DOBOS Imre

VÁLLALATOK EGY NEUMANN-TÍPUSÚ GAZDASÁGBAN

A dolgozat a klasszikusnak tekinthető Neumann-féle növekedési modell egy új alapra helyezését tartalmazza. Az eredeti Neumann-modellben expliciten vállalatok nem szerepelnek, csak technológiák vagy eljárások. A dolgozat egy olyan Neumann-típusú modellt vizsgál, amelyben az egyes technológiáknak vállalatokat feleltet meg, és azt vizsgálja, hogy ilyen feltételezés mellett egy ilyen gazdaságban léteznek-e olyan megoldások, amelyek mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. Ennek vizsgálata közben arra az eredményre juthatunk, hogy erre az esetre a klasszikus Neumann-modell által feltételezett nempozitív nyereséget felül kell vizsgálni, ami a klasszikus matematikai közgazdaságtan dualitáson alapuló alapfeltételezése.

Kulcsszavak: **Neumann-modell, növekedési modell, optimalizálás, matematikai programozás**

A Neumann-modellt tekintik ma a növekedési és egyensúlyelméletek egyik előfutárának. Ugyanakkor ez a modell felfogható úgy is, mint a Koopmans (1951) által kifejlesztett lineáris tevékenységelemzés dinamikus változata. A modell széles körben kutatott nemcsak az angolszász világban, hanem a magyar matematikai közgazdaságtanban is, csak néhány dolgozatot említve: Medvegyev (1984), Móczár (1995), Móczár (1997), Zalai (1999), Zalai (2004)[1].

A klasszikus Neumann-modell gazdaságában n terméket állítanak elő m különböző eljárás vagy technológia segítségével. A modell Neumann János által adott interpretációjában nem deríthető ki, hogy az eljárásokhoz vállalatokat vagy ipari ágazatokat lehet-e rendelni, netán több eljárás testesíti meg a vállalatokat. Amint az a modellből is kitűnik, az eljárások csak nempozitív nyereség mellett működhetnek. Ez a vállalati gyakorlattal és a vállalat-gazdaságtanban oktatottakkal ellentétesnek tűnik. A vállalat-gazdaságtan vállalatai nem létezhetnek középtávon (pozitív) nyereség nélkül, mert különben csődbe jutnak.

A dolgozat célja ezért az, hogy a klasszikus Neumann-modell egyes feltételezéseit megtartva egy új, más értelmezést adjon a bemutatandó modellnek. Az új értelmezésben tételezzük, fel, hogy a technológiák vállalatokat testesítenek meg. Arra építjük a módosított modell ezen értelmezését, hogy egy eljáráshoz egy vállalat rendelhető. Ekkor a vállalatok ikertermékeket állíthatnak elő. Azt a modellváltozatot, amikor csak egy termék állítható elő az adott technológiával, Leontief-Neumann-modellnek nevezik.

A dolgozat az alábbi részekből áll. A következő részben a Neumann-modell egy dinamikus változatát mutatjuk be, aminek a stacionárius esetét, azaz egyensúlyi helyzetét vizsgálta Neumann (1945), majd Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) gazdaságilag racionális feltételekkel bővítette azt ki. Ezen az eredeti modellen mutatjuk meg, hogy ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy egy eljárás egy vállalatnak feleltethető meg, akkor a nempozitív nyereség feltételezése esetén a vállalatok nyereségüket akkor is maximalizálhatnák, ha nem termelnének semmit. Ugyanakkor az így előálló zérus optimális kumulált nyereséget a modell klasszikus neumanni megoldása is garantálja, tehát a megoldások halmaza egy konvex halmaz. Ezért a nempozitív nyereség feltételezést helyettesítjük a nemnegatív nyereség feltevésével, amennyiben az eljárásokat vállalatnak (ágazatnak) tekintjük, mert az a gazdaság tevékenységeinek megszüntetését is jelenthetné, ha az optimális megoldások halmazából a vállalatok a semmittevés stratégiáját választanák. A harmadik fejezetben az átfogalmazott modellt vizsgáljuk. Amennyiben az eljárások vállalatoknak felelnek meg, akkor is azt kérdezhetjük, hogy milyen termelési szintek és árak mellett lesz a gazdaság egyensúlyban. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához egy játékelméleti modellt vázolunk és röviden érintjük a modell megoldhatóságát. Végül összegezzük az eredményeket.

A Neumann-modell dinamikus változata és annak átfogalmazása

Ebben a részben egészen bemutatjuk a Neumann-modellt. E dolgozatban nem célunk a Neumann-modell didaktikus bemutatása, azt Zalai (1999) dolgozatában aprólékosan megtette. A modell bemutatásakor nem a stacionárius, egyensúlyi megoldásból indulunk ki, hanem a turnpike-elméletben (Dorfman – Samuelson – Sollow [1958]) alkalmazott dinamikus lineáris programozási feladat megoldásából. E megoldás alapján azt vizsgáljuk, hogy vajon a Neumann-modell megoldása utat enged-e annak a megfeleltetésnek, hogy egy eljárás egy vállalatot takar.

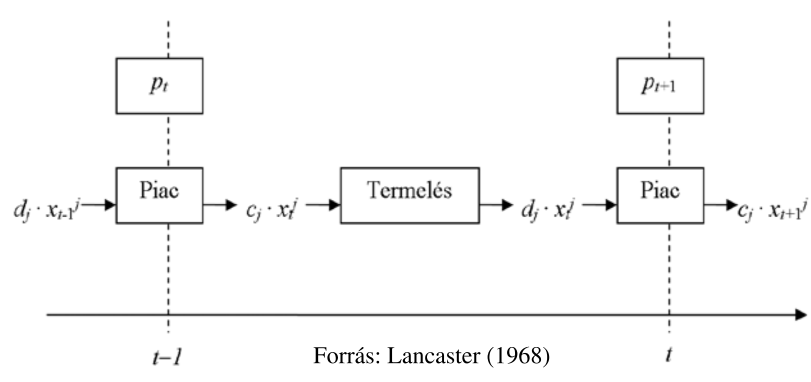
A Neumann-modell rövid összefoglalása

A modell dinamikus változatát Asmanov (1984) munkája alapján ismertetjük. A modell alapmátrixait a Hegedűs és Zalai (1978) könyvében található mátrixos jelölésekkel ismertetjük, a Neumann által használt hagyományosabb jelöléssel szemben.

A modell alapfeltételezései között szerepel, hogy a j-ik technológia egységnyi szintű alkalmazásához $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj})$ nagyságú induló készletre van szükség a termékekből, míg a termelési periódus végén egységnyi szintű alkalmazás esetén $d_j = (d_{1j}, d_{2j}, \ldots, d_{nj})$ készlet áll rendelkezésre a piaci cserére. A j-ik technológia input-output összefüggéseit tehát a (c_j, d_j) vektorpárral szemléltethetjük. A vektorok n dimenziósak, vagyis a gazdaságban n számú termék van, míg az eljárások száma m. Ha a j-ik technológia alkalmazási szintje a t-ik periódusban x_t^j, akkor az eljárás induló készlete $c_j \cdot x_t^j$ és a periódus zárókészlete $d_j \cdot x_t^j$. Az eljárással előállított, és piacon értékesíthető termékek mennyisége tehát $d_j \cdot x_t^j$. A t-ik termelési periódus végén, a t-ik időpontban zajlik le a piaci csere az ott kialakuló áron, amelyet a $p_{t+1} = (p_{t+1}^1, p_{t+1}^2, \ldots, p_{t+1}^n)$ nemnegatív n elemű vektorral jelölünk. Az anyagáramlást a technológiák szempontjából az 1. ábra szemlélteti.

1. ábra

A Neumann-modell dinamikája a *j*-ik eljárásra



Forrás: Lancaster (1968)

Foglaljuk most össze a gazdaságra az egyensúlyi feltételeket. A naturális egyensúly feltétele a t-ik időpontban az, hogy a piacra vitt termékek készlete a csere után nem lehet nagyobb, mint a csere előtt az egész gazdaságban, vagyis $D \cdot x_{t-1} - C \cdot x_t \geq 0$, ahol $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ és $D = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$ a technológiák egységnyi input és output készletének mátrixa. Az $x_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^m)$ vektor a termelési szintek m dimenziós vektorát jelöli a t-ik periódusban. A nempozitív nyereségre pedig a $p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C \leq 0$ összefüggés írható fel. Ha feltesszük, hogy a gazdaság tervezési időhorizontja T, akkor az induló készletek állománya $D \cdot x_0$, míg a terminális árbevétel összértéke $p_{T+1} \cdot D \cdot x_T$ kell, hogy legyen, ahol az x_0 kezdeti termelési szint és a p_{T+1} végső árrendszer adottak. Ezenkívül a Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) által javasolt feltételeket a modellhez csatoljuk, ami azt jelenti, hogy minden termék szükséges legalább egy másik termék előállításához: $1 \cdot C > 0$, valamint minden termék előállítható legalább egy eljárással: $D \cdot 1 > 0$, ahol az $1 = (1,1,\ldots,1)$ az összegző vektort jelöli.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az előzőekben intuitívan kapott egyensúlyi feltételek egy lineáris programozási feladat primális és duális párjainak felel meg. A programozási feladat primális oldala a következő (1)-(4) feladat:

$$x_t \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T), \tag{1}$$
$$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0, \tag{2}$$
$$- D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, \ (t = 2,3,\ldots,T), \tag{3}$$
$$p_{T+1} \cdot D \cdot x_T \rightarrow \max. \tag{4}$$

Ez a feladat később a turnpike elméletek kiindulópontja volt, amely Dorfmann, Samuelson és Solow (1958) munkájában található meg. Ezek szerint, ha T elég nagy, akkor az optimális pálya a Neumann-sugárhoz esik elég közel. (A Neumann-sugarat a következő bekezdésekben definiáljuk.)

A fenti feladat (5)-(8) duálisát az alábbi módon írhatjuk fel:

$$p_t \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T), \tag{5}$$
$$p_t \cdot C - p_{t+1} \cdot D \geq 0, \ (t = 1,2,\ldots,T), \tag{6}$$
$$p_T \cdot C \geq p_{T+1} \cdot D, \tag{7}$$
$$p_1 \cdot D \cdot x_0 \rightarrow \min. \tag{8}$$

A két lineáris programozási feladat megoldható, mivel a C és D mátrixokra tett feltételek biztosítják egyrészt a primális feladat lehetséges megoldásainak halmaza korlátosságát, másrészt a duális feladat lehetséges megoldásainak halmaza alulról korlátosságát. Az optimális $(x_t^o, p_t^o)_{t=1}^T$ vektorpároknak ki kell elégíteniük a következő egyenlőségeket:

$$p_t^o \cdot (C \cdot x_t^o - D \cdot x_{t\text{-}1}^o) = 0, \quad (9)$$

$$(p_t^o \cdot C - p_{t+1}^o \cdot D) \cdot x_t^o = 0. \quad (10)$$

Vegyük most a probléma stacionárius megoldását, vagyis legyen $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$, akkor a stacionárius pályának ki kell elégítenie a

$$D \cdot x^e \geq \alpha^e \cdot C \cdot x^e, \quad (11)$$

$$p^e \cdot D \cdot x^e = \alpha^e \cdot p^e \cdot C \cdot x^e, \quad (12)$$

$$p^e \cdot C \geq \beta^e \cdot p^e \cdot D, \quad (13)$$

$$p^e \cdot C \cdot x^e = \beta^e \cdot p^e \cdot D \cdot x^e, \quad (14)$$

$$p^e \cdot C \cdot x^e > 0 \quad (15)$$

összefüggésrendszert, ami a Neumann-modell egyensúlyi helyzeteit foglalja össze. Az x és p vektorok nemnegatívak. A (11)-(15) egy egyensúlyi pályáját a $(\alpha^e, x^e, \beta^e, p^e)$ négyessel írhatjuk le, amit *Neumann-sugár*nak neveznek. Ezekből a pályákból keressük a legnagyobb α^e-t tartalmazó növekedési pályákat. A (11)-(15) modell egyensúlyi pályáinak létezésével nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasó annak bizonyítását megtalálja pl. Hegedűs és Zalai (1978) könyvében.

Lehet-e a klasszikus Neumann-modellben vállalat egy eljárás?

Most áttérünk annak a vizsgálatára, hogy mi történhet akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak tekintjük, és ezzel folytatjuk elemzésünket. Ekkor a Neumann-féle gazdaságban fellelhető nempozitív nyereség feltételezését fel kell oldani, mert a vállalat-gazdaságtanban a nempozitív nyereség a vállalat megszűnéséhez vezethet, amint azt a következő példa mutatja. Előbb vizsgáljuk a vállalat működését, amit most azonosítunk a klasszikus Neumann-modell egy-egy eljárásával.

Az egyes vállalatok termékeit feloszthatjuk aszerint, hogy nyersanyagról, alapanyagról van-e szó, vagy végtermékről. Ezt a következő módon szemléltethetjük a j-ik vállalat esetén. Az i-k termék végtermék, azaz a piacon értékesíthető termék, ha $d_{ij} > c_{ij}$. Ugyanakkor egy másik, k-ik termék nyersanyag, ha $d_{kj} \leq c_{kj}$. Így a j-ik eljárással előállított termékek mennyisége a t-ik periódusban, ahol i végterméket jelöl $(d_{ij} - c_{ij}) \cdot x_t^j > 0$, míg a felhasználás $(c_{kj} - d_{kj}) \cdot x_t^j \leq 0$ a k-ik nyersanyag esetén. Itt azzal a feltételezéssel élhetünk, hogy a készletváltozást azonosítjuk a termeléssel és a termelőfelhasználással. Mivel a modell csak stock (állomány) jellegű mutatókat tartalmaz, ezért a flow (folyam) mutatókat a készletadatokból kell meghatároznunk.

A piacon az eljáráshoz, termeléshez felhasznált (így megsemmisített) terméket kell beszerezni, pl. a t-ik időpontban az k-ik termék esetén $c_{kj} \cdot x_t^j - d_{kj} \cdot x_{t-1}^j \geq 0$ nagyságban. Ezzel a mennyiséggel növekszik az eljárás lefolytatásához a következő periódusban rendelkezésre álló készletek mennyisége. Ugyanezen időpontban az értékesítés mennyisége $d_{ij} \cdot x_{t-1}^j - c_{ij} \cdot x_t^j > 0$. Ez a folyammutató a készletek csökkenését szemlélteti. Újra meg kell jegyeznünk, hogy a csere esetén is stock adatokból kell flow információkat előállítanunk. Ezzel az eljárással két tevékenységre bontottuk a Neumann-modellben megadott folyamatokat: termelésre és piaci cserére.

Az előbb bemutatott összefüggéseket a készletgazdálkodásból ismert stock-flow (állomány-folyam) egyenletek segítségével is szemléltethetjük:

$$d_j \cdot x_t^j = d_j \cdot x_{t-1}^j + (d_j - c_j) \cdot x_t^j - (d_j - x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j),$$
$$(t = 1, 2, \ldots, T). \quad (16)$$

A vállalat a termelési folyamat során $(d_j - c_j) \cdot x_t^j$ mennyiségű terméket állít elő, illetve semmisít meg az előbbi bekezdésekben meghatározott értelemben, míg a piaci csere során $d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j$ nagyságú terméket értékesít, vagy szerez be a termelés folytatásához.

A vizsgált vállalat által elért piaci bevétel-kiadást a t-ik időpontban a $p_t \cdot (d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j)$ kifejezéssel írhatjuk le, ahol $p_t = (p_t^1, p_t^2, \ldots, p_t^n)$ vektor az árak n dimenziós vektora a t-ik időpontban. Ez csak a piaci árbevétel, de nem a nyereség. A nyereséget az egyes periódusokra értelmezhetjük, ami a t-ik periódusra $p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j$. Ezt azért írhatjuk ebben a formában, mert két időszak „mérlegfőösszege" közötti különbség lesz az eredménykimutatásban szereplő nyereség vagy veszteség a vállalat számára, amint az a vállalati számvitelben szerepel. Alakítsuk ezt az összefüggést tovább az alábbi módon, a (16) egyenletrendszert az árvektorral beszorozva:

$$p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j =$$
$$p_{t+1} - p_t) \cdot d_j \cdot x_t^j + p_t \cdot (d_j - c_j) \cdot x_t^j - p_t \cdot (d_j - x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j).$$

Ez azt mutatja, hogy a nyereség három részből áll, amelyek

– a Bródy (1980) által is leírt papírprofit: $(p_{t+1} - p_t) \cdot d_j \cdot x_t^j$,
– a termelési tevékenység során képződő „belső" nyereség: $p_t \cdot (d_j - c_j) \cdot x_t^j$, és
– a piaci csere során kialakult áru-pénz egyenlege (árbevétel): $p_t \cdot (c_j \cdot x_t^j - d_j \cdot x_{t-1}^j)$.

Az eredeti Neumann-modellben az eljárások nyeresége nempozitív, tehát $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \leq 0$.

Ezek után tételezzük fel, hogy az így megalkotott vállalat célja az árbevétel/ráfordítás maximalizálása a tervezési időhorizonton. Feltesszük azt is, hogy az árak egy adott T időhorizonton belül adottak, és az (5)-(8) lineáris programozási feladat optimális megoldásával egyeznek meg. Nem foglalkozunk azzal, hogy milyen mechanizmus alakítja ki az optimális, egyensúlyi árakat, amit p_t^o-vel jelölünk, $t = 1,2,\ldots,T$. A vállalat kumulált árbevételfüggvénye a vizsgált tervezési horizonton a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=1}^{T} p_t^o \cdot \left(d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j\right) + p_{T+1} \cdot d_j \cdot x_T^j = \sum_{t=1}^{T} \left(p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j\right) \cdot x_t^j + p_1^o \cdot d_j \cdot x_0^j . \quad (17)$$

A vállalat célja tehát olyan termelési szintek kiválasztása, amely mellett az árbevétel maximális lesz, természetesen adott árak mellett. Tegyünk még egy feltételezést, ami az egyensúly naturális feltételéből következik:

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{t-1}^{ko} - c_k \cdot x_t^{ko}\right), (t = 1,2,..,T), \quad (18)$$

ami azt jelenti, hogy a piaci csere korlátozza a vállalat által beszerzett és eladott áruk mennyiségét, ahol x_t^{ko} az (1)-(4) modell optimális megoldása. Mindez azt is jelenti, hogy a vállalat maximális árbevétele függ a többi vállalat által értékesített és beszerzett termékek mennyiségétől. Itt feltesszük, hogy a vállalat számára ismertek a más vállalatok által piacon realizált egyensúlyi mennyiségek.

A (17) és (18) feltételezések felhasználásával a (19)-(22) lineáris programozási feladatot definiáltuk, amely a következő formában írható fel:

$$x_t^j \ge 0, (t = 1,2,...,T) \quad (19)$$

$$c_j \cdot x_1^j \le d_j \cdot x_0^j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_0^{ko} - c_k \cdot x_1^{ko}\right) \quad (20)$$

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_j \cdot x_{t-1}^{ko} - c_j \cdot x_t^{ko}\right), (t = 2,3,..,T) \quad (21)$$

$$\sum_{t=1}^{t} \left(p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j\right) \cdot x_t^j \to \max . \quad (22)$$

A probléma megoldása könnyen megadható, ugyanis ha nempozitív az árbevétel, vagyis $p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j \le 0$, akkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus, azaz $x_t^{jo} = 0$, ($t = 1,2,\ldots,T$) is lehet. Ezt szekvenciálisan láthatjuk be, a bizonyítást a függelék tartalmazza. Ugyanakkor a célfüggvény (17) összefüggésnek megfelelő átalakítása során látható, hogy a (10) egyenlőség teljesülése miatt a neumanni megoldás, azaz az (5)-(8) lineáris programozási feladat megoldása is adja a zérus nyereséget. Mindez azzal a következménnyel járhat, hogy el kell vetni a nempozitív nyereség feltételezését ebben a modellben, vagyis akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak, ágazatoknak tekintjük.

A továbbiakban feltételezzük, hogy nemnegatív nyereség fordulhat elő:

$$p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \le 0, (t = 1,2,...,T), (j = 1,2,...,m).$$

Ez a feltételezés azt mondja ki, hogy egységnyi szintű működés esetén a t-ik periódusra a termelési időszak végi készlet értékének nagyobbnak kell lennie, mint az inputként szereplő készletek értéke. Ha ezt a feltételt nem tennénk meg, akkor a nempozitivitás miatt az optimális szintek értéke 0 lenne, amit nem tudnánk értelmezni.

A feltételezés ellentmondásban van a klasszikus Neumann-modell azon feltételezésével, hogy nem pozitív nyereséget értelmezünk. Azonban vállalatok modelljeként tekintve Neumann növekedési modelljét az eredeti feltételezés nem lenne – amint láttuk – tartható.

1. példa. Fejtegetésünket szemléltessük egy számpéldával. Tételezzük fel, hogy az alábbi két technológiával rendelkező gazdaságban három vállalat létezik, valamint két termék:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ebben a gazdaságban a vállalatok a következő termelési technológiával rendelkeznek.

$$1. \text{ vállalat: } d_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$2. \text{ vállalat: } d_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$3. \text{ vállalat: } d_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy az első vállalat esetén a beszerzendő termék a második, aminek egy egységnyi felhasználásával kettő darab első terméket állíthat elő. A másik két vállalatra ugyanígy értelmezhetjük a vektorainkat.

Tegyük most fel, hogy az (1)-(4) és (5)-(8) feladatokat vizsgáljuk. Legyen a nulladik időszak termelési szintje $x_0 = [1,1,1]$, ami azt jelenti, hogy a nulladik periódus végén cserére rendelkezésre álló termékmennyiség

$$D \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ugyanakkor tételezzük fel azt is, hogy három periódus termelési és árképzését vizsgáljuk. Ekkor legyen a negyedik periódus árvektora: p_4 = [1,1], amiből az egységnyi árbevétel (kiadás)

$p_4 \cdot D = [4 \quad 5 \quad 7]$.

Az (1)-(4) feladat induló és megoldási táblája a Microsoft Excel solveréből ekkor:

A célfüggvényben szereplő vektort a

$$\begin{bmatrix} p_1^o & p_2^o & p_3^o & p_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \\ D & -C & 0 \\ 0 & D & -C \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
4,222222	0	0,555556	1,987654	0	2,469136	5,105624	0	1,652949		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	7	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	9	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	1,78E-15	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	7,55E-15	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	3,55E-15	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	7,99E-15	0
0	0	0	0	0	0	4	5	7		31,99314

Innen látható, hogy az optimális megoldás a jobb alsó sarokban látható, ami nagyjából 32 pénzegység. Az optimális megoldást a második sor tartalmazza. Amint látható, a második vállalat nem fog termelni, mert a harmadik vállalat hatékonyabban állítja elő a második terméket.

Az (5)-(8) feladat megoldása, vagyis a Neumann-rendszer megoldását a következő táblázat tartalmazza:

művelet elvégzésével nyerhetjük, amely az időszaki termékekre eső nyereséget tartalmazza. Amint látható, ez a fajlagos zérus, ha a terméket termelik, és negatív, ha nem termelik.

Az optimális célfüggvény értéke zérussal egyezik meg, de az eredmény azt is mutatja, hogy az optimális termelési szintek ekkor erre a megoldásra szintén nullával egyeznek meg.

p11	p12	p21	p22	p31	p32		
1,775034	2,174211	1,493827	1,641975	1,111111	1,444444		
1	2	-3	-1	0	0	5,11E-15	0
3	2	-1	-4	0	0	1,611797	0
5	1	-3	-4	0	0	-8,88E-16	0
0	0	1	2	-3	-1	2,44E-15	0
0	0	3	2	-1	-4	0,876543	0
0	0	5	1	-3	-4	8,88E-16	0
0	0	0	0	1	2	4	4
0	0	0	0	3	2	6,222222	5
0	0	0	0	5	1	7	7
7	9	0	0	0	0		31,99314

Ez a feladat duálisa az előbbinek, ezért lesz az optimális célfüggvény értéke szintén mintegy 32. Az optimális megoldásban a tervezési horizonton mindkét terméket termelik, hiszen pozitív a termékek árnyékára.

A következőkben tételezzük fel, hogy az utóbbi árnyékárak a valódi piaci árak, és próbáljuk ennek segítségével maximalizálni a termelési szintek vektorait, amint azt a (19)-(22) feladatok is teszik. Ekkor az optimális megoldást szolgáltató Microsoft Excel tábla az alábbi:

A Neumann-modell egy másfajta megfogalmazása

A modellt a fentiek ismeretében a következő módon írhatjuk fel, mint a (23)-(28) optimalizálási feladatot:

$$x_t \geq 0, p_t \geq 0 \ (t = 1,2,\ldots,T), \tag{23}$$

$$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0, \tag{24}$$

$$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, \ (t = 2,3,\ldots,T), \tag{25}$$

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0
0	-21,6296	0	0	-13,8889	0	0	-5,66665	0		0

$$-p_t \cdot C + p_{t+1} \cdot D \geq 0, \; (t = 1,2,\ldots,T\text{-}1), \tag{26}$$

$$p_T \cdot C \leq p_{T+1} \cdot D, \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \cdot d_1 \cdot x_0^1 + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_1 - p_t \cdot c_1) \cdot x_t^1 \\ p_1 \cdot d_2 \cdot x_0^2 + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_2 - p_t \cdot c_2) \cdot x_t^2 \\ \ldots \\ p_1 \cdot d_m \cdot x_0^m + \sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot d_m - p_t \cdot c_m) \cdot x_t^m \end{bmatrix} \to opt,$$

ahol $D \cdot x_0$ az ismert készletállomány a tervezési periódus elején, valamint $p_{T+1} \cdot D$ egységnyi kibocsátás értéke a tervezési periódus legvégén.

A feladat így annak a $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ termelési szerkezetnek és $\{p_t\}_{t=1}^{T}$ árrendszernek a felkutatása, ami mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. A vázolt probléma tehát egy játékelméleti, többcélú programozási feladat megoldását igényli. Matematikailag vizsgálva a problémát egy kvadratikus többcélfüggvényes matematikai programozási feladatot nyertünk. (Lásd pl. Krekó (1972) művét.) Az ilyen feladatot visszavezethetjük egy egycélfüggvényes matematikai programozási feladattá, amennyiben a célvektort egy konstans $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ nemnegatív vektorral szorozzuk meg, amelyet az összegző vektorral szorozva éppen egyet kapunk, azaz $1'\lambda = 1$.

A többcélfüggvényes programozás témaköréből ismert, hogy a megoldások halmaza nemkonvex, ugyanis az összes lehetséges λ vektorra meg kellene oldanunk a problémát. A továbbiakban más utat választunk.

A feladat megoldását egyszerűsítsük arra az esetre, amikor a gazdaságban képződő összes nyereséget maximalizáljuk, azaz az előbbi feladat célfüggvénye a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{t=1}^{T} (p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C) \cdot x_t + p_1 \cdot D \cdot x_0 \to \max.$$

Ekkor $\lambda_i = \frac{1}{m}$.

A feladatot még egyszerűbb formában is felírhatjuk, ha az árvektorokat és a tevékenységi szintek vektorát, valamint a mátrixokat összevonjuk:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{T-1} \\ x_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_{T-1} \\ p_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -D & C & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C & \\ 0 & 0 & \ldots & -D & C \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével a (23)-(28) probléma újabb, összevontabb alakja:

$$\tilde{x} \geq 0, \; \tilde{p} \geq 0, \tag{29}$$

$$\tilde{C} \cdot \tilde{x} \leq a, \tag{30}$$

$$\tilde{C}' \cdot \tilde{p} \leq b, \tag{31}$$

$$-\tilde{p} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{x} + a \cdot \tilde{x} + b \cdot \tilde{p} \to \max \tag{32}$$

ahol

$$a = \begin{bmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ D' \cdot p_{T+1} \end{bmatrix}.$$

A vesszővel a transzponáltat jelöltük. Mivel az így felvetett probléma egy kvadratikus programozási feladat, ezért még ez utóbbi feladatot is tovább egyszerűsíthetjük a (33)-(35) alakra:

$$y \geq 0, \tag{33}$$

$$E \cdot y \leq c, \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot y' \cdot E \cdot y + c \cdot y \to \max \tag{35}$$

ahol

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ennek a feladatnak a megoldása Lagrange-függvénnyel nem ad olyan szimmetrikus megoldást, mint a lineáris programozás dualitási eredményei, ezért eltekintünk annak vizsgálatától. A megoldás létezésének elemzésétől is eltekintünk, mert a mátrixokra tett Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) feltételezések garantálják a (33)-(35) programozási feladat megoldását. Foglalkozzunk inkább e feladat stacionárius megoldásaival.

A stacionárius megoldás legyen újra $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$, valamint $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$. Ekkor

$$D \cdot x \geq \alpha \cdot C \cdot x, \tag{36}$$

$$p \cdot C \leq \beta \cdot p \cdot D, \tag{37}$$

$$p \cdot C \cdot x > 0 \tag{38}$$

A p árvektor és az x termelési szintek vektora ebben az esetben is nemnegatív. Ez a modellváltozat tehát három ponton különbözik a klasszikus (11)-(15) Neumann-modelltől. Hiányoznak belőle a (12) és (14) dualitási tulajdonságok, valamint a (13) összefüggésben az egyenlőtlenség előjele megfordult. Az optimális α növekedési rátát és a β árnövekedési rátát optimalizálási feladat megoldásaként kaphatjuk meg.

A modell megoldása így azon (α, x, β, p) egyensúlyi pályák felkutatása, amelyekre α maximális és β minimális. Ha β minimális, akkor $\frac{1}{\beta}$-nak maximálisnak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellben nem kell minden vállalatnak maximális nyereséget elérnie, mint a klasszikus Neumann-modellben, hanem csak egy maximális nyereséget, amint azt a következő összefüggés mutatja:

$$\frac{p \cdot (d_j - c_j)}{p \cdot c_j} \geq \frac{1}{\beta} - 1. \qquad (39)$$

A (39) képlet szerint a j-ik vállalat eszközarányos nyeresége nagyobb, mint egy adott érték, amit a garantált nyereségként definiálhatunk. Extraprofitot azok a vállalatok érhetnek el, amelyeknél a (39) egyenlőtlenség szigorú formában teljesül. Az extraprofit nagysága ekkor az i-ik vállalatra

$$\frac{p \cdot d_i}{p \cdot c_i} - \frac{1}{\beta} > 0.$$

Az egyensúly létezését Hegedűs és Zalai (1978) bizonyították. Ebben az esetben azonban a duális oldalról is hasonlóan bizonyítható az egyensúly létezése.

2. példa. Folytassuk az eredmények szemléltetését az 1. példa mátrixaival és vektoraival. Először az új értelmezés egyensúlyi termelési szintjeit és árvektorait a következő két feladat optimális megoldásaiként kaphatjuk meg:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \alpha \in \Re$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\alpha \to \max$$

A feladat megoldását szintén Microsoft Excellel elő lehet állítani: $x_1 = 0{,}648371$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}351629$.

Az optimális növekedési ütem: $\alpha = 1{,}246616$.

A legalacsonyabb árnövekedést az alábbi feladat megoldása szolgáltatja:

$$p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \beta \in \Re$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\beta \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\beta \to \min$$

Az optimális értékek a következők: $p_1 = 0{,}411277$, $p_2 = 0{,}588723$, $\beta = 0{,}871702$. A garantált profitráta ekkor $\frac{1}{\beta} = 1{,}147181$, vagyis mintegy 15 százalék.

A (33)-(35) feladat megoldását az alábbi táblázat tartalmazza:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	p11	p12	p21	p22	p31	p32		
4,222222	0	0,555556	0	2,555556	1,333333	0	0	1,311111	-1E-06	1,57143	0,857143	0,571428	0	2		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,66E-15	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	-14,24444	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	0	0	-2,89E-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	0	0	-2,22E-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	0	0	-3,285719	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	1,39E-12	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	-4,285713	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	-3,142855	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	2	7
																37,66667

Az optimális megoldás ekkor a tervezési horizonton 37,666667, az optimális termelési szinteket és az árvektorokat a táblázat második, bekeretezett sora tartalmazza. Összevetve ezt a megoldást a klasszikus Neumann-modell megoldásával látható, hogy a gazdaság összes nyeresége majdnem hat pénzegységgel nőtt.

Összegzés

A dolgozat abból a feltételezésből indult ki, hogy a Neumann-modell eljárásainak egy-egy vállalat (iparág) is megfeleltethető meg. Feltételezve, hogy az így definiált vállalatok célja a nyereség maximalizálása, azt kérdeztük, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie az egyensúly eléréséhez. Arra az eredményre jutottunk, hogy a Neumann-modell eredeti feltételei közül kettő továbbra is teljesül, nevezetesen a naturális egyensúly, valamint az időszak elejei készletek értékének pozitivitása, de az áregyensúlynak meg kell fordulnia, vagyis nemnegatív nyereségek kellenek, hogy legyenek az új modellben. Az új modellben a dualitási feltételekről is le kell, hogy mondjunk.

További kutatást igényel, hogy α és β milyen feltételek mellett lehetnek azonosak. Ezenkívül azt is kérdezhetjük, hogy hogyan alakul az egyensúly stacionárius feltétele, ha egy vállalat több eljárással (technológiával) rendelkezik.

Lábjegyzet

[1] A szerző köszöni Zalai Ernőnek a dolgozat korábbi változataihoz fűzött alapos megjegyzéseit. Minden további, dolgozatban maradó hiba és pontatlanság a szerzőt terheli.

Felhasznált irodalom:

Asmanov, Sz. A. (1984): Vvegyenyije v matyematyicseszkuju ekonomiku, Nauka, Moszkva

Bródy A. (1980): Ciklus és szabályozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Dorfman, R. – Samuelson, P.A. – Sollow, R.M. (1958): Linear programming and economic analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

Hegedűs M. – Zalai E. (1978): Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp.

Kemeny, J.G. – Morgenstern, O. – Thompson, G.L. (1956): A generalization of von Neumann's model of an expanding economy, Econometrica 24, p. 115–135.

Koopmans, T.C. (Eds.) (1951): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York

Krekó B. (1972): Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Lancaster, K. (1968): Mathematical economics, Collier-Macmillan Ltd, London

Medvegyev P. (1984): A general existence theorem for von Neumann economic growth model, Econometrica 52, p. 963–974.

Móczár J. (1995): Reducible von Neumann models and uniqueness, Metroeconomica 46, p. 1–15.

Móczár J. (1997): Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models, Metroeconomica 48, p. 280-299.

Neumann, J. von (1945): A model of general economic equlibrium, Review of Economic Studies 13, p. 1–9.

Zalai E. (1999): A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén, Közgazdasági Szemle XLVI., p. 600–628.

Zalai E. (2004): The von Neumann model and the early models of general equlibrium, Acta Oeconomica 54, p. 3–38.

Függelék

A (19)-(22) probléma megoldását arra az esetre vizsgáljuk, amikor a fajlagos árbevétel/ráfordítás nempozitív, azaz $p^o_{t+1} \cdot d_j - p^o_t \cdot c_j \le 0$. Azt látjuk be, hogy ekkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus lehet, azaz $x_t^{jo} = 0$, ($t = 1,2,\ldots,T$). Ezt szekvenciálisan láthatjuk be.

Vizsgáljuk először az x_T^j optimális értékét; feltételezve, hogy a többi optimális termelési szint x_t^{jo}, ($t = 1,2,\ldots, T$-1) ismert. Az optimalizálási feladat alakja ekkor

$$x_T^j \ge 0\ ,$$

$$c_j \cdot x_T^j \le d_j \cdot x_{T-1}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{T-1}^{ko} - c_k \cdot x_T^{ko} \right),$$

$$\left(p_{T+1}^o \cdot d_j - p_T^o \cdot c_j \right) \cdot x_T^j \to \max\ .$$

Mivel a célfüggvény nempozitív, ezért annak felső korlátja zérus. Ezt az értéket akkor éri el a célfüggvény, ha az x_T^{jo} optimális termelési szint nulla, vagyis $x_T^{jo} = 0$. Ennek az összefüggésnek minden egyes vállalatra igaznak kell lennie, ezért $x_T^{jo} = 0$, ($j = 1,2,\ldots,m$).

Tekintsük most a (T-1)-ik periódus optimális termelési szintjeit, ami a következő optimalizálási feladat megoldásaként áll elő:

$$x_{T-1}^j \ge 0\ ,$$

$$c_j \cdot x_{T-1}^j \le d_j \cdot x_{T-2}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} \left(d_k \cdot x_{T-2}^{ko} - c_k \cdot x_{T-1}^{ko} \right),$$

$$-d_j \cdot x_{T-1}^j \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{m} d_j \cdot x_{T-1}^{ko}\ ,$$

$$\left(p_T^o \cdot d_j - p_{T-1}^o \cdot c_j \right) \cdot x_{T-1}^j \to \max\ ,$$

ahol ($j = 1,2,\ldots,m$). Ennek a feladatnak a megoldása $x_{T-1}^{jo} = 0$, ($j = 1,2,\ldots,m$), amint azt az előző optimalizálási feladat megoldásakor is láttuk.

Szekvenciálisan folytatva az optimalizálási feladatok megoldását azt kapjuk, hogy nempozitív árbevétel/ráfordítás esetén a vállalatok optimális tevékenységi szintje zérus, azaz a semmittevés. Ezért abban az esetben, ha az eljárásokat vállalatnak tekintjük, akkor el kell vetni a nempozitív árbevételt, és helyette a nemnegatív árbevételt kell tennünk.

Cikk beérkezett: 2008. 10. hó
Lektori vélemény alapján véglegesítve: 2009 11. hó