Reducibilis Leontief-gazdaságok elemzése: kanonikus versus standard dekompozíció

Zalai Ernő

Kivonat

A klasszikus felfogás szerint a tőkés gazdaságban bér- és a profitráta nagysága szabályozza a nemzeti jövedelem elosztását, és hosszú távú egyensúlyi értékük meghatározza a termékek egyensúlyi árát, a termelési árakat. Egy Leontief-gazdaságban, ahol nincs sem ikertermelés, sem technológia választék, a ráfordítási együtthatók A mátrixa négyzetes és termelési árak fogalma jól meghatározott. A termelési árak fogalmát Sraffa, illetve Neumann modellje alapján általánosítani lehet ikertermelés és technológiai választék esetére is. Sraffa a ricardói árak elemzésekor feltette, hogy egyaránt vannak bázis- és luxustermékek, ahol az előbbiek termelése nélkülözhetetlen bármely termék előállításához. Ezt a fogalmat általánosítva értelmezhetjük a marxi termelési árak esetén a létfenntartó és luxustermékeket, ahol az utóbbi termékek már valóban csak luxusfogyasztás tárgyát képezhetik. Luxustermékek esetén egy gazdaság dekomponálható, és az egyensúlyi profitráta és a termelési árak függnek attól, hogy termelnek-e luxustermékeket is, azok mely csoportjait, és milyen viszony van az egyes részgazdaságok profit- illetve növekedési potenciálja között. Dolgozatunkban a négyzetes mátrixok Gantmacher-féle kanonikus dekompozíciójából kiindulva bevezetjük a standard dekompozíció fogalmát, aminek alapján a luxustermékek egyszerűen beoszthatók olyan algazdaságokba, amelyek meghatározzák mind a termelési árak mellett lehetséges profitrátákat, mind a gazdaság eltérő növekedési ütemmel rendelkező stacionárius állapotait. Az új elemzési eszköz alapján új megvilágításba helyezhető Sraffa ún. standard árun nyugvó elemzése és a Marx–Neumann-féle modell alternatív megoldásainak Morishima és Bromek által adott jellemzése is.

Zalai Ernő
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék,
email: erno.zalai@uni-corvinus.hu

1. Bevezetés

Széleskörű munkamegosztásra épülő, kifejlett és kiterjedt árutermelő gazdaságokban a termelő ágak közvetlen és/vagy közvetett kapcsolatban állnak egymással. Egy Leontief-gazdaságban, ahol nincs sem ikertermelés, sem technológia választék, a ráfordítási együtthatók **A** mátrixa négyzetes. Ilyenkor, mint ismert, az **A** mátrix különböző hatványai, pontosabban azok adott (i, j) pozícióban lévő elemei egyértelműen jelzik a j-edik ágazatnak az i-edik termékei felé közvetlenül vagy más ágazatokon keresztül közvetve megjelenő ráfordítási igényét (pozitív), vagy hiányát (nulla).[1] Az ágazatok közötti ráfordítási kapcsolatok azonban nem mindig teljes körűek, és nem mindig kölcsönösek két adott ágazat között. Létezhetnek úgynevezett *független ágazatcsoportok*, olyan ágazatok, amelyek termeléséhez nincs szükség a többi ágazat termékeire. Ilyenkor az **A** mátrix dekomponálható, más szóval reducibilis.

Ilyenkor létezhet olyan független ágazatcsoport, amelynek termékeire (szolgáltatásaira) – közvetlenül vagy közvetve – minden termék előállításához szükség van. Ebbe olyan alapvető ágazatok tartoznak, amelyek nélkül a gazdaság nem működhet.[2] Ezek kibocsását Sraffa (1960) *bázistermékeknek* nevezte. Már Ricardo is felfigyelt arra, hogy az ilyen alapvető termékek (kéttermékes elemzésében a gabona) döntő szerepet játszanak az egyensúlyi profitráta meghatározásában. Nevezetesen, az egyensúlyi profitráta csak ezek termelésének ráfordítási viszonyaitól függ, a többi, Sraffa által *luxustermékeknek* nevezett javak ráfordítási viszonyai nem befolyásolják ennek nagyságát.

A klasszikus közgazdászok felfogása szerint a bér- és a profitráta nagysága a megtermelt új termék, a nemzeti jövedelem munkások és tőkések közötti elosztását szabályozza, társadalmi osztozkodás eredményeként alakulnak ki, és bizonyos határok között változhatnak. Sraffa a termelési árak ricardói meghatározását alapul véve és általánosítva azt elemezte, hogyan befolyásolja a bér- és a profitráta változása az egyes termékek egyensúlyi (termelési) árát: melyeké nő, s melyeké csökken, ha valamelyik javára megváltozik az elosztási viszony. Az árváltozások irányának meghatározása, vagyis annak eldöntése, mely termék ára nőtt vagy csökkent a változások eredményeképpen, általában függ a választott *ármércétől*, a viszonyítási alaptól. Ezt Ricardo is tudta és hangsúlyozta, ezért élete végéig kereste az ideális ármérce-jószágot, azt a *standardot*, amely biztos viszonyítási alapot nyújt a fenti kérdés eldöntéséhez. Egy olyan termék lehetne ilyen *standard áru*, amelynek árbevétele és anyagköltsége egymással arányosan változik, vagyis a bér- és a profitráta megváltozása, változatlan árszint mellett, a termelésében keletkező hozzáadott érték nagyságát nem, csak annak elosztását érinti.

[1] Hivatkozás hiányában a kevésbé ismert fogalmakat és állításokat az olvasó megtalálja Zalai (2012) könyvében.

[2] A gazdaság elméleti modelljeiben – legalábbis első megközelítésben – rendszerint külkereskedelem tekintetében zárt gazdaságokat vizsgálunk. Itt is ebből a feltevésből indulunk ki.

Ilyen egyedi terméket általában nehéz találni, de Ricardo kéttermékes modelljében ilyennek bizonyult a gabona, a bázistermék. Sraffa ennek fogalmát általánosította a standard áru kategóriájával, amelyet egy olyan *összetett* (kompozit) *árukosárként* (**s**) definiált, amely termelése esetén a kibocsátás és az anyagráfordítás termékösszetétele megegyezik egymással. Egy Leontief-gazdaságban tehát a standard árukosár nem más, mint az **A** ráfordítási együttható mátrix egy nemnegatív jobb oldali sajátvektora: $\lambda\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s}$. (A λ sajátérték reciprokát Sraffa nyomán *standard tényezőnek* fogjuk nevezni.) Ha a standard árukosár arányaiban egyértelműen meghatározott, akkor betölti a Ricardo által keresett ideális ármérce-jószág szerepét. Reducibilis gazdaságban azonban a standard árukosár arányaiban nem mindig egyértelműen meghatározott, s ilyenkor egyáltalán nem mindegy, melyiket választjuk ármércének. Az, hogy mikor választhatjuk egyáltalán valamelyiket ármércének, a profitráta nagyságától is függ. Dolgozatunkban ezt fogjuk többek között közelebbről megvizsgálni a reducibilis **A** mátrix általunk bevezetett *standard dekompozíciója* segítségével. Az **A** mátrix ilyen felbontása esetén a főátlóban olyan négyzetes blokkok lesznek, amelyek domináns sajátértékeinek reciprokai a lehetséges standard tényezők. (Ezért nevezzük standard dekompozíciónak.) Az így nyert standard tényezők és a hozzájuk tartozó standard árukosarak segítségével kimerítően elemezhetjük és jellemezhetjük mind a ricardói, mind a marxi termelési árak alakulását, valamint a bér- és a profitráta közt fennálló átváltási lehetőségeket. Megmutatjuk, hogy a lehetséges profitráták tartományát intervallumokba, a luxustermékeket pedig ezekhez tartozó különböző rendű osztályokba oszthatjuk be, annak megfelelően, hogy pozitív mennyiségben termelhetők-e az adott profitráta mellett kialakuló egyensúlyi árak esetén.

Túl a termelési árak klasszikus elemzésén, az úgynevezett Neumann–Leontief-modell lehetséges egyensúlyi megoldásait is megvizsgáljuk a standard dekompozíció alapján. A Neumann-modell azon egyszerű esetéről van szó, amelyben nincs sem ikertermelés, sem technológiai választék, azaz Leontief-technológiára épül, és a ráfordítási együtthatók tartalmazzák a foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztást (teljes körű ráfordítások). A standard dekompozíció alapján kimerítően jellemezhetjük ennek a modellnek a lehetséges megoldásait is. A stacionárius egyensúlyi árak részben a termelési árak klasszikus fogalmát általánosítják, de egyúttal leszűkítik lehetséges értelmezésüket azáltal, hogy a modellben nincs luxusfogyasztás. Ennek a modellnek az elemzése mindazonáltal meg fogja világítani a Morishima (1971), illetve Bromek (1974a) által a Neumann-modell alternatív megoldásainak jellemzésére bevezetett dekompozíciós eljárások természetét, és a kapott modell korlátozott közgazdasági jelentőségét.

Az áttérés a teljes körű ráfordítások együttható mátrixára nem problémamentes. Egyrészt a bázistermékek szerepét átveszik az úgynevezett *létfenntartó termékek*, amelyek tartalmazzák a Sraffa-féle bázistermékeket, ha egyáltalán vannak ilyenek, de jellemzően a termékek szélesebb körét ölelik fel. Már emiatt is megváltozhat a ráfordítási együttható mátrix szerkezete. Másrészt a teljes körű ráfordítások esetén a mátrix szerkezete és így standard dekompozíciója általában függ a fogyasztás szintjétől. Meg fogjuk mutatni, hogy a kétféle ráfordítási együttható mátrixszal értelmezett (a valódi és a kvázi) Neumann–Leontief-modell lehetséges egyensúlyi tényezői egyaránt a Sraffa-féle standard tényezők közül kerülhetnek ki.

A reducibilis négyzetes mátrixok standard dekompozíciója a Gantmacher (1967) által bevezetett kanonikus dekompozícióra épül, az abból nyert kanonikus blokkok célszerű rendezésén és alkalmas csoportokba összevonásán nyugszik. A standard dekompozíciós séma kidolgozásához az ötletet Kurz és Salvadori (1995) könyvéből merítettük, akik hasonló felbontás alapján osztályozták a luxustermékeket Sraffa modelljében. Dolgozatunk terjedelmi korlátai nem teszik lehetővé az elemzések részletes ismertetését, ezeket az érdeklődő olvasó megtalálja Zalai (2012) könyvében.

2. A kanonikus dekompozíció és a szükséges alapfogalmak

A négyzetes mátrixok *kanonikus dekompozíciója* Gantmacher (1967) nevéhez fűződik. Könnyen belátható, hogy a reducibilis (dekomponálható) négyzetes mátrixok, szükség esetén soraik és oszlopaik azonos átrendezésével, olyan trianguláris alakra hozhatók, amelynek főátlójában irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ négyzetes mátrixok szerepelnek. Az egyetlen elemből álló elsőrendű mátrixot akkor is irreducibilisnek tekintjük, ha az 0. Tetszés szerint választhatunk a felső vagy alsó trianguláris alak között. Mi felső háromszög alakot fogunk használni, amelyben $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$, valahányszor $j < k$.

Ennek megfelelően az ágazatok, illetve a termékek indexeit az $I_1, I_2, \ldots I_s$ (összesen tehát s) részhalmazokba rendezve az alábbi felbontáshoz jutunk:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{jj} & \cdots & \mathbf{A}_{js} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{pmatrix}.$$

Egyszerű indukciós úton beláthatjuk, hogy egy reducibilis mátrix mindig átrendezhető ilyen alakba. Mindenekelőtt meg kell keresnünk a legszűkebb független ágazatcsoportot, ez lesz az I_1 indexhalmaz, amely együttható mátrixának, $\mathbf{A}_{11}$-nek irreducibilisnek kell lennie. Ha ugyanis reducibilis volna, akkor lenne benne további, nála szűkebb független ágazatcsoport. Miután ezt megtaláltuk, elhagyjuk a mátrixból az I_1 indexhalmaz elemeihez tartozó sorokat és oszlopokat. Ha a maradékként kapott mátrix irreducibilis, akkor készen vagyunk, ez lesz a felbontás második ágazatblokkja. Ellenkező esetben a fennmaradó résszel megismételjük az előbbi folyamatot. Megkeressük ennek legszűkebb független ágazatcsoportját, amelynek indexei megadják az I_2 indexhalmazt, a hozzájuk tartozó saját ráfordítási együtthatók az $\mathbf{A}_{22}$ mátrixot, az I_2-ben levő termékek I_1-re vonatkozó együtthatói az $\mathbf{A}_{12}$ mátrixot. Az eljárást addig folytatjuk, míg végül egy irreducibilis mátrix marad. Világos, hogy véges sok termék esetén véges sok lépés után eljutunk ehhez. Ez lesz az $\mathbf{A}_{ss}$ mátrix.

A fenti úton kapott felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix ***kanonikus dekompozíciójának***, ennek megfelelően az I_j indexhalmazokat ***kanonikus blokkoknak***, a főátlóban levő $\mathbf{A}_{jj}$ mátrixot a j-edik blokk ***saját ráfordítási együttható mátrixának*** nevezzük, amelynek domináns sajátértékét λ_j-vel jelöljük, tehát $\lambda_j = \lambda(\mathbf{A}_{jj})$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Megjegyzés:
Az olyan egymást követő ágazatokat, amelyek kölcsönösen függetlenek egymástól és a saját termékeikre sincs szükségük, összevonhatjuk egy közös blokkba. Az így képzett blokk saját ráfordítási együtthatóinak mátrixa nulla lesz ($\mathbf{A}_{jj} = \mathbf{0}$). Ez a lehetőség a *kanonikus dekompozíció* alábbi, *alternatív meghatározását* kínálja: az $\mathbf{A}$ mátrix olyan négyzetes, trianguláris felbontása, amelynek főátlójában csak irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ vagy $\mathbf{0}$ mátrixok szerepelnek.

Létezhetnek egymástól *kölcsönösen független* I_j és I_k ágazatcsoportok is, amelyek esetén $\mathbf{A}_{jk} = \mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$, azaz kölcsönösen nincs szükségük egymás termékeire. Az ilyen blokkok tetszőleges sorrendben elhelyezhetők a kanonikus dekompozícióban. A későbbiek szempontjából fontos lesz az alábbi megállapodás: ilyen esetben mindig azt a blokkot tesszük *előbbre*, amelyik saját ráfordítási együttható mátrixának domináns *sajátértéke kisebb*.

Regulárisnak nevezzük a ***kanonikus dekompozíciót***, ha az egymástól *kölcsönösen független* ágazatcsoportok közül a kisebb domináns sajátértékű blokk mindig megelőzi a nagyobbal rendelkezőt.

Szükségünk lesz az alábbi fogalmakra is.

1. Definíció. *A termelési rendszerek legfontosabb jellemzői:*

i) Az $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrixszal jellemzett termelési rendszer akkor képes önmagát* α *szinten újratermelni, ha létezik olyan* $\alpha > 0$ *és* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$*, amelyek esetén* $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$.[3]

ii) Az $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrixszal jellemzett termelési rendszer növekedési potenciálja az a legnagyobb egyöntetű (arányos) növekedési ütem, amelyet egyidőszakos termelési periódus esetén el lehet érni, ha a termékeknek nincs külső felhasználása:*
$$\rho^0 = \max\{\rho : \exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geqq (1+\rho)\mathbf{A}\mathbf{x}\}.$$
A definíció tehát olyan, többnyire hipotetikus, zárt termelési rendszert feltételez, amelyben minden kibocsátási többlet a következő időszaki ráfordítások, így a

[3] Az azonos méretű vektorok és mátrixok közötti nagyságrendi relációkra a következő jelöléseket használjuk: $\geqq$ nagyobb egyenlő, $\geq$ nagyobb egyenlő, de legalább egy elemében nagyobb. Ennek megfelelően $\mathbf{a} \geqq \mathbf{0}$ nemnegativitást, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ *féligpozitivitást* jelent. Helyenként „legalább féligpozitív” megjelöléssel hangsúlyozzuk, hogy akár minden eleme pozitív lehet.

termelési szint növelésére lehetne fordítani. A növekedési potenciált kifejezhetjük a növekedési tényezővel is, ahol $\alpha^0 = 1+\rho^0$.

iii) *A növekedési potenciál nagysága megegyezik termelési rendszer profitpotenciáljával, amit akkor érhetne el, ha a felhasznált termékeken kívül nem lenne más (külső) ráfordítás, azaz*

$$\pi^0 = \max\{\pi : \exists\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\,\mathbf{pA}\}\,.$$

A profitpotenciált is kifejezhetjük tényezős alakban: $\beta^0 = (1+\pi^0)$.

iv) *A fentiekhez hasonlóan értelmezzük,* $\mathbf{A}$ *helyébe* $\mathbf{A}_{jj}$*-t helyettesítve, egy négyzetesen felbontott ráfordítási együttható mátrix j-edik blokkjának saját növekedési, illetve profitpotenciálját.*

v) *A profitpotenciál mellett gyakran használjuk a garantált profitráta fogalmát is, amely alatt a legalább féligpozitív árak mellett lehetséges legkisebb egyensúlyi profitrátát értjük, azaz*

$$\pi^* = \min\{\pi : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}\}\,.$$

Ez képezi a pozitív bérráta és árak mellett lehetséges profitráták felső határát.

vi) *Az* I_1 *indexcsoportba sorolt termékek minden termék (újra)termeléséhez nélkülözhetetlenek (szükségesek), ha* $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$*, valahányszor* $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{Ax}$*,* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$*,* $\alpha > 0$*, ahol* $\mathbf{x}_1$ *az* $\mathbf{x}$ *vektor* I_1 *indexhalmazhoz tartozó részvektora.*

vii) *Egyidőszakos tőkemegtérülés esetén, amikor a felhasznált és a tőkeként megelőlegezett termelési eszközök nagysága egyenlő, a termelési árak ricardói és marxi meghatározása az alábbi képletekkel adható meg:*

$$\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{pA} + w_r l, \;\; \textit{illetve} \;\;\; \mathbf{p} = (1+\pi)\,(\mathbf{pA} + w_m l)\,,$$

ahol $\mathbf{p}$ *az árak,* l *a fajlagos munkaráfordítások vektora,* w *és* π *a bér- és a profitráta. Látjuk, hogy* $w_r = (1+\pi)w_m$*, ezért mindkét meghatározás ugyanazon árarányokat eredményezi. Közgazdasági szempontból az a különbség közöttük, hogy Ricardo (és az őt követő Sraffa) feltevése szerint a munkások, Marx feltevése szerint a tőkések előlegezik meg a munkabéreket.*

A termelési árak $\pi = 0$ *határesetben kapott értékét munkaérték-arányos áraknak, a* $w = 0$ *esetben kapott* $\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{pA}$ *meghatározást kielégítő pozitív* π *és legalább féligpozitív* $\mathbf{p}$ *párokat tőkeérték-arányos árrendszernek nevezzük.*[4]

Megjegyzés:

Pontosabb lenne a *növekedési* potenciál kifejezés helyett ***önmegújító potenciált*** használni,

[4] Az így kapott árak az első esetben a halmozott munkaráfordításokkal, $\mathbf{l}\,(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$-vel, a másodikban a halmozott tőkelekötéssel, a $\mathbf{pB}\,(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ tőkeértékekkel (éves tőkemegtérülés esetén $\mathbf{B} = \mathbf{A}$) arányosak, erre utalnak az elnevezések.

növekedésről ugyanis csak akkor beszélhetünk, ha $\rho > 0$ $(\alpha > 1)$. Többnyire mégis a kifejezőbb növekedési potenciál fogalom használata mellett maradunk, már csak azért is, mert implicite vagy explicite mindig feltesszük, hogy a vizsgált gazdaságok ráfordítási együttható mátrixa produktív, így a növekedési, illetve profitpotenciál pozitív. Időnként azonban a rövidebb *önmegújító* potenciált fogjuk használni a *közös növekedési, illetve profitpotenciál* fogalom helyett.

A *Sraffa-féle mátrix* fogalmát a kanonikus dekompozíció alapján a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

> Az $\mathbf{A}$ reducibilis ráfordítási együttható mátrixot akkor nevezzük ***Sraffa-féle mátrixnak***, ha kanonikus dekompozíciójában az I_1 halmazban levő javak minden termék újratermeléséhez nélkülözhetetlenek, azaz *bázistermékek.*

1. Tétel (A Sraffa-féle mátrixok és a bázistermékek jellemzése a kanonikus alakkal). *A kanonikus alakba rendezett* $\mathbf{A}$ *ráfordítási együttható mátrix esetén az* I_1 *halmazba tartozó javak akkor és csak akkor bázistermékek, ha* $\mathbf{A}_{11}$ *irreducibilis és* $\mathbf{A}_{11} \neq \mathbf{0}$*,*[5] *továbbá a főátló bármely más* $\mathbf{A}_{jj}$ *blokkja felett elhelyezkedő* $\mathbf{A}_{1j}, \mathbf{A}_{2j}, \ldots, \mathbf{A}_{j-1,j}$ $(j > 1)$ *mátrixok közül legalább egyben található pozitív elem, azaz*

$$\mathbf{1A}_{1j} + \mathbf{1A}_{2j} + \ldots \mathbf{1A}_{j-1,j} \geq \mathbf{0} \quad (j > 1). \tag{1}$$

Bizonyítás:
Szükségesség: Ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis mátrix, vagy elsőrendű nullmátrix esetén nulla lenne, akkor már az I_1 indexhalmazba eső termékek termeléséhez sem lenne szükség minden I_1-beli termékre. Ha pedig valamely $j > 1$ esetén nem teljesülne az (1) feltétel, akkor a j-edik blokk termékeinek előállításához nem lenne szükség más ágazatcsoportbeli termékekre, így bázistermékekre sem.

Elégségesség: $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, vagy elsőrendű nullmátrix esetén pozitív, ebből következően az I_1 indexhalmazba eső termékek mindegyikének termeléséhez szükség van minden I_1-beli termékre. A (1) feltételből pedig az $\mathbf{A}_{jj}$ mátrix irreducibilis volta miatt

$$\left(\mathbf{1A}_{1j} + \mathbf{1A}_{2j} + \cdots + \mathbf{1A}_{j-1,j}\right)\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{jj}\right)^{-1} > \mathbf{0}$$

következik, ami azt jelzi, hogy a j-edik ágazatcsoport termékeinek termeléséhez legalább egy őt megelőző – mondjuk az l-edik $(l < j)$ – ágazatcsoport termékére szükség van. Ugyanígy beláthatjuk, hogy az l-edik ágazatcsoport termékeinek termeléséhez szükség van legalább egy őt megelőző ágazatcsoport termékére. Mivel j véges, és minden lépésben legalább eggyel csökken az index, így előbb-utóbb eljutunk az első blokkhoz. E lépések sorozatá-

[5] Erre azért van szükség, mert $\mathbf{A}_{11}$ elvben egyelemű, éspedig nulla is lehetne a kanonikus dekompozícióban. Ha $\mathbf{A}_{11}$ rendje nem 1, akkor irreducibilis voltából már következik, hogy $\mathbf{A}_{11} \neq \mathbf{0}$.

val tehát igazolhatjuk, hogy az I_j ágazatblokkban levő termékek előállításához közvetlenül vagy közvetve szükség van az I_1 indexhalmazban található minden termékre.

❑

A továbbiakban **A**-val fogjuk jelölni a ráfordítási együttható mátrixot, ha az csak az elhasznált termelési eszközök pótlási igényeit tartalmazza. A *teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixát*, amely a termelési eszközök pótlási igényein túl tartalmazza a munkaerő újratermeléséhez szükséges javak ráfordításait is, az $\check{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} + \varphi_s \mathbf{s}^c \circ \mathbf{l})$, illetve, ha hangsúlyozni kívánjuk, hogy függ a fogyasztás φ_s szintjétől, az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ mátrixszal fogjuk jelölni, ahol $\mathbf{s}^c$ az egy munkaórára jutó (szükséges) fogyasztás, $\mathbf{l}$ a fajlagos munkaerő-igények vektora, míg $\circ$ a diadikus szorzat jele. A bemutatásra kerülő elemzések így egyaránt felhasználhatók lesznek a termelési árak ricardói és marxi meghatározásának elemzésében. Ha a munkaerő nélkülözhetetlen, akkor azok javak, amelyek minden termék újratermeléséhez nélkülözhetetlenek, az $\check{\mathbf{A}}$ mátrix esetén megegyeznek azokkal a termékekkel, amelyek nélkülözhetetlenek a munkaerő újratermeléséhez. Ezért az ilyen termékeket *létfenntartó termékeknek* nevezzük. Ezek tehát olyanok, mint az **A** mátrix esetén a bázistermékek, de az utóbbiak létezése nem szükséges ahhoz, hogy legyenek létfenntartó termékek. Ennek ellenére feltesszük, hogy léteznek bázistermékek, amelyek természetesen mindig létfenntartó termékek is, de az utóbbiak köre jellemzően jóval szélesebb. Egyszerűen igazolhatjuk az alábbi állításokat.

2. Tétel. *Bázis- (**A** mátrix), illetve létfenntartó ($\check{\mathbf{A}}$ mátrix) termékek létezése esetén:*

i) *az **A** ráfordítási együtthatókkal jellemzett termelési rendszer, illetve $\check{\mathbf{A}}$ teljes körű ráfordítási együtthatókkal adott gazdaság akkor és csak akkor képes magát α* szinten újratermelni*, ha a bázis-, illetve a létfenntartó termékek alrendszere is képes rá az adott $\alpha > 0$ mellett;*

ii) *a ráfordítási együttható mátrixok, azaz a teljes rendszer* növekedési potenciálja *(α^0, illetve ρ^0) megegyezik a bázis-, illetve létfenntartó termékek alrendszerének növekedési potenciáljával (α_1, illetve ρ_1);*

iii) *ha $\lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11}) = \lambda(\mathbf{A})$, azaz $\lambda_j \leqq \lambda_1$, akkor a $\pi^* = \pi^0$, azaz a garantált profitráta megegyezik a profitpotenciállal.*

Bizonyítás:
Nézzük az **A** mátrix esetét. Az állítások igazolásához bontsuk fel az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenségeket az **A** mátrix kanonikus formája alapján:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 &\geqq \alpha(\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{A}_{1s}\mathbf{x}_s),\\
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{22})\mathbf{x}_2 &\geqq \alpha(\mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 + \cdots + \mathbf{A}_{2s}\mathbf{x}_s),\\
&\vdots\\
(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{ss})\mathbf{x}_s &\geqq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ad i) *Szükségesség:* A fenti felbontás alapján egyszerűen belátható, hogy az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségek teljesülése esetén $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ szükségképpen, mivel bázistermékekre mindig szükség van, ha egyáltalán van termelés. Ebből következik, hogy a bázistermékek alrendszere képes magát α szinten újratermelni.

Elégségesség: Ha pozitív α mellett található olyan $\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}$ vektor, amely esetén $(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$ (ami miatt $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ szükségképpen), akkor az $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ vektor szükségképpen eleget tesz az $\mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ feltételeknek, amit igazolni kellett.

ad ii) A második állítás az első egyenes következménye.

ad iii) A garantált profitráta a $\mathbf{p} = (1+\pi)\mathbf{p}\mathbf{A}$ képlettel meghatározott, úgynevezett *tőkeérték-arányos árrendszerek* profitrátái közül a legkisebb. A meghatározásból adódóan $(1+\pi)$ csak az $\mathbf{A}$ mátrix olyan sajátértékének reciproka lehet, amelyhez tartozik bal oldali nemnegatív sajátvektor. A domináns sajátérték ilyen, tehát π^0 lehetséges, éspedig a lehetséges tőkeérték-arányos árrendszerek legkisebb profitrátája.

❑

3. A ráfordítási együttható mátrixok standard dekompozíciója

Ha vannak luxustermékek, és a bázistermékek blokkjának domináns sajátértéke kisebb, mint a luxustermékek blokkjáé, akkor érdemes az $\mathbf{A}$ mátrix *reguláris* kanonikus dekompozícióját átrendezni, nevezetesen, az egyes ágazatblokkokat tágabb, immár nem feltétlenül irreducibilis ágazatcsoportokba összevonni. Ez lehetővé teszi mind a termelési árak és a standard rendszer, mind a stacionárius egyensúlyi állapotok teljesebb körű jellemzését. Az átalakítást a következő úton végezzük el.

Vegyük a kanonikus alakba rendezett $\mathbf{A}$ mátrix blokkjai domináns sajátértékeinek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sorozatát. Tegyük fel, hogy az n_1-edik indexig rendre azt tapasztaljuk, hogy $\lambda_j \leqq \lambda_1$ (vagyis $\alpha_j \geqq \alpha_1$), de $\lambda_{n_1+1} > \lambda_1$ ($\alpha_{n_1+1} < \alpha_1$). Másképpen fogalmazva: a luxustermékek $2 \leqq j \leqq n_1$ indexű blokkjainak legalább akkora az önmegújító potenciálja, mint a bázistermékeké, de a következő blokké már kisebb. Ahogy erre a lehetőségre már a Sraffa-féle standard áru elemzésekor utaltunk, az utóbbiakat, azaz a $2 \leqq j \leqq n_1$ indexű blokkokat összevonhatjuk a bázistermékek blokkjával, mivel minden olyan profitráta mellett lesznek pozitív termelési áraik, amelyek esetén a bázistermékeké pozitív, és növekedési potenciáljuk nem korlátozza a bázistermékek egyébként elérhető növekedési ütemét.

Az így képzett blokkot fogjuk ***első osztályú*** termékeknek nevezni, és ezen az úton tovább haladva ***magasabb osztályú*** termékeket is értelmezhetünk a következő módon. Állítsuk sorba a reguláris kanonikus dekompozíció alapján kapott irreducibilis $\mathbf{A}_{jj}$ ráfordítási együttható mátrixok domináns sajátértékeit és a termékek indexhalmazait az alábbi csoportosításban:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1}; \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}; \lambda_{n_2+1}, \ldots; \lambda_m, \ldots, \lambda_s,$$

illetve

$$I_1, I_2, \ldots, I_{n_1}; I_{n_1+1}, \ldots, I_{n_2}; I_{n_2+1}, \ldots; I_m, \ldots, I_s.$$

A pontosvesszők mindig olyan helyeket jeleznek, ahol a sorban következő sajátérték nagyobb, mint az őt megelőző szakasz első sajátértéke: $\lambda_{n_1+1} > \lambda_1$, $\lambda_{n_2+1} > \lambda_{n_1+1}$ és így tovább. Ebből következően azt is jelzi, hogy az előző szakaszban nem akadt az elsőnél nagyobb sajátérték, vagyis $\lambda_j \leqq \lambda_1$ minden $2 \leqq j < n_1$, $\lambda_j \leqq \lambda_{n_1+1}$ minden $n_1 + 1 \leqq j < n_2$, esetén és így tovább. Tegyük fel, hogy a fenti módon összesen m csoportba tudtuk sorolni a kanonikus blokkokat. Az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris kanonikus dekompozícióját ennek megfelelően átrendezhetjük az alábbi alakba:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^0 & \mathbf{A}_{12}^0 & \ldots & \mathbf{A}_{1m}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^0 & \ldots & \mathbf{A}_{2m}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_{mm}^0 \end{pmatrix}$$

A reguláris kanonikus dekompozícióból a fenti módon képzett felbontást ***standard dekompozíciónak*** nevezzük, az egyes blokkokba tartozó termékek indexhalmazait $I_1^0, I_2^0, \ldots, I_m^0$ szimbólumokkal jelöljük, ahol I_1^0 az $I_1, I_2, \ldots, I_{n_1}$ halmazok, I_2^0 az I_{n_1+1}, $\ldots, I_{n_2}$ halmazok unióját jelöli. A felbontás I_k^0 indexhalmazait, illetve $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrixait ***standard blokkoknak***, a k-adik blokkba tartozó javakat ***k-ad osztályú*** termékeknek fogjuk nevezni.

Könnyen belátható, hogy $m \geqq 2$ szükségképpen, valahányszor vannak luxustermékek, és a bázistermékekhez tartozó blokk domináns sajátértéke kisebb, mint a luxustermékek együtteseé, amit a továbbiakban fel is teszünk.

A felbontás elnevezése Sraffa standard rendszeren nyugvó elemzésére utal. Ebből már sejthető, hogy valamilyen módon a standard blokkokhoz lehet kötni a lehetséges standard arányokat, amit meg is fogunk mutatni. Kurz és Salvadori (1995) a termelési eszközök ráfordításait tartalmazó $\mathbf{A}$ együttható mátrix fentihez hasonló, bázis-, illetve különböző *rendekbe* sorolt luxustermékek szerinti felbontását alkalmazták. Náluk az I_1^0 indexhalmazban található luxustermékek képezik a luxustermékek *első rendjét*, az $I_2^0, I_3^0, \ldots, I_m^0$ blokkok pedig a luxustermékek *második, harmadik* stb. *rendjét*.

A standard dekompozícióban egyrészt egy blokkban szerepeltetjük a bázistermékeket és az elsőrendű luxustermékeket, másrészt a Kurz és Salvadori által egységesen kezelt magasabb rendű (nálunk osztályú) luxustermékeket tovább fogjuk bontani *elsődleges* és *másodlagos* termékekre, attól függően, hogy az adott blokk által meghatározott standard rendszerben termelhetik-e őket. Majd látni fogjuk, hogy ez a felbontás sok szempontból megegyezik az első osztály bázis- (elsődleges) és elsőrendű luxus- (másodlagos) termékek szerinti felosztásával, és annak számos matematikai tulajdonságával rendelkezik.

Morishima (1971) és Bromek (1974a) az általános LTM-technológián alapuló Neumann-modell termékeit és tevékenységeit különböző *osztályokba* sorolták a lehetséges egyensúlyi megoldások alapján (innen kölcsönöztük az osztály megnevezést), és ennek alapján bontották fel a modell ($\mathbf{K}$, $\check{\mathbf{R}}$) kibocsátási és ráfordítási együttható mátrixait, ahol $\check{\mathbf{R}}$ a teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixa.[6] A mátrixok felbontására kidolgozott eljárásuk a kanonikus dekompozíció logikáján alapult. Először meghatározták a maximális növekedési ütemű megoldást, s ennek alapján, valamelyest eltérő csoportosítást alkalmazva, kiválasztották a termékek és tevékenységek első osztályba sorolandó részét. Ezek sorait és oszlopait eliminálva folytatták az eljárást a mátrixok fennmaradó részével, így azonosítva a magasabb osztályú termékeket és tevékenységeket. Az input-output modell esetén nem kell előállítani az egyensúlyi megoldásokat. A termékek ilyen célú előrendezésének feladatát maga a kanonikus dekompozíció látja el. Ennek ismeretében a termékeket (és a hozzájuk tartozó eljárásokat) a kanonikus blokkok sajátértékei alapján már egyértelműen standard osztályokba sorolhatjuk. A Leontief-technológián alapuló *Neumann-modellben* ezek fogják megadni a lehetséges egyensúlyi megoldásokat.

4. A standard dekompozíció tulajdonságai

A fent jelzett kapcsolatok pontosabb leírásához és jellemzéshez mindenekelőtt felsoroljuk a standard dekompozíció könnyen igazolható, a definícióból következő fontos tulajdonságait.

1. Megállapítás (A standard dekompozíció jellemzői).

i) I_1^0 sohasem üres, és tartalmazza a bázistermékeket (de tartalmazhat luxustermékeket is);

ii) $0 < \lambda(\mathbf{A}_{11}^0) < \lambda(\mathbf{A}_{22}^0) < \ldots < \lambda(\mathbf{A}_{mm}^0) = \lambda(\mathbf{A})$, ahol $\lambda(\mathbf{A}) < 1$, ha az $\mathbf{A}$ mátrix produktív;

iii) ha $\mathbf{A}_{kk}^0$ reducibilis, akkor létezik irreducibilis blokkokból álló kanonikus dekompozíciója;

iv) az $\mathbf{A}_{kk}^0$ kanonikus dekompozíciójában a főátlóban szereplő $\mathbf{A}_{jj}^k$ mátrixok domináns sajátértékei között a $\lambda_j^k \leqq \lambda_1^k$ nagyságrendi reláció fog teljesülni minden j esetén;

v) mivel *reguláris* kanonikus dekompozícióból indultunk ki, ezért egyetlen I_k^0 standard blokk $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrixában sem szerepelhet olyan független

[6] Az I-O technológia kibocsátási együttható mátrixa egységmátrix, így eleve kanonikus dekompozícióban adott.

alblokk, amelynek domináns sajátértéke kisebb, mint $\lambda_k = \lambda_1^k$. (Az $\mathbf{A}$ mátrix kanonikus dekompozíciójában ugyanis ezeknek – a korábbi megállapodás értelmében – előbb kell szerepelniük.) Ha tehát az $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együttható mátrix *reducibilis*, akkor csak a következő két eset valamelyike lehetséges:

a) $\mathbf{A}_{kk}^0$ kanonikus dekompozíciójában csak olyan, egymástól kölcsönösen független blokkok szerepelnek, amelyeknek egyaránt λ_k a domináns sajátértéke, vagyis ugyanakkora az önmegújító potenciálja ($\mathbf{A}_{kk}^0$ blokkdiagonális mátrix);

b) az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixnak létezik olyan

$$\mathbf{A}_{kk}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^k & \mathbf{A}_{12}^k \\ 0 & \mathbf{A}_{22}^k \end{pmatrix}$$

felbontása, amelynek az I_1^k blokkja egymástól kölcsönösen független, azonosan λ_k domináns sajátértékű blokkokból tevődik össze (*elsődleges k*-ad osztályú termékek), az I_2^k blokkja pedig olyan (*másodlagos*) termékekből, amelyek termeléséhez szükség van *elsődleges k*-ad osztályú termékre. Másképpen fogalmazva: ha az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrix kanonikus dekompozíciója főátlójában vannak olyan alblokkok, amelyek domináns sajátértéke λ_k-val egyenlő, két eset lehetséges. Az adott blokk termékei az első és a többi elsődleges termék blokkjától független, szintén elsődleges termékek vagy olyan másodlagos termékek, amelyek előállításához feltétlenül szükség van valamelyik elsődleges blokk termékére.[7]

Az utolsó a standard dekompozíció legfontosabb, kritikus sajátossága. Emiatt a főátlóban szereplő $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixok, ha dekomponálhatók, minden igazán fontos tulajdonságukban meg fognak egyezni a *Sraffa-típusú* mátrixokkal, így azok általánosításának tekinthetők.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező ráfordítási együttható mátrixokat ***kvázi Sraffa-típusú mátrixoknak*** nevezzük, amelyek általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$, a másodlagos termékektől független ($\mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}$) ***elsődleges termékek*** I_1 blokkjának ráfordítási együttható mátrixa ($\mathbf{A}_{11}$) irreducibilis, vagy irreducibilis blokkokból álló diagonális mátrix, és minden ***másodlagos termék*** (I_2 blokk) termeléséhez szükség van elsődleges termékre, azaz $\mathbf{A}_{12} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})^{-1} \neq \mathbf{0}$.

---

[7] Morishima az elsődleges termékeket „igazi” (true) k-ad osztályú, a másodlagosakat „félig” (semi) k-ad osztályú termékeknek nevezte.

2. Megállapítás (A standard osztályokat alkotó Sraffa- és a kvázi Sraffa-mátrixok közös tulajdonságai).

Legyen $\mathbf{A}$ egy olyan valódi, vagy kvázi Sraffa-típusú ráfordítási együttható mátrix, amelyben a luxus-, illetve a másodlagos termékek profitpotenciálja nem kisebb, mint a bázis-, illetve az elsődleges termékeké, azaz $\lambda^0 = \lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11}) \geqq \lambda(\mathbf{A}_{22}) = \lambda_2 > 0$.

i) a másodlagos termékek termeléséhez mindig szükség van elsődleges termékekre;

ii) ha az I_2 blokkba tartozó termékek növekedési potenciálja nem kisebb az I_1 blokkénál, akkor a $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sajátérték-egyenlet megoldása csak $\lambda = \lambda_1$ és $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ lehet;

iii) ezek között van olyan is, amelyben $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$;

iv) a $\lambda \mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{A}$ egyenletet kielégítő nemnegatív $\mathbf{p}$ sajátvektorban $\mathbf{p}_1$ csak akkor lehet legalább féligpozitív ($\mathbf{0}$-tól különböző), ebből adódóan $\lambda = \lambda_1$, ha $\lambda_2 < \lambda_1$, vagy az I_2 blokkon belül létezik olyan, a többitől független alblokk, amelynek domináns sajátértéke kisebb, mint λ_1;

v) a $\lambda_1 \mathbf{p} \leqq \mathbf{p}\mathbf{A}$ egyenlőtlenséget kielégítő nemnegatív $\mathbf{p}$ vektorok között mindig van olyan, amelyben $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$.

A kvázi Sraffa-típusú mátrixokban, vagyis az elsőnél magasabb osztályú standard blokkokban, nincsenek ugyan bázistermékek, de az *elsődleges termékek* sok tekintetben betöltik a *bázistermékek* szerepét, a *másodlagos termékek* pedig az *elsőrendű luxustermékekét*. Ha pedig $\mathbf{A}$ helyén az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ teljes körű ráfordítási együttható mátrix szerepel, akkor az elsődleges termékek olyanok lesznek, mint a létfenntartó termékek. Egyedül az elsődleges termékek ráfordítási együtthatói határozzák meg a növekedési ütemet és a profitrátát, valamint egyensúlyban csak elsődleges termékeket termelhetnek.

Mindezen megállapítások helyességét, illetve a kvázi Sraffa-mátrixok további fontos tulajdonságait a következő tételben igazoljuk. A beágyazott dekompozíciók miatt az alkalmazott jelölések bonyolultabbá válnak. A részletek közötti eligazodásban, a jelölések és így az érvelések követésében segíthet az olvasónak, ha a tétel megfogalmazása és bizonyítása előtt áttekinti a részletesen, osztályokra és azon belül elsődleges és másodlagos termékek szerint (amelyek nem mindig léteznek) felbontott $\mathbf{A}$ mátrixot, illetve $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ vektorokat. Ezt láthatjuk a 1. táblázatban. Az osztályok szerinti felbontást az alsó indexek, az osztályokon belüli további, elsődleges (bázis) és másodlagos (luxus) termékek szerinti felbontást az e (b) és az m (l) felső indexek jelölik.

A táblázat egyes blokkjai összevonhatók, például

$$\mathbf{A}_{kk}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{kk}^{11} & \mathbf{A}_{kk}^{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{kk}^{22} \end{pmatrix}.$$

				I_1^0		I_2^0		$\cdots$	I_k^0		$\cdots$
				I_1^b	I_1^l	I_2^e	I_2^m	$\cdots$	I_k^e	I_k^m	
				$\mathbf{x_1}$		$\mathbf{x_1}$		$\cdots$	$\mathbf{x_k}$		
				$\mathbf{x_1}^1$	$\mathbf{x_1}^2$	$\mathbf{x_2}^1$	$\mathbf{x_2}^2$	$\cdots$	$\mathbf{x_k}^1$	$\mathbf{x_k}^2$	
I_1^0	I_1^b	$\mathbf{p}_1$	$\mathbf{p_1^1}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{12}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{12}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{12}$	$\cdots$
	I_1^l		$\mathbf{p}_1^2$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{11}^{22}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{12}^{22}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{1k}^{22}$	$\cdots$
I_2^0	I_2^e	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_2^1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{12}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{12}$	$\cdots$
	I_2^m		$\mathbf{p}_2^2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{22}^{22}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{21}$	$\check{\mathbf{A}}_{2k}^{22}$	$\cdots$
$\cdots$				$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
I_k^0	I_k^e	$\mathbf{p}_k$	$\mathbf{p}_k^1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{11}$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{12}$	$\cdots$
	I_k^m		$\mathbf{p}_k^2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\cdots$	$\mathbf{0}$	$\check{\mathbf{A}}_{kk}^{22}$	$\cdots$
$\cdots$				$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

1. táblázat. A termékindexek, az ár- és a termelésiszint-vektorok, valamint az $\check{\mathbf{A}}$ mátrix standard osztályok, illetve elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontása (részlet)

3. Tétel (A kvázi Sraffa-típusú mátrixok tulajdonságai). *Legyen $\lambda^0 = \lambda(\mathbf{A}) > 0$ az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértéke, és $\lambda^0 = \lambda_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11})$, valahányszor $\mathbf{A}$ reducibilis, ahol $\mathbf{A}_{11}$ az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris kanonikus dekompozíciójában az első blokk.*

A) Tekintsük az $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenség-rendszer lehetséges megoldásait.

i) A fenti egyenlőtlenség-rendszernek egyedül $\lambda = \lambda^0$ mellett van megoldása, az egyenlőtlenség $\lambda^0\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőségként teljesülhet csupán, és így $\mathbf{x}$ csak a domináns sajátértékhez tartozó jobb oldali sajátvektor lehet.

ii) Esetünkben csak a domináns sajátértékhez tartozhat nemnegatív jobb oldali sajátvektor, ezért

$$\lambda^0 = \min\{\lambda : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}\},$$

vagyis

$$\rho^0 = \max\{\rho : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geqq (1+\rho)\mathbf{A}\mathbf{x}\},$$

ami azt jelenti, hogy $\rho^0 = 1/\lambda^0 - 1$ a legnagyobb egyöntetű növekedési ütem.

iii) Ha vannak másodlagos termékek is, akkor $\mathbf{x}$ elsődleges és a másodlagos termékek szerinti $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2)$ felbontásában $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ és $\lambda^0\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1$ szükségképpen.

iv) A λ^0-hoz tartozó $\mathbf{x}$ *sajátvektorok között van olyan* maximális tartójú,[8] *amelyben minden elsődleges termék kibocsátása pozitív, vagyis* $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

B) Tekintsük a $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ *és* $\lambda\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}$ *egyenlőtlenség-rendszer lehetséges megoldásait.*

i) A fenti egyenlőtlenség-rendszer λ-ban maximális megoldása λ^0, vagyis

$$\lambda^0 = \max\{\lambda : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \lambda\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}\}.$$

Ebből adódóan

$$\pi^0 = \min\{\pi : \exists\, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}\},$$

azaz $\pi^0 = 1/\lambda^0 - 1$ a legkisebb (garantált) profitráta, amely esetén létezik a $\mathbf{p} \leqq (1+\pi)\mathbf{pA}$ *feltételt kielégítő, legalább féligpozitív árvektor.*

ii) Ha $\mathbf{A}$ *irreducibilis, akkor a* $\mathbf{p}^0 \geq \mathbf{0}$, $\lambda^0\mathbf{p}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ *feltételek szükségképpen a tőkeérték-arányos árakat meghatározó* $\lambda^0\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ *egyenlőség formájában teljesülnek, ahol* $\mathbf{p}^0$ *a* λ^0 *domináns sajátértékhez tartozó pozitív bal oldali sajátvektor. A* λ^0 *domináns sajátértékhez akkor is található pozitív* $\mathbf{p}$ *bal oldali sajátvektor, ha csak elsődleges termékek vannak.*

iii) Ha vannak másodlagos termékek, a λ^0 *domináns sajátértékhez akkor és csak akkor található* $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ *sajátvektor, ha* $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda^0$.

iv) Ha vannak másodlagos termékek, akkor a $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \lambda\mathbf{p} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ *sajátérték-egyenletet kielégítő* $\mathbf{p}$ *sajátvektorban* $\mathbf{p}_1$ *csak akkor lehet legalább féligpozitív, és ebből adódóan* $\lambda = \lambda_1 = \lambda^0$*, ha az alábbiak valamelyike teljesül:*

a) $\lambda_2 < \lambda_1$*, és minden másodlagos termék előállításához szükség van elsődleges termékre;*

b) az I_2 *blokkon belül van olyan, a többi másodlagos terméktől független alblokk, amelynek a domináns sajátértéke kisebb, mint* λ_1.

Ellenkező esetben csak a $\lambda = \lambda_2$ *és* $\mathbf{p} = (\mathbf{0}, \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_2 \geq \mathbf{0}$ *tőkeérték-arányos árak léteznek.*

v) Az egyensúlyi árak $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, $\lambda^0\mathbf{p} \leqq \mathbf{pA}$ *feltételeinek viszont akkor is mindig van olyan megoldása, amelyben* $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$, *így* $\lambda^0\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11}$ *szükségképpen, ha vannak másodlagos termékek.*

vi) Egyidőszakos tőkemegtérülés esetén a ricardói, illetve a marxi termelési árak léteznek és pozitívak minden $\pi < \pi^0 = 1/\lambda^0 - 1$ *esetén feltéve, hogy a munkaerő nélkülözhetetlen).*

[8] Az n elemű nemnegatív $\mathbf{a}$ vektor *tartója* azon i indexek halmaza, $S(\mathbf{a})$, amelyek esetén $a_i > 0$.

C) *Tekintsük most a stacionárius egyensúly komplementaritási megkötésekkel kiegészített*

$$\text{(EP)} \quad \mathbf{x} \geqq \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \textit{és} \quad \text{(ED)} \quad \mathbf{p} \leqq \alpha\mathbf{p}\mathbf{A}$$

feltételeit.

i) *Az $\alpha^0 = 1/\lambda^0$ skalár az egyetlen stacionárius egyensúlyi tényező.*

ii) *Ha csak elsődleges termékek vannak, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix λ^0 domináns sajátértékéhez tartozó, maximális tartójú $\mathbf{x}$, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ jobb és bal oldali sajátvektorok α^0-lal együtt egyenlőség formájában elégítik ki a stacionárius egyensúly* (EP) *és* (ED) *feltételeit, ugyanúgy, mint a stacionárius Leontief-modellben.*

iii) *Ha vannak másodlagos termékek is, akkor az $\mathbf{A}_{11}$ mátrix λ^0 domináns sajátértékéhez tartozó maximális tartójú $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ jobb és bal oldali sajátvektorokból képezhetünk α^0-lal társítható, az* (EP) *és* (ED) *feltételeket kielégítő $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ tevékenységszint- és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ árvektort, ahol $\mathbf{p}_2$ értéke nem egyértelműen meghatározott. A termékmérlegek és az elsődleges termékek árainak egyensúlyi feltételei egy ilyen megoldásban mind egyenlőségek formájában teljesülnek. $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ mindig lehetséges megoldás, de $\mathbf{p}_2$ félig-, illetve teljesen pozitív vektor is lehet. Ha $\lambda_2 < \lambda_1$, és minden másodlagos termék előállításához szükség van elsődleges termékre, akkor a másodlagos termékek árai mind pozitívak is lehetnek, és az árak egyensúlyi feltételei egyenlőségekként teljesülhetnek.*

Bizonyítás:

ad A) Ha $\mathbf{A}$ *irreducibilis*, akkor $\mathbf{x}$ szükségképpen pozitív, ezért $\lambda'\mathbf{x} > \mathbf{A}\mathbf{x}$ minden $\lambda' > \lambda$ esetén, így – a Perron–Frobenius-tételek értelmében – $\lambda = \lambda^0$. Ugyanezen tételek értelmében a $\lambda\mathbf{x} \geq \mathbf{A}\mathbf{x}$ féligegyenlőtlenségből $\lambda > \lambda^0$ következne, ami ellentmondana annak, hogy λ^0 az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértéke.

Ha $\mathbf{A}$ *reducibilis*, akkor két eset lehetséges: a) csak elsődleges termékek vannak, b) vannak másodlagos termékek is.

a) Vegyük az $\mathbf{A}$ mátrix kanonikus dekompozícióját. Feltevésünk szerint $\lambda_j = \lambda_1 = \lambda^0$ minden $j > 1$ esetén, és $\lambda\mathbf{x}_j \geqq \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$, ahol $\mathbf{A}_{jj}$ irreducibilis. Ezért az előző lépésben bizonyítottak értelmében $\lambda = \lambda^0$, és $\lambda\mathbf{x}_j = \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$ szükségképpen, valahányszor $\mathbf{x}_j > \mathbf{0}$, és legalább egy j esetén ilyennek kell lennie, mivel $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Ha pedig $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, akkor eleve csak egyenlőség formájában teljesülhet az egyenlőtlenség.

b) Bontsuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot és a $\lambda\mathbf{x} \geqq \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenlőtlenséget az elsődleges és másodlagos termékek szerint:

$$\lambda\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2,$$
$$\lambda\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2.$$

$\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$ szükségképpen, ha $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$, mivel a másodlagos termékek előállításához szükség van elsődleges termékre: ha $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, akkor mindegyikre, ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis, akkor valamelyik, mondjuk a j-edik blokk termékeire. Ez azt jelentené, hogy az adott elsődleges termékekből a saját felhasználáson felül többletet kellene előállítani, vagyis a $\lambda \mathbf{x}_j \geq \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j$ féligegyenlőtlenségnek kellene teljesülnie, amiből ismét a feltevésünknek ellentmondó $\lambda > \lambda^0$ reláció következne. $\mathbf{x}_2$ tehát csak $\mathbf{0}$ lehet, és az első feltételcsoport a $\lambda \mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1$ egyenlőtlenségre redukálódik. Ha $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilis, akkor az *i)* pontban igazoltak miatt egyenlőségként kell teljesülnie. Ha $\mathbf{A}_{11}$ reducibilis, ugyanez igaz lesz az olyan alblokkjaira, amelyek esetén $\mathbf{x}_j > \mathbf{0}$. Ha pedig $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, akkor a blokkra vonatkozó feltétel eleve egyenlőségre redukálódik.

A maximális tartójú megoldás létezésére konstruktív igazolást adunk. Az elsődleges termékek $\mathbf{A}_{jj}$ ráfordítási együttható mátrixai mind irreducibilisek, és λ^0 a domináns sajátértékük. Ezért mindegyikükhöz tartozik pozitív $\mathbf{x}_j$ sajátvektor. A másodlagos termékekhez pedig rendeljünk nullvektorokat. Ezeket egy vektorba rendezve kapjuk az állításban jelzett maximális tartójú sajátvektort.

ad B) Az *v)*-ben megfogalmazott állítások a Perron–Frobenius-tételek *iv)* pontjának az egyenes következményei.

A *vi)* állítást a következőképpen láthatjuk be. A λ^0 domináns sajátértékhez tartozik pozitív jobb oldali sajátvektor, legyen ez $\mathbf{x}^0$. $\mathbf{x}^0$-ra tehát teljesül a $\lambda^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}^0$ sajátérték-egyenlőség. Ennek mindkét oldalát az áregyenlőtlenségnek eleget tevő $\mathbf{p}^0$ vektorral balról beszorozva kapjuk: $\lambda^0\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{A}\mathbf{x}^0$, amelynek értéke pozitív lesz, mivel feltevés szerint mind $\mathbf{p}^0$, mind $\mathbf{x}^0$ pozitív vektor. Az áregyenlőtlenség mindkét oldalát az $\mathbf{x}^0$ vektorral jobbról beszorozva pedig a $\lambda^0\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}\mathbf{x}^0$ egyenlőtlenség adódik, ami előbbi megállapításunk folytán egyenlőség formájában teljesül. A $\lambda^0\mathbf{p}^0 \leqq \mathbf{p}^0\mathbf{A}$ egyenlőtlenségek pozitív súlyozott összegeként pedig csak akkor kaphatunk egyenlőséget, ha a feltételek mindegyike eleve egyenlőség formájában teljesült. A fenti igazolást a $\lambda_j\mathbf{p}_j \leqq \mathbf{p}_j\mathbf{A}_{jj}$ egyenlőtlenségekre megismételve ugyanerre az eredményre jutunk, ha csak elsődleges termékek vannak, azaz $\mathbf{A}$ blokkdiagonális mátrix.

A *vii)* állítás igazolásához nézzük a $\mathbf{p}_2$ vektor meghatározását:

$$\lambda^0\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}.$$

Ha $\mathbf{p}_1$ pozitív, akkor $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}$ szintén pozitív, mivel minden a másodlagos termékhez szükség van valamely elsődleges termékre. Ha $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda^0$, akkor a $(\lambda^0\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})$ mátrixnak létezik nemnegatív inverze, és így a $\mathbf{p}_2$ értékét meghatározhatjuk a $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}(\lambda^0\mathbf{E} - \mathbf{A}_{22})^{-1}$ képlettel, ami szükségképpen pozitív vektor. Ha pedig feltesszük, hogy $\mathbf{p}_2$ pozitív, akkor a pozitív $\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}$ vektort $\mathbf{p}_2$ meghatározásából elhagyva a $\lambda^0\mathbf{p}_2 > \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből következik, hogy $\lambda_2 < \lambda^0 = \lambda_1$.

A *viii)* állítást hasonló utat követve bizonyíthatjuk, kihasználva azt, hogy az alblokkok együttható mátrixai irreducibilisek, és I_2 minden alblokkja esetén van legalább egy olyan független alblokk I_1-ben, amelynek a termékeire az előbbibe tartozók előállításához szükség van. Ezek alapján az állítás igazolását az olvasóra hagyjuk.

A *ix)* állítás egyszerűen belátható. Írjuk fel az árakat meghatározó egyenlőtlenségeket elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontásban:

$$\lambda^0\mathbf{p}_1 \leqq \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11},$$
$$\lambda^0\mathbf{p}_2 \leqq \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}.$$

A *vi)* állításból következően az elsődleges termékek blokkjához mindig található olyan $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ megoldás, amely esetén a feltételeknek szükségképpen egyenlőségek formájában kell teljesülniük. Nem kell mást tennünk, mint kiegészítenünk ezeket a $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ vektorral.

A *x)* állítás igazolásához nézzük például a marxi termelési árak képletét, és rendezzük $\mathbf{p}$-re:

$$\mathbf{p} = (1+\pi)wl\,[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}.$$

(A ricardói árak meghatározása esetén w előtt nem szerepel az $[1+\pi]$ szorzó). A Perron–Frobenius-tételekből tudjuk, hogy az $[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}]$ mátrixnak akkor és csak akkor létezik nemnegatív (diagonálisában pozitív) inverze, ha $(1+\pi) < 1/\lambda(\mathbf{A}) = 1/\lambda^0$, ami igazolja állításunkat. Elvben, mint láttuk, létezhetnek nagyobb profitrátával rendelkező tőkeérték-arányos árrendszerek is. Ezekben az elsődleges termékek ára csak nulla lehet.

ad C) Az *i)* pontban igazoltuk, hogy az (EP) feltételnek egyedül $\lambda = \lambda^0 = 1/\alpha^0$ mellett van megoldása, a feltétel szükségképpen egyenlőség formájában teljesül, továbbá az $\mathbf{x}$ vektor elsődleges és másodlagos termékek szerinti felbontásában csupán $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ lehet. A *iv)* és *ix)* pontokban pedig igazoltuk olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ vektorok létezését, amelyekből képezhetünk α^0-lal társítható $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0})$ egyensúlyi tevékenységszinteket és $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ árakat, valamint azt is igazoltuk, hogy ezek esetében az (EP) és az (ED) egyenlőtlenségek elsődleges termékekre vonatkozó feltételei szükségképpen egyenlőségek formájában teljesülnek. Az egyensúlyi árakra vonatkozó megállapítások helyessége közvetlenül adódik a *viii)* és *ix)* állításokból.

❑

Megjegyzés:

Egy Sraffa-típusú ráfordítási együttható mátrix első osztályú (I_1^0) blokkjának $\mathbf{A}_{11}^0$ ráfordítási együttható mátrixa nemcsak kvázi, hanem valódi Sraffa-típusú mátrix lesz, és az elsődleges termékek maguk a bázistermékek. Az elsőrendű luxustermékek a másodlagos termékek megfelelői lesznek.

A következőkben bemutatjuk, hogyan használhatjuk fel a standard dekompozíciót a termelési árak Sraffa-féle elemzésében, illetve a Neumann-modell Leontief-technológiát feltételező változatának vizsgálatára. Az utóbbi kapcsolatot teremt az úgynevezett Marx–Neumann-modell többszörös megoldásainak meghatározására kidolgozott dekompozíciós eljárás és a standard dekompozíció között. Terjedelmi korlátok miatt mindkét kérdést csak vázlatosan mutatjuk be.

5. A standard dekompozíció felhasználása a termelési árak elemzésére

Sraffa az $\mathbf{s} = (1+\pi)\mathbf{As}$ egyenlőséggel definiált $\mathbf{s}$ standard árukosarat ideális ármércejószágnak tekintette a bevezetőben említett okok miatt. A profitráta és a reálbér összefüggésére Sraffa a standard árukosarakat felhasználva az

$$1 = \frac{\pi}{\pi_s} + w_s = \frac{\pi}{\pi_s} + (1+\pi)w_m$$

összefüggést vezette le, ahol π_s valamelyik standard arány. Ez voltaképpen megegyezik azzal, hogy az árak szintjét az adott standard arányhoz tartozó standard árukosárral, pontosabban a $\mathbf{ps} = 1$ egyenlőséggel rögzítjük.

Ám, mint jeleztük, nem mindegy, melyik standard arányt és árukosarat választjuk ki, ha több is létezik. A bér-profit átváltási görbe ugyanis ettől függően eltérően alakul. Az igazolt megállapítások alapján nem szorul különösebb bizonyításra, hogy a lehetséges Sraffa-féle standard arányok a λ_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ domináns sajátértékekből képzett $\pi_k = 1/\lambda_k - 1$ skalárok lesznek. A k-adik arányhoz tartozó $\mathbf{s}^k$ standard árukosár $\mathbf{s}^k = (\mathbf{s}_1^k, \mathbf{s}_2^k, \ldots, \mathbf{s}_k, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ formában adható meg, ahol az $\mathbf{s}_1^k, \mathbf{s}_2^k, \ldots, \mathbf{s}_k$ összetevőket az

$$\begin{gathered}
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{11}^0\right]\mathbf{s}_1^k = (1+\pi_k)(\mathbf{A}_{12}^0\mathbf{s}_2^k + \mathbf{A}_{13}^0\mathbf{s}_3^k + \cdots + \mathbf{A}_{1k}^0\mathbf{s}_k), \\
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{22}^0\right]\mathbf{s}_2^k = (1+\pi_k)(\mathbf{A}_{23}^0\mathbf{s}_3^k + \cdots + \mathbf{A}_{2k}^0\mathbf{s}_k), \\
\vdots \\
\left[\mathbf{E} - (1+\pi_k)\mathbf{A}_{kk}^0\right]\mathbf{s}_k = \mathbf{0}
\end{gathered}$$

egyenletrendszer rekurzív megoldása szolgáltatja. Az így meghatározott $\mathbf{s}^k$ vektor és π_k mellett nyilván teljesülni fog a standard rendszer által kielégítendő $\mathbf{s}^k = (1+\pi_k)\mathbf{As}^k$ egyenlőség.

A π_k standard arányok a profitráta olyan felső határértékei lesznek, hogy tetszőleges pozitív bérráta mellett a k-adik blokkal bezárólag minden terméknek létezni fog pozitív termelési ára. Egyszerűen megmutatható ugyanis, például a termelési árak marxi meghatározása esetén, hogy a

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{11}^0\right] &= (1+\pi)wl_1,\\
\mathbf{p}_2\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{22}^0\right] &= (1+\pi)(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}^0+wl_2),\\
&\vdots\\
\mathbf{p}_k\left[\mathbf{E}-(1+\pi)\mathbf{A}_{kk}^0\right] &= (1+\pi)\left(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{1k}^0+\cdots+\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1k}^0+wl_k\right)
\end{aligned}$$

egyenletrendszernek mindaddig létezik pozitív megoldása tetszőleges pozitív w mellett, amíg π a $(-1,\pi_k)$ nyílt intervallumba esik.

Rögzítsük a w névleges bérráta értékét egységnyi szinten. Könnyen belátható, hogy π értékével együtt nőni fognak az árak és így csökkenni fog a reálbér. Ahogy a $\pi = 0$ szintről elindulva növeljük a profitrátát, amint π átlép egy-egy π_l $(l = m, m-1, \dots, 2)$ kritikus értéket, az adott l-edik osztály termékei kiesnek azon termékek közül, amelyek termelési ára π_l vagy nála nagyobb profitráta mellett pozitív lehet. Fordított irányban haladva, egy alacsony bérrátából kiindulva, ugyanezt tapasztaljuk: a reálbérrel együtt nőnek a termelés költségei, ezáltal csökken a profitráta, ami egyre több luxustermék termelését teszi jövedelmezővé.

Az egyensúlyi reálbér- és profitráta közti kapcsolatot (átváltási lehetőséget) és az egyensúlyban alkalmazható eljárások fokozatos szűkülését az 1. ábrán szemléltetjük. Alapul vett példánkban négy lehetséges standard blokk, azaz standard rendszer van. Az első diagramon a bér és az árak szintjét Sraffa nyomán a $w_m = (1-\pi/\pi_s)/(1+\pi)$ összefüggéssel határoztuk meg, ahol π_s az ármércének választott standard árukosárhoz tartozó arány. A második diagramon a reálbér szintjét a fogyasztás φ_s szintjével mértük. Az alternatív átváltási görbék azt jelzik, milyen tartományban és hogyan változhat egymás rovására a profitráta és a reálbér, attól függően, mely standard osztályokba tartozó termékeket termelik pozitív árak és azonos profitráta mellett. Megjegyezzük, hogy az ábrán szereplő görbék „kiegyenesednének”, ha a termelési árak marxi meghatározása helyett a ricardóit alkalmaznánk; például az első diagramon ábrázolt bér-profit összefüggés a $w_s = 1-\pi/\pi_s$ lineáris alakot öltené.

6. A stacionárius egyensúlyi megoldások elemzése a Neumann–Leontief-modellben

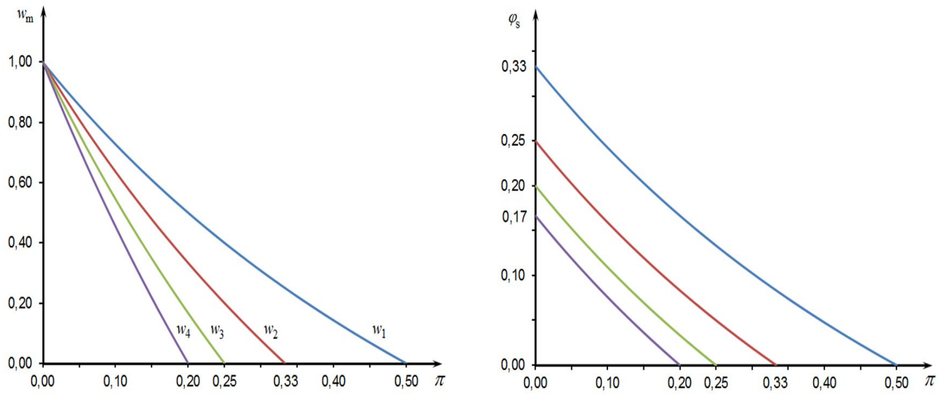
Egyidőszakos termelési periódus és tőkemegtérülés esetén az egyensúly *ex ante* szellemben adott feltételeit az alábbi formában írtuk fel:

$$\alpha > 0, \quad \mathbf{x},\mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1,$$

$$\mathbf{x} \geqq \alpha\check{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{MNL-P}$$

$$\mathbf{p} \leqq \alpha\mathbf{p}\check{\mathbf{A}}, \tag{MNL-D}$$

$$\mathbf{px} > 0. \tag{KMT}$$



1. ábra. A profitráta és a reálbér, illetve fogyasztási szint közötti összefüggés

A kapott modellt, a matematikai formák hasonlósága okán, *Marx–Neumann–Leontief-modellnek* nevezzük. Ezek ugyanis egy olyan sajátos Neumann-modell egyensúlyi feltételei, amelyben a technológia Leontief-féle input-output modellel adott. Neumann hasonló felépítésű modelljében a technológia $\mathbf{K}$ kibocsátási és $\check{\mathbf{R}}$ ráfordítási együttható mátrixokkal definiált, ahol $\check{\mathbf{R}}$ – az $\check{\mathbf{A}}$ mátrixhoz hasonlóan – a szükséges fogyasztást is tartalmazza. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix csak a termelési eszközök ráfordítási együtthatóit tartalmazza, a modellt *kvázi Neumann–Leontief-modellnek* nevezzük. Ilyenre emlékeztet Sraffának a fent bemutatott standard rendszeren alapuló elemzése, ami lehetővé teszi, hogy a termelési árak Sraffa-féle *ex post* elemzését összekapcsoljuk a stacionárius növekedés *ex ante* szemléletű NL-modelljével.

A stacionárius növekedési modellben az egyensúlyi árak követelménye $\mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \leqq \alpha\mathbf{p}\check{\mathbf{A}}$ formát ölti. Tehát nem várjuk el minden termék árának pozitivitását, és azt sem, hogy termelésük azonos profitrátát eredményezzen. Ugyanakkor, mintegy ezt a lazítást ellensúlyozandó, a komplementaritási előírásokkal összekötjük egymással az egyensúlyi árak és tevékenységek meghatározását. Ez biztosítja, hogy az egyensúlyi megoldásban pozitív értéket kapó változókhoz tartozó feltételek egyenlőségek formájában fognak teljesülni, ugyanúgy, mint az *ex post* szemléletű Leontief-modellekben.

A kvázi NL-modell nem más, mint az MNL-modell φ_s= 0 esetben kapott határértéke, amikor az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ együttható mátrixból $\mathbf{A}$ lesz. A létfenntartó termékek nem feltétlenül lesznek mind bázistermékek, ezért az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrix reducibilissá válhat, ahogy a szükséges fogyasztás szintje nullává válik. Ilyen esetben a létfenntartó termékek által meghatározott eddigi első, irreducibilis kanonikus blokk (I_1^1) felbomlik. Vagyis e termékcsoport tekintetében az $\mathbf{A}$ és az $\check{\mathbf{A}}$ kanonikus dekompozíciójának szerkezete eltérhet egymástól. Mivel a többi termékcsoport változatlan marad, ezért ez csak annyit jelent, hogy $\alpha(\varphi_s)$-nek a $\varphi_s = 0$ esetén elért felső határa mellett a kvázi NL-modellnek lehetnek ennél nagyobb egyensúlyi tényezővel rendelkező megoldásai is. Az MNL-modell olyan megoldásai, amelyekben luxustermékeket termelnek, mindig megoldásai lesznek a kvázi NL-modellnek is. Azok a luxustermékek ugyanis, amelyek az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrixban φ_s valamely értéke mellett magasabb rendűek, az $\mathbf{A}$ mátrix standard dekompozíciójában is magasabb rendűek lesznek.

4. Tétel (Az MNL stacionárius modell megoldásainak jellemzői). *Az MNL modellben:*

i) *Legyen $\alpha_k = 1/\lambda_k$, $\mathbf{x}_k$ az $\mathbf{A}_{kk}^0$ ($\check{\mathbf{A}}_{11}^0$, ha $k=1$) mátrix domináns sajátértékéhez tartozó jobb oldali sajátvektor. Az $\mathbf{x}_k$ vektorhoz mindig található olyan $\mathbf{p}_k \geq \mathbf{0}$ árvektor, amellyel együtt kielégítik a stacionárius állapot $\mathbf{A}_{kk}^0$ ráfordítási együtthatókkal felírt feltételeit, nevezetesen,*

$$\alpha_k > 0, \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\mathbf{x}_k = \mathbf{p}_k\mathbf{1} = 1,$$
$$\mathbf{x}_k \geqq \alpha_k \mathbf{A}_{kk}^0 \mathbf{x}_k,$$
$$\mathbf{p}_k \leqq \alpha_k \mathbf{p}_k \mathbf{A}_{kk}^0,$$
$$\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0.$$

ii) *A k-adik standard blokk (α_k,$\mathbf{x}_k$,$\mathbf{p}_k$) egyensúlyi megoldása mindig kiegészíthető olyan*

$$\mathbf{x}^k = (\mathbf{x}_1^k, \dots, \mathbf{x}_{k-1}^k, \mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})^T, \ \mathbf{p}^k = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}^k, \dots, \mathbf{p}_m^k)$$

teljes méretű vektorokká, hogy a kapott $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ vektorok α_k-val együtt az $\check{\mathbf{A}}$ ráfordítási együttható mátrixszal adott modell megoldásai lesznek. Ezekben a vektorokban, mint a felírásukban jeleztük, $\mathbf{x}_l^k = \mathbf{0}$, ha $l > k$, és $\mathbf{x}_l^k \geqq \mathbf{0}$ egyébként, de $\mathbf{x}_1^k > \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_l^k \geq \mathbf{0}$, ha az l-edik ($l < k$) blokk valamely termékére szükség van az $\mathbf{x}_k$-ban pozitív szinten termelt termékek előállításához. Ugyanakkor $\mathbf{p}_l^k = \mathbf{0}$, ha $l < k$, és $\mathbf{p}_l^k \geqq \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén.

iii) *Legyen az (α, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$) együttes az $\check{\mathbf{A}}$ ráfordítási együttható mátrixszal adott modell olyan megoldása, amelyben $\mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_l^k = \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén. Ekkor*

a) *α szükségképpen egyenlő α_k-val, az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ egyensúlyi vektorok k-adik standard blokkhoz tartozó összetevői, $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{p}_k$, valamint α_k az $\mathbf{A}_{kk}^0$ mátrixszal adott NL-modell, $k = 1$ esetén az $\check{\mathbf{A}}_{11}^0$ mátrixszal adott MNL-modell megoldása lesz.*

b) *$k > 1$ esetén mindazon termékek ára nulla lesz, amelyekre az $\mathbf{x}_k$-ban pozitív kibocsátással rendelkező termékek előállításához közvetlenül vagy közvetve szükség van.*

Bizonyítás:

ad i) Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy a 3. Tétel értelmében az $\mathbf{x}_k$ vektorban csak elsődleges termékekhez tartozó elemek lehetnek pozitívak, de akár azok mindegyike is. Ugyanennek a tételnek a *ix)* pontjában pedig azt igazoltuk, hogy mindig létezik olyan, az egyensúlyi árrendszer feltételeit kielégítő árvektor, amelyben bármely, vagy akár az összes elsődleges termékek ára pozitív. Ezért az $\mathbf{x}_k$ sajátvektorhoz található olyan $\mathbf{p}_k \geq \mathbf{0}$ vektor, amely kielégíti a $\mathbf{p}_k \leqq \alpha_k \mathbf{p}_k \mathbf{A}^0_{kk}$ feltételeket és $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$, amit igazolnunk kellett.

ad ii) Konstruktív bizonyítást adunk. Megmutatjuk, hogyan szerkeszthető meg a tételben jelzett tulajdonságú $\mathbf{x}^k$ vektor. Helyettesítsünk α helyébe α_k-t az (MNL-P) egyenlőtlenség-rendszerben. Az $(\mathbf{E} - \alpha_k \check{\mathbf{A}}^0_{ll})$ mátrixoknak minden $l < k$ esetén ($k = 1$ esetben természetesen nincs ilyen l) létezik nemnegatív inverze, mivel $\alpha_l > \alpha_k$. Ezért $\mathbf{x}_k$ ismeretében a k-adik feltételtől visszafelé indulva minden $l < k$ esetén meghatározhatjuk az egyensúlyi feltételt akár egyenlőség, akár határozott egyenlőtlenség formájában kielégítő $\mathbf{x}^k_l \geqq \mathbf{0}$ vektorokat. Mivel pedig $\alpha_l < \alpha_k$ minden $l > k$ esetén ($k = m$ esetén természetesen nincs ilyen l), ezért ezeket a termékeket nem lehet α_k szinten újratermelni.

Nézzük most a $\mathbf{p}^k$ árakat meghatározó (MNL-D) feltételeket. $k = 1$ esetén a létfenntartó (bázis-) termékek ára mind pozitív, és ha vannak első osztályú elsődleges termékek, azok között is lehetnek olyanok, amelyek ára szintén pozitív lehet. $k > 1$ esetén, mivel a k-adik osztály profitpotenciálja kisebb a létfenntartó termékekénél, és az elsődleges termékek ára legalább részben pozitív, a létfenntartó (bázis-) termékek ára csak nulla lehet. Fokozatos levezetéssel megmutatható (lásd fent), hogy ebből következően minden $l < k$ osztály termékeinek az ára szintén csak nulla lehet (ezek feleslegben is előállíthatók, tehát szabad javak). $l > k$ esetén a $\mathbf{p}_l$ árak helyébe nulla vektorokat tehetünk, a feltételek ugyanis teljesülni fognak, hiszen ezeket a termékeket úgysem termelik. Az így képzett $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ vektorok tehát kielégítik az (MNL-P) és (MNL-D) feltételeket. Mivel pedig $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$, ami részét képezi a $\mathbf{p}^k \mathbf{x}^k$ skaláris szorzatnak, így utóbbi értéke pozitív lesz. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbf{x}^k$ és $\mathbf{p}^k$ az α_k tényezővel együtt kielégíti a stacionárius állapot feltételeit.

ad iii) Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{x}^k_l = \mathbf{0}$ minden $l > k$ esetén. Ezért a k-adik osztály esetén az egyensúlyi feltétel $\mathbf{x}_k \geqq \alpha \mathbf{A}^0_{kk}$ alakra redukálódik, ahol feltevésünk szerint $\mathbf{x}_k \geq \mathbf{0}$. A 3. tétel értelmében az $\mathbf{x}_k$ vektorban csak elsődleges termékekhez tartozó elemek lehetnek pozitívak, és egyenlőtlenség csak az $\alpha = \alpha_k$ esetén állhat fenn. Így az előző pontban bizonyítottak következtében $\mathbf{p}_l = \mathbf{0}$ minden $l < k$ esetén. A $\mathbf{px} > 0$ egyensúlyi feltétel tehát csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{p}_k \mathbf{x}_k > 0$. Ez pedig éppen az állításunkat igazolja, az $(\alpha_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k)$ együttes valóban kielégíti az egyensúly feltételeit az $\mathbf{A}^0_{kk}$ ráfordítási együttható mátrix esetén.

❑

A fentiek alapján a lehetséges egyensúlyi megoldásokat a következő formákban jeleníthetjük meg:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > \cdots > \alpha_m$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^2 \\ \mathbf{x}_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^k \\ \mathbf{x}_2^k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^k \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^m \\ \mathbf{x}_2^m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{m-1}^m \\ \mathbf{x}_m^m \end{pmatrix}$$

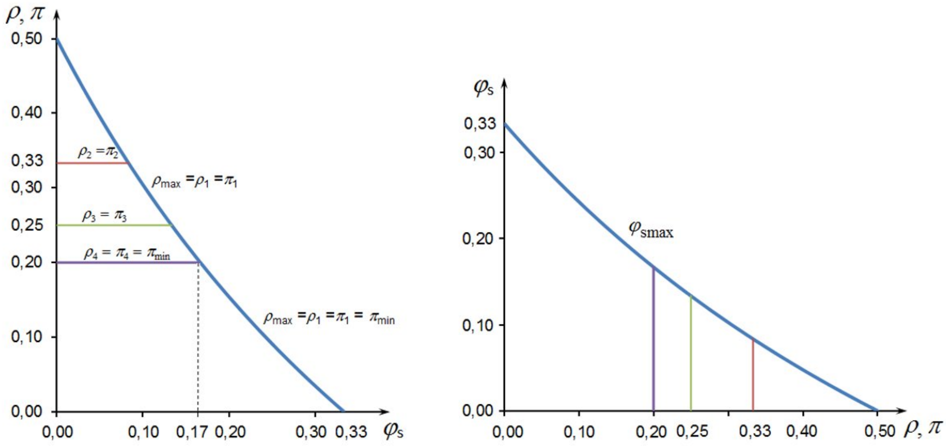
$$\begin{aligned}
(\alpha_m): \qquad & \mathbf{p}^1 = \left(\mathbf{p}_1{}^1, \ldots, \mathbf{p}_k^1, \ldots, \mathbf{p}_{m-1}^1, \mathbf{p}_m^1\right), \\
& \vdots \\
(\alpha_k): \qquad & \mathbf{p}^k = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_k^k, \ldots, \mathbf{p}_{m-1}^k, \mathbf{p}_m^k\right), \\
& \vdots \\
(\alpha_{m-1}): \qquad & \mathbf{p}^{m-1} = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{p}_{m-1}^{m-1}, \mathbf{p}_m^{m-1}\right), \\
(\alpha_m): \qquad & \mathbf{p}^m = \left(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{p}_m^m\right),
\end{aligned}$$

Az MNL-modell adott $\varphi_s > 0$ mellett lehetséges egyensúlyi tényezői közül a legnagyobb,

$$\alpha(\varphi_s) = \max\left\{\alpha : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{1x} = 1,\, \mathbf{x} \geqq \alpha\left(\mathbf{A} + \varphi_s \mathbf{s}^c \circ \mathbf{l}\right)\mathbf{x}\right\}$$

az $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ mátrix domináns sajátértékének reciproka. Induljunk el φ_s nullához közeli pozitív értékétől. Ahogy φ_s nő, $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ domináns sajátértéke előbb eléri $\mathbf{A}_{22}^0$ mátrixét, így az I_2^0 blokk termékei elsőrendű luxustermékekké válnak. Ezek bekerülnek az új I_1^0 blokkba, s helyükbe a korábbi I_3^0 blokkba tartozó termékek lépnek elő másodrendű luxustermékekké. Ettől kezdve tehát eggyel csökken a lehetséges egyensúlyi tényezők és megoldások száma. Tovább haladva, ahogy φ_s nő, a luxustermékek egymást követő blokkjai fokozatosan elsőrendűvé válnak, s egyre csökken az alternatív megoldások száma. Amikor φ_s eléri azt az értéket, amely esetén $\check{\mathbf{A}}_{11}^{11}(\varphi_s)$ domináns sajátértéke megegyezik az utolsó, $\mathbf{A}_{mm}^0$ blokkéval, már minden luxustermék elsőrendűvé válik, s ettől kezdve már egyértelműen meghatározott az egyensúlyi tényező. A φ_s növekedését követő változások, mindaddig, míg értéke pozitív, nem érintik az $\check{\mathbf{A}}(\varphi_s)$ mátrix kanonikus dekompozícióját. A standard dekompozíciója azonban fokozatosan változik, egyre kevesebb osztályból fog állni, végül egyetlen osztályra szűkül.

A 2. ábrán szemléltetjük a $\rho = \pi$ egyensúlyi növekedési ütem, illetve profitráta és a φ_s fogyasztási szint között fennálló kölcsönös összefüggést. Az első diagramon a reálbért is képviselő φ_s fogyasztási szintet tekintjük exogén adottságnak, hasonlóan az MNL-modellhez.



2. ábra. Az MLN-modell egyensúlyi profit-, illetve növekedési rátái és a reálbér, illetve fogyasztási szint közötti összefüggés

Az alapul vett példában, mint látjuk, φ_s-nek a $[0;0,17)$ intervallumba eső értékei mellett legalább két, eltérő α tényezőjű egyensúlyi megoldás létezik. Az egyik a növekedési tényező maximuma,

$$\alpha_{\text{max}} = \max\left\{\alpha : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{1x} = 1,\, \mathbf{x} \geqq \alpha \check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\mathbf{x}\right\},$$

a másik pedig profittényező minimuma által meghatározott:

$$\beta_{\text{min}} = \min\left\{\beta : \exists\, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{p1} = 1,\, \mathbf{p} \leqq \beta \mathbf{p}\check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\right\}.$$

A fenti intervallum egyes részeiben e kettő közé eső további megoldások is léteznek. α_{max} értéke a φ_s fogyasztási szinttel együtt változik, a többi állandó. Az $[0,17;0,5]$ intervallumba eső φ_s értékek esetén viszont már csak egy megoldás van, itt $\alpha_{\text{max}} = \beta_{\text{min}}$.

A második diagramon az α egyensúlyi tényezőt, pontosabban az abból kapott $\rho = \pi = 1 - \alpha$ profit-, illetve növekedési rátát tekintettük külső adottságnak (mondjuk, a termelés bővülése a népesség növekedési üteméhez igazodik). A két diagram ugyanazt a viszonyt ábrázolja, azonban van köztük egy lényeges különbség. A másodikon, a luxustermék-blokkok sajátértékei által meghatározott szinguláris pontokat kivéve, a hozzárendelés egyértékű, azaz függvényről van szó. Ha csupán a φ_s maximumát adó megoldásokat, vagyis a

$$\varphi_{\text{smax}} = \max\left\{\varphi : \exists\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\, \mathbf{1x} = 1,\, \mathbf{x} \geqq \alpha \check{\mathbf{A}}_{11}(\varphi_s)\mathbf{x}\right\},$$

feladat megoldásait (ahol α változó paraméter) ábrázolnánk, akkor ez a hozzárendelés minden lehetséges φ_s érték esetén egyértelmű lenne, tehát függvényt határozna meg.

Az optimális növekedés neoklasszikus modelljében Bruno (1969) megmutatta, hogy a hicksi „tényezőár" (bér-profit), illetve az „optimális transzformációs" (fogyasztás-felhalmozás) frontvonalak egymással duális viszonyban állnak és egybeesnek. A szükséges fogyasztást explicit formában megjelenítő Neumann-modell esetén Morishima (1971) $\alpha_{\max}$, illetve $\beta_{\min}$ meghatározásával kapott függvényeket javasolta a felhalmozás-fogyasztás, illetve a bér-profit átváltási frontvonalaknak tekinteni. Ezek meghatározása is egyfajta duális viszonyt tükröz, de – mint látjuk – nem esnek egybe. Morishima értelmezése azonban nem fogadható el, mert megmutatható, hogy a szükséges fogyasztás által meghatározott bérek csak a legnagyobb növekedési ütem esetén lehetnek pozitívak. Ezért Bromek (1974b), Morishimával szemben, a φ_{smax} meghatározásával adott függvényt és annak inverzét javasolta a *fogyasztás-felhalmozás* és *bér-profit frontvonalak* megfelelőinek tekinteni a Marx–Neumann-modell esetén (erről bővebben lásd Zalai (2011) tanulmányát).

Köszönetnyilvánítás:
Ezúton is szeretném megköszönni Móczár Józsefnek a dolgozat első változatához fűzött hasznos észrevételeit. Egyúttal az olvasó figyelmébe ajánljuk Móczár (1980) kapcsolódó tanulmányát. Ugyancsak köszönettel tartozom Csató Lászlónak mind hasznos észrevételeiért, mind a kézirat szerkesztésében nyújtott segítségéért.

Hivatkozások

Bromek, T. (1974a). Equilibrium levels in decomposable von Neumann models. In: *Łoś–Łoś (1974)*, 35–46.

Bromek, T. (1974b). Consumption-investment frontier in decomposable von Neumann models. In: *Łoś– Łoś (1974)*, 47–57.

Bruno, M. (1969). Fundamental duality relations in the pure theory of capital and growth. *Review of Economic Studies*, 1:39–53.

Gantmacher, F. R. (1967). *Theory of Matrices*. Science, Moscow, USSR.

Kurz, H. D., Salvadori, N. (1995). *Theory of Production. A Long-Period Analysis*. Cambridge University Press, New York.

Łoś, J., Łoś, M. W. (szerk.) (1974). *Mathematical Models in Economics*. North-Holland, Amsterdam, New York.

Móczár J. (1980). A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása. *Egyetemi Szemle*, 2:41–56.

Morishima, M. (1971). Consumption-investment frontier, wage-profit frontier and the von Neumann growth equilibrium. In: Bruckmann, G., Weber, W. (szerk.) *Contributions to the von Neumann Growth Model, Supplement to Zeitschrift für Nationalökonomie*, Springer, New York, Vienna, 1:31–38.

Neumann J. (1965). *Válogatott előadások és tanulmányok*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Sraffa, P. (1960). *Production of Commodities by Means of Commodities*. Cambridge University Press, Cambridge. (Magyarul: Áruk termelése áruk révén. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1975.)

Zalai E. (2011). Az egyensúlyi ráták unicitása és a bérráta pozitivitása a Neumann-modell általánosításaiban. *Közgazdasági Szemle*, 1:20–40.

Zalai E. (2012). *Matematikai közgazdaságtan II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések.* Akadémia Kiadó, Budapest, 2012. Megjelenés alatt.