KÉSZPÉNZ OPTIMALIZÁLÁS GLPK PROGRAM HASZNÁLATÁVAL[1]

ÁGOSTON KOLOS CSABA

citation and similar papers at core.ac.uk

pro

A készpénz-optimalizálás az operációkutatás régóta kutatott területe. Ebben a cikkben valós adatokon mutatok be egy banki készpénz-optimalizálást, melyet lineáris programozási feladatok segítségével végeztem el. A cikkben összehasonlítottam a determinisztikus és a sztochasztikus megközelítéseket is. A hagyományos készpénz-optimalizáción két területen léptem túl: egyrészt vizsgáltam a bankfiók valutagazdálkodását is, másrészről a bankfiókok közötti készpénzszállítás lehetőségét is. A vegyes egészértékű lineáris programozási feladatok megoldására a glpk nevű szabad hozzáférésű szoftvert használtam, így a cikkből képet kaphatunk a megoldó (solver) felhasználhatóságáról és korlátairól is.

1 Bevezetés

A készpénz-optimalizálás az operációkutatás egyik sokat kutatott területe. A döntéshozónak szüksége van készpénzre mindennapi feladatai ellátására. Amennyiben a döntéshozó készpénzt tart, akkor ezen vagyonrész hozamáról le kell mondania. A készpénzhez jutás viszont tranzakciós költséggel jár. Ha a készpénzállomány túl magas, akkor az elveszített kamat jelent problémát, ha pedig kevés készpénzt tart a döntéshozó, akkor a készpénzhez jutás tranzakciós költségei lesznek magasak.

A témakör kiindulási pontjának Baumol (1952) tekinthető. Az ő esetében a döntéshozó magánszemély (és nem vállalat). A környezet determinisztikus: a fogyasztás konstans és előre rögzített, amitől nem tér el a tényleges érték sem. Fontos megjegyezni, hogy a problémát nem operációkutatási szempontból vizsgálta; az ő érdeklődésének középpontjában a pénzkereslet állt. Miller és Orr (1966) vizsgálatai középpontjában még mindig a pénzkereslet állt. Cikkükben a döntéshozó már nem magánszemély, hanem vállalat, és a környezet is realisztikusabb: a készpénz szükséglet nem konstans és nem is determinisztikus. A problémát ők is analitikus eszközökkel kezelik. A készpénz optimalizálást lineáris programozási feladatként írja fel Eppen és Fama (1968). A problémát Markov-lánc modellel kezelik, ami stacionárius idősort feltételez. A későbbiekben is számos tanulmány foglalkozott a készpénzoptimalizálás témakörével: (a teljesség igénye nélkül) (Bar-Ilan, Perry és Stadje, 2004), (Elton és Gruber, 1974), (Heyman, 1973), (Simutis, 2007), (Yao, Chen és Lu, 2006), (Snellmana és Virenb, 2009).

[1] Beérkezett: 2011. január 19. E-mail: `kolos.agoston@uni-corvinus.hu`.

Magyar nyelven Havran Dániel tanulmánya (Havran, 2008) mutatja be a készpénzoptimalizálást a Magyar Posta példáján keresztül.

2 A feladat bemutatása

Az OTP Bank Nyrt. vállalatnál 2008/09 évben fióki készpénzoptimalizációs projekt zajlott. A projekt eredményeit az Apolló nevű rendszer fióki moduljában implementálták. A cikk megírását a projekt során megfogalmazódott problémák inspirálták, a bemutatott eredmények valós adatokon alapulnak, de ennek ellenére a cikk nem az implementált rendszert ismerteti.

A kereskedelmi bankok tipikusan jelentős fiókhálózattal rendelkeznek, melyek az átutalások mellett nem csekély készpénzforgalmat is lebonyolítanak. A banknak biztosítani kell fiókhálózatának készpénzzel történő ellátását. A fiókok készpénzzel történő ellátása nem mentes a költségektől, így szerep jut az optimalizálásnak.

A készpénz szállításának van fix költsége és általában a szállító cég felszámol egy csekély hányadot (pár tized ezreléket) a pénz kezeléséért. Ezzel szemben áll a nem realizált hozam: a pénztárban lévő készpénzállomány nem kamatozik, amely összeget realizálni tudná a bank, ha a pénz befektetésre került volna.

A probléma tipikusnak is mondható: minél többször rendel a fiók pénzszállító autót a tranzakciós költség annál nagyobb lesz, viszont a nem realizált hozam kicsi. Fordítva: ha kevesebbszer rendel pénzszállító autót a bankfiók (így kicsi lesz a tranzakciós költség, de nagyobb mennyiségű készpénzállománnyal kell rendelkezni), akkor nagyobb lesz a nem realizált hozam.

Probléma ezen felül még abból is adódik, hogy a napi forgalmakat nem tudjuk pontosan, a forgalomról csak becsléssel rendelkezünk, amely természetéből adódóan bizonytalan. Tehát a költségeket úgy kell a lehető legalacsonyabb szinten tartani, hogy (egy előre adott) nagy valószínűséggel az ügyfeleket ki tudjuk szolgálni.

A banki folyamat modellje a következő: pénzszállító autó mindig a nap végén érkezik, ha reggel az autó érkezését igényelték. A szállítandó készpénz mennyiségét is már reggel (nyitáskor) meg kell mondani, bár az aznapi tényleges forgalom még nem ismert. A korábbi tapasztalatok vagy a bank belső modellje alapján rendelkezésre áll egy becslés a várható forgalomra (amely lehet negatív is, pozitív is). Ezen becsült forgalom alapján fut le az optimalizáció.

A vizsgált időszakra nem csak a becslés áll rendelkezésre, hanem a tényleges forgalmak is (mivel múltbeli időszakról van szó), az optimalizáció működését a tényleges adatokon lehet tesztelni. A tesztelés során ún. csúszóablakos (rolling horizon) technikát fogok alkalmazni. A nap eleji nyitókészlethez hozzáadom az aznapi tényleges forgalmat és a modell által aznapra javasolt pénzfelvételt és beszállítást, így megkapom az aznapi záró készletet. A következő optimalizációt a frissített becsléssel és a továbbszámolt nyitó készlettel végzem. Figyelembe véve a záró állományt, továbbá kiszámítva a pénz ki- és beszállítás tényleges költségeit, megkapok egy (modellezett) összköltséget a vizsgált időszakra.

3 A bankfióki adatok vizsgálata

Induljunk ki abból, hogy becsléssel rendelkezünk a napi forgalmakról, illetve annak szórásáról. A vizsgált negyedévre rendelkezésre állnak már a tényleges adatok is, így a becslés jóságát is vizsgálni lehet. A becslés jóságát a szokásos módszerrel mértem le: a következő napi becsült érték és a tényleges érték különbségét vettem, ezek négyzetét összegeztem a negyedévre (SSE). Ezután vettem az az i-edik napi tényleges értéknek a negyedévi átlagtól vett különbségét, és ezek négyzetét összegeztem a negyedévre (SST). A két összeget egymással elosztva, és egyből levolva (1-SSE/SST) kapjuk az R^2 mutatószámot, amely az illeszkedés jóságát méri regressziós modell esetén[2].

Bankfiók	Készpénzforgalom átlaga	Készpénzforgalom szórása	Relatív szórás	Becslés illeszkedése (R^2)
Fiók 1	-35807	21088	0,59	-0,12
Fiók 2	-49626	32535	0,66	-0,04
Fiók 3	381,1	1833	4,81	-0,36
Fiók 4	-21559	23918	1,11	0,12
Fiók 5	30695	19020	0,62	0,19
Fiók 6	-305	9598	31,45	0,09

1. táblázat. A bankfiókok jellemzői

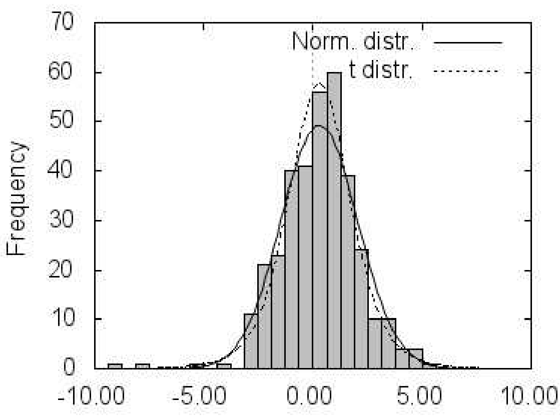
A cikk során 6 különböző bankfiók eredményeit mutatom be. Az *1. táblázat* a bankfiókokról mutat összefoglaló adatokat. Az első oszlop az átlagos napi készpénzforgalom egyenlegét adja meg ezer forintban. Ennek pozitív értéke azt jelenti, hogy (összességében) az ügyfelek helyeznek el készpénzt a bankszámláinkon, tehát a készpénz gyűlik a bankfiókban, amire befizetésként fogok hivatkozni a későbbiekben. Ennek ellentéte a bankfiók számára kifizetés, amikor az ügyfelek felvesznek készpénz a számlájukról, tehát fogy a bankfiók készpénzállománya. A második oszlop a forgalom szórását mutatja, a harmadik a relatív szórást, a negyedik R^2 mutatójának értékét az adott bankfiókra. Az R^2 mutató negatív értéke azt jelenti, hogy a becsült és a tényleges érték különbsége jobban szóródik, mint tényleges érték.

Egy-egy nap forgalmának eloszlásáról általában normalitást szoktunk feltételezni. A normális eloszlás feltételezésének helyességét úgy ellenőrzöm, hogy a becslés hibáját elosztom a becsült szórással. Ha helytálló a normális eloszlás feltételezése (és a becslés), akkor ezeknek a hányadosoknak sztenderd normális eloszlást kell követniük. Ezen hányadost a továbbiakban 'normalizált különbség'-nek hívom. A *2. táblázat* a 'normalizált különbség'-ek átlagát és szórását mutatja.

[2] Az R^2 mutatószám levezetése megtalálható a legtöbb statisztika könyvben, pl.: Hunyadi, Mundroczó és Vita (1997) 643. oldal.

Bankfiók	Átlag	Szórás
Fiók 1	0,51	2,01
Fiók 2	0,26	1,86
Fiók 3	0,06	1,85
Fiók 4	0,23	1,50
Fiók 5	0,44	1,38
Fiók 6	0,25	1,85
Összesen	0,29	1,75

2. táblázat. A becslés normalitásának vizsgálata: 'normalizált különbség'-ek.



1. ábra. Normalizált különbség'-ek hisztogramja

A 2. táblázat adatai alapján azt lehet látni, hogy a 'normalizált különbség'-ek nem sztenderd normális eloszlást követnek. A várható érték nagyobb mint 0 (a szokásos szignifikancia szintek esetén szignifikánsan) és a szórás nagyobb, mint 1, ami azt jelenti, hogy a becsült szórások alulbecsültek.

Az *1. ábra* a 'normalizált különbség'-ek hisztogramját mutatja. Az ábrán jól látszik, hogy bár az eloszlás nem sztenderd normális, más paraméterű (nem egységnyi szórású) normális eloszlás nem tűnik elfogadhatatlannak, bár statisztikailag még mindig szignifikáns a különbség. Amennyiben 6 szabadságfokú t-eloszlást illesztünk (korrigált szórással) a nulhipotézist már nem tudjuk visszautasítani. Ezért a modellezést elvégeztem mind normális eloszlást, mind 6 szabadságfokú t eloszlást feltételezve is.

Mint korábban említettem, a forgalom becsült értékei, illetve a forgalom becsült szórása az optimalizáció esetén adottságok, a feltárt hiányosságok ellenére is ezekkel az értékekkel dolgoztam.

4 A probléma felírása programozási feladatként

A bankfiókok esetén a készpénz-optimalizáció nehézségét az adja, hogy a jövőbeni forgalmak pontos értéke nem ismert. Amennyiben tökéletes előrelátás lehetséges lenne, akkor az optimális készpénz rendelés és beszállítások mértéke egy vegyes egészértékű programozási feladat megoldásaként megkapható lenne. Az előrejelzésünk azonban nem tökéletes, a jövőbeni forgalmakról csak egy eloszlást tételezünk fel.

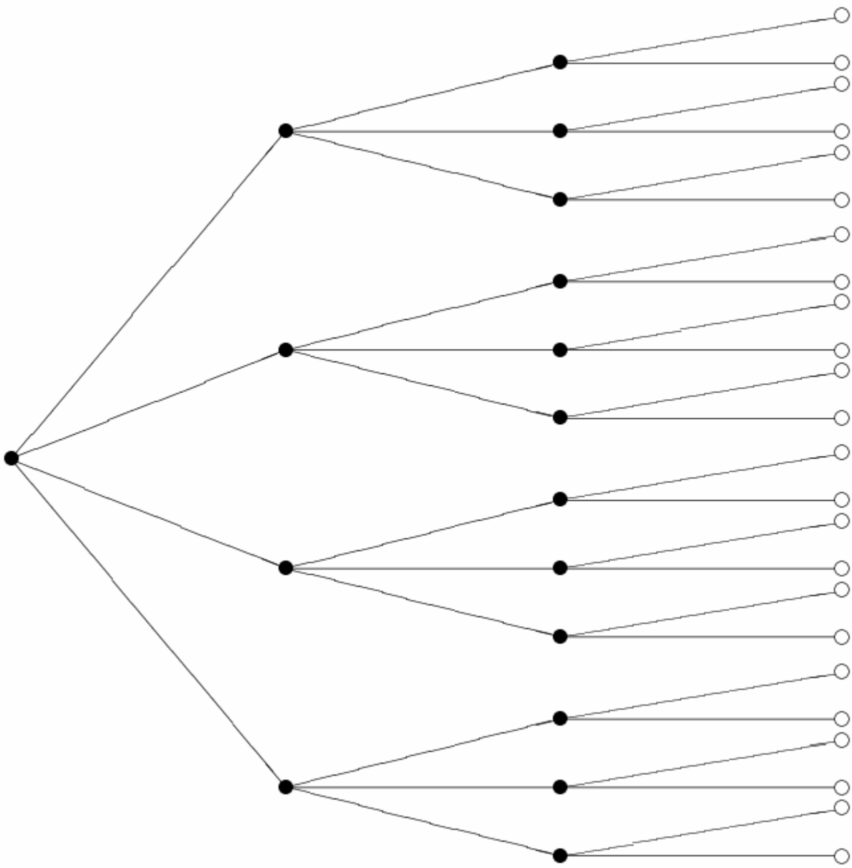
A bankfióknak a készpénz igényt, illetve leadást a nap elején kell megrendelni az előző napok realizálódott forgalmi adatai ismeretében, tehát a következő napi döntésem függ az aznapi forgalom tényleges nagyságától. Ilyen típusú problémákat ún. szcenárió fákkal[3] lehet modellezni. A forgalom jövőbeli alakulását pár kategorizált értékkel szemléltetem (pl.: kis forgalom esetén 1 000, nagy forgalom 20 000). Szcenárió fát úgy kapok, hogy a készpénz rendelés illetve beszállítási döntés meghozatala után az ágat tovább ágaztatom a következő napi forgalom szerint. Szcenárió fát mutat a *2. ábra*. A döntési fán a teli körök jelzik a döntési szituációkat, az ezekből kiinduló élek pedig jelzik a jövő bizonytalanságát. Az első napi döntést azelőtt kell meghoznom, hogy az aznapi forgalmat ismerném. Viszont a következő napi döntés már különbözhet aszerint, hogy az első nap kicsi volt a forgalom, vagy nagy.

Jelölje $C_{i_1,\ldots,i_j}$ a j-edik nap eleji készpénzállományt valamely szcenárió esetén. Az $i_1, \ldots, i_j$ értékek határozzák meg a szcenárió fán belüli helyzetet. Jelölje ezen az ágon a j-edik napi (nap végi) készpénzfelvételt, illetve leadást $X_{i_1,\ldots,i_j}$ és $Y_{i_1,\ldots,i_j}$. A pénz be- illetve kiszállításhoz fix költség is tartozik, ezért bináris változókat is be kell vezetni a fix költségek modellezéséhez: $D_{i_1,\ldots,i_j}$ illetve $E_{i_1,\ldots,i_j}$. D és E változók 1 értéke azt jelenti, hogy történik gépjármű rendelés, 0 értéke pedig azt, hogy nem.

Tegyük fel, hogy a j-edik napon a forgalom alakulására l_j szcenáriót különböztetünk meg[4]. Jelölje ezeket az értékeket rendre: $f_{i_1,\ldots,i_j,1}, \ldots, f_{i_1,\ldots,i_j,l_j}$.

[3] Készpénz-optimalizációs feladatok esetén a legtöbb szerző Markov modellt használ (például Eppen és Fama (1968)). Én eltérek a szokástól és a sztochasztikus optimalizálást szcenárió fákkal fogom elvégezni. A Markov modell mellett szóló érv, hogy a döntés meghozatalakor nem számít, hogy hogyan alakult ki a nap eleji nyitó készlet érték, hanem csak az, hogy mennyi az adott napon a készpénzállomány nyitó értéke. Markov modell elleni érv viszont, hogy a Markov modell stacionárius idősorok esetén elegáns. A bankfiókok (és különösen az ATM-ek) forgalma viszont nem stacionárius idősorokkal irható le. Például: amennyiben hétvégén is nyitva van a bankfiók, a forgalom jelentősen kisebb (vagy adott esetben akár nagyobb is lehet), vagy fizetésnap közelében a forgalom jelentősen nagyobb lehet. A döntés meghozatalakor tehát nem tudunk csak az adott napra támaszkodni, hanem több napra előre kell tekinteni. A Markov modellt is ki lehet bővíteni úgy, hogy döntéskor több napot tekint előre, de jelentősen csökkenti a modell egyszerűségét (és növeli a méretét). Továbbá a mi esetünkben nem egy döntési szabály meghatározása a cél, hanem konkrétan az igényelt vagy leadott készpénz mennyisége. A Markov modell esetén az állapotokat kategorizálni kell a készpénzállomány záró értéke alapján, így az igényelt vagy leadott készpénz mennyisége is csak pár különböző érték lehet.

[4] A feladat modellezése során feltesszük, hogy a j-edik napon minden szcenárió esetén ugyanannyi elágazás lehetséges (az elágazások száma viszont különbözhet egyik napról a másikra). Jelölje rendre $l_1, \ldots, l_j$ az 1., ..., j. napon az elágazások számát. Ez az $(l_1, \ldots, l_j)$ együttes meghatározza a szcenárió fát. Pl.: $(4 : 3 : 2)$ olyan szcenárió fát jelent, ahol az első nap 4-felé ágazik a fa, a másodikon 3-felé, a harmadikon pedig 2-felé. Ilyen szcenárió



2. ábra. Példa szcenárió fára

Ekkor a szcenárió fának ezen az ágán a nap végi állományt megkaphatjuk úgy, hogy a nyitó állományhoz hozzáadjuk az aznapi forgalom egyik kategorizált értékét plusz a rendelt készpénzállományt és levonjuk a beszállított készpénz mennyiségét:

$$C_{i_1,..,i_j} + f_{i_1,...,i_j,i_{j+1}} + X_{i_1,...,i_j} - Y_{i_1,...,i_j} = C_{i_1,...,i_j,i_{j+1}} \;, \tag{1}$$

ahol $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$.

Az l_j lehetséges megvalósulás esetén azt feltételezem, hogy mindegyik $\frac{1}{l_j}$ valószínűséggel következik be. Jelölje $\Phi(.)$ a feltételezett eloszlás (normális vagy t) eloszlásfüggvényét, $\Phi^{-1}(.)$ pedig ennek inverzét. Legyen $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$! Ekkor:

$$f_{i_1,...,i_j,i_{j+1}} = \hat{f}_j + \Phi^{-1}\left((i_{j+1}-1)\frac{1}{l_j} + \frac{1}{2}\frac{1}{l_j}\right)\hat{s}_j \;,$$

fát mutat a 2. ábra.

ahol $\hat{f}_j$ az j-edik napra a becsült forgalom, $\hat{s}_j$ pedig a forgalom becsült szórása. Például $l_j = 2$ esetén az inverz sűrűségfüggvényt a 0,25 és 0,75 pontokban veszem.

A fix költségek modellezéséhez szükséges egyenletek:

$$X_{i_1,\ldots,i_j} \leq p_{mk} D_{i_1,\ldots,i_j} \ , \tag{2}$$

illetve

$$Y_{i_1,\ldots,i_j} \leq p_{mk} E_{i_1,\ldots,i_j} \ . \tag{3}$$

A p_{mk} paraméter a fix költségek modellezéséhez szükséges paraméter. Jelen esetben p_{mk} paraméter a pénzszállító autóban szállítható készpénz maximumát mutatja.

A szcenárió fa ezen ágán a j-edik nap költsége megkapható a következő módon:

$$\begin{aligned} Cost_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = c_1 X_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_2 Y_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_3 D_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_4 E_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + \\ + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{c_{int}}{l_j} C_{i_1,i_2,\ldots,i_j,k} \ , \end{aligned} \tag{4}$$

ahol c_1, c_2, c_3, c_4 és c_{int} külső paraméterek. A c_1 illetve c_2 paraméter fejezi ki az igényelt illetve leadott pénzmennyiség (feldolgozási) költségét, c_3 és c_4 a pénz ki- illetve beszállítás fix költsége (autórendelés költsége), c_{int} pedig a napi kamatláb.

A megoldani kívánt programozási feladat a következő: minimalizáljuk az összköltséget, amelyet megkaphatunk úgy, hogy a $Cost_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$ költségeket beszorozzuk a csomópontba érkezés valószínűségével és összegezzük az összes elágazási csomópontra, ez az összköltség várható értéke. Az (1), (2) és (3) korlátoknak minden csomópontra teljesülnie kell. A döntési változók halmaza pedig a C, X, Y, D és E változók összessége[5].

5 Az elágazásmentes probléma felírása

Elágazásmentes probléma alatt azt értem, hogy a szcenárió fában nincs elágazás, csak egyetlen szcenáriót modellezek. Az elágazásmentesség egyfajta a determinisztikusságot jelent: a $j+1$-edik napi döntésem meghozatalakor nem használom fel a j-edik napi információt. A modell ugyanazt a készpénzmennyiséget javasolja rendelni két nap múlva akkor is, ha holnap a vártnál (becsültnél) nagyobb és akkor is, ha a vártnál (becsültnél) kisebb a tényleges készpénzforgalom.

Mivel ekkor minden döntésnél csak egy él indul ki, ezért $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 1$, tehát a változók indexelésénél csak 1-esek szerepelnek, a kérdés csak az, hogy hány. A változók indexe legyen ebben a fejezetben $\{j\}1$, ami azt mutatja, hogy az indexben j darab 1-es van, tehát az j-edik napról van szó. Pl.: $C_{\{j\}1}$ jelöli az j-edik nap eleji készpénzállományt.

[5] A C változókat ki lehetne fejezni az induló készpénzállomány és X, Y, D E és f változók segítségével.

5.1 Biztonsági korlát modellezése elágazásmentes probléma esetén

A bankfiókok nem tekinthetnek el attól a ténytől, hogy az előrejelzett értékek bizonytalanságot hordoznak. A bankfiókok működtetése (jó hírneve) megköveteli, hogy az ügyfelek igényét nagy valószínűséggel ki tudjuk elégíteni.

A rendszerbe biztonsági tartalék beépítésére több lehetőség is rendelkezésre áll. Ezek közül én a következő megfontolást választottam: a j-edik nap eleji döntésem két napra kihat. A rossz döntést csak a következő nap elején lehet újabb rendeléssel korrigálni, ami csak a következő nap végi szállításkor érkezik meg, tehát tényleges segítséget csak plusz két nap múlva jelent. Ezért azt követelem meg, hogy a j-edik nap eleji döntésemmel nagy valószínűséggel a $j+1$ nap végi egyenleg még mindig pozitív legyen. Jelölje ξ_j a j-edik napi forgalmat leíró valószínűségi változót, ξ_{j+1} pedig a $j+1$-edik napi forgalmat leíró valószínűségi változót. Élünk a feltételezéssel, hogy ξ_j és ξ_{j+1} független egymástól. Normális eloszlás felételezése esetén ξ_j $(\hat{f}_j; \hat{s}_j)$ paraméterű, ξ_{j+1} pedig $(\hat{f}_{j+1}; \hat{s}_{j+1})$ paraméterű normális eloszlást követ.

A $j+1$-edik nap végi egyenleg:

$$C_{\{j\}1} + \xi_j + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1} + \xi_{j+1} \; . \tag{5}$$

Az (5) kifejezésnek nagy valószínűséggel 0-nál nagyobbnak kell lennie. A megbízhatósági szintnek 99,9%-ot választottam. Egyrészt a bankfiókok nem futhatnak ki a készpénzből gyakorlatilag soha sem, másrészt az is indokolja a magas biztonsági szint választását, hogy a szórások alulbecsültek. Mivel ξ_j és ξ_{j+1} is normális eloszlású, ezért az összegük is az, $(\hat{f}_j + \hat{f}_{j+1}; \sqrt{\hat{s}_j^2 + \hat{s}_{j+1}^2})$ paraméterekkel. Az (5) átrendezésével kapjuk a valószínűségi korlátot:

$$P\Big(C_{\{j\}1} + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1} \geq -\xi_j - \xi_{j+1}\Big) \geq 0,999 \; , \tag{6}$$

ahol $P(.)$ az esemény valószínűségét jelöli.

A (6) korlátot egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha mindkét oldalhoz hozzáadjuk $\hat{f}_j = f_{\{j\}1}$ értéket, mert $C_{\{j+1\}1} = C_{\{j\}1} + f_{\{j\}1} + X_{\{j\}1} - Y_{\{j\}1}$. Így

$$P\Big(C_{\{j+1\}1} \geq (-\xi_j + \hat{f}_j) - \xi_{j+1}\Big) \geq 0,999 \; . \tag{7}$$

A sztenderd normális eloszlás táblázata szerint a $C_{\{j+1\}1}$-nek a $(-\xi_j + f_j) - \xi_{j+1}$ valószínűségi változó várható értékét 3,09 szórással kell meghaladnia. A lineáris programozási feladatok esetén a kerekített 3 szórással fogok dolgozni[6].

A Student féle t eloszlás esetén is 3 szórásnyi biztonsági tartalékkal számolok. Természetesen a t eloszlás esetén ehhez más valószínűség tarozik, mint

[6] A vizsgált bankfiókok esetére a szórás alábecsült, ezért 4, 5 vagy akár 6 szórásnyi tartalék is indokolt lehetne.

normális eloszlás esetén[7]. Független t eloszlások összegére nincs zárt képlet, ez csak numerikusan határozható meg (lásd pl.: Walker és Saw (1978)), ráadásul minden egyes esetben újra kellene számolni.

A cikk fő eredménye a szcenáriós fás megközelítés összehasonlítása a 'determinisztikus' megközelítéssel, ami más biztonsági szint esetén is értelmezhető. A megoldandó programozási feladatot úgy kapjuk, ha a modell feltételei közé felvesszük a $j+1$ nap végi egyenlegre vonatkozó valószínűségi (8) korlátot[8].

$$C_{\{j+1\}1} \geq -\hat{f}_{j+1} + 3\sqrt{\hat{s}_j^2 + \hat{s}_{j+1}^2}\,. \tag{8}$$

Amennyiben a $j+1$. nap előrejelzett forgalma jelentős befizetés a bankfiók számára, akkor a (8) korlát egyenlőtelenség formájában fog teljesülni, ami logikus is, hiszen attól, hogy holnap jelentős befizetésre számítok, a mai nap végi egyenleg nem lehet negatív.

5.2 Az elágazásmentes feladat numerikus eredményei

Az előző pontban leírt programozási feladatot valós adatokon futattam, különböző hosszúságú időhorizontra (n-re). A futtatáshoz értéket kell adni a c_1, c_2, c_3, c_4, c_{int} és p_{mk} paramétereknek. A futtatásokat a $c_{int} = 0,2$, $c_1 = c_2 = 0,3$, $c_3 = c_4 = 10000$ és a $p_{mk} = 200000$ paraméterekkel futtattam. A nyitó készpénz állomány minden esetben 30000 (ezer forint).

A lineáris programozási feladatok megoldásához glpk nevű megoldót használtam. A glpk program a gnu szabad szoftverek licensze alá tartozik. A programot Windows 2000 operációs rendszeren, 2,33 gigahertz órajelű és 1,9 GB memóriával rendelkező gépen futattam.

A *3. táblázat* mutatja különböző időhorizontra a modellezett összköltséget, a *4. táblázat* pedig azt mutatja, hogy hány esetben került készpénzzavarba a bankfiók.

Bankfiók	$n=9$	$n=8$	$n=7$	$n=6$	$n=5$	$n=4$	$n=3$	$n=2$
Fiók 1	2 108	2 116	2 116	2 105	2 109	2 099	2 110	2 034
Fiók 2	2 891	2 891	2 891	2 881	2 925	2 869	2 916	2 824
Fiók 3	266	236	262	298	271	256	476	476
Fiók 4	1 901	1 916	1 901	1 917	1 934	1 883	1 902	1 777
Fiók 5	1 121	1 118	1 105	1 114	1 117	1 101	1 295	11 616
Fiók 6	698	696	696	663	654	581	741	748

3. táblázat. Az elágazásmentes modellek költségei (negyedévre, ezer forintban)

A 3. táblázat alapján levonhatjuk azt a következtetést, hogy az optimalizálási horizont növelése (egy idő után) nem csökkenti érdemben az összköltséget. A túl rövid optimalizálási időhorizont ($n = 2$, néha $n = 3$) ellenben problémás lehet (lásd különösen az 5. fiók esetét). Fontos látni, hogy ebben

[7] Szemléltetésül: független, azonos szórású, 6 szabadságfokú t eloszlások esetén a 3,09 szóráshoz 0,9976% biztonsági szint tartozik.

[8] Mivel mind normális, mind t eloszlás esetén a 3 szórásnyi biztonsági szintet használom, így az eredményekben nem lesz különbség, de azt fontos hangsúlyozni, hogy t eloszlás esetén ehhez a 3 szóráshoz kisebb biztonsági szint tartozik.

az esetben ún. lefizető fiókról van szó. A fiók a felgyülemlett készpénzt nem fizeti le, hanem a bankfiókban őrzi $n = 1$ optimalizálási horizont esetén. Ez azért van így, mert a lefizetéskor a pénz számlálásának költsége nagyobb, mint a kamatveszteség. A probléma megoldódik, ha növeljük az optimalizálás időhorizontját, mert a felgyülemlett készpénzre több nap is felszámítjuk a kamatveszteséget, így ez a hatás felülírja az egyszer felszámolandó pénzszámolás hatását.

Bankfiók	$n = 9$	$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$
Fiók 1	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 3	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 4	0	0	0	0	0	0	0	0
Fiók 5	7	4	8	5	7	7	2	0
Fiók 6	2	2	2	2	2	2	1	0

4. táblázat. Az elágazásmentes modellek készpénzhiányos napjainak száma

A 4. táblázat azt mutatja, hány esetben került készpénzzavarba a bankfiók. Érdekes az 5. fiók esete. Ez a fiók ún. lefizető fiók, tehát a felgyülemlett készpénzt szállítja el az autó. Ez a fiók úgy kerül készpénzzavarba, hogy a tényleges érték eltér az előrejelzett értéktől, és a modell több pénz lefizetését javasolja, mint amennyi a pénztárban van.

Itt látszik, hogy nagyon fontos a bankfióki folyamatok megértése és pontos modellezése. Amikor a bankfiók készpénzt rendel, előre meg kell mondania a pontos összeget, ezen változtatni nem lehet. Lefizetéskor a helyzet valamelyest rugalmasabb. A pénzszállító autó nyilván nem tud több pénzt elszállítani, mint amennyi a fiókban van. Különösen lényeges, hogy meg kell-e előre mondani, hogy mennyi pénzt szállít el az autó, és mi történik akkor, ha eltérés mutatkozik az előre bejelentettől. Lefizetéskor sokkal szerencsésebb lenne, ha nem a modell által lefizetni javasolt készpénzmennyiséghez igazodnánk, hanem a tényleges forgalom ismeretében (vagy legalábbis pontosabb ismeretében, mint az optimalizáláskor ismert előrejelzés) a modell által becsült záró értékhez.

A 6. fiók esetében viszont ténylegesen kifogyott a fiók a pénzből, többször is. Itt nem volt elégséges a biztonsági szint. Ez a fiók viszonylag kis forgalmú és az átlagos forgalomhoz képest a szórás nagyon jelentős (30-szoros). Azon a napon, amikor kifut a pénzből, a tényleges érték a becsült értéktől több mint 5 becsült szórással tér el. Ráadásul pár napon belül előfordul több 3 szórásnál nagyobb eltérés. Ilyen rendkívüli esetekre nem lehet a modellt felkészíteni. Valószínűsíthető, hogy nem az előjelzés volt ennyire rossz, hanem rendkívüli esemény áll a nagyfokú eltérés mögött (amit a bankfiók előre tudott).

6 Sztochasztikus modellezés

Közismert tény, hogy véletlen folyamatok esetén a várható értékekkel végzett optimalizáció jelentős mértékben eltérhet a sztochasztikus optimumtól. Ebben a fejezetben megvizsgálom, hogy a sztochasztikus modellek hogyan teljesítenek a valós adatokon.

Fontos kérdés, hogy a sztochasztikus modellezés költségelőnyt jelent-e az elágazásmentes felíráshoz képest, hiszen minden nap, az aznapi döntés után az elmúlt napi tényleges érték ismeretében újra futtatom a modellt. Az első napi döntés pedig sztochasztikus modell esetén is azonos lesz az összes szcenárióra.

6.1 Biztonsági korlát modellezése sztochasztikus probléma esetén

Szcenárió fák esetén a biztonsági korlátot az elágazásmentes esettől eltérően kezelem. Elágazásmentes esetben a (8) képlet azt fejezi ki, hogy a nap végi állomány legyen megfelelően nagyobb a következő napra várt forgalom értékénél. Szcenárió fák esetén a nap végi állomány nem egyértelmű, éppen ez a szcenárió fák lényege. Ezért ebben az esetben azt követelem meg, hogy bármilyen ágon a nap végi egyenleg nagy valószínűséggel elég legyen a következő (második) napi forgalom kiegyenlítéséhez. Ebben az esetben is a 3 szórásnyi biztonsági tartalékkal számolok, ami normális eloszlás esetén a 99,9% biztonsági szintnek felel meg, t eloszlás esetén pedig 99,5%-nak:

$$C_{i_1,i_2,\ldots,i_j,i_{j+1}} \geq -\hat{f}_{j+1} + 3\hat{s}_{j+1} \ , \tag{9}$$

ahol $1 \leq i_{j+1} \leq l_j$, és $\hat{f}_{j+1}$ a $j+1$. napra előrejelzett forgalom, $\hat{s}_{j+1}$ pedig ennek szórása.

6.2 Numerikus eredmények sztochasztikus modellekre

Első fontos megjegyzésünk, hogy sztochasztikus modellek esetén nagyon könynyen elérjük a megoldó korlátait. Ezt szemlélteti az *5. táblázat*: egy adott feladat megoldása hány másodpercet vett igénybe különböző l_i értékadások esetén.

Modell	$n = 9$
2;2;2	0,0
2;2;2;2	0,1
2;2;2;2;2	20,1
4;4;4	0,1
4;4;4;1	>400
4;2;1	0,1
4;2;1;1	1,2
4;2;1;1;1	92,5

5. táblázat. A sztochasztikus modellek időigénye

Az 5. táblázat értékei alapján látható, hogy a feladat megoldásához szükséges idő exponenciálisan nő a szcenárió fa méretével, ami természetesen nem meglepő és ismert is a szcenárió fák esetében.

A *6. és 8. táblázatokban* a néhány kiválasztott sztochasztikus modell futási eredményeit közlöm normális eloszlás feltételezése esetén.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	2 034	2 048	2 089	2 036	2 063
Fiók 2	2 731	2 731	2 805	2 824	2 826
Fiók 3	255	229	250	249	260
Fiók 4	1 728	1 735	1 798	1 797	1 802
Fiók 5	1 038	1 039	1 100	1 100	1 098
Fiók 6	595	597	587	567	649

6. táblázat. A sztochasztikus modellek költsége (negyedévre, ezer forintban) normális eloszlás feltételezése esetén

A 6. táblázat adataiból a következő következtetéseket lehet levonni: a különböző sztochasztikus modellek teljesítménye között egyértelmű dominanciát felállítani nem lehet. Azt lehet mondani, hogy azok a modellek, amikor az első nap csak 2-fele ágaztatunk, átlagban jobban teljesítenek, mint azok, amikor 4-fele, de a kijelentés távolról sem meggyőző. Az időhorizont növelésének itt sincs egyértelműen kimutatható pozitív hatása.

Az 1-4. fiók adatai alapján a sztochasztikus modellek összességében jobban teljesítenek, mint az elágazásmentes modellek: a 4-9 napos elágazásmentes modellek átlagánál a sztochasztikus modellek átlaga az 1. fiók esetében 2,6%-kal, a 2. fiók esetében 3,7%-kal, a harmadik fiók esetében 6,1%-kal, a 4. fiók esetében pedig 7,2%-kal kisebb költséggel jár az optimalizáció. Amennyiben a 4 fiók költségeit összegezzük, a csökkenés 4,4%. Az 5. és 6. fiók esetén a költségek összehasonlítása azért nem szerencsés, mert itt kifutottak a szükséges készpénzből, de itt is a sztochasztikus modellek teljesítettek jobban, hasonló mértékben. Az eredményeket kétféleképpen is lehet értelmezni: egyrészt azt mondhatjuk, hogy nem jelentős az elért költségcsökkenés, másrészt azt is lehet mondani, hogy ha egy bank a készpénzellátás összköltségét 4%-kal tudja csökkenteni, az számára jelentős eredmény.

Bankfiók	kamat-költség	autó fix költsége	pénzszámolás költsége
Fiók 1 (elágazásmentes)	1 070	412	627
Fiók 1 (sztochasztikus)	989	438	627
Fiók 2 (elágazásmentes)	1 552	442	898
Fiók 2 (sztochasztikus)	1 366	526	891
Fiók 3 (elágazásmentes)	149	95	21
Fiók 3 (sztochasztikus)	193	42	14
Fiók 4 (elágazásmentes)	1 241	273	394
Fiók 4 (sztochasztikus)	1 038	346	388
Fiók 5 (elágazásmentes)	278	303	531
Fiók 5 (sztochasztikus)	227	310	538
Fiók 6 (elágazásmentes)	337	213	114
Fiók 6 (sztochasztikus)	353	158	88

7. táblázat. Az elágazásmentes és sztochasztikus modellek költségösszetevői (negyedévre, ezer forintban) normális eloszlás feltételezése esetén

Érdemes megvizsgálni, hogy miből adódik pontosan a sztochasztikus modellek alacsonyabb költségszintje. A vizsgálat elvégzéséhez az összköltséget 3 összetevőre bontom: kamatra, az autórendelés költségére és a pénzfeldolgozás költségére. E 3 összetevő átlaga az elágazásmentes és sztochasztikus modellek esetében a *7. táblázatban* látható.

A 8. táblázat adatai alapján a következő összefüggésekre lehetünk figyelmesek: a pénzszámolás költsége tekintetében általában nincs nagy különbség az elágazásmentes és sztochasztikus modellek között. Ez azért van így, mert a tisztán lefizető vagy felvevő fiókok esetén az igényelt vagy lefizetett összeg nagysága nem tér el csak az időzítése, ami összességében nem befolyásolja a pénzszámlálás költségét. Más a helyzet a közel önellátó fiókok esetén. Az ő esetükben (a 3. és 6. fiók) mindkét irányban van készpénzáramlás. E fiókok esetén a sztochasztikus modellek kevesebb készpénzáramlást produkáltak, ezért kisebb a pénzfeldolgozás költsége. Ha csak egyirányú készpénzáramlással állunk szemben, akkor csak a szállítások nagysága és időzítése térhet el. Nincs egyértelmű kép, de úgy tűnik, hogy a sztochasztikus modellek többször rendelnek pénzszállító autót kisebb összegekre, így nyernek a kamatköltségen, ami ellensúlyozza még a többszöri szállítás megnövekedett fix költségét is.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	0	0	0	0	0
Fiók 2	0	0	0	0	0
Fiók 3	0	0	0	0	0
Fiók 4	0	0	0	0	8
Fiók 5	16	13	7	7	8
Fiók 6	3	3	1	1	1

8. táblázat. A sztochasztikus modellek esetén a készpénzhiányos napok száma normális eloszlás feltételezése esetén

A 8. táblázat végezetül azt mutatja, hogy hány esetben kerül készpénzzavarba a bank. Az értékek nagy vonalakban megegyeznek az elágazásmentes modell esetén tapasztaltakkal. Úgy tűnik, hogy azok a modellek 'biztonságosabbak' amikor az első nap 4-fele ágaztatunk. Ez logikus lehet abból a szempontból, hogy a 4-fele ágaztatás valamivel nagyobb biztonsági szintet eredményez, mint a 2-fele ágaztatás.

A modell futtatását elvégeztem úgy is, hogy nem normális eloszlást, hanem 6 szabadságfokú t eloszlást alkalmaztam (*9. táblázat*). Látható, hogy nincs lényegi különbség a normális és t eloszlás feltételezése között. Ez a megállapítás igaz a készpénzhiányos napok számára is. Fontos most is hangsúlyozni, hogy az (elméleti) biztonsági szint t eloszlás esetén valamivel kisebb, mint normális eloszlás esetén.

Bankfiók	(2;2;2)	(2;2;2;2)	(4;4;4)	(4;2;1)	(4;2;1;1)
Fiók 1	2 025	1 991	2 053	2 040	2 063
Fiók 2	2 714	2 718	2 774	2 806	2 807
Fiók 3	255	227	253	258	258
Fiók 4	1 736	1 717	1 792	1 777	1 808
Fiók 5	1 026	1 020	1 085	1 085	1 083
Fiók 6	587	593	576	573	631

9. táblázat. A sztochasztikus modellek költsége (negyedévre, ezer forintban) 6 szabadságfokú t eloszlás feltételezése esetén

A továbbiakban két olyan modellt mutatok be, amelyek nem szoktak előfordulni a szakirodalomban. Az egyik a valuták kezelése, a másik a bankfiókok közötti átszállítás modellezése.

7 Több pénznem együttes kezelése

Ebben a fejezetben úgy bővítem a modellt, hogy figyelembe veszem, hogy a bankok nem csak forint készlettel rendelkeznek, hanem valutakészlettel is. A modell két valutát fog kezelni eurót és dollárt. A biztonsági korlátokat mindhárom pénznemre teljesíteni kell. A pénzszállító autó viszont tud több valutát is hozni egyszerre, és a fuvardíjat is csak egyszer kell kifizetni. Kérdés, hogy ebben a környezetben mekkora a különbség az elágazásmentes és a sztochasztikus[9] megközelítés optimuma között.

A feladat programozási modelljéhez a következő jelöléseket kell bevezetni: A pénznemet jobb felső indexben jelölöm. Például $C^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j}$ jelöli a vizsgált szcenárió esetén a forint készlet j-edik napi záró értékét, ahol $i_1, i_2, ..., i_j$ jelöli az j-edik nap végéig bejárt utak egyikét. Hasonlóképpen $C^{EU}_{i_1,i_2,...,i_j}$ az euró j-edik nap végi állománya, $C^{US}_{i_1,i_2,...,i_j}$ pedig a dollár j-edik nap végi záró értéke. Hasonlóan $X^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j}$, $X^{EU}_{i_1,i_2,...,i_j}$ és $X^{US}_{i_1,i_2,...,i_j}$ jelöli a vizsgált szcenárió esetén az adott pénznem j.-edik napi rendelt értékét, ahol $i_1, i_2, ..., i_j$ jelöli az j-edik nap végéig bejárt utak egyikét, Y változók pedig a központba beszállítani kívánt pénzmennyiséget jelölik. $D_{i_1,i_2,...,i_j}$ és $E_{i_1,i_2,...,i_j}$ változók pedig a vizsgált szcenárió esetén a pénz ki- illetve beszállítás tényét leíró bineáris változók. A jelölésekből is látható, hogy a pénzszállító autóval több valutát is tudunk rendelni egyszerre (nincs felső indexe a változóknak).

Az egyszerűség kedvéért a valuták állományát is forintértéken kezelem és a valuták esetén is a forintértékhez hasonló költségstruktúrát tételezek fel.

A probléma lineáris programozási feladatként való felírásakor az (1) korlátot minden pénznemre fel kell írni, például forint esetén az alábbi alakot ölti:

$$C^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j} + f^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j,i_{j+1}} + X^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j} - Y^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j} = C^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j,i_{j+1}} ,$$

ahol $1 \le i_{j+1} \le l_j$. A fix költséget modellező (2) és (3) korlátok pedig az alábbi módon változnak:

$$X^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j} + X^{EU}_{i_1,i_2,...,i_j} + X^{US}_{i_1,i_2,...,i_j} \le p_{mk} D_{i_1,i_2,...,i_j} ,$$

illetve

$$Y^{FT}_{i_1,i_2,...,i_j} + Y^{EU}_{i_1,i_2,...,i_j} + Y^{US}_{i_1,i_2,...,i_j} \le p_{mk} E_{i_1,i_2,...,i_j} .$$

Valuták figyelembevétele esetén a (4) célfüggvény módosul, mert nem csak a forint állományra, hanem az euró és a dollár állományra is kell kamatveszteséget számolni. Természetesen mindhárom pénznemre van számolási költség is.

[9] Mivel az előző pontban láttuk, hogy nincs lényeges eltérés a normális és t eloszlás feltételezése között, a számításokat csak normális eloszlásra mutatom be.

$$
\begin{aligned}
&Cost_{i_1,i_2,\ldots,i_j} = \\
&= c_1 X^{FT}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_2 Y^{FT}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{c_{int}}{l_j} C^{FT}_{i_1,i_2,\ldots,i_j,k} + \\
&\quad = c_1 X^{EU}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_2 Y^{EU}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{c_{int}}{l_j} C^{EU}_{i_1,i_2,\ldots,i_j,k} + \\
&\qquad = c_1 X^{US}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_2 Y^{US}_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + \sum_{k=1}^{l_j} \frac{c_{int}}{l_j} C^{US}_{i_1,i_2,\ldots,i_j,k} + \\
&\qquad\quad + c_3 D_{i_1,i_2,\ldots,i_j} + c_4 E_{i_1,i_2,\ldots,i_j} \ ,
\end{aligned} \tag{10}
$$

7.1 Elágazásmentes modellezés valuták figyelembevétele esetén

Valuták figyelembevételekor újfent először az elágazásmentes modellt vizsgálom, amikor a szcenárió fában nincs elágazás. Ekkor minden pénznemre teljesülnie kell a (8) korlátnak, amely például forint esetén a

$$
C^{FT}_{\{i+1\}1} \geq \hat{f}^{FT}_{i+1} + 3\sqrt{(\hat{s}^{FT}_i)^2 + (\hat{s}^{FT}_{i+1})^2}
$$

alakot ölti.

Numerikus eredmények

A valutaforgalomra múltbeli adat nem állt rendelkezésre, ezért egy szemléltető megoldást választottam: mivel a valuta forgalom jelentősen elmarad a forint forgalom mellett ezért a 3. fiók forgalmát tekintettem az euró forgalomnak, a 6. fiók forgalmát pedig a dollár forgalomnak. Az 1., 2., 4. és 5. fiók forgalmát pedig négy különböző forint forgalomnak. Jelen esetben időhorizontnak az $n = 3$ értékkel számoltam csak. A *10. táblázat* mutatja a csúszóablakos technikával számolt költséget.

Bankfiók	$n = 3$
Fiók 1	2 852
Fiók 2	3 650
Fiók 4	2 668
Fiók 5	2 200

10. táblázat. Az elágazásmentes modell költsége valuták figyelembevételével (negyedévre, ezer forintban)

7.2 Sztochasztikus modellezés valuták figyelembevétele esetén

Valuták figyelembevétele esetén is az a kérdés, hogy ha szcenárió fákkal modellezem a valós folyamatokat, akkor jobb eredményt kapok-e mint ha az elágazásmentes megközelítést választom. A kérdés most is azért merül fel, mert a csúszóablakos technika miatt mindennap újraszámolom a modellt.

A biztonsági korlátot modellező (9) korlátnak most is minden pénznemre teljesülnie kell. Forint esetén például az alábbi alakot ölti:

$$C^{FT}_{i_1,i_2,\ldots,i_j,i_{j+1}} \geq -\hat{f}^{FT}_{j+1} + 3\hat{s}^{FT}_{j+1} \,.$$

Numerikus eredmények

Sztochasztikus modellezés esetén a következő módon jártam el: az első napon minden pénznem esetén két lehetséges forgalmat feltételeztem. Mivel összesen 3 pénznem van, ez 8 lehetséges szcenárió. A második napot is bevontam a modellezésbe, de további elágazással nem dolgoztam, mert meghaladta volna a probléma a megoldhatóság határát. A négy bankfiókra a a sztochasztikus modell költségeit a *11. táblázat* mutatja. A táblázatban szerepel, hogy a sztochasztikus modell esetén az összköltség hány százalékkal kisebb, mint az elágazásmentes modell esetén.

Bankfiók	Sztochasztikus modell	költségváltozás (%)
Fiók 1	2 563	-10,1
Fiók 2	3 325	-8,9
Fiók 4	2 383	-10,7
Fiók 5	1 864	-15,3

11. táblázat. A sztochasztikus modell költsége valuták figyelembevételével (negyedévre, ezer forintban)

A sztochasztikus modellezés a valuták figyelembevételével az egy pénznem kezeléséhez képest nagyobb mértékben csökkenti a költségeket. Mivel a 6. fiók forgalma játssza a dollár szerepét, ezért ebben az esetben is kifutunk a készletből.

8 Bankfiókok közötti átszállítás

Ebben a fejezetben a bankfiókok közötti átszállítást vizsgálom. Amennyiben lehetséges, célszerű úgy megszervezni a készpénzszállítást, hogy az egyik bankfiók közvetlenül egy másik bankfióknak szállítson. Így két fuvar helyett csak 1-et kell fizetni. Ebben az esetben a pénzszállító cég nem is dolgozza fel a pénzt, csak szállítja, így a pénzfeldolgozás díját is meg lehet takarítani[10]. A modellezés során ezekkel a feltételezésekkel élek. Természetesen a bankfiókba szállított készpénz mennyisége nem fix összeg, hanem az aznapi forgalom függvénye, ezért a bankfiók biztonságos működése különösen kritikus ebben az esetben.

Bankfiókok közötti átszállítások modellezésénél a megoldó méretét meghaladná a sztochasztikus modellezés, ezért csak elágazásmentes modellel vizsgáltam a problémát. C, X, Y, D és E változók jelentése ugyanaz, mint eddig.

[10] Ilyen esetekben természetesen a bankfiókoknak van többlet munkájuk, amennyiben ez számottevő költséggel jár, modellezni kell.

A változók felső indexe, a bankfiókra utal. Ezen változók mellett szükségesek még az átszállításokat leíró változók. Legyen B egy indexhalmaz, ami a lehetséges átszállítási irányokat tartalmazza. X_bY egy átszállítás esetén a pénzmennyiséget jelöli, ahol az irányt b index jelöli. Természetesen $b \in B$. Minden átszállításhoz ki kell fizetni az autó fix költségét (de csak azt), tehát X_bY változókhoz D_bE bineáris változót is be kell vezetni a fix költségek modellezéséhez. Jelölje továbbá $_fB$ azoknak az átszállítási irányoknak a halmazát, amikor az átszállítás az f-edik fiókból történik valamelyik másik fiókba. Jelölje hasonlóan B_f azon átszállítási irányok halmazát, amikor valamelyik másik fiókból az f-edik fiókba szállítanak át készpénzt.

A bevezetett jelölésekkel fel tudjuk írni a szükséges korlátokat: nap végi egyenleg:

$$C^k_{\{j\}1} + f_{\{j\}1} + X^k_{\{j\}1} + \sum_{b \in B_f} X_bY_{\{j\}1} - Y^k_{\{j\}1} - \sum_{b \in {}_fB} X_bY_{\{j\}1} = C^k_{\{j+1\}1} ,$$

ahol $1 \leq j \leq n$ és $k \in K$, ahol K a bankfiókok halmaza.

Fix költségek modellezése:

$$X^k_{\{j\}1} \leq p_{mk} D^k_{\{j\}1} ,$$

$$Y^k_{\{j\}1} \leq p_{mk} E^j_{\{j\}1} ,$$

és

$$X_bY_{\{j\}1} \leq p_{mk} D_bE_{\{j\}1} ,$$

ahol $k \in K$ és $b \in B$.

Biztonsági korlát szükséges mértéke

$$C^k_{\{j+1\}1} \geq -\hat{f}^k_{j+1} + 3\sqrt{\left(\hat{s}^k_j\right)^2 + \left(\hat{s}^k_{j+1}\right)^2} , \tag{11}$$

ahol $k \in K$. Az j-edik napon a célfüggvény értéke:

$$Cost_{\{j\}1} = \sum_{k \in K} \left(c_{int} C^k_{\{j+1\}1} + c_1 X^k_{\{j\}1} + c_2 Y^k_{\{j\}1} + c_3 D^k_{\{j\}1} + c_4 E^k_{\{j\}1} \right) + \\ + \sum_{b \in B} c_3 D_bE_{\{j\}1} .$$

Numerikus eredmények

Az átszállítási feladat megoldását a rendelkezésre álló 6 bankfiók példáján mutatom be. A bankfiókok közötti átszállítást nem engedem meg mindenhonnan mindenhova, csak ahol értelmes: olyan bankfiókokból ahol felhalmozódik a készpénz olyan bankfiókokba, állandó készpénzszállítási igény lép fel. Az átszállítások a következő viszonylatokban lehetségesek: 3. és 5. fiókból az 1., 2., 4. és 6. fiókba.

A modellt maximum $n = 4$ esetén tudtam futtatni belátható időn belül. Az $n = 4$ esetben a csúszóablakos technika esetén a modellezett összköltség 7 531 ezer forint. Ez az összeg 15%-kal alacsonyabb, mint a 6 fiók egyedi költségeinek összege.

9 Összefoglalás

Ebben a cikkben banki készpénz-optimalitási problémákat vizsgáltam, és a készpénz-optimalizálási problémát lineáris programozási feladatként írtam fel, melyet a glpk nevű szabad szoftverrel oldottam meg. A modellezés során bebizonyosodott, hogy a probléma kezelhető lineáris programozási feladatként. Az is bebizonyosodott, hogy még csúszóablakos technika esetén is érdemes sztochasztikus modellekben gondolkodni. A cikkben szcenárió fás megközelítést alkalmaztam, melynek során az optimalizálási horizont csökken, mert a programozási feladat mérete exponenciálisan nő az elágazások számával. A cikkben megmutattam azt is, hogy lineáris programozási feladatok segítségével kezelhető a szokásostól eltérő probléma is, mint például a valuták figyelembevétele, vagy a bankfiókok közötti átszállítás modellezése.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Deák Istvánnak és Kovács Erzsébetnek a hasznos javaslatait. Szeretném megköszönni két ismeretlen lektorom tanácsait is. Szintén szeretném megköszönni Ágoston Andreának és Forgó Ferencnek is a kézirat többszöri átolvasását. Természetesen az esetleges hibákért az enyém a felelősség.

Irodalom

1. A. Bar-Ilan, D. Perry, W. Stadje (2004): A generalized impulse control model of cash management, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, Issue 6, 1013–1033
2. J. Baumol (1952): The transactions demand for cash: an inventory theoretic approach, *Quarterly Journal of Economics* 66, 545–556.
3. E. Elton, M. Gruber (1974): On the Cash Balance Problem, *Operational Research Quarterly*, Vol. 25, No. 4. 553–572
4. G. Eppen, E. Fama (1968): Solutions for Cash-Balance and Simple Dynamic-Portfolio Problems, *The Journal of Business*, Vol. 41, No. 1, 94–112
5. Havran D. (2008): Pénzgazdálkodási szokások hatása a működőtőkére. A Magyar Posta példája, *Közgazdasági szemle*, LV. évf., október, 907–926
6. D. Heyman (1973): A Model for Cash Balance Management, *Management Science*, Vol. 19, No. 12, 1407–13
7. Hunyadi L., Mundroczó Gy., Vita L. (1997): *Statisztika*, Aula kiadó
8. M. Miller, D. Orr (1966): A Model of the Demand for Money by Firms. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 3, 413–435.
9. R. Simutis, D. Dilijonas, L. Bastina, J. Friman, P. Drobinov (2007): Optimization of Cash Management for ATM Network, Information *Technology and Control*, Vol. 36, No. 1A, 117–121
10. H. Snellmana, M. Virenb (2009): ATM networks and cash usage, *Applied Financial Economics*, Vol. 19, Iss. 10, 841–851

11. G. A. Walker, J. G. Saw (1978): The Distribution of Linear Combinations of t-Variables, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 73, No. 364, 876–878
12. J.-S. Yao, M.-S. Chen, H.-F. Lu (2006): A fuzzy stochastic single-period model for cash management, *European Journal of Operational Research* 170, 72–90

CASH FLOW MANAGEMENT WITH GLPK SOFTWARE

In recent years both operational research and quantitative finance have paid much attention to cash management issues. In this paper we present a cash management study which is based on real world data and uses a mixed integer linear programming (MILP) model as the main tool. In the paper we compare deterministic and stochastic approaches. The classical cash management problem is extended in two ways: we considered the possibility of bank offices keeping more than one currency and also investigated the opportunity of cash transports between bank offices. The MILP problem was solved with glpk (GNU Linear Programming Kit), a free software. The reader can also get a feel of how to use this solver.