen. □

3.3 Definíció. *Tetszőleges X sztochasztikus folyamat esetén*

$$X^* \overset{\circ}{=} \sup_{t\geq 0} |X|_t \ .$$

3.4 Lemma. *Ha az S szemimartingál eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének, akkor tetszőleges u esetén a*

$$\{(H \bullet S)^* : H \ u\text{-megengedett}\}$$

halmaz korlátos L^0-ban. Speciálisan a $(H \bullet S)^*$ függvény minden megengedett H folyamatra majdnem mindenhol véges.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan u, amelyre a halmaz nem korlátos. Ekkor valamely $\varepsilon > 0$-ra létezne egy (H_n) u-megengedett sorozat, amelyre

$$\mathbf{P}((H_n \bullet S)^* > n) > \varepsilon \ .$$

Ekkor a

$$\tau_n \overset{\circ}{=} \inf\{t : |H_n \bullet S| > n\}$$

megállási időkre $\mathbf{P}(\tau_n < \infty) > \varepsilon$ és a $\{\tau_n < \infty\}$ halmazon $(H_n \bullet S)_{\tau_n} \geq n$. Ekkor a $K_n \overset{\circ}{=} H_n\chi([0,\tau_n])$ u-megengedett folyamatokra $\mathbf{P}((K_n \bullet S)_\infty > n) > \varepsilon > 0$. Következésképpen a $((K_n \bullet S)_\infty)$ halmaz nem korlátos a sztochasztikus konvergenciában, ami viszont ellentmond az előző lemmának. □

3.3 A C_0 Fatou-zártsága és a C gyenge* zártsága

Térjünk rá a C gyenge* zártságának igazolására.

3.5 Definíció. *Az L^0 tér egy D részhalmazát* Fatou-zárt*nak nevezzük, ha minden (f_n) alulról egyenletesen korlátos D-beli sorozat esetén, ha $f_n \to f$ majdnem biztosan, akkor $f \in D$.*

[36] Ez általában topologikus vektorterekben is igaz.

Ha a D halmaz kúp, akkor a D Fatou-zártsága ekvivalens a következővel: Ha (f_n) egy olyan D-beli sorozat amelyre $f_n \geq -1$ és $f_n \to f$ majdnem biztosan, akkor $f \in D$.

3.6 Állítás. *Ha a C_0 Fatou-zárt, akkor a C kúp $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt.*

Bizonyítás. Legyen (f_n) egy $C \cap B_\infty \subseteq C_0$-beli sorozat, amely sztochasztikusan tart valamely $f \in L^0$ elemhez. Ekkor valamely (f_{n_k}) részsorozatra feltehető, hogy $f_{n_k} \longrightarrow f$ majdnem biztosan. Mivel $(f_{n_k}) \subseteq B_\infty$, ezért a sorozat elemei -1-nél nem kisebbek. A C_0 feltételezett Fatou-zártságából következik, hogy $f \in C_0$. Nyilván az $f \in B_\infty$ is teljesül, vagyis a $C \cap B_\infty$ halmaz zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve, amiből az állítás az előző állításunk alapján már következik. □

Összefoglalva, az alaptétel bizonyítását a következő állításra vezettük vissza:

3.7 Állítás. *Ha az S folyamat egy korlátos szemimartingál, amely eleget tesz az arbitrázsmentesség feltételének, akkor a C_0 kúp Fatou-zárt.*

3.4 A maximális elem és a Fatou-zártság

Térjünk rá a C_0 kúp Fatou-zártságának bizonyítására. Az egyszerűség kedvéért (h_n) jelöljön egy olyan C_0-beli sorozatot, amelyre $h_n \geq -1$ és amelyre $h_n \xrightarrow{\text{m.m.}} h$. A Fatou-zártság definíciójának értelmében nyilván elegendő belátni, hogy $h \in C_0$. A továbbiakban rögzítsük a h elemet és legyen

$$\mathcal{D} \overset{\circ}{=} \left\{ f \geq h \mid \exists\, (K^n) : K^n \text{ 1-megengedett és } (K^n \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f \right\} .$$

Ha $K_0(1)$ jelöli az 1-megengedett ,,kaszálásokat'', akkor

$$\mathcal{D} = \operatorname{cl}(K_0(1)) \cap \left(h + L^0_+\right) ,$$

ahol a lezárás az L^0 térben, vagyis a sztochasztikus konvergenciában értendő.

3.8 Lemma. *A $\mathcal{D}$ halmaz nem üres, és tartalmaz maximális elemet.*

Bizonyítás. Mivel $h_n \in C_0$, ezért minden n-re létezik egy $g_n \in K_0$ melyre $g_n \geq h_n$. Ekkor az 2.2 lemma miatt létezik a $g'_n \in \operatorname{conv}\{g_n, g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots\}$ majdnem mindenhol konvergens sorozat, amelyre $g'_n \to g$. Könnyen látható, hogy a (h_n)-ből a megfelelő súlyokkal analóg módon képzett (h'_n) sorozat is konvergens, és $h'_n \to h$, valamint $g'_n \geq h'_n$. Következésképpen $g \geq h$, és ezért $g \in \mathcal{D}$, vagyis a $\mathcal{D}$ halmaz nem üres. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{D}$ az L^0 térben korlátos, hiszen benne van a $K_0(1)$ halmaz L^0-beli lezártjában. A $\operatorname{cl}(K_0(1))$ halmaz viszont a 3.2 lemma miatt az L^0 térben korlátos. A $\mathcal{D}$ halmaz nyilván L^0-ban zárt, ezért a 2.7 lemma értelmében a $\mathcal{D}$ halmaz tartalmaz maximális elemet. □

A továbbiakban jelölje f_0 a $\mathcal{D}$ halmaz egyik maximális elemét. A következő lemmából látni fogjuk, mi köze van az $f_0 \in \operatorname{cl}(K_0)$ függvénynek az alaptételhez.

3.9 Lemma. *Ha $f_0 \in K_0$ akkor C_0 kúp Fatou-zárt*[37]*.*

Bizonyítás. Az 3.8 lemmát megelőzően bevezetett jelöléseket alkalmazva, a C_0 Fatou-zártságához elegendő belátni, hogy $h \in C_0$, ami a C_0 definíciója szerint azzal ekvivalens, hogy létezik egy $f \in K_0$, amelyre $f \geq h$. Ha $f_0 \in K_0$, akkor ez nyilván teljesül, hiszen minden $f \in \mathcal{D}$-re definíció szerint $f \geq h$. □

Ebből következően tehát azt kell igazolni, hogy a $\mathcal{D}$ halmaz bármely f_0 maximális eleme előállítható valamely 1-megengedett integrandus szerinti integrálként.

3.5 A közelítő sorozatok egyenletes konvergenciája

Az f_0-ról csak azt tudjuk, hogy eleme a $\mathrm{cl}\,(K_0\,(1))$ térnek, vagyis csak azt tudjuk, hogy az f_0 1-megengedett integrandusok által definiált ,,kaszálások" sztochasztikus konvergenciában vett határértéke[38]. A probléma abból ered, hogy nem tudjuk, hogy az integrálként előállítható változók határértéke mikor állítható elő integrálként. A helyzet hasonlít a következőre: Tegyük fel, hogy lineáris funkcionálok valamely (g_n) sorozatára az $\alpha_n \overset{\circ}{=} \langle g_n, f\rangle$ számsorozat konvergens. Mit tudunk mondani a (g_n) sorozat, vagy legalább valamilyen részsorozatának konvergenciájára? Először azt mutatjuk meg, hogy a közelítő sorozathoz tartozó integrálfolyamatok egy alkalmas részsorozatának trajektóriái egyenletesen konvergensek.

3.10 Lemma. *Ha (H^n) olyan 1-megengedett kereskedési stratégiákból álló sorozat, amelyre $(H^n \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f_0$, akkor az*

$$F_{n,m} \overset{\circ}{=} ((H^n - H^m) \bullet S)^* \overset{\circ}{=} \sup_t |(H^n \bullet S)_t - (H^m \bullet S)_t| \tag{3}$$

valószínűségi változó sztochasztikusan tart a nullához, valahányszor $n, m \to \infty$. Szükség esetén részsorozatra áttérve feltehető, hogy a $(H^n \bullet S)$ sorozat trajektóriái majdnem minden kimenetelre az egyenletes konvergencia topológiában Cauchy-sorozatot alkotnak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a lemma nem teljesül, vagyis létezik egy $1 \geq \alpha > 0$ és egy (n_k, m_k) végtelenhez tartó sorozat, amelyre

$$\mathbf{P}\Big(\sup_t |(H^{n_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \bullet S)_t| > 2\alpha\Big) \geq 2\alpha\,.$$

Ilyenkor

$$\mathbf{P}\Big(\sup_t\,((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_t > \alpha\Big) \geq \alpha$$

és a

$$\mathbf{P}\Big(\sup_t\,((H^{m_k} - H^{n_k}) \bullet S)_t > \alpha\Big) \geq \alpha$$

[37] És így a C kúp $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt.

[38] Ugyanis, mivel csak azt tudjuk, hogy az L^0 korlátos és *zárt* részhalmazaiban van maximális elem, ezért a $K_0\,(1)$ halmazt le kell zárni a sztochasztikus konvergenciában.

egyenlőtlenség közül az egyik végtelen sokszor fordul elő. Ezért, szükség esetén az (n_k, m_k) helyett az (m_k, n_k) sorozatra áttérve már feltehető, hogy minden k-ra

$$\mathbf{P}\big(\sup_t ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_t > \alpha\big) \geq \alpha \ .$$

Legyen

$$\tau_k \overset{\circ}{=} \inf \{ t \mid ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_t \geq \alpha \} \ .$$

Ekkor nyilván teljesül a $\mathbf{P}(\tau_k < \infty) \geq \alpha$. Definiáljuk az előrejelezhető L^k folyamatot a következőképpen:

$$L^k \overset{\circ}{=} H^{n_k} \chi([0, \tau_k]) + H^{m_k} \chi((\tau_k, \infty)) \ .$$

Lássuk be, hogy az L^k folyamat 1-megengedett. Egyszerű számolással az L^k definícióját felhasználva

$$\begin{aligned} \left(L^k \bullet S\right)_t &= (H^{n_k} \chi([0, \tau_k]) \bullet S)_t + (H^{m_k} \chi((\tau_k, \infty)) \bullet S)_t = \\ &= (H^{n_k} \chi([0, \tau_k]) \bullet S)_t + (H^{m_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \chi([0, \tau_k]) \bullet S)_t = \\ &= (H^{n_k} \bullet S)_t^{\tau_k} + (H^{m_k} \bullet S)_t - (H^{m_k} \bullet S)_t^{\tau_k} = \\ &= ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_t^{\tau_k} + (H^{m_k} \bullet S)_t \ . \end{aligned}$$

Ha valamely kimenetelre $t \leq \tau_k$, akkor $\left(L^k \bullet S\right)_t = (H^{n_k} \bullet S)_t \geq -1$, mivel a feltevés szerint H^{n_k} 1-megengedett. Ha viszont $\tau_k < t$, akkor a τ_k definíciójából, valamint az integrálfolyamat trajektóriáinak jobbról való folytonosságából következően

$$((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_t^{\tau_k} = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_{\tau_k} \geq \alpha \geq 0 \ ,$$

így mivel a H^{m_k} is 1-megengedett, az L^k valóban 1-megengedett. Ebből következően az $\left(L^k \bullet S\right)_\infty$ értelmes. Legyen

$$\rho_k \overset{\circ}{=} \left(L^k \bullet S\right)_\infty = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty^{\tau_k} + (H^{m_k} \bullet S)_\infty \ .$$

Ekkor $\rho_k = \psi_k + \varphi_k$, ahol

$$\begin{gathered} \varphi_k \overset{\circ}{=} (H^{n_k} \bullet S)_\infty \chi(\tau_k = \infty) + (H^{m_k} \bullet S)_\infty \chi(\tau_k < \infty) = \\ = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty \chi(\tau_k = \infty) + (H^{m_k} \bullet S)_\infty \chi(\tau_k < \infty) + \\ + (H^{m_k} \bullet S)_\infty \chi(\tau_k = \infty) = \\ = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty \chi(\tau_k = \infty) + (H^{m_k} \bullet S)_\infty = \\ = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty^{\tau_k} \chi(\tau_k = \infty) + (H^{m_k} \bullet S)_\infty \end{gathered}$$

és

$$\psi_k \overset{\circ}{=} \rho_k - \varphi_k = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty^{\tau_k} \chi(\tau_k < \infty) \ .$$

A 2.2 kompaktsági lemma alapján, felhasználva, hogy a τ_k definíciója miatt a ψ_k alulról korlátos[39], a megfelelő konvex kombinációkra áttérve feltehető,

[39] A kifejezés minden kimenetelre vagy $\geq \alpha > 0$, vagy ≥ 0, így a 0 egy alsó korlát.

hogy valamely ψ_0 változóra $\psi_k \overset{\text{m.m.}}{\longrightarrow} \psi_0$. A feltétel szerint majdnem mindenhol

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} (H^{m_k} \bullet S)_\infty = \lim_{k\longrightarrow\infty} (H^{n_k} \bullet S)_\infty = f_0 .$$

A φ_k változó definíciója miatt minden kimenetelre a φ_k vagy a $(H^{m_k} \bullet S)_\infty$ változó, vagy a $(H^{n_k} \bullet S)_\infty$, így triviálisan $\lim_{k\to\infty} \varphi_k \overset{\text{m.m.}}{=} f_0$. Ugyanakkor a $\{\tau_k < \infty\}$ halmazon a τ_k definíciója és a sztochasztikus integrál jobbról való folytonossága miatt az említett $\{\tau_k < \infty\}$ halmazon

$$\psi_k = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)_\infty^{\tau_k} = ((H^{n_k} - H^{m_k}) \bullet S)(\tau_k) \geq \alpha .$$

A fenti $\mathbf{P}(\tau_k < \infty) \geq \alpha$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\mathbf{P}(\psi_k \geq \alpha) \geq \alpha$. Ekkor a 2.5 kompaktsági lemma alapján a konvex kombináció ψ_0 határértékére $\mathbf{P}(\psi_0 > 0) > 0$. Tehát a ρ_k sorozat valamely konvex kombinációiból álló sorozat az $f_0+\psi_0$ változóhoz konvergál, ami ellentmond az f_0 maximalitásának.

Végül térjünk rá a megfelelő részsorozat kiválasztására. A lemma már belátott része alapján létezik olyan (n_k) indexsorozat, hogy

$$\mathbf{P}\left(((H^{n_k} - H^{n_l}) \bullet S)^* > 2^{-k}\right) < 2^{-k} ,$$

valahányszor $l \geq k$. A Borel–Cantelli-lemma miatt majdnem minden kimenetelre véges sok indextől eltekintve

$$((H^{n_k} - H^{n_l}) \bullet S)^* < 2^{-k}$$

minden $l \geq k$ esetén, amiből az állítás már evidens. □

A lemma alapján egy részsorozatra áttérve majdnem minden kimenetelre a $(H^n \bullet S)$ sorozat trajektóriái Cauchy-sorozatot alkotnak az egyenletes konvergencia topológiában. A jobbról reguláris függvények teljessége[40] miatt érvényes a következő:

3.11 Lemma. *Az előző lemma feltételei mellett létezik olyan X jobbról reguláris, adaptált folyamat, hogy*

$$X \overset{\circ}{=} \lim_{k\to\infty} H^{n_k} \bullet S ,$$

ahol a konvergencia trajektóriánként egyenletesen értendő, vagyis

$$\sup_t |(X - H^{n_k} \bullet S)_t| \overset{\text{m.m.}}{\longrightarrow} 0 . \tag{4}$$

Mielőtt az alábbi hosszú számolásokra rátérünk, érdemes röviden vázolni a hátralevő számolások célját. Az egyenletes konvergencia miatt:

$$\begin{aligned} f_0 &= \lim_{k\to\infty} (H^{n_k} \bullet S)_\infty = \lim_{k\to\infty} \lim_{t\to\infty} (H^{n_k} \bullet S)_t = \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{k\to\infty} (H^{n_k} \bullet S)_t = \lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty . \end{aligned}$$

[40] Emlékeztetünk, hogy jobbról reguláris függvényeken az olyan függvények halmazát értjük, amelyek jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel. Az egyenletes konvergencia felcserélhető a határértékkel, így a jobbról reguláris függvények az egyenletes konvergencia szerint vett topológiában zárt halmazt alkotnak, így teljes metrikus teret alkotnak.

Az X folyamatról azonban nem tudjuk, hogy szemimartingál, ugyanis a

$$(H^n \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f_0 \tag{5}$$

konvergenciából belátott $H^{n_k} \bullet S \to X$ trajektóriánként való egyenletes konvergencia túl gyenge ahhoz, hogy garantálja, hogy az X szemimartingál legyen. Azt meg pláne nem tudjuk, hogy az X az S szerint sztochasztikus integrál lenne. Tegyük fel, hogy léteznek olyan

$$L^n \in \operatorname{conv}\{H^{n_k}, k \geq n\} \tag{6}$$

stratégiák, amelyekre a $L^k \bullet S$ sztochasztikus integrálok a szemimartingál topológia szerint konvergálnak. Nyilván az (5) miatt továbbra is

$$(L^n \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f_0 ,$$

így a már belátottak miatt az $L^n \bullet S$ trajektóriái egyenletesen konvergálnak. Mémin-tétele[41] szerint az S szerinti sztochasztikus integrálok halmaza zárt a szemimartingál topológiára nézve, következésképpen létezik egy előrejelezhető L folyamat, hogy

$$L^k \bullet S \longrightarrow L \bullet S$$

a szemimartingál topológia szerint. A (6) miatt az összes L^k stratégia 1-megengedett, így az L is 1-megengedett. De ekkor, felhasználva, hogy a szemimartingál topológiában való konvergenciából következik a minden időpontban való sztochasztikus konvergencia,

$$\begin{aligned}(L \bullet S)_\infty &\overset{\circ}{=} \lim_{t\to\infty} (L \bullet S)_t = \lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} (L^n \bullet S)_t = \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to\infty} (L^n \bullet S)_t = \lim_{n\to\infty} (L^n \bullet S)_\infty = f_0 ,\end{aligned}$$

ahol a két határérték az imént látott egyenletes konvergencia miatt cserélhető fel[42]. Következésképpen $f_0 \in K_0$, amiből a 3.9 lemma miatt a C_0 kúp Fatou-zárt, következésképpen a 3.7 állítást, így az alaptételt is igazoltuk. Hátra van azonban még a szemimartingál topológiában konvergens (L_n) sorozat megkonstruálása!

4 A szemimartingál topológiában konvergens sorozat létezése

Most térjünk rá a bizonyítás legnehezebb részére, a szemimartingál topológiában konvergens sorozat meghatározására.

4.1 Új mértékre való áttérés

Továbbra is f_0 jelölje a $\mathcal{D}$ halmaz maximális elemét és (H^n) legyen egy olyan 1-megengedett sorozat, amelyre $(H^n \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f_0$. Miként láttuk[43],

[41] Medvegyev [2007b], Mémin [1980].

[42] Önmagában a szemimartingál topológiában való konvergencia nem garantálja a trajektóriák teljes időtengelyen való egyenletes konvergenciáját.

[43] V.ö.: 3.4 lemma.

a $(H^n \bullet S)^*$ halmaz korlátos az L^0 térben, így egy nullmértékű halmaztól eltekintve

$$q \overset{\circ}{=} \sup_n \sup_t |(H^n \bullet S)_t| = \sup_n (H^n \bullet S)^* < \infty .$$

Összefoglalva, egy alkalmas részsorozatra áttérve igaz a következő[44]:

4.1 Lemma. *A $(H^n \bullet S)$ sorozat majdnem biztosan t-ben egyenletesen konvergál valamely X folyamathoz, és a*

$$q \overset{\circ}{=} \sup_n \sup_t |(H^n \bullet S)_t| = \sup_n (H^n \bullet S)^*$$

változó majdnem biztosan véges.

4.2 Lemma. *Létezik olyan, $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{R}$ valószínűségi mérték, hogy*

$$\lim_{n,m\to\infty} \| \sup_t |(H^n \bullet S)_t - (H^m \bullet S)_t| \|_{L^2(\mathbf{R})} = 0 .$$

A Radon–Nikodym derivált korlátos.

Bizonyítás. Legyen

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} \overset{\circ}{=} \frac{\exp(-q)}{\mathbf{E_P}[\exp(-q)]} ,$$

ahol q az előző lemmában definiált változó. Az $\mathbf{R}$ valószínűségi mérték, ugyanis a kifejezés integrálja éppen egy. Ekkor nyilván $q \in L^2(\mathbf{R})$, ezért a sztochasztikus konvergenciára vonatkozó majorált konvergencia tétel szerint a fenti határérték létezik, és 0-val egyenlő. □

A továbbiakban a fent definiált $\mathbf{R}$ valószínűségi mértékkel fogunk dolgozni. Vegyük észre, hogy ha egymás után két mértékcserét hajtunk végre, akkor a Radon–Nikodym deriváltak összeszorzódnak. A $\mathbf{P}$-ről az $\mathbf{R}$-re való áttérés Radon–Nikodym deriváltja korlátos. Mivel a mérték véges, egy integrálható függvényt tetszőleges korlátos, mérhető függvénnyel szorozva integrálható függvényt kapunk. Ha a mértékcserét két lépésben hajtjuk végre, először áttérünk a $\mathbf{P}$-ről az $\mathbf{R}$-re, majd az $\mathbf{R}$-ről a $\mathbf{Q}$-ra, akkor a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ pontosan akkor integrálható, ha integrálható a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{R}$. Mivel a kockázatmentes mértékre való áttérés Radon–Nikodym deriváltjának integrálhatóságát a korlátos $d\mathbf{R}/d\mathbf{P}$ nem érinti, ezért az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{R}$-re való hivatkozást elhagyjuk és az alapul vett mértéket továbbra is $\mathbf{P}$-vel fogjuk jelölni. A szemimartingálok halmaza nem módosul a mértékcsere során[45], és mivel S-ről feltesszük, hogy korlátos, ezért az S speciális szemimartingál. Tekinthetjük tehát az $S = M + A$ kanonikus dekompozícióját, ahol M lokális martingál, A pedig előrejelezhető, véges változású folyamat. Vegyük észre, hogy a mértékcserét követően az

$$\sup_t |(H^n \bullet S)_t| \leq q \in L^2(\Omega)$$

[44] A továbbiakban az egyszerűbb indexelés kedvéért mindig evvel a részsorozattal fogunk dolgozni.
[45] Medvegyev [2007a]: Corollary 4.58.

miatt a $H^n \bullet S$ egy speciális szemimartingál[46]. Ebből következően[47] a $H^n \bullet S$ kanonikus felbontása

$$H^n \bullet S = H^n \bullet M + H^n \bullet A ,$$

ahol az első integrál lokális martingál, a második pedig egy korlátos változású folyamat. A $(H^n \bullet S)$ szemimartingál topológiában való konvergenciájához elegendő belátni, hogy a $(H^n \bullet M)$ és a $(H^n \bullet A)$ konvergensek a szemimartingál topológiában.

4.2 Néhány egyszerű becslés

Először egy önmagában is érdekes becslést mutatunk be:

4.3 Lemma. *Legyen S egy szemimartingál, amelynek ugrásaira teljesül a $\|(\Delta S)^*\|_p < \infty$ egyenlőtlenség, ahol $1 < p \le \infty$. Ekkor az S speciális szemimartingál, valamint az $S = S(0) + M + A$ kanonikus felbontás esetén teljesülnek a*

$$\left\|(\Delta A)^*\right\|_p \le \frac{p}{p-1} \left\|(\Delta S)^*\right\|_p$$

és a

$$\left\|(\Delta M)^*\right\|_p \le \frac{2p-1}{p-1} \left\|(\Delta S)^*\right\|_p$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. A jelölés egyszerűsítése céljából tegyük fel, hogy $S(0) = 0$. Ha

$$\sigma_n \overset{\circ}{=} \inf \{t : |S(t)| > n\} ,$$

akkor az ugrásokra tett feltétel miatt

$$\begin{aligned} |S^{\sigma_n}| &\le \left|S_{-}^{\sigma_n}\right| + |\Delta S(\sigma_n)| \le n + |\Delta S(\sigma_n)| \le \\ &\le n + \sup_{t>0} |\Delta S| \in L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega) . \end{aligned}$$

Így $\sup_t |S^{\sigma_n}|(t) \in L^1(\Omega)$, tehát a $\sup_{s \le t} |S(s)|$ lokálisan integrálható, így az S egy speciális szemimartingál[48]. Definíció szerint a speciális szemimartingálok kanonikus felbontásában az A előrejelezhető, így a ΔA is előrejelezhető. Következésképpen $\Delta A = {}^p(\Delta A)$. A $(\Delta S)^*$ a feltétel szerint integrálható, következésképpen az $L(t) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left((\Delta S)^* \mid \mathcal{F}_t\right)$ egyenletesen integrálható martingál. Természetesen

$$|\Delta S(t)| = \mathbf{E}\left(|\Delta S(t)| \mid \mathcal{F}_t\right) \le \mathbf{E}\left((\Delta S)^* \mid \mathcal{F}_t\right) \le L(t) ,$$

[46]V.ö.: Medvegyev [2007a], Theorem 4.44, 257. oldal.
[47]V.ö.: 2.12 tétel.
[48]Medvegyev [2007a]: Theorem 4.44.

így ${}^{p}(|\Delta S|) \leq {}^{p}L = L_{-}$. Mivel ${}^{p}(\Delta M) = 0$, ezért

$$\begin{aligned} |\Delta A| &= |{}^{p}(\Delta A)| = |{}^{p}(\Delta S - \Delta M)| = |{}^{p}(\Delta S) - {}^{p}(\Delta M)| = \\ &= |{}^{p}(\Delta S)| \leq {}^{p}(|\Delta S|) \leq L_{-}. \end{aligned}$$

Ha $\infty > p > 1$, akkor a Doob-egyenlőtlenség szerint

$$\left\|(\Delta A)^{*}\right\|_{p} \leq \left\|\sup_{t} |L(t)|\right\|_{p} \leq \frac{p}{p-1} \|L(\infty)\|_{p} \overset{\circ}{=} \frac{p}{p-1} \left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{p} .$$

Ha $p = \infty$, akkor minden t-re

$$\begin{aligned} |\Delta A(t)| &\leq L_{-}(t) = \mathbf{E}\left((\Delta S)^{*} \mid \mathcal{F}_{t-}\right) \leq \\ &\leq \mathbf{E}\left(\left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{\infty} \mid \mathcal{F}_{t-}\right) = \left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

így

$$\left\|(\Delta A)^{*}\right\|_{\infty} \overset{\circ}{=} \left\|\sup_{t} |\Delta A(t)|\right\|_{\infty} \leq \left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{\infty} .$$

Ebből mind a két esetben

$$\begin{aligned} \left\|\sup_{t} |\Delta M|\right\|_{p} &\leq \left\|\sup_{t} |\Delta S|\right\|_{p} + \left\|\sup_{t} |\Delta A|\right\|_{p} \leq \\ &\leq \left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{p} + \frac{p}{p-1} \left\|(\Delta S)^{*}\right\|_{p} , \end{aligned}$$

ami éppen a kívánt második egyenlőtlenség. □

Gyakran hasznos a következő egyszerű észrevétel:

4.4 Lemma. *Legyenek $(g_k)_{1 \leq k \leq n}$ nemnegatív, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett mérhető függvények. Tegyük fel, hogy léteznek az $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ és δ pozitív számok, amelyekre teljesül, hogy minden k-ra $\mathbf{P}(g_k \geq a_k) \geq \delta$. Ekkor minden $0 < \eta < 1$ esetén*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} g_k \geq \eta\delta \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq \frac{\delta(1-\eta)}{1-\eta\delta} .$$

Bizonyítás. Legyen $g \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} g_k$, és jelöljük A-val az egyenlőtlenségben szereplő $\{ g \geq \delta\eta \sum_{k=1}^{n} a_k \}$ halmazt. Nyilván

$$\mathbf{E}(g\chi(A^c)) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta \mathbf{P}(A^c) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta (1 - \mathbf{P}(A)) .$$

Másfelől

$$\mathbf{E}(g\chi(A^c)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(g_k \chi(A^c)) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(g_k \chi(A^c) \chi(\{g_k \geq a_k\})) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{P}\left(A^c \cap \{g_k \geq a_k\}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\mathbf{P}\left(\{g_k \geq a_k\}\right) - \mathbf{P}\left(A\right)\right) \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} a_k \delta - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{P}\left(A\right).$$

A két egyenlőtlenség egybevetéséből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{P}\left(A\right) - \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta \mathbf{P}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \delta - \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta ,$$

amiből

$$\mathbf{P}(A) \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \delta - \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta,}{\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \delta\eta},$$

amiből a $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$, felhasználásával következik a lemma. □

A következő becslés az előző becslés közvetlen következménye:

4.5 Lemma. *Legyenek $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ nemnegatív, az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett mérhető függvények. Tegyük fel, hogy léteznek a és b pozitív számok, melyekre teljesül, hogy minden k-ra $\mathbf{P}\left(g_k \geq a\right) \geq b$. Ekkor*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} g_k \geq \frac{nab}{2}\right) \geq \frac{b}{2}.$$

4.3 Néhány szörnyű becslés

4.6 Lemma. *Ha $\mathcal{H}_\lambda$ jelöli azon 1-megengedett H integrandusokat, amelyekre $\left\|(H \bullet S)^*\right\|_2 \leq \lambda$, akkor minden $\lambda > 0$ esetén a*

$$\left\{(H \bullet M)^* \mid H \in \mathcal{H}_\lambda\right\}$$

halmaz korlátos L^0-ban.

Bizonyítás. Rögzített $\lambda > 0$ esetén, a $\mathcal{H}_\lambda$ halmaz definíciója szerint, minden $H \in \mathcal{H}_\lambda$ folyamatra $\left\|(H \bullet S)^*\right\|_2 \leq \lambda$ teljesül, ezért a $H \bullet S$ szemimartingál, a speciális szemimartingálok karakterizációs tétele[49] miatt speciális szemimartingál. Ekkor $H \bullet M$ sztochasztikus integrál lokális martingál szerinti integrál értelemben létezik, ezért definíció szerint lokális martingál[50], valamint $H \bullet S$ kanonikus dekompozíciója $H \bullet M + H \bullet A$ alakú[51].

Tegyük fel, hogy a $\left\{(H \bullet S)^* \mid H \in \mathcal{H}_\lambda\right\}$ halmaz nem korlátos az L^0-ban. Létezik tehát egy $\alpha > 0$ és egy $\mathcal{H}_\lambda$-beli (K^n) sorozat, hogy minden $n \geq 1$ esetén $\mathbf{P}\left((K^n \bullet M)^* > n^3\right) > 8\alpha$. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{E}\left(\left((K^n \bullet S)^*\right)^2\right) \leq \lambda^2 ,$$

[49] Medvegyev [2007a]: Theorem 4.44.
[50] Medvegyev [2007*a*]: Definition 4.38.
[51] Medvegyev [2007a]: Theorem 4.49.

ezért a $\left((K^n \bullet S)^*\right)^2$ változóra alkalmazva a Markov-egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{P}\left((K^n \bullet S)^* \geq n\right) = \mathbf{P}\left(\left((K^n \bullet S)^*\right)^2 \geq n^2\right) \leq \frac{\lambda^2}{n^2} \, .$$

Legyen N olyan, hogy ha $n \geq N$, akkor $\max\left\{\frac{\lambda^2}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right\} < \frac{\alpha}{6}$, és definiáljuk a τ_n megállási időket a következőképpen:

$$\tau_n \overset{\circ}{=} \inf\left\{ t \mid \left|(K^n \bullet M)_t\right| \geq n^3 \text{ vagy } \left|(K^n \bullet S)_t\right| \geq n \right\} \, .$$

Ekkor az $L^n \overset{\circ}{=} \frac{1}{n^2} K^n \chi_{[0,\tau_n]}$ integrandusra teljesülnek a következők:

1. $L^n \bullet M$ lokális martingál, hiszen a bizonyítás elején elmondottak szerint $K^n \bullet M$, és így $L^n \bullet M$ is lokális martingál.

2. Ha $n \geq N$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left((L^n \bullet M)^* \geq n\right) &\geq \mathbf{P}\left((K^n \bullet M)^* \geq n^3\right) - \mathbf{P}\left((K^n \bullet S)^* \geq n\right) \geq \\ &\geq 8\alpha - \frac{\lambda^2}{n^2} \geq 7\alpha \, . \end{aligned}$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Azokra az ω kimenetelekre, melyekre

$$(K^n \bullet M)^* (\omega) \geq n^3$$

és

$$(K^n \bullet S)^* (\omega) < n \, ,$$

nyilván $(K^n \bullet M)^*_{\tau_n} \geq n^3$, vagyis $\left(\frac{1}{n^2} K^n \bullet M\right)^*_{\tau_n} \geq n$. Következésképpen

$$(L^n \bullet M)^* \geq n \, .$$

Ezen kimenetelek halmazának valószínűsége nyilván nem kisebb, mint

$$\mathbf{P}\left((K^n \bullet M)^* \geq n^3\right) - \mathbf{P}\left((K^n \bullet S)^* \geq n\right) \, .$$

3. $L^n \bullet S$ ugrásai nem kisebbek, mint $-(n+1)/n^2$. Valóban, a τ_n megállási idő definíciója miatt a $(K^n \bullet S)^{\tau_n}$ folyamat felső korlátja a $[0, \tau_n)$ intervallumon n, és mivel 1-megengedett folyamatról van szó, az értéke $[0, \tau_n]$-on nem kisebb, mint -1, ezért $(K^n \bullet S)^{\tau_n} = K^n \chi_{[0,\tau_n]} \bullet S$ ugrásai nem kisebbek, mint $-(n+1)$.

4. $\left\|(L^n \bullet M)^*\right\|_2 \leq n + \left\|\Delta\left(L^n \bullet M\right)_{\tau_n}\right\|_2 \leq n + \frac{6\lambda}{n^2}$. Az egyenlőtlenség első fele abból következik, hogy τ_n definíciója miatt a $(K^n \bullet M)^{\tau_n} = K^n \chi_{[0,T_n]} \bullet M$ folyamat értéke a $[0, \tau_n)$ intervallumon legfeljebb n^3. Az egyenlőtlenség második részének igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$\left(\Delta\left(L^n \bullet S\right)\right)^* \leq 2\left(L^n \bullet S\right)^* \, ,$$

és mivel a $K^n \in \mathcal{H}_\lambda$ miatt

$$\left\|(L^n \bullet S)^*\right\|_2 \leq \frac{\lambda}{n^2} \, , \tag{7}$$

ezért az imént belátott 4.3 lemma alapján

$$\left\|\Delta\left(L^n \bullet M\right)_{\tau_n}\right\|_2 \leq \frac{6\lambda}{n^2} \,.$$

A 4. pont alapján $L^n \bullet M \in \mathcal{H}^2$, így egyenletesen integrálható. Minden n-re definiáljuk a $(\tau_{n,i})$ megállási időkből álló sorozatot a következőképpen: Legyen $\tau_{n,0} \overset{\circ}{=} 0$, valamint

$$\tau_{n,i} \overset{\circ}{=} \inf\left\{ t \mid t \geq \tau_{n,i-1} \text{ és } \left|(L^n \bullet M)_t - (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}\right| \geq 1 \right\} .$$

Ekkor minden $n \geq N$-re érvényes a következő becslés:

$$\begin{aligned}\left\|(L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}\right\|_2 &\leq 1 + \left\|\Delta\left(L^n \bullet M\right)_{\tau_{n,i}}\right\|_2 \leq \\ &\leq 1 + \frac{6\lambda}{n^2} < 1 + \alpha < 2 \,.\end{aligned} \tag{8}$$

Jelöljük k_n-el $n\alpha/4$ egészrészét. Lássuk be, hogy minden $i = 1, \ldots, k_n$ és tetszőleges $n \geq N$ esetén $\mathbf{P}\left(\tau_{n,i} < \infty\right) > 6\alpha$. Mivel $\left(\tau_{n,i}\right)_{i \geq 0}$ megállási idők monoton növő sorozata, nyilván elegendő az egyenlőtlenséget $i = k_n$-re bizonyítani. Legyen $B \overset{\circ}{=} \{\tau_{n,k_n} < \infty\}$, és becsüljük $\left(L^n \bullet M\right)^* \chi_{B^c}$ kifejezés L^2-normáját.

$$\begin{aligned}\left\|(L^n \bullet M)^* \chi_{B^c}\right\|_2 &\leq \Big\|\sum_{i=1}^{k_n} \left(L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M\right)^* \chi_{B^c}\Big\|_2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \left\|\left(L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M\right)^*\right\|_2 .\end{aligned} \tag{9}$$

Ahogy megállapítottuk, $L^n \bullet M$, és ezért az $L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M$ is egyenletesen integrálható martingál, ezért az $L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M$ folyamat a $[0, \infty]$ intervallumon is martingál[52], így alkalmazhatjuk a Doob-egyenlőtlenséget[53]:

$$\left\|\left(L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M\right)^*\right\|_2 \leq 2 \left\|\left(L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M\right)_\infty\right\|_2 ,$$

amiből tehát, felhasználva (9)-et, (8)-at, majd a k_n definícióját:

$$\left\|(L^n \bullet M)^* \chi_{B^c}\right\|_2 \leq 2 \sum_{i=1}^{k_n} \left\|\left(L^n \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet M\right)_\infty\right\|_2 \leq 4k_n \leq n\alpha \,.$$

Ebből a Markov-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left((L^n \bullet M)^* \chi_{B^c} \geq n\right) \leq \alpha^2 \,,$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(B^c \cap \left\{(L^n \bullet M)^* \geq n\right\}\right) \leq \alpha^2 < \alpha \,,$$

[52] Medvegyev [2007a]: Corollary 1.67.

[53] Medvegyev [2007a]: Corollary 1.53.

amiből:

$$\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}\left((L^n \bullet M)^* \geq n\right) - \mathbf{P}\left(B^c \cap \left\{(L^n \bullet M)^* \geq n\right\}\right) > 7\alpha - \alpha = 6\alpha\,. \tag{10}$$

Tehát valóban

$$\mathbf{P}(\tau_{n,i} < \infty) > 6\alpha\,.$$

Vezessük be az $f_{n,i} = (L^n \bullet M)_{T_{n,i}} - (L^n \bullet M)_{T_{n,i-1}}$ és a $B_{n,i} = \left\{f_{n,i}^- \geq \alpha\right\}$ jelöléseket. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}(B_{n,i}) > \alpha^2$. Mivel az $L^n \bullet M$ folyamat egyenletesen integrálható martingál, a megállási opciókról szóló tételből[54] következik, hogy

$$\mathbf{E}(f_{n,i}) = \mathbf{E}\left(f_{n,i}^+\right) - \mathbf{E}\left(f_{n,i}^-\right) = 0\,,$$

amiből

$$\mathbf{E}\left(f_{n,i}^-\right) = \mathbf{E}\left(f_{n,i}^+\right) = \frac{\mathbf{E}(|f_{n,i}|)}{2}\,. \tag{11}$$

Ebből, a

$$\left\{\omega \mid \left|(L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}\right| \geq 1\right\} \supseteq \{\omega \mid \tau_{n,k_n} < \infty\}$$

tartalmazás, a (10) becslés, valamint a Markov-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbf{E}\left(f_{n,i}^-\right) > 3\alpha$. Mivel $B_{n,i}^c$ halmazon $f_{n,i}^-$ kisebb α-nál, ezért

$$\mathbf{E}\left(f_{n,i}^- \chi_{B_{n,i}}\right) \geq \mathbf{E}\left(f_{n,i}^-\right) - \alpha > 2\alpha\,. \tag{12}$$

A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség, majd a (8) becslés felhasználásával:

$$\mathbf{E}\left(f_{n,i}^- \chi_{B_{n,i}}\right) \leq \|f_{n,i}\|_2 \mathbf{P}(B_{n,i})^{\frac{1}{2}} \leq 2\mathbf{P}(B_{n,i})^{\frac{1}{2}}\,. \tag{13}$$

Végül (12) és (13) sorok egybevetésével pedig kapjuk, hogy $\mathbf{P}(B_{n,i}) > \alpha^2$.

Most térjünk rá $L^n \bullet A$ vizsgálatára. Felhasználva (7) sort, minden i-re kapjuk:

$$\left\|(L^n \bullet S)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{\tau_{n,i-1}}\right\|_2 \leq \frac{2\lambda}{n^2}\,.$$

Ebből a Markov-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\mathbf{P}\left(\left|(L^n \bullet S)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{\tau_{n,i-1}}\right| \geq \frac{2\lambda}{n}\right) \leq \left(\frac{2\lambda}{n^2}\right)^2 \frac{n^2}{4\lambda^2} = n^{-2}\,.$$

Vegyük észre, hogy

$$\left\{\omega \mid f_{n,i}^- \geq \alpha\right\} \setminus \left\{\omega \mid \left|(L^n \bullet S)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{\tau_{n,i-1}}\right| \geq \frac{2\lambda}{n}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{\omega \mid (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right\}\,,$$

[54] Medvegyev [2007a]: Theorem 1.86.

ugyanis

$$(L^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}} < \alpha - \frac{2\lambda}{n}$$

esetén az

$$f_{n,i} \leq -\alpha$$

és az

$$\left|(L^n \bullet S)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet S)_{\tau_{n,i-1}}\right| < \frac{2\lambda}{n}$$

együtt nem teljesülhet.

A fenti tartalmazásból és a $\mathbf{P}\left(f_{n,i}^- \geq \alpha\right) \geq \alpha^2$ becslésből következik, hogy minden $i \leq k_n$, és $n \geq N$-re teljesül, hogy

$$\mathbf{P}\left((L^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right) > \alpha^2 - n^{-2}\,. \tag{14}$$

Az $L^n \bullet A$ nyilván korlátos változású, és a bizonyítás elején elmondottak szerint megegyezik $L^n \bullet S$ folyamat kanonikus felbontásának korlátos változású részével, ezért előrejelezhető is. Alkalmazhatjuk tehát rá a 2.13 Hahn felbontási tételt. Legyen B_+^n és B_-^n olyan előrejelezhető halmazokból álló partíciója az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmaznak, amelyekre teljesül, hogy $L^n\chi_{B_+^n} \bullet A$ és $-L^n\chi_{B_-^n} \bullet A$ folyamatok pozitív értékeket vesznek fel, és trajektóriái növekvőek. Jelöljük R^n-el az $L^n\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]}$ folyamatot. Ekkor az $R^n \bullet A$ folyamat kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(R^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (R^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}} \geq (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (L^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}}\,,$$

hiszen a bal oldal $i \leq k_n$ esetén

$$\begin{aligned}
\left(L^n\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet A\right)_{\tau_{n,i}} - \left(L^n\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet A\right)_{\tau_{n,i-1}} &= \\
= \left(L^n\chi_{B_+^n} \bullet A\right)_{\tau_{n,i}} - \left(L^n\chi_{B_+^n} \bullet A\right)_{\tau_{n,i-1}} &= \\
= \left(L^n\chi_{B_+^n}\left(\chi_{[0,\tau_{n,i-1}]} + \chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]}\right) \bullet A\right)_{\tau_{n,i}} - \left(L^n\chi_{B_+^n}\chi_{[0,\tau_{n,i-1}]} \bullet A\right)_{\tau_{n,i-1}} &= \\
= \left(L^n\chi_{B_+^n}\chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet A\right)_{\tau_{n,i}}\,.
\end{aligned}$$

A jobb oldal pedig hasonló átalakításokkal

$$\left(L^n(\chi_{B_+^n} + \chi_{B_-^n})\chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet A\right)_{\tau_{n,i}}\,,$$

ahol $L^n\chi_{B_-^n}\chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet A = \chi_{B_-^n} \bullet \left(L^n\chi_{(\tau_{n,i-1},\tau_{n,i}]} \bullet A\right)$ negatív értékeket felvevő folyamat. Ezt (14) sorral egybevetve kapjuk, hogy $i \leq k_n$, és $n \geq N$ esetén:

$$\mathbf{P}\left((R^n \bullet A)_{\tau_{n,i}} - (R^n \bullet A)_{\tau_{n,i-1}} \geq \alpha - \frac{2\lambda}{n}\right) > \alpha^2 - n^{-2}\,. \tag{15}$$

Mivel $R^n \bullet S$ ugrásai részét képezik $L^n \bullet S$ ugrásainak, ezért

$$(\Delta\,(R^n \bullet S))^- \leq (\Delta\,(L^n \bullet S))^- \leq \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n}\,. \tag{16}$$

Lássuk be a

$$\left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 \le \sum_{i=1}^{k_n} \|f_{n,i}\|_2^2 \tag{17}$$

egyenlőtlenséget. Nyilván teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}} &= (R^n \bullet M)^{\tau_{n,k_n}}(\infty) = \\ &= \left(L^n \chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet M\right)^{\tau_{n,k_n}}(\infty) = \\ = \left(L^n \chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet M\right)(\infty) &= \left(\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet (L^n \bullet M)\right)(\infty) .\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $L^n \bullet M \in \mathcal{H}_0^2$, így[55]

$$\left\|\left(\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet (L^n \bullet M)\right)(\infty)\right\|_2^2 = \left\|\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet (L^n \bullet M)\right\|_{\mathcal{H}^2}^2 ,$$

amiből az Itô-izometria[56] felhasználásával,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]} \bullet (L^n \bullet M)\right)(\infty)\right\|_2^2 &= \left\|\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]}\right\|_{L^n \bullet M}^2 = \\ = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \left(\chi_{B_+^n \cap [0,\tau_{n,k_n}]}\right)^2 d\left[L^n \bullet M\right]\right) &\le \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi_{[0,\tau_{n,k_n}]} d\left[L^n \bullet M\right]\right) = \\ = \left\|\chi_{[0,\tau_{n,k_n}]}\right\|_{L^n \bullet M}^2 &= \left\|\left(\chi_{[0,\tau_{n,k_n}]} \bullet (L^n \bullet M)\right)(\infty)\right\|_2^2 = \\ &= \left\|(L^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 ,\end{aligned}$$

a fentieket egybevetve tehát kapjuk, hogy

$$\left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 \le \left\|(L^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 .$$

Mivel $L^n \bullet M \in \mathcal{H}^2$, így $L^n \bullet M$ egyenletesen integrálható, ezért a megállási opciókról szóló tétel alapján

$$\mathbf{E}\left((L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{n,i-1}}\right) = (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}} ,$$

amiből:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k_n} \|f_{n,i}\|_2^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\,(L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}}^2 + (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}^2 - 2\,(L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}}(L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_{n,i-1}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left((L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}}^2 - (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_{n,i-1}}\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}\left((L^n \bullet M)_{\tau_{n,i}}^2 - (L^n \bullet M)_{\tau_{n,i-1}}^2\right) = \left\|(L^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 ,\end{aligned}$$

[55] Medvegyev [2007a]: Theorem 2.85.

[56] Medvegyev [2007a]: Theorem 2.88/5.

amiből (17) egyenlőtlenség már következik.

A korábbi (8) becslés és (17) alapján, $n \geq N$ esetén:

$$\left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 < 4k_n \,. \tag{18}$$

Mivel $L^n \bullet M \in \mathcal{H}^2$, ezért nyilván $R^n \bullet M \in \mathcal{H}^2$, vagyis $R^n \bullet M$ egyenletesen integrálható martingál, ezért alkalmazható a Doob-egyenlőtlenség[57] az $R^n \bullet M^{\tau_{n,k_n}} = R^n \bullet M$, $[0,\infty]$-en értelmezett martingálra, vagyis

$$\begin{aligned}\Big\| \sup_{t\geq 0} \left|(R^n \bullet M)_t\right| \Big\|_2^2 &\leq 4\left\|(R^n \bullet M)_\infty\right\|_2^2 = \\ &= 4\left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2^2 < 16k_n \,.\end{aligned} \tag{19}$$

Bár az $R^n \bullet S$ megengedettségéről nem tudunk semmit, a fentiek segítségével megmutatjuk, hogy a folyamat csak kis valószínűséggel vesz fel kis értékeket. Mivel $R^n \bullet A$ folyamat növekvő, ezért nemnegatív, így

$$R^n \bullet S = R^n \bullet M + R^n \bullet A \geq R^n \bullet M \,.$$

Ezt felhasználva, majd alkalmazva a Markov-egyenlőtlenséget, majd a (19) sort:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\inf_{t\geq 0} (R^n \bullet S)_t \leq -k_n n^{-\frac{1}{4}}\Big) &\leq \mathbf{P}\Big(\sup_{t\geq 0} \left|(R^n \bullet M)_t\right| \geq k_n n^{-\frac{1}{4}}\Big) \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E}\Big(\big(\sup_{t\geq 0}\left|(R^n \bullet M)_t\right|\big)^2\Big)}{k_n^2 n^{-\frac{1}{2}}} < \frac{16k_n}{k_n^2 n^{-\frac{1}{2}}} = \frac{16\sqrt{n}}{k_n} \,.\end{aligned}$$

Legyen

$$\sigma_n \overset{\circ}{=} \inf\left\{ t \mid (R^n \bullet S)_t < -k_n n^{-\frac{1}{4}} \right\} .$$

Mivel $\sigma_n(\omega) < \infty$ esetén $(R^n \bullet S)_{\sigma_n(\omega)} \leq -k_n n^{-\frac{1}{4}}$, ezért

$$\inf_{t\geq 0} \left\{ (R^n \bullet S)(\omega, t) \right\} \leq -k_n n^{-\frac{1}{4}} \,,$$

amiből a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\mathbf{P}\left(\sigma_n < \infty\right) \leq \frac{16\sqrt{n}}{k_n} \,.$$

Most definiáljuk a következő integrandust: $V_n \overset{\circ}{=} \frac{1}{k_n} R^n \chi_{[0,\sigma_n]}$. Ekkor a (16) becslés alapján a $V_n \bullet S$ ugrásai nem kisebbek mint $\frac{-2}{nk_n}$, ezért a $V_n \bullet S$ nem kisebb mint $-n^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{nk_n}$, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(V_n \bullet S)_\infty^-\right\|_\infty = 0 \,. \tag{20}$$

[57]Medvegyev [2007a]: Corollary 1.53, (1.18) sor

Tehát V_n olyan megengedett integrandus, melynek egyenletes alsó korlátja 0-hoz tart. Az alábbiakban belátjuk, hogy $(V_n \bullet S)_\infty$ pozitív valószínűséggel pozitív.

Mivel a (15) becslés, és a 4.5 lemma alapján

$$\mathbf{P}\left((R^n \bullet A)_{\tau_{n,k_n}} \geq \frac{k_n}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)\left(\alpha^2 - n^{-2}\right)\right) > \frac{\alpha^2 - n^{-2}}{2},$$

ezért

$$\mathbf{P}\left((V^n \bullet A)_{\tau_{n,k_n}} \geq \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)\left(\alpha^2 - n^{-2}\right)\right) > \frac{\alpha^2 - n^{-2}}{2} - \mathbf{P}\left(\sigma_n < \infty\right),$$

amiből

$$\mathbf{P}\left((V^n \bullet A)_{\tau_{n,k_n}} \geq \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)\left(\alpha^2 - n^{-2}\right)\right) > \frac{\alpha^2 - n^{-2}}{2} - \frac{16\sqrt{n}}{k_n}.$$

Ekkor, mivel a $V^n \bullet A$ trajektóriái növekvőek,

$$\mathbf{P}\left((V^n \bullet A)_\infty \geq \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)\left(\alpha^2 - n^{-2}\right)\right) > \frac{\alpha^2 - n^{-2}}{2} - \frac{16\sqrt{n}}{k_n},$$

továbbá az $\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{2\lambda}{n}\right)\left(\alpha^2 - n^{-2}\right) \to \frac{\alpha^3}{2}$, és az $\frac{\alpha^2 - n^{-2}}{2} - \frac{16\sqrt{n}}{k_n} \to \frac{\alpha^2}{2}$ miatt elég nagy n-re

$$\mathbf{P}\big((V^n \bullet A)_\infty \geq \frac{\alpha^3}{4}\big) > \frac{\alpha^2}{4}. \tag{21}$$

Most próbáljuk meg a $(V^n \bullet S)_\infty = (V^n \bullet A)_\infty + (V^n \bullet M)_\infty$ felbontásban a második tagot, vagyis a $(V^n \bullet M)_\infty$ változót becsülni. Belátjuk, hogy $(V^n \bullet M)_\infty$ tart 0-hoz L^2-ben. A V^n folyamat definíciója alapján:

$$\begin{aligned}\left\|(V^n \bullet M)_\infty\right\|_2 &= \frac{1}{k_n}\left\|\left(R^n\chi_{[0,\sigma_n]} \bullet M\right)(\infty)\right\|_2 = \\ &= \frac{1}{k_n}\left\|\left(\chi_{[0,\sigma_n]} \bullet (R^n \bullet M)\right)(\infty)\right\|_2.\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $R^n \bullet M \in \mathcal{H}^2$, ezért alkalmazható az Itô-izometria[58], amiből

$$\begin{aligned}\left\|\left(\chi_{[0,\sigma_n]} \bullet (R^n \bullet M)\right)(\infty)\right\|_2 &= \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi^2_{[0,\sigma_n]}\, d\left[R^n \bullet M\right]\right)} \leq \\ &\leq \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty 1\, d\left[R^n \bullet M\right]\right)}.\end{aligned}$$

Ismét az Itô-izometria, valamint az $R^n = R^n\chi_{[0,\tau_{n,k_n}]}$ felhasználásával,

$$\sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^\infty 1\, d\left[R^n \bullet M\right]\right)} = \left\|(1 \bullet (R^n \bullet M))(\infty)\right\|_2 =$$

$$= \left\|\left(\left(R^n\chi_{[0,\tau_{n,k_n}]}\right) \bullet M\right)(\infty)\right\|_2 = \left\|(R^n \bullet M)^{\tau_{n,k_n}}(\infty)\right\|_2 = \left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2.$$

[58]Medvegyev [2007a]: Theorem 2.88.

A fentieket egybevetve a (18) segítségével

$$\left\|(V^n \bullet M)_\infty\right\|_2 \le \frac{1}{k_n}\left\|(R^n \bullet M)_{\tau_{n,k_n}}\right\|_2 \le \frac{2}{\sqrt{k_n}} \to 0 \,.$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján,

$$\mathbf{P}\big(|(V^n \bullet M)_\infty| > \frac{\alpha^3}{8}\big) \le \frac{\mathbf{E}\big((V^n \bullet M)_\infty^2\big)}{\frac{\alpha^6}{64}} \to 0 \,.$$

Az

$$\left\{\omega \mid (V^n \bullet A)_\infty > \frac{\alpha^3}{4}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\omega \mid (V^n \bullet S)_\infty > \frac{\alpha^3}{8}\right\} \cup \left\{\omega \mid |(V^n \bullet M)_\infty| > \frac{\alpha^3}{8}\right\}$$

tartalmazás, és a (21) egyenlőtlenség miatt:

$$\mathbf{P}\big((V^n \bullet S)_\infty > \frac{\alpha^3}{8}\big) + \mathbf{P}\big(|(V^n \bullet M)_\infty| > \frac{\alpha^3}{8}\big) > \frac{\alpha^2}{4} \,,$$

amiből a fenti konvergencia miatt, elég nagy n-re:

$$\mathbf{P}\big((V^n \bullet S)_\infty > \frac{\alpha^3}{8}\big) > \frac{\alpha^2}{8} \,.$$

Ekkor tehát a $g_n \overset{\circ}{=} (V^n \bullet S)_\infty$ olyan K_0-beli sorozat, melyre a (20) sor miatt $\lim_{n\to\infty} \|g_n^-\|_\infty = 0$, de a fenti egyenlőtlenség alapján a $g_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ nem teljesül, ami ellentmond a 2.6 lemmának. □

4.7 Lemma. *Legyen* $\tau_c^n \overset{\circ}{=} \inf\{\, t \mid |(H^n \bullet M)_t| \ge c \,\}$ *és legyen*

$$K_c^n \overset{\circ}{=} H^n \chi\left((\tau_c^n, \infty)\right) \,.$$

Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $c_0 > 0$, hogy minden n esetén, tetszőleges $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyokra és minden $c \ge c_0$ számra

$$\mathbf{P}\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \varepsilon\right) < \varepsilon \,.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben létezik egy $\alpha > 0$ szám, hogy minden c_0 esetén léteznek a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyok és a $c \ge c_0$ szám, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \alpha\right) > \alpha \,.$$

Mivel a 4.1 lemma alapján a $q = \sup_n \sup_t |(H^n \bullet S)_t|$ valószínűségi változó majdnem biztosan véges, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\mathbf{P}(q > N) < \frac{\alpha}{4}$. Definiáljuk a következő megállási időt:

$$\tau = \inf\{\, t \mid \exists n \ge 1 : |(H^n \bullet S)_t| > N \,\} \,.$$

Ha valamely ω-ra $\tau(\omega) < \infty$, akkor létezik egy $n \in \mathbb{N}$, melyre $\sup_t |(H^n \bullet S)_t| > N$, ezért $q > N$, tehát $\mathbf{P}(\tau < \infty) < \frac{\alpha}{4}$. Legyen $\lambda \overset{\circ}{=} \sup_n \|\sup_t |(H^n \bullet S)_t|\|_2$. Ekkor a λ véges, hiszen minden n-re $\|\sup_t |(H^n \bullet S)_t|\|_{2)} \le \|q\|_2$, és a 4.2 lemma bizonyításában láttuk, hogy $\|q\|_2 < \infty$. Mivel minden n-re a H^n 1-megengedett integrandus, és $\left\|(H^n \bullet S)^*\right\|_2 \le \lambda$, ezért a előző 4.6 lemma alapján a $\left\{(H^n \bullet M)^*\right\}_{n\ge 1}$ halmaz korlátos az L^0-ban, vagyis

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\left((H^n \bullet M)^* \ge c\right) = 0 \, .$$

Ebből viszont a $\{\tau_c^n < \infty\} \subseteq \left\{(H^n \bullet M)^* \ge c\right\}$ tartalmazás miatt

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\left(\tau_c^n < \infty\right) = 0 \, , \tag{22}$$

ezért tetszőleges $0 < \delta < \frac{\alpha}{4}$ esetén létezik a c_1 szám, melyre minden $c \ge c_1$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbf{P}(\tau_c^n < \infty) < \delta^2$. Nyilván minden n-re

$$\left\|(K_c^n \bullet S)^*\right\|_2 \le \left\|2\,(H^n \bullet S)^* \chi_{\{\tau_c^n < \infty\}}\right\|_2 \, ,$$

valamint a Hölder-egyenőtlenségből és $(H^n \bullet S)^* \le q$ felhasználásával:

$$\left\|(H^n \bullet S)^* \chi_{\{\tau_c^n < \infty\}}\right\|_2 \le \|q\|_4 \, \mathbf{P}\left(\tau_c^n < \infty\right)^{\frac{1}{4}} \, .$$

Szintén a 4.2 lemma bizonyítása alapján $\|q\|_4 < \infty$ is teljesül, ezért a fentiek alapján létezik egy c_2 szám, hogy $c \ge c_2$ esetén minden n-re

$$\left\|(K_c^n \bullet S)^*\right\|_2 \le 2\,\|q\|_4 \, \mathbf{P}\left(\tau_c^n < \infty\right)^{\frac{1}{4}} \le \delta \, . \tag{23}$$

Rögzítsünk egy $c \ge \max\{c_1, c_2\}$ számot. Az indirekt feltevés szerint léteznek a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyok, melyekre

$$\mathbf{P}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \alpha\right) > \alpha \, ,$$

és legyen $\sigma \overset{\circ}{=} \inf\left\{\, t \mid \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M\right)_t\right| \ge \alpha \,\right\}$.

Legyen $K \overset{\circ}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i\right) \chi_{[0, \min\{\tau,\sigma\}]}$. Ekkor teljesül a

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_c^i \bullet M\right)^* > \alpha\right\} \subseteq \left\{\, (K \bullet M)^* \ge \alpha \,\right\} \cup \left\{\, \tau < \infty \,\right\}$$

tartalmazás, hiszen ha ω eleme a bal oldalnak, akkor erre a kimenetelre teljesül, hogy $\sigma < \infty$, ezért ha $\sigma < \tau$ akkor $(K \bullet M)^* \ge \alpha$, ha pedig $\sigma \ge \tau$, akkor a $\sigma < \infty$ miatt $\tau < \infty$. Ebből pedig következik a

$$\mathbf{P}\left((K \bullet M)^* \ge \alpha\right) > \alpha - \mathbf{P}\left(\tau < \infty\right) > \frac{3\alpha}{4} \tag{24}$$

egyenlőtlenség, másrészt a $(K \bullet S)^* \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(K_c^i \bullet S\right)^*$ és (23) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left\|(K \bullet S)^*\right\|_2 \leq \delta \ . \tag{25}$$

Most vizsgáljuk meg hogy a K megengedett-e. A K és K_c^i definíciója alapján:

$$\begin{aligned}(K \bullet S)_t &= \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i H^i \chi_{(\tau_c^i,\infty]} \chi_{[0,\min\{\tau,\sigma\}]} \bullet S\Big)_t = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\left(H^i \chi_{(\tau_c^i,\infty]} \bullet S\right)^{\min\{\tau,\sigma\}}\Big)_t = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\left(H^i \bullet S - H^i \chi_{[0,\tau_c^i]} \bullet S\right)^{\min\{\tau,\sigma\}}\Big)_t = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(H^i \bullet S - \left(H^i \bullet S\right)^{\tau_c^i}\Big)_{\min\{t,\tau,\sigma\}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\left(H^i \bullet S\right)_{\min\{t,\tau,\sigma\}} - \left(H^i \bullet S\right)_{\min\{t,\tau,\sigma,\tau_c^i\}}\Big) \ .\end{aligned}$$

Ha $t \leq \tau_c^i$ akkor $\min\{t,\tau,\sigma\} = \min\left\{t,\tau,\sigma,\tau_c^i\right\}$ ezért az utóbbi kifejezés ezen kimenetelekre nulla, másrészt $t > \tau_c^i$ esetén $\min\left\{t,\tau,\sigma,\tau_c^i\right\} = \min\left\{\tau,\sigma,\tau_c^i\right\}$. Tehát az utóbbi kifejezés a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{\{t>\tau_c^i\}} \Big(\left(H^i \bullet S\right)_{\min\{t,\tau,\sigma\}} - \left(H^i \bullet S\right)_{\min\{\tau,\sigma,\tau_c^i\}}\Big)$$

alakba írható. Ha $\tau_c^i < \tau$ vagy $\sigma < \tau$, akkor — mivel H^i 1-megengedett — a $(K \bullet S)_t$-re kapott kifejezés és τ megállási idő definíciója alapján érvényes a

$$(K \bullet S)_t \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{\{t>\tau_c^i\}} (-1 - N)$$

egyenlőtlenség. Ha $\tau_c^i \geq \tau$ és $\sigma \geq \tau$, akkor $t > \tau_c^i$ esetén

$$\min\{t,\tau,\sigma\} = \min\left\{\tau,\sigma,\tau_c^i\right\} = \tau \ ,$$

ezért az egyenlőtlenség ezen kimenetelekre is teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy

$$(K \bullet S)_t \geq -(N+1) F_t \ ,$$

ahol $F_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{(\tau_c^i,\infty]}$, egy növekvő adaptált és balról folytonos, és így előrejelezhető folyamat. Mivel $c \geq c_1$, ezért c_1 választása miatt $\mathbf{P}\left(T_c^n < \infty\right) < \delta^2$, ezért $\mathbf{E}\left(F_\infty\right) \leq \delta^2$, amiből a Markov-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy $\mathbf{P}\left(F_\infty > \delta\right) \leq \delta$, amiből következik, hogy a $\nu \overset{\circ}{=} \inf\{t \mid F_t > \delta\}$ módon definiált megállási időre teljesül, hogy $\mathbf{P}(\nu < \infty) \leq \delta < \frac{\alpha}{4}$. Legyen $K' = K\chi_{[0,\nu]}$. Erre (23) becslés miatt teljesül, hogy

$$\left\|(K' \bullet S)^*\right\|_2 \leq \delta \ ,$$

valamint (24) becslés és a

$$\left\{(K \bullet M)^* \geq \alpha\right\} \subseteq \left\{(K' \bullet M)^* \geq \alpha\right\} \cup \{\nu < \infty\}$$

tartalmazásból kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left((K' \bullet M)^* \geq \alpha\right) > \frac{3\alpha}{4} - \delta > \frac{\alpha}{2}\,.$$

Az F_t balról folytonosságából következik, hogy $K' \bullet S \geq -(N+1)\,\delta$, ezért $L^\delta = \frac{K'}{(N+1)\delta}$ egy 1-megengedett folyamat. Ekkor fenti egyenlőtlenségek alapján egyrészt

$$\left\|\left(L^\delta \bullet S\right)^*\right\|_2 \leq \frac{1}{N+1}\,,$$

vagyis minden $\delta < \alpha/4$ esetén $\left(L^\delta \bullet M\right)^* \in \mathcal{H}_{\frac{1}{N+1}}$, másrészt

$$\mathbf{P}\left(\left(L^\delta \bullet M\right)^* \geq \frac{\alpha}{(N+1)\,\delta}\right) > \frac{\alpha}{2}\,,$$

vagyis az $\{(L^\delta \bullet M)^*\}_{\delta < \frac{\alpha}{4}}$ halmaz nem korlátos L^0-ban, ami ellentmond a 4.6 lemmának. □

4.8 Lemma. *Az előző lemmában használt jelöléseket alkalmazva, minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $c_0 > 0$, hogy minden $c \geq c_0$ számra tetszőleges $|h| \leq 1$ előrejelezhető folyamatra és tetszőleges $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyokra*

$$\mathbf{P}\Big(\Big(\Big(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\Big) \bullet M\Big)^* > \sqrt{\varepsilon}\Big) < 5\varepsilon\,.$$

Speciálisan, ha $c \geq c_0$, akkor

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i \bullet M\Big\|_{\mathcal{S}} < 6\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és c_0 legyen olyan, hogy teljesüljön rá, hogy minden n esetén, tetszőleges $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyokra és minden $c \geq c_0$ számra

$$\mathbf{P}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i \bullet M\Big)^* > \varepsilon\Big) < \varepsilon\,.$$

Az előző lemma értelmében ilyen c_0 létezik. Az előző lemma bizonyításának (22) és (23) sorait figyelembe véve, a c_0-t válasszuk meg úgy, hogy minden $c \geq c_0$ számra a

$$\sup_n \left\|(K_c^n \bullet S)^*\right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Továbbá $(\Delta\,(K_c^n \bullet S))^* \leq 2\,(K_c^n \bullet S)^*$, ezért az előző lemma bizonyításának (23) sorát felhasználva $\left\|(\Delta\,(K_c^n \bullet S))^*\right\|_2 \leq 2\delta$, ekkor tehát alkalmazható a 4.3 lemma, miszerint a $K_c^n \bullet S$ speciális szemimartingál, és így 2.12 tétel szerint, ha M az S kanonikus felbontásának lokális martingál része, akkor $K_c^n \bullet S$ kanonikus felbontásának lokális martingál része éppen $K_c^n \bullet M$. Ekkor viszont a 4.3 lemma alapján minden n-re tetszőleges σ megállási időre és $c > c_0$-ra:

$$\left\|\left(\Delta\left(K_c^n \bullet M\right)\right)_\sigma\right\|_2 \leq \varepsilon \; .$$

Vegyünk egy tetszőleges 1-nél nem nagyobb abszolút értékű előrejelezhető folyamatot, egy $c \geq c_0$ számot és a $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ konvex súlyokat, és definiáljuk a

$$\sigma \overset{\circ}{=} \inf\left\{t \mid \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(K_c^i \bullet M\right)_t\right| > \varepsilon\right\}$$

megállási időt. Ekkor nyilván

$$\sup_{t\leq\sigma}\left|\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \bullet M\right|_t \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left|\Delta\left(K_c^i \bullet M\right)(\sigma)\right| \; ,$$

amit a fenti becsléssel egybevetve

$$\left\|\sup_{t\leq\sigma}\left|\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i\right) \bullet M\right|_t\right\|_2 \leq 2\varepsilon \; ,$$

ami azt jelenti, hogy a $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M$ lokális martingálra teljesül, hogy

$$\left\|\sup_{t\geq 0}\left|\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M\right)_t\right|\right\|_2 \leq 2\varepsilon \; .$$

Ebből viszont a Burkholder-egyenlőtlenségből[59] következik, hogy

$$\mathbf{E}\Big(\Big(\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\Big) \bullet M\Big)(\infty)\Big) < \infty \; ,$$

ezért a $\mathcal{H}^2$ martingálok karakterizációs tétele[60] alapján $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M \in \mathcal{H}_0^2$, ezért $\left(h \sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M \in \mathcal{H}_0^2$. Az Itô-izometria alapján

$$\left\|\left(h \sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M\right\|_{\mathcal{H}^2} = \|h\|_{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right)\bullet M} \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbf{E}\Big(\Big[\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\Big) \bullet M\Big](\infty)\Big)} = \left\|\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M\right\|_{\mathcal{H}^2} =$$

$$= \left\|\sup_{t\geq 0}\left|\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right) \bullet M\right)_t\right|\right\|_2 \leq 2\varepsilon \; .$$

[59] Medvegyev [2007a], Theorem 4.68.
[60] Medvegyev [2007a], Proposition 2.84.

Ebből pedig a Markov-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbf{P}\left(\left(\left(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right)\bullet M\right)^* > \sqrt{\varepsilon}\right) < 4\varepsilon\ ,$$

másrészt a σ megállási idő definíciója miatt $\mathbf{P}(\sigma < \infty) < \varepsilon$, ezért

$$\mathbf{P}\left(\left(\left(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\right)\bullet M\right)^* > \sqrt{\varepsilon}\right) \leq$$
$$\mathbf{P}\left(\left(\left(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i \chi_{[0,\sigma]}\right)\bullet M\right)^* > \sqrt{\varepsilon}\right) + \mathbf{P}(\sigma < \infty) < 5\varepsilon\ .$$

Térjünk rá a második állításra. Jelöljük a $\left\{\left(\left(h\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\right)\bullet M\right)^* > \sqrt{\varepsilon}\right\}$ halmazt A-val. Feltehető, hogy ε egynél kisebb, ezért minden fenti tulajdonságú h-ra

$$\mathbf{E}\left(\left|\left(h\bullet\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\bullet M\right)\right)_m\right|\wedge 1\right) \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(\chi_A + \chi_{A^c}\sqrt{\varepsilon}\right) = \mathbf{E}(\chi_A) + \mathbf{E}\left(\chi_{A^c}\sqrt{\varepsilon}\right) < 5\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\ ,$$

amiből

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sup_{|h|\leq 1}\left\{\mathbf{E}\left(\left|\left(h\bullet\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_c^i\bullet M\right)\right)_n\right|\wedge 1\right)\right\} < 5\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} < 6\varepsilon\ .$$

□

4.4 A szemimartingál topológiában konvergens sorozatok meghatározása

Most már rátérhetünk a szemimartingál topológiában konvergens sorozatok meghatározására.

4.9 Lemma. *Létezik olyan* $L^n \in \operatorname{conv}\left\{H^k, k \geq n\right\}$ *sorozat, amelyre az* $(L^n \bullet M)$ *konvergál a szemimartingál topológiában.*

Bizonyítás. Az előző lemma szerint minden n-hez létezik olyan c_n szám, hogy tetszőleges $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ konvex súlyokra

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i K_{c_n}^i\bullet M\right\|_{\mathcal{S}} < \frac{1}{n}\ . \tag{26}$$

Emlékeztetünk, hogy $K_{c_n}^n \overset{\circ}{=} H^n\chi\left(\left(\tau_{c_n}^n, \infty\right)\right)$ és

$$\tau_{c_n}^n \overset{\circ}{=} \inf\left\{t \mid \left|(H^n\bullet M)_t\right| \geq c_n\right\}\ .$$

1. A $\tau_{c_n}^k$ megállási idő definíciója miatt

$$\left(H^k\chi\left(\left[0,\tau_{c_n}^k\right]\right)\bullet M\right)^* \leq c_n + \left|\Delta\left(H^k\bullet M\right)_{\tau_{c_n}^k}\right| .$$

Mivel a $H^n \bullet S$ speciális szemimartingál, ezért a $H^n \bullet S$ kanonikus felbontása

$$H^n\bullet S = H^n \bullet M + H^n \bullet A .$$

Mivel a 4.1 lemma szerint $\sup_n \left(H^n\bullet S\right)^* = q < \infty$, ezért

$$\left\|\left(\Delta\left(H^k\bullet M\right)\right)_{\tau_{c_n}^k}\right\|_2 \leq 3\left\|\left(\Delta\left(H^k\bullet S\right)\right)^*\right\|_2 \leq 6\left\|\left(H^k\bullet S\right)^*\right\|_2 \leq 6\|q\|_2 ,$$

amit összevetve a fenti egyenlőtlenséggel, kapjuk, hogy

$$\left\|H^k\chi\left(\left[0,\tau_{c_n}^k\right]\right)\bullet M\right\|_{\mathcal{H}^2} \leq c_n + 6\left\|q\right\|_2 .$$

2. Legyen $\mathcal{G} \overset{\circ}{=} \widehat{\oplus}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_i^2$, ahol $\widehat{\oplus}$ jelöli a $\left(\mathcal{H}_i^2\right)$ Hilbert-terek külső Hilbert-összegét, amely maga is Hilbert-tér[61]. Tudjuk, hogy tetszőleges $(X_i) \in \mathcal{G}$ sorozat normája $\sqrt{\sum_i \left\|X_i\right\|_{\mathcal{H}_i^2}^2}$. Tekintsük azt az $\left(X^k\right) \subseteq \mathcal{G}$ sorozatot, amelynek n-edik koordinátája

$$X_n^k \overset{\circ}{=} \frac{1}{2^n\left(c_n + 6\left\|q\right\|_2\right)} H^k\chi\left(\left[0,\tau_{c_n}^k\right]\right)\bullet M .$$

Az $\left(X^k\right)$sorozat korlátos $\mathcal{G}$-ben a $\mathcal{G}$ normája szerint. Mivel egy Hilberttérben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorzata[62], ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $\left(X^k\right)$ sorozat a $\mathcal{G}$ szorzatban gyengén konvergál valamely X-hez. Mazur tétele alapján létezik[63] olyan $Y^k \in \operatorname{conv}\left\{X^k, X^{k+1}, \ldots\right\}$ sorozat, amelyik a $\mathcal{G}$ szorzat normájában konvergens. Ezért az $\left(Y^k\right)$ koordinátái $\mathcal{H}^2$-ben konvergálnak, vagyis minden k esetén léteznek a λ_0^k, λ_1^k, …, $\lambda_{N_k}^k$ konvex súlyok, hogy az

$$Y_n^k = \sum_{j=0}^{N_k}\lambda_j^k H^{k+j}\chi\left(\left[0,\tau_{c_n}^k\right]\right)\bullet M$$

sorozat minden n esetén konvergál $\mathcal{H}^2$-ben.

3. Lássuk be, hogy ha $L^k \overset{\circ}{=} \sum_{j=0}^{N_k}\lambda_j^k H^{k+j}$, akkor az $\left(L^k\bullet M\right)$ sorozat Cauchy-sorozat a szemimartingál topológia szerint. Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ és legyen $1/N < \varepsilon$. Ekkor tetszőleges k, l indexekre

$$\left\|L^k\bullet M - L^l\bullet M\right\|_{\mathcal{S}} \overset{\circ}{=} \left\|\sum_{j=0}^{N_k}\lambda_j^k H^{k+j}\bullet M - \sum_{j=0}^{N_l}\lambda_j^l H^{l+j}\bullet M\right\|_{\mathcal{S}} \leq$$

$$\leq \left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{S}} + \left\|\sum_{j=0}^{N_k}\lambda_j^k K_{c_N}^{k+j}\bullet M\right\|_{\mathcal{S}} + \left\|\sum_{j=0}^{N_l}\lambda_j^l K_{c_N}^{l+j}\bullet M\right\|_{\mathcal{S}} .$$

[61]Kristóf [1997]: 221. oldal.
[62]Tallos [1999]: 8.15 Tétel.
[63]Rudin [1991]: 3.13 Theorem.

A c_N definíciója és (26) miatt az utóbbi két tag mindegyike kisebb, mint ε. Másrészt, felhasználva, hogy a sztochasztikus integrálok a nullában nulla értéket vesznek fel,

$$\left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{S}} \overset{\circ}{=}$$

$$\overset{\circ}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(\left|K(0)\left(Y_N^k - Y_N^l\right)(0) + \left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)_n\right| \wedge 1\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(\left|\left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)_n\right| \wedge 1\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(\left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)^* \wedge 1\right) =$$

$$= \sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(\left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)^* \wedge 1\right) \leq$$

$$\sup_{|K|\leq 1} \mathbf{E}\left(\left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)^*\right) \overset{\circ}{=}$$

$$= \sup_{|K|\leq 1} \left\|K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)^*\right\|_1 \leq \sup_{|K|\leq 1} \left\|\left(K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right)^*\right\|_2 =$$

$$= \sup_{|K|\leq 1} \left\|K \bullet \left(Y_N^k - Y_N^l\right)\right\|_{\mathcal{H}^2} .$$

Ez utolsó kifejezés az Itô-izometriával

$$\sup_{|K|\leq 1} \sqrt{\mathbf{E}\left(\int_0^{\infty} K^2 \, d\left[Y_N^k - Y_N^l\right]\right)} \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(\left[Y_N^k - Y_N^l\right](\infty)\right)} = \left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{H}^2} ,$$

vagyis

$$\left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{S}} \leq 2 \left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{H}^2} .$$

Az $\left(Y_n^k\right)$ minden n-re, így N-re is konvergál a $\mathcal{H}^2$-ben, ezért elég nagy k-ra és l-re az $\left\|Y_N^k - Y_N^l\right\|_{\mathcal{S}}$ is kisebb, mint ε. Ezzel a lemmát beláttuk. □

4.10 Lemma. *Az előző lemmában definiált* $\left(L^k\right)$ *sorozatra teljesül, hogy az* $\left(L^k \bullet A\right)$ *sorozat konvergens a szemimartingál topológiában.*

Bizonyítás. A szemimartingál topológiát jellemző 2.15 tétel miatt elegendő megmutatni, hogy minden t-re a sztochasztikus konvergenciában

$$(K \bullet ((L^k - L^m) \bullet A))_t \to 0$$

egyenletesen a $|K| \leq 1$ folyamatokon.

1. A

$$\begin{aligned} \left|K \bullet ((L^k - L^m) \bullet A)\right| &\leq \operatorname{Var}(K \bullet ((L^k - L^m) \bullet A)) = \\ |K| \bullet \operatorname{Var}((L^k - L^m) \bullet A) &\leq \operatorname{Var}((L^k - L^m) \bullet A) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek miatt elegendő belátni, hogy $\mathrm{Var}\left(\left(L^k - L^m\right) \bullet A\right)(\infty) \to 0$ sztochasztikusan, amint $k, m \to \infty$. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, vagyis léteznek az (i_k, j_k) növekvő, egész értékű sorozatok és egy $\alpha > 0$ szám, hogy

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{Var}((L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet A)(\infty) > \alpha\right) > \alpha \, .$$

A korlátos változású folyamatok Hahn-felbontása alapján létezik egy h^k, $\{+1, -1\}$-beli értékeket felvevő előrejelezhető folyamat, amelyre

$$\mathrm{Var}\left((L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet A\right) = h^k \bullet \left((L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet A\right) \, .$$

Definiáljuk az R^k integrandust a következőképpen:

$$R^k \overset{\circ}{=} L^{j_k} + \frac{1}{2}\left(1 + h^k\right)\left(L^{i_k} - L^{j_k}\right) = \frac{1}{2}\left(L^{i_k} + L^{j_k} + h^k(L^{i_k} - L^{j_k})\right) \, .$$

A h^k konstrukciója miatt az

$$\begin{aligned}(R^k - L^{i_k}) \bullet A &= \frac{1}{2}\left((h^k - 1)(L^{i_k} - L^{j_k})\right) \bullet A \\ (R^k - L^{j_k}) \bullet A &= \frac{1}{2}\left((h^k + 1)(L^{i_k} - L^{j_k})\right) \bullet A\end{aligned} \tag{27}$$

folyamatok növekvőek, és

$$\mathrm{Var}\left((L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet A\right)(\infty) = \left((R^k - L^{i_k}) \bullet A\right)(\infty)) + \left((R^k - L^{j_k}) \bullet A\right)(\infty)) \, .$$

Feltehető, hogy minden k-ra

$$\mathbf{P}\left(\left((R^k - L^{i_k}) \bullet A\right)(\infty) > \frac{\alpha}{2}\right) > \frac{\alpha}{2} \, , \tag{28}$$

ugyanis a relációnak vagy az i_k-val, vagy a j_k-val végtelen sokszor teljesülni kell, így, ha szükséges, az i_k és a j_k indexeket felcseréljük.

2. Lássuk be, hogy $\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)^*$ sztochasztikusan 0-hoz tart. Tegyük fel, hogy az állításunkkal ellentétben valamely β-ra végtelen sok k indexre

$$\mathbf{P}\left(\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)^* > \beta\right) > \beta \, .$$

Legyen

$$\sigma \overset{\circ}{=} \inf\left\{ t \mid \left|\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)(t)\right| > \beta \right\} \, .$$

Az indirekt feltevés miatt $\mathbf{P}(\sigma < \infty) > \beta$, ezért létezik egy s szám, hogy $\mathbf{P}(\sigma < s) > \beta/2$. Ekkor, felhasználva a (27) első sorát, azt kapjuk, hogy egy $\beta/2$-nél nagyobb valószínűségű halmazon végtelen sok k-ra

$$\begin{aligned}\beta &\leq \left|\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)(\sigma \wedge s)\right| = \left|\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)^{\sigma}(s)\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}\left((\chi([0,\sigma])(h^k - 1)(L^{i_k} - L^{j_k})) \bullet M\right)(s)\right| \, .\end{aligned}$$

Ez azonban ellentmondás, hiszen a

$$K \overset{\circ}{=} \frac{1}{2}\chi([0,\sigma])(h^k - 1)$$

előrejelezhető folyamatra $|K| \leq 1$, és előző lemmánk alapján $(L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet M \to 0$ a szemimartingál topológiában, ezért a 2.15 tétel alapján a sztochasztikus konvergenciában

$$\left(K(L^{i_k} - L^{j_k}) \bullet M\right)(s) \to 0 \, .$$

Nyilván hasonló állítás teljesül $\left((R^k - L^{j_k}) \bullet M\right)^*$-ra is.

3. Legyen (δ_k) egy pozitív számokból álló nullához konvergáló sorozat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy minden k-ra

$$\mathbf{P}\left(\left((R^k - L^{i_k}) \bullet M\right)^* > \delta_k \text{ vagy } \left((R^k - L^{j_k}) \bullet M\right)^* > \delta_k\right) < \delta_k \, . \tag{29}$$

Legyen $\tau_k \stackrel{\circ}{=} \inf\{\, t \mid (R^k \bullet M)_t < \max((L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t) - \delta_k \,\}$. A $\{\tau_k < \infty\}$ halmazon létezik t, amelyre

$$(R^k \bullet M)_t < \max((L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t) - \delta_k \, ,$$

vagyis vagy $(R^k \bullet M)_t < (L^{i_k} \bullet M)_t - \delta_k$, vagy $(R^k \bullet M)_t < (L^{j_k} \bullet M)_t - \delta_k$ teljesül. Azaz, vagy $((R^k - L^{i_k}) \bullet M)_t < -\delta_k$, vagy $((R^k - L^{j_k}) \bullet M)_t < -\delta_k$, amiből vagy $((R^k - L^{i_k}) \bullet M)^* > \delta_k$, vagy $((R^k - L^{j_k}) \bullet M)^* > \delta_k$. Ebből viszont a (29) sor miatt $\mathbf{P}\,(\tau_k < \infty) < \delta_k$.

4. Legyen $\widetilde{R}^k \stackrel{\circ}{=} R^k \chi\left([0, \tau_k]\right)$. Lássuk be, hogy az $\widetilde{R}^k$ integrandus $(1 + \delta_k)$-megengedett. Először tegyük fel, hogy $t < \tau_k$. Az $(R^k - L^{i_k}) \bullet A$ és az $(R^k - L^{j_k}) \bullet A$ folyamatok növekvőek és a 0-ban 0 értéket vesznek fel, így mindkét folyamat nem negatív, ezért

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}^k \bullet S)_t &= (R^k \bullet S)_t = (R^k \bullet A)_t + (R^k \bullet M)_t \geq \\ &\geq \max\{(L^{i_k} \bullet A)_t, (L^{j_k} \bullet A)_t\} + (R^k \bullet M)_t.\end{aligned}$$

A τ_k definíciója miatt

$$(R^k \bullet M)_t \geq \max\{(L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t\} - \delta_k \, .$$

Ezt a fenti egyenlőtlenséggel összevetve, kihasználva, hogy az L^{i_k} és az L^{j_k} 1-megengedett:

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}^k \bullet S)_t &\geq \max\{(L^{i_k} \bullet A)_t, (L^{j_k} \bullet A)_t\} + \max\{(L^{i_k} \bullet M)_t, (L^{j_k} \bullet M)_t\} - \delta_k \geq \\ &\geq \max\{(L^{i_k} \bullet S)_t, (L^{j_k} \bullet S)_t\} - \delta_k \geq -1 - \delta_k \, .\end{aligned}$$

Másodszor tegyük fel, hogy $t = \tau_k$. Az R^k konstrukciója miatt a $\Delta(R^k \bullet S)$ vagy a $\Delta(L^{i_k} \bullet S)$, vagy a $\Delta(L^{j_k} \bullet S)$ ugrással egyezik meg. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $(\Delta(R^k \bullet S))_{\tau_k} = (\Delta(L^{i_k} \bullet S))_{\tau_k}$. Elemi számolással

$$\begin{aligned}(\widetilde{R}^k \bullet S)(\tau_k) &= (\widetilde{R}^k \bullet S)(\tau_k -) + \Delta(\widetilde{R}^k \bullet S)(\tau_k) \geq \\ &\geq \max\{(L^{i_k} \bullet S), (L^{j_k} \bullet S)\}(\tau_k -) - \delta_k + (\Delta(L^{i_k} \bullet S))(\tau_k) \geq \\ &\geq (L^{i_k} \bullet S)(\tau_k -) - \delta_k + (\Delta(L^{i_k} \bullet S))(\tau_k) = \\ &= (L^{i_k} \bullet S)(\tau_k) - \delta_k \geq -1 - \delta_k \, .\end{aligned}$$

Vagyis $\widetilde{R}^k$ valóban $(1+\delta_k)$-megengedett, így az $\widetilde{R}^k/(1+\delta_k)$ folyamat 1-megengedett.

5. Becsüljük az $(\widetilde{R}^k/(1+\delta_k)\bullet S)_\infty$ változó $(L^{i_k}\bullet S)_\infty$-től való eltérését. Ehhez tekintsük a következő felbontást:

$$\Big(\frac{\widetilde{R}^k}{1+\delta_k}\bullet S - L^{i_k}\bullet S\Big)_\infty = \frac{1}{1+\delta_k}((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet S)_\infty - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}(L^{i_k}\bullet S)_\infty =$$
$$= \frac{1}{1+\delta_k}\Big(((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet A)_\infty + ((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet M)_\infty\Big) - \frac{\delta_k}{1+\delta_k}(L^{i_k}\bullet S)_\infty\,.$$

Az utolsó tag nyilván nullához tart. Figyelembe véve a $\mathbf{P}(\tau_k<\infty)<\delta_k$ egyenlőtlenséget és a (28) sort, az első tagra, elég nagy k-ra

$$\mathbf{P}\Big(((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet A)_\infty > \frac{\alpha}{2}\Big) > \frac{\alpha}{4}\,.$$

Továbbá tudjuk, hogy az $(R^k - L^{i_k})\bullet A$ nemnegatív értékű, amiből következik, hogy

$$\liminf_{k\to\infty}((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet A)_\infty \ge 0\,. \tag{30}$$

Ha ugyanis egy pozitív γ mértékű halmazon a határérték negatív lenne, akkor elég nagy k-ra a $\mathbf{P}(\tau_k<\infty)<\delta_k<\gamma$ miatt ellentmondást kapnánk, hiszen csak egy legfeljebb δ_k valószínűségű halmazon teljesülhet, hogy a határérték negatív. Végezetül becsüljük meg a második tagot. Triviálisan a $\{\tau_k=\infty\}$ halmazon $R^k=\widetilde{R}^k$. Miként láttuk, az $((R^k - L^{i_k})\bullet M)^*$ sztochasztikusan tart 0-hoz, következésképpen a $\mathbf{P}(\tau_k<\infty)<\delta_k\to 0$ miatt

$$((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet M)^* \xrightarrow{\mathbf{P}} 0\,.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ez a konvergencia majdnem mindenhol értelemben is teljesül, ezért

$$((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet M)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} 0\,. \tag{31}$$

6. A 2.2 kompaktsági lemma alapján létezik a

$$V^k \in \operatorname{conv}\{\widetilde{R}^k - L^{i_k}, \widetilde{R}^{k+1} - L^{i_{k+1}}, \dots\}$$

sorozat, hogy a $(V^k\bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} g$, és (30) valamint (31) miatt $g\ge 0$. Felhasználva (29) sort, elég nagy k-ra:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet S)_\infty > \frac{\alpha}{2}-\delta_k\Big) \ge \mathbf{P}\Big(((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet A)_\infty > \frac{\alpha}{2}\Big) - {}\\ - \mathbf{P}\Big(((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet M)_\infty < -\delta_k\Big) > \frac{\alpha}{4}-\delta_k > \frac{\alpha}{8}\,.\end{aligned} \tag{32}$$

Ismét (30) és (31) sorokból következik, hogy

$$\liminf_{k\to\infty}((\widetilde{R}^k - L^{i_k})\bullet S)_\infty \ge 0\,,$$

amiből

$$\limsup_{k\to\infty}(((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet S)_\infty)^- \leq 0 \,,$$

vagyis

$$\lim_{k\to\infty}(((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet S)_\infty)^- = 0 \,.$$

Jegorov tétele miatt alkalmas $C \in \mathcal{F}$ halmazon $\chi_C(V^k \bullet S)_\infty$ tart egyenletesen $\chi_C g$-hez a C halmazon, ahol $\mathbf{P}(\Omega \backslash C) < \frac{\alpha}{16}$. Ekkor a 2.2 kompaktsági lemmát a $\chi_C((\widetilde{R}^k - L^{i_k}) \bullet S)_\infty$ sorozatra alkalmazva a V^k-ban szereplő súlyok nyilván most is megfelelőek lesznek, és az egyenletes konvergencia miatt a lemmában a-értékét tetszőlegesen kicsire választhatjuk, ezért (32) sort is figyelembe véve kapjuk, hogy $\mathbf{P}(g > 0) > 0$. Ekkor viszont, mivel $(L^{i_k} \bullet S)_\infty \xrightarrow{\text{m.m.}} f_0$, és mivel az $\frac{1}{1+\delta_k}$-sorozattal való szorzás nem változtatja meg a határértéket, ezért a fenti súlyok egyúttal egy olyan

$$U^k \in \operatorname{conv}\Big\{\frac{\widetilde{R}^k}{1+\delta_k}, \frac{\widetilde{R}^{k+1}}{1+\delta_{k+1}}, \dots\Big\}$$

1-megengedett integrandust adnak, melyre a

$$\lim_{k\to\infty}(U^k \bullet S)_\infty = g + f_0 \geq f_0$$

is teljesül, és az egyenlőtlenség egy pozitív mértékű halmazon pozitív, ami ellentmond az f_0 maximalitásának. □

Irodalom

1. Ansel, J. P.–Stricker, C. [1994]: *Converture des actifs contingents et prix maximum.* Annales de l'Institut Henri Poincare – Probabilités et Statistiques, vol. 30.
2. Dunford, N.–Schwartz, J. T. [1958]: *Linear Operators*, Part I: General Theory, Interscience Publishers, New York.
3. Delbaen, F.–Shachermayer, W. [1994]: A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, *Mathematische Annalen*, vol. 300, pp. 463–520, Springer, Berlin.
4. Delbaen, F.-Shachermayer, W.: [2006]: *The Mathematics of Arbitrage,* Springer-Verlag, Berlin.
5. Émery, H. [1979]: Une topologie sur l'espace dessemimartingales. In Dellacherie et al. (eds.) Séminaire de Probabilités XIII, Springer Lecture Notes in Mathematics 721, pp. 260–280.
6. Kristóf J. [1997]: *Az analízis elemei III*, ELTE, Budapest.
7. Kristóf J.: *Az analízis elemei IV,* lelőhely: http://www.cs.elte.hu/˜krja.
8. Medvegyev, P. [2002]: *Valószínűségszámítás*, Aula, Budapest.
9. Medvegyev, P. [2002]: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben. *Közgazdasági Szemle*, XLIX, 2002, 574–597.
10. Medvegyev, P. [2004]: *Sztochasztikus analízis*, Budapest, Typotex.

11. Medvegyev, P. [2006]: A Dalang-Morton-Willinger tétel, *Szigma*, vol. 37, 1-2, pp. 73–85.
12. Medvegyev, P. [2007a]: *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press.
13. Medvegyev, P. [2007b]: *Technical results for no-arbitrage theorems in continuous time*, Kézirat.
14. Mémin, J. [1980]: Espace de semimartingales et changement de probabilité, *Z. W. Verw. Geb*, 1980, 52, pp. 9–39.
15. Rudin, W. [1991]: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York.
16. Tallos P. [1999]: *Dinamikai rendszerek alapjai*, Aula, Budapest.

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ASSET PRICING FOR LOCALLY BOUNDED SEMIMARTINGALES

The Delbaen and Schachermayer's theorem is one of the deepest results of mathematical finance. In this article we tried to rethink and slightly simplify the original proof of the theorem to make understandable for nonspecialists who are familiar with general theory of stochastic processes. We give a detailed proof of the theorem and we give new proofs for some of the used statements.