A geometriai Brown-mozgás feltevésének elfogadhatósága a reálopciók értékelésében

A reálopciók a döntési rugalmasság megtestesítőiként jelen vannak a vállalatvezetők mindennapjaiban, és cégtől függően jelentős értéket képviselhetnek. Értékelésük a hagyományos diszkontált pénzáramlás módszerekkel csak korlátozottan lehetséges, ezért alternatívaként felmerül a pénzügyi opcióárazás módszertana, amelynek hagyományos változatai az alaptermék alakulásáról geometriai Brown-mozgást feltételeznek. A cikk ezt a feltevést veszi górcső alá a reálopciókra történő alkalmazás szempontjából, és megmutatja, hogy habár önkényesnek tűnhet, valójában nem pusztán egy matematikai szempontból kényelmes megoldás, hanem pénzügyileg is elfogadható feltétel.

Kulcsszavak: reálopció; geometriai Brown-mozgás; opciós árelmélet

1. Bevezetés

A szakirodalom a reálopciók tárgyalásának felütésekor definíció helyett gyakran beéri néhány körülírással, úgy, mint *„Reálopció például az, ha…”*. Jelen dolgozatban *Dixit–Pyndick* [1994] alapján olyan opciós helyzeteket értünk reálopció alatt, ahol alapterméknek valamilyen reáleszközt tekinthetünk. Az ilyen opciós helyzet gyakorlatilag stratégiai döntési lehetőségeket takar, azaz a reáleszköz felhasználásával kapcsolatban rugalmasan dönthetünk, nem pedig előre rögzített üzleti terv szerint vagyunk kötelesek eljárni.

A reálopciók tipizálása annak az alapján történhet, hogy milyen jellegű az a rugalmasság/lehetőség, amit kínálnak. *Koller* et al. [2005] és *Damodaran* [2006] alapján a következő típusokat különböztethetjük meg:

1. *Halasztási (időzítési) opció.* Megválaszthatjuk, hogy mikor vágunk bele egy projektbe (tehát nem „most vagy soha” típusú döntési helyzetben vagyunk, mint a hagyományos nettó jelenérték-számítás esetén).
2. *Kiszállási opció.* Ha veszteséges a működés, leállíthatjuk.
3. *Lehetőség a termelés módosítására.* Változtathatjuk a termelési kapacitást, a termékskálát, a szerződések élettartamát, felfüggeszthetjük, majd újraindíthatjuk a termelést stb.
4. *Összetett opció.* Az előző típusok közül egyszerre több is előfordulhat, akár egymásba ágyazottan is.

1 Szűcs Balázs Árpád PhD-hallgató (Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék)

A reálopciók értékelése fontos kérdés, hiszen olyan stratégiai értékeket testesítenek meg, amelyek nyilvánvalóan jelen vannak, de a hagyományos, diszkontált pénzáramlás (DCF) alapú módszerekkel nehéz, illetve gyakran nem is lehet figyelembe venni. Mivel azonban a pénzügyi opciók árazására már széles körben elterjedt módszertani arzenál áll rendelkezésre, valamint a pénzügyi- és reálopciók közötti hasonlóság tagadhatatlan (természetesen lényeges eltérések is vannak (l. *Mun* [2002]), kézenfekvőnek tűnik a módszertan átültetése a reálopciókra, ezért ezt gyakran meg is teszik.

A legismertebb pénzügyi opcióárazó modell a Black–Scholes-modell, amely a Black–Scholes-képlet segítségével könnyen alkalmazható megoldást nyújt az európai típusú vételi jog árazásához. Alkalmazhatóságának azonban van néhány előfeltétele (l. *Hull* [1999]), amelyek közül igen markáns a következő:

> *GBM-feltétel.* Az alaptermék (eredetileg részvény) árfolyama geometriai Brown-mozgás (GBM) szerint alakul: $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. A drift ($\mu$) és a szórás ($\sigma$) állandóak, S az alaptermék árfolyamát, t az időt, dz pedig a Wiener-folyamat növekményét jelöli. (A Black–Scholes-modell részleteit és a Wiener-folyamat fogalmát ismertnek tekintjük.)

Természetesen nem a Black–Scholes-elemzés az egyetlen, amely módszertani megoldást nyújt az opciók értékelésére, azonban a legtöbb további módszer – annak ellenére, hogy a kezdeti feltevések között nem köt ki hasonlót – végül olyan paraméterezést választ, amely gyakorlatilag ugyanezzel a feltevéssel ér fel. Például a binomiális fákra épülő CRR-modell eredménye éppen ezért határértékben meg is egyezik a Black–Scholes-megoldással (l. *Száz* [2003]).

A dolgozat további része azt elemzi, hogy ez a geometriai Brown-mozgással kapcsolatos feltevés mennyire elfogadható abban az esetben, ha a módszertant reálopciós helyzetre alkalmazzuk.

2. Megfelelő-e a geometriai Brown-mozgás feltevése?

Feltételezhető-e tehát ilyen alapfolyamat reálopciók esetén? Vagy még egy szinttel visszalépve: feltételezhető-e egyáltalán pénzügyi opciók esetén?

Lássuk előbb ez utóbbit néhány szóban! Nyilvánvaló, hogy tökéletesen még a pénzügyi opciók esetében sem teljesül a valóságban, noha kimutathatóan jó illeszkedés érhető el GBM segítségével (l. *Baxter–Rennie* [2002]), ha a valós részvényadatokat próbáljuk reprodukálni vele. Mindazonáltal széleskörűen elfogadott és alkalmazott feltevésnek bizonyul a vele kapcsolatos fenntartások ellenére is, és azt mondhatjuk, hogy ez a tény önmagában ex post elfogadhatóvá teszi az alkalmazását. Hiszen ha mindenki ezzel áraz, akkor végül valóban ennek megfelelő lesz az ár.

A reálopciók esetén ugyanez nem mondható el, hiszen nem uniformizált és nagy volumenben kereskedett termékekről van szó, hanem egyedi esetekről, lehetőségekről (még ha sokszor van is köztük alapvető hasonlóság), amelyeket feltehetően csak az érintett vállalatok próbálnak értékelni. Tehát a tömeges alkalmazás jelensége közel sem teljesül. Ráadásul a reálopciók alaptermékei igen sokfélék lehetnek, így eleve nehéz egyetlen közös egyenlettel leírni a mozgásukat, szemben a részvényekkel, amelyek sokkal inkább hasonló viselkedést mutatnak. Mindehhez tegyük még hozzá azt is, hogy a részvények egyrészt szintén rengeteg, mégis könnyebben behatárolható hatásnak vannak kitéve; másrészt pedig, hogy a részvényekkel kapcsolatban rengeteg historikus adat áll rendelkezésre, amelyet vizsgálni lehet, szemben azzal az igencsak adathiányos helyzettel, ami a reálopciók alaptermékeinek esetében gyakran fennáll. Ez utóbbi alapvetően megnehezíti a folyamat modellezését. Továbbá a GBM a Wiener-komponensen keresztül normális eloszlású hozamokat eredményez, ami szintén erős feltevésnek tűnik egy reálopcióhoz kapcsolódó alaptermék esetén, különösen, hogy ez is nagyon nehezen ellenőrizhető a már említett adathiány miatt. Mindezek tudatában a GBM feltevésével kapcsolatosan az első kézenfekvő reakció az, hogy azonnal elvetjük, ha reálopciókról van szó.

Ez azt jelentené, hogy a pénzügyi opcióárazás módszertanát végérvényesen elfelejthetjük a reálopciós alkalmazásokban? Természetesen nem feltétlenül. Először is, ha a GBM nem megfelelő feltevés, megpróbálhatjuk egy jobbal helyettesíteni, azaz meghatározni, hogy ha az alaptermék GBM-et nem, akkor milyen más folyamatot követhet. Ha ez megvan, és egyúttal megértettük a módszerek lényegét is, akkor ezután átalakítható az összes módszer ennek az új, feltételezett folyamatnak megfelelően (habár ez az átalakítás adott esetben igen nehéz is lehet).

Tegyünk hát egy kísérletet, és próbáljuk meghatározni a keresett folyamatnak, ha nem is azonnal az explicit egyenletét, de néhány lényeges tulajdonságát, amelyet szeretnénk, hogy teljesítsen. Ne feledjük azonban, hogy nem a valóság tökéletes reprodukálásáról, hanem modellezésről van szó, ami a valóság kezelhetővé egyszerűsítését célozza, elfogadható pontatlanság mellett.

Annak érdekében, hogy konkrétabban tudjunk gondolkodni, ezen a ponton lépjünk túl az általános „reálopciós alapterméken”, és képzeljük el például a következőket:

1. Egy olajmezőt mint alapterméket, amelyen lehetőségünk van megkezdeni a kitermelést (időzítési opció).
2. Egy gyár termelési egységét képező ingatlant és a rajta működő gépállományt mint alapterméket, amelyet leállíthatunk, ha nem nyereséges a működése (kiszállási opció).
3. A sokoldalúan képzett munkaerő-állományból egy csapatnyi embert mint alapterméket, amelyet átcsoportosíthatunk tetszőleges feladatokra (lehetőség a termelés módosítására). (Az emberek helyett pontosabb a velük kötött szerződésekről beszélni. Néhány iparágban ez nagyon jelentős érték, például tanácsadásban sokszor az adatbázis mellett a munkaerő képviseli a legnagyobb értéket, futballklubok esetén pedig a játékosok.)
4. Egy jövőbeni esetleges befektetést, vagyis az azzal járó pénzáramlást mint alapterméket, amit megvalósíthatunk azonnal vagy egy későbbi időpontban (halasztási opció).

Hogyan alakulhat ezeknek az értéke? Időben változatlan lenne? Nyilvánvalóan nem ez a valószínű, azaz valamilyen módon az érték változik, ezt kellene előre jeleznünk. Természetesen a körülményekben bekövetkezhetnek előreláthatatlan változások, ezért végtelen ideig nem feltételezhetjük, hogy egy adott módon alakul az értékük, bármilyen precízen meghatározott is az a mód. Ugyanakkor rendelkezhetünk elegendő információval ahhoz, hogy feltegyük: jó eséllyel akár az elkövetkezendő több éven keresztül is (az adott eszköz stabilitásától függően ez valóban reális lehet) gyakorlatilag változatlan módon alakul bármelyik alaptermék értéke a fentiek közül, például várhatóan tartósan nő vagy csökken.

Az olajmezőnek – amely arra vár, hogy megkezdjék rajta a kitermelést – az értéke várhatóan nőni fog, hiszen meg nem újuló erőforrást rejt, amely egyre szűkösebbé válik. A gyári termelési egység és a rajta lévő gépek értéke, amelyeket leállítás esetén vagy eladunk működő egészként, vagy az eszközöket külön-külön értékesítjük, feltehetően csökken, hiszen folyamatosan amortizálódnak. A munkaerő értéke, amelyet átcsoportosíthatunk, jó eséllyel nő, egyrészt, mert az érintettek minden feladat elvégzésével tanulnak valamit, időközben képzéseken vesznek részt, másrészt a tudás felértékelődni látszik. Figyelembe vehető természetesen a fokozódó munkaerő-piaci túlkínálat bizonyos területeken, és hosszabb időszakra az öregedés is, ezek csökkenő irányba hathatnak. A jövőbeni esetleges befektetés jellegétől függően sokszor eldönthető, hogy milyen irányban változtat az értékén.

A fentiek alapján elfogadható, hogy a keresett folyamatunknak valamilyen *trendet* tartalmaznia kellene. Ez lehet lineáris vagy másmilyen, az adott helyzettől függően. Ha pedig mégis olyan eszközzel találnánk szemben magunkat, amelynek az értéke időben változatlan, azt a trend paramétereinek megfelelő megválasztásával le tudjuk írni.

Ugyanakkor világos, hogy ezek a trendek csak átlagban érvényesülnek, hiszen ha nagyobb válságokkal vagy „buborékokkal" nem is számolunk, bizonyos ingadozások megfigyelhetők. Például az olaj ára ingadozhat, a gyár és a gépsor által termelt javak iránti kereslet is, amely kihathat a gyár értékére, ha működő egészként akarjuk eladni; a munkaerő-állomány teljesítőképessége és használhatósága, mivel emberekből áll, több okból is változékony lehet, egy befektetés értékéről nem is beszélve. Mindezt a változékonyságot is érdemes lenne beépíteni a keresett folyamatba. Annyit jegyezzünk meg ennek kapcsán, hogy míg a részvények esetén ez a változékonyság magas likviditású részvény esetében akár másodpercenként is idézhet elő változást, addig a reálopciók alaptermékeinél ez az időtáv sokkal hosszabb, akár napokban vagy hetekben mérhető is lehet.

Tehát arra jutottunk: azt szeretnénk, hogy két komponensből álljon a folyamat, egy trend és egy véletlen hatás összegéből. Mivel a trendről nehéz pontosat mondani, nem érdemes lineáris trendnél bonyolultabbal dolgozni (hacsak nem rendelkezünk valami egészen biztos és konkrét információval a jövőt illetően), hiszen a modellezés, mint mondtuk, minél egyszerűbb, annál jobb, amennyiben még megfelelően közelíti a valóságot. Tehát az eddigi eredmény, figyelembe véve, hogy az idő múlásától függ a függvényérték: $dx=adt$.

Következő lépés a véletlen modellezése, amihez egy valószínűségi változóra lesz szükségünk. De mit is várunk el ettől a „véletlentől"? Lényegében annyit, hogy *„tökéletes véletlen, atomisztikusan strukturálatlan véletlen"* legyen (*Medvegyev* [2007], 17. o.). Éppen az ilyen véletlen leírására alkották meg a *martingál* fogalmát, ami egy olyan folyamat, amely teljesíti az alábbi két tulajdonságot (részletesebben l. Medvegyev [2007]):

1. Kockázatos folyamat.
2. Statisztikailag előre jelezhetetlen folyamat, amelynek a jövőbeli értékére adható legjobb becslés a jelenlegi érték, mivel a múlt semmilyen információval nem szolgál a jelenre nézve.

Tehát egy ilyen folyamatot kellene keresnünk. A jó hír az, hogy a pénzügyekben gyakran használt Wiener-folyamat éppen ilyen. A Wiener-folyamat – azon túl, hogy martingál – minden szempontból ideális, hiszen az egyik legegyszerűbb olyan folyamat, amelyik valóban használható a véletlen modellezésére. Egy kifogást azonban már felvetettünk ezzel szemben: használatával normális eloszlású folyamatot kapunk (legalábbis, ha GBM-en keresztül alkalmazzuk), és ezt intuitíve nehezen elfogadhatónak tartottuk a valóságra nézve, ezért azt mondtuk, hogy nem szívesen tartanánk benne a modellünkben. Mielőtt azonban továbbmennénk, vizsgáljuk meg két tulajdonságát (Medvegyev [2007])!

1. *„Növekményei függetlenek"*. Ezt el tudjuk fogadni, hiszen éppen a véletlen mivoltából következik. Egy növekmény értékének az ismerete nem hordoz információt egyetlen másik növekmény értékéről sem.

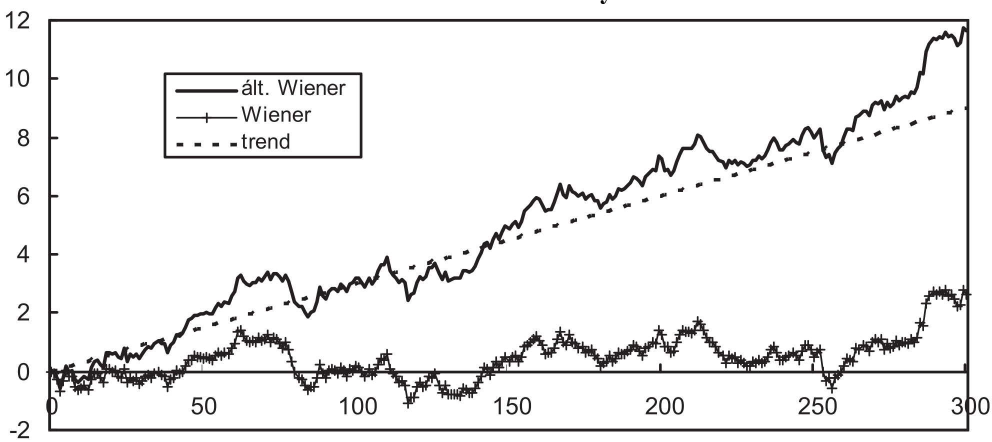
2. *„Folytonos”*. Ezzel sincs probléma; folytonos modellek esetén (mint például a Black–Scholes-modell) definíció szerint a véletlent reprezentáló komponens is folytonos, különben maga a folyamat sem lenne az.

Most visszatérhetünk a hozamok normalitására. Megmutatható (l. Medvegyev [2007]), hogy a fenti két tulajdonság teljesülése esetén normális eloszlású folyamatot kapunk, vagyis ez utóbbi a két fenti, könnyen elfogadható feltétel következménye.

Ezek alapján egészítsük ki az eddig is használt Wiener-növekmény-jelölés *(dz)* segítségével a folyamatunkat, amely eddig csak trendet tartalmazott, a következőképpen: $dx=adt+bdz$. A b paraméter a trend esetében látható a-hoz hasonlóan azért szükséges, hogy a szabadságunkat növelje a modellezés során. Az eredmény grafikusan az *1. ábrán* látható.

1. ábra

Általánosított Wiener-folyamat



Forrás: saját ábra

A konkrét számértékek nem érdekesek, a lényeg, hogy vízszintesen az idő telik, függőlegesen az alaptermék értéke látható. A trend szaggatott vonallal *(adt)*, a Wiener-folyamat *b*-szerese megjelölt folytonos vonallal *(bdz)* szerepel, a kettő összege *(adt + bdz)* a sima folytonos vonal, melyet *általánosított Wiener-folyamatnak* nevezünk.

Mi történt tehát? Intuitíve elvetettük a GBM feltevését, és megpróbáltunk magunknak felépíteni egy elfogadható folyamatot, amely teljesíti az alapkövetelményeket: trend és véletlen is van benne. A fenti eredményünk, az általánosított Wiener-folyamat egy jól ismert folyamat, amelyet más néven aritmetikai Brown-mozgásnak is neveznek. Cseréljük ki a jelölést a megszokottra: $dS=\mu dt+\sigma dz$.

A vizsgált GBM-feltételben az is szerepel, hogy μ és σ állandóak. Ez nem jelent különösebb gondot, a modellezésünket leszűkíthetjük olyan időtávra, amelyen ezek valóban állandónak tekinthetők, és ezzel legtöbbször nem teszünk túl szigorú megkötést. Ezzel kapcsolatban azonban felmerül az a probléma, hogy a drifttől és a szórástól is csak az árfolyam százalékában várhatjuk el, hogy konstans legyen, továbbá azt is szeretnénk, hogy a modellünkben az árfolyam ne vehessen fel negatív értékeket.

Ha a fentiekre adott megoldásként százalékosan értelmezzük az árfolyam növekményét, a következő alakot kapjuk: $(dS)/S=\mu dt+\sigma dz$, amiből S-sel átszorozva visszakapjuk a geometriai Brown-mozgást.

3. Következtetések

A hagyományos opcióárazási modellek az alaptermék árfolyam-alakulásáról felteszik, hogy az geometriai Brown-mozgást követ, amiről a fentiekben beláttuk, hogy habár önkényesnek tűnhet, valójában reálopciókra alkalmazva sem jelent elfogadhatatlan feltételt. Sőt, ha szélsőségektől mentesnek tekintjük az alaptermék árfolyam-alakulását, akkor a GBM kifejezetten célszerű választásnak tekinthető, hiszen segítségével figyelembe vehető a tendenciaszerű árfolyammozgás és a véletlen is, továbbá nulla alá nem engedi csökkenni az értéket. Ilyen esetekben tehát jó közelítés adható a reálopció (stratégiai lehetőség) értékére a pénzügyi opcióárazás eszközeivel.

Természetesen ez nem jelenti azt, hogy mérlegelés nélkül lehetne a pénzügyi opcióárazás modelljeit a reálopciókra alkalmazni. Ha valamilyen speciális esetben mégsem tudjuk elfogadni a GBM feltevését, de meg tudjuk határozni, hogy helyette mi lenne a helytálló, akkor azt a folyamatot felhasználva, átalakíthatjuk a módszertani megoldásokat úgy, hogy arra az esetre legyenek érvényesek. Ilyen eset lehet például, ha a folyamat ugrásokat tartalmaz, tehát bizonyos esetekben azonnali és jelentős árfolyamváltozás következik be, ami miatt folytonosként semmiképp nem közelíthető.

Továbbá elképzelhető az is, hogy a trendet, vagy még inkább a szórást adott esetben nem tekinthetjük időben konstansnak, még az árfolyam százalékában sem. Ilyen eset a pénzügyi piacokon elképzelhető (különösen, mivel az opciós piacok segítségével gyakorlatilag lehetővé vált a volatilitás kereskedése), ezért nincs okunk azt feltételezni, hogy a kevésbé transzparens reálopciós „piacon” ne fordulhatna ilyen elő.

Végül ne felejtsük el, hogy habár összességében megnyugtató eredményre jutottunk egy alapvető feltevéssel kapcsolatban, természetesen a módszertan alkalmazhatósága egynél több feltevésen alapul, amelyeknek az elemzése a jelen cikk kereteit meghaladja.

Irodalomjegyzék

Baxter, M.–Rennie, A. [2002]: Pénzügyi kalkulus – Bevezetés a származtatott termékek árazásába. Typotex kiadó, Budapest.

Damodaran, A. [2006]: A befektetések értékelése – Módszerek és eljárások. Panem Könyvkiadó Kft., Budapest.

Dixit, A. K.–Pindyck, R. S. [1994]: Investment under Uncertainty. Princeton University Press, New Jersey.

Hull, J. C. [1999]: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek. Panem Könyvkiadó Kft.–Prentice Hall Inc., Budapest.

Koller, T.–Goedhart, M.–Wessels, D. [2005]: Valuation – Measuring and Managing the Value of Companies, Fourth Edition. John Wiley & Sons Inc., New Jersey.

Medvegyev P. [2007]: Zűrzavaros bevezetés a sztochasztikus analízisbe közgazdászok számára. Előadásjegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem.

Mun, J. [2002]: Real Options Analysis – Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions. John Wiley & Sons Inc., New Jersey.

Száz J. [2003]: Kötvények és opciók árazása – Az opciók szerepe a modern pénzügyekben. Carbocomp Kft., Pécs.