A Bozóki, S. [2006]: Súlyok meghatározása páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítése alapján, Alkalmazott Matematikai Lapok, 23, 121-137. cikk **kézirata**

Súlyok meghatározása páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítése alapján

Bozóki Sándor [1]

Kivonat

A páros összehasonlítások módszere a többszempontú döntési feladatok megoldásának egy lehetséges eszköze mind a szempontsúlyok meghatározásában, mind az alternatívák értékelésében. A szempontokat páronként összehasonlítva, fontosságaiknak a döntéshozó által megítélt arányait mátrixba rendezve a feladat a súlyvektor meghatározása úgy, hogy annak komponensei valamilyen értelemben jól illeszkedjenek a döntéshozó által megadott értékekhez.

A páros összehasonlítás mátrixból a súlyok kiszámítására leggyakrabban használt sajátvektor módszer (Analytic Hierarchy Process) mellett számos távolságminimalizáló módszer is létezik. Ezek egyike a legkisebb négyzetek módszere, melynek megoldása nemlineáris, nemkonvex függvény feltételes optimalizálását jelenti. A cikkben olyan módszereket mutatunk be a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes becslésére, amelyek a célfüggvény összes lokális és globális minimumhelyének meghatározására alkalmasak.

1. Páros összehasonlítás mátrixok

A többszempontú döntési modellekben a cél véges számú alternatíva véges számú szempont szerint történő rangsorolása. A pályázatok versenyeztetése, a vállalati stratégiák közül a legjobb kiválasztása, a közbeszerzési eljárások, adott pozícióra a legalkalmasabb személy kiválasztása olyan gyakorlati problémák, amelyek többszempontú döntési feladat megoldására vezetnek. A szempontok általában nem egyformán fontosak, szükség van tehát olyan módszerre, amely a szempontokat fontossági súlyokkal látja el úgy, hogy az a döntéshozó céljaival harmóniában álljon. A feladat egyik nehézsége, hogy a fontosságnak nincs általánosan elfogadott mértékegysége, azt csak valamilyen skálával együtt lehet értelmezni. Előfordul, hogy a döntéshozó közvetlenül, számszerűen meg tudja adni a szempontsúlyokat, ezt egyszerű közvetlen

[1]MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium, 1518 Budapest, Pf. 63. *E-mail: bozoki@oplab.sztaki.hu*

becslésnek is nevezi az irodalom [27]. Nagyobb méretű, összetett feladatoknál azonban nem várható el, hogy a modellező rendelkezésére bocsássa a számszerűsített értékeket. A probléma kisebb részekre történő bontásával azonban elérhető, hogy a döntéshozónak csak egyszerű, világos kérdéseket kell megválaszolnia, azokból mégis előállítható az egész feladat szempontsúlyrendszere. Axiómaként elfogadjuk a preferencia-modellezésben használt feltételt, miszerint a döntéshozó képes két dolog (ami lehet pl. a szempontok fontossága) összehasonlítására: meg tudja mondani, hogy valamelyik jobb (vagy nagyobb) a másiknál, vagy egyformák.

Condorcet [10] és Borda [2] szavazási feladataikban már az 1780-as években bevezették a *páros* (vagy páronkénti) *összehasonlítás* fogalmát, mint az egyéni preferenciák alapján felállított rangsor két eleme közötti viszonyt. A páros összehasonlítás, mint módszer alkalmazási lehetőségeit Kindler [27] történeti és módszertani áttekintése tárgyalja, melyből itt csak a csak legfontosabbakat emeljük ki. A kísérleti pszichológiában az 1920-as években jelent meg e fogalom Thorndike [34] és Thurstone [35] munkáiban. Churchman és Ackoff [9] eljárásában az elemeket először ordinális értelemben rendezni kell, ezután valamelyiket rögzítve és a többivel kardinális értelemben összehasonlítva számszerű eredmények adódnak. Guilford [21] modelljében pusztán ordinális információk alapján kardinális sorrend állapítható meg. Több döntéshozó (csoportos döntéshozatal) esetére dolgozta ki Kendall [25] a róla elnevezett egyetértési együtthatót.

Bár e dolgozatnak nem célja az emberi racionalitás korlátait és paradoxonait firtatni, megjegyezzük, hogy a páronkénti összehasonlítások a döntéshozókkal történő elvégeztetésének fontos módszertani szempontja, hogy nem mindegy, milyen sorrendben tesszük fel a kérdéseket. A szabályos elrendezés szinte mindig torzít, a véletlenszerű már kevésbé, a Ross-féle elrendezés [32] pedig a véletlennél is kisebb torzítással működik.

A dolgozatban a páros összehasonlítások azon változatát tárgyaljuk, amelyben az elemeket arányskálán hasonlítjuk össze, azaz a döntéshozótól olyan formában várjuk az elemek összehasonlítását, hogy hányszor tekinti az egyiket *jobb*nak vagy *nagyobb*nak a másiknál [33]. A páronkénti összehasonlításokból felépíthető egy négyzetes mátrix, melynek definíciója a következő:

Definíció. *(Páros összehasonlítás mátrix). Jelölje* $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ *a pozitív valós elemekből álló* $n \times n$*-es mátrixok osztályát. Az*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$$

mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük, ha minden $i, j = 1, \dots, n$ indexre teljesül, hogy

$$a_{ii} = 1, \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}. \tag{2}$$

A mátrix a_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy a döntéshozó hányszor jobbnak ítéli meg az i-edik objektumot a j-ediknél. (1) alapján az önmagával való összehasonlítás eredménye mindig 1.
A (2) tulajdonság azon a feltételezésen alapul, hogy ha a döntéshozó számára az i-edik objektum a_{ij}-szer akkora, mint a j-edik, akkor a j-edik pontosan $\frac{1}{a_{ij}}$-szer akkora, mint az i-edik. Az (1)-(2)-ből adódóan n objektum esetén $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ összehasonlítással adható meg a mátrix.

Definíció. *(Konzisztens páros összehasonlítás mátrix). Ha egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ mátrixra (1)-(2)-n túl még*

$$a_{ij} a_{jk} = a_{ik} \tag{3}$$

is teljesül minden $i, j, k = 1, \dots, n$ indexre, akkor konzisztens páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük. Az (1)-(2) feltételt igen, de (3)-at nem teljesítő mátrixot inkonzisztens mátrixnak nevezzük.

A feladat: az elemek páronkénti összehasonlításának ($\mathbf{A}$ mátrix) ismeretében a $w_1, w_2, \dots, w_n$ súlyok meghatározása, ahol

$$w_i > 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{5}$$

A súlyokat együttesen a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ súlyvektorral jelöljük.

A problémára több megoldási lehetőség kínálkozik. Az Analytic Hierarchy Process (AHP) [33] módszertanban a mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó jobboldali sajátvektor komponensei adják a súlyokat.

Más, távolságminimalizáló módszerekben a mátrix valamilyen célfüggvény szerinti legjobb közelítése alapján lehet a súlyokra következtetni. A legkisebb négyzetek módszere [8] és annak relaxált változatai, mint pl. a súlyozott legkisebb négyzetes [8], a logaritmikus legkisebb négyzetes [12, 11], vagy a χ^2-es [22] feladatok mellett olyan megközelítések találhatók, mint a szinguláris felbontás [19], célprogramozás [5], lineáris programozás [7].

Konzisztens mátrixok esetén minden egyes eljárás ugyanazt az eredményt adja. Inkonzisztens esetben a különböző módszerek által eredményezett súlyvektorok kisebb-nagyobb mértékben eltérnek. Golany és Kress [20] több szempont alapján történő összehasonlító elemzéséből kiderül, hogy minden súlyozási módszernek van előnye és hátránya, egyik sem nevezhető „a legjobb"-nak.

A többi módszerrel ellentétben a legkisebb négyzetes feladatról általában nem mondható el, hogy megoldása egyértelmű [22],[23]. A célfüggvény ugyanis nem feltétlenül konvex, és az eddigiekben publikált eljárásoknál ([23], [15]) jelentős nehézséget okoz a stacionárius pontok meghatározása, mivel azok az iterációs elvű numerikus módszereket használják.

A következő fejezetben olyan módszereket tekintünk át, amelyekkel megoldható a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítése. Az eljárások előnye, hogy minden lokális és globális minimumhelyet megtalálnak, továbbá indulópont választására sincs szükség.

2. A legkisebb négyzetek módszere

Legyen adott az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es páros összehasonlítás mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Keressük azt a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ vektort, amelynek komponenseiből képzett

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & w_2/w_3 & \dots & w_2/w_n \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & 1 & \dots & w_3/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & w_n/w_3 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

mátrix Frobenius-normában a legjobban közelíti **A**-t. Az optimalizálási feladat tehát:

$$\begin{aligned} \min \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2, \\ \sum_{i=1}^{n} w_i &= 1, \\ w_1, w_2, \ldots, w_n &> 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Vezessük be az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ új változókat a következőképpen:

$$x_1 = \frac{w_1}{w_2}, \quad x_2 = \frac{w_1}{w_3}, \quad \ldots, \quad x_i = \frac{w_1}{w_{i+1}}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \frac{w_1}{w_n}. \tag{7}$$

Ekkor

$$\frac{w_i}{w_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ x_{j-1}, & \text{ha } i = 1 \text{ és } 1 < j \leq n; \\ \frac{1}{x_{i-1}}, & \text{ha } j = 1 \text{ és } 1 < i \leq n; \\ \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}}, & \text{ha } 1 < i, j \leq n, \end{cases}$$

így az **X** mátrix x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ változókkal való felírása a következő:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ \frac{1}{x_1} & 1 & \frac{x_2}{x_1} & \ldots & \frac{x_{n-1}}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_1}{x_2} & 1 & \ldots & \frac{x_{n-1}}{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{x_1}{x_{n-1}} & \frac{x_2}{x_{n-1}} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

és az optimalizálási feladat

$$\begin{aligned} \min \| \mathbf{A} - \mathbf{X} \|_F^2 = &\; f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} > &\; 0, \end{aligned} \tag{8}$$

alakban írható fel, ahol

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = &\sum_{j=2}^{n} \left[(a_{1j} - x_{j-1})^2 + \left(\frac{1}{a_{1j}} - \frac{1}{x_{j-1}} \right)^2 \right] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left[\left(a_{ij} - \frac{x_{j-1}}{x_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{a_{ij}} - \frac{x_{i-1}}{x_{j-1}} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Mivel f nyílt tartományon értelmezett differenciálható függvény, az optimalitás elsőrendű szükséges feltétele olyan pont létezése, amelyre

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0. \tag{9}$$

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ változók racionális törtfüggvényei, hisz maga f is az volt. Adott $i\,(1 \le i \le n-1)$ indexhez tartozó x_i változó csak az $\mathbf{X}$ mátrix $(i+1)$-edik sorában és oszlopában fordul elő, ezért az $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ parciális derivált így írható:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \left\{ (a_{i+1,1} - x_i)^2 + (a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i})^2 + \sum\limits_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{n} \left[\left(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}} \right)^2 + \left(a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i} \right)^2 \right] \right\}}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= -2(a_{i+1,i} - x_i) + 2\left(a_{1,i+1} - \frac{1}{x_i} \right) \frac{1}{x_i^2} \\ &+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{n} \left[-2\left(a_{i+1,j} - \frac{x_i}{x_{j-1}} \right) \frac{1}{x_{j-1}} + 2\left(a_{j,i+1} - \frac{x_{j-1}}{x_i} \right) \frac{x_{j-1}}{x_i^2} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Mivel $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ felírásában a nevezőben $x_j^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1,\ j \neq i)$, valamint x_i^3 szerepel, a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$-et $(x_i^3 \cdot \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} {x_j}^2)$-nel beszorozva a

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i^3 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} {x_j}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \prod_{j=1}^{n-1} {x_j}^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

többváltozós polinomokat kapjuk. A $P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ polinomok közös gyökeit a

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0 \\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ P_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

rendszer megoldásai adják.

A döntési feladat szempontjából csak a pozitív valós $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ gyökök érdekesek, így a (9) és (12) rendszerek egyenértékűek abban az értelemben, hogy egy pozitív valós $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ $(n-1)$-es pontosan akkor megoldása (9)-nek, ha (12)-nek is.

Ha egy $(x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_{n-1}^\star)$ $(n-1)$-es f-nek minimumhelye, akkor szükségképpen megoldása a (12) polinomrendszernek is. Fordítva, ha a pozitív $(x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_{n-1}^\star)$ vektor megoldása a (12) polinomrendszernek, az f Hesse-mátrix pozitív definitségének ellenőrzésével tudjuk ellenőrizni, hogy valóban (lokális) minimumhely-e. Ha igen, akkor $(x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_{n-1}^\star)$-ból (7) és (5) alapján felírható a keresett $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ súlyvektor. Kifejezve ugyanis (7)-ből a w_i, $(i = 2, 3, \ldots, n)$ súlyokat:

$$w_2 = \frac{w_1}{x_1}, \quad w_3 = \frac{w_1}{x_2}, \quad \ldots, \quad w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}}, \quad \ldots, \quad w_n = \frac{w_1}{x_{n-1}},$$

majd az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=2}^{n} w_i = w_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i}. \tag{13}$$

(5) szerint (13) baloldali kifejezése $(1 - w_1)$-gyel egyenlő, így w_1-re

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}},$$

w_i-re $(1 < i \leq n)$ pedig a (7) megfelelő $(x_{i-1} = \frac{w_1}{w_i})$ egyenletéből

$$w_i = \frac{w_1}{x_{i-1}} = \frac{\frac{1}{x_{i-1}}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j}}$$

adódik. Kaptuk tehát, hogy az LSM-optimális $\mathbf{w}$ súlyvektor a (12) polinomrendszer $(x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_{n-1}^\star)$ megoldásából az alábbi formula szerint számolható:

$$w_1 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^\star}}, \qquad w_i = \frac{\frac{1}{x_{i-1}^\star}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x_j^\star}}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{14}$$

3. Polinomrendszerek megoldása

A matematikai (főleg geometriai) és fizikai-mérnöki problémák (kinetika és egyensúly) gyakran vezetnek polinomiális rendszerek megoldására, mely – mint a nemlineáris rendszerek megoldása általában – nem könnyű. Jelen fejezet áttekintést ad négy olyan módszerről, amelyek segítségével kisméretű feladatok megoldhatók. Mivel egy adott polinomrendszer összes megoldását keressük, a Newton-iteráción alapuló algoritmusokat nem tárgyaljuk. Megjegyezzük azonban, hogy valamely polinomrendszer-megoldó algoritmus által szolgáltatott megoldás, mely szükségképpen csak közelítő megoldás lehet, a Newton-iteráció indulóértékéül választva tetszőlegesen pontosítható.

3.1. Rezultáns módszer

Bevezetésül idézzük fel Gauss egyik legfontosabb eredményét.

Tétel. *(Az algebra alaptétele.) Minden nemkonstans komplex $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak van gyöke a $\mathbb{C}$ számtestben.*
Legyenek f és g egyváltozós, valós együtthatós polinomok:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \\ g(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + a_m, \end{aligned}$$

ahol $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Az algebra alaptételéből következően f és g felírhatók gyöktényezős szorzatalakban:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \tag{15}$$

$$g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j), \tag{16}$$

ahol $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\quad i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Definíció. *Az f és g polinomok $R(f, g)$-vel jelölt **rezultánsa***

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j). \tag{17}$$

(16) alapján

$$g(\alpha_i) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j),$$

és hasonlóan,

$$R(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$$

A definícióból következik, hogy f-nek és g-nek pontosan akkor van közös gyöke $\mathbb{C}$-ben, ha $R(f,g) = 0$. Megjegyezzük, hogy a rezultáns definíciója nem szimmetrikus az argumentumokra nézve, igaz viszont, hogy

$$R(g,f) = b_0^n a_0^m \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{nm} R(f,g).$$

$R(g,f)$ egy másik alakban történő felírása:

$$R(g,f) = b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j).$$

Az alábbi tétel [28] szerint $R(f,g)$ nemcsak f és g gyökeiből, hanem közvetlenül az együtthatókból is számolható.

Tétel. *Jelölje D a következő (Sylvester-féle) mátrix determinánsát:*

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{vmatrix}_{(n+m)\times(n+m)},$$

ahol az üresen hagyott elemek 0-kat jelentenek. Ekkor

$$D = R(f,g).$$

Példa. *Legyenek f és g*

$$f(x) = x^2 - 5x - 14,$$
$$g(x) = x^2 - 6x - 7.$$

Az előző tétel szerint

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -14 \\ 1 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát f és g-nek kell, hogy legyen közös gyöke ($x = 7$ valóban az). Mindezt anélkül kaptuk, hogy ki kellett volna számítanunk f és g gyökeit.

Legyen most adott a következő egyenletrendszer:

$$f(x,y) = 0, \tag{18}$$
$$g(x,y) = 0, \tag{19}$$

ahol $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ kétváltozós, valós együtthatós polinomok. Ha csak x-et tekintenénk változónak, y-t pedig paraméternek, akkor az f-ben és g-ben, mint egyváltozós polinomokban szereplő tagok sorbarendezhetők x kitevőjének nagysága szerint:

$$f(x,y) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}(y)x + a_k(y), \tag{20}$$
$$g(x,y) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \ldots + b_{l-1}(y)x + a_l(y), \tag{21}$$

ahol $a_0(y), a_1(y), \ldots, a_k(y), b_0(y), b_1(y), \ldots, b_l(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomjai y-nak. Felírható tehát $R_x(f,g)$, mint az f és g egyváltozós polinomok rezultánsa:

$$R_x(f,g) = \begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \ldots & a_k(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \ldots & a_{k-1}(y) & a_k(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \ldots & a_k(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \ldots & b_l(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \ldots & b_{l-1}(y) & b_l(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \ldots & b_l(y) \end{vmatrix} = P(y),$$

ahol $P(y) \in \mathbb{R}[y]$ valós együtthatós egyváltozós polinomja y-nak.

Tegyük fel, hogy az $x = \alpha, y = \beta$ megoldása a $(18-19)$ rendszernek. Behelyettesítve $y = \beta$-t $(20-21)$-ba, az $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$ egyváltozós polinomokat kapjuk, melyek közös gyöke α. Ha az $a_0(\beta), b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor az $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$ polinomok rezultánsa az alábbiak szerint írható fel:

$$
R(f(x,\beta),g(x,\beta)) = \begin{vmatrix}
a_0(\beta) & a_1(\beta) & a_2(\beta) & \dots & a_k(\beta) & & & \\
 & a_0(\beta) & a_1(\beta) & \dots & a_{k-1}(\beta) & a_k(\beta) & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & a_0(\beta) & a_1(\beta) & a_2(\beta) & \dots & a_k(\beta) \\
b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta) & & & \\
 & b_0(\beta) & b_1(\beta) & \dots & b_{l-1}(\beta) & b_l(\beta) & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & b_0(\beta) & b_1(\beta) & b_2(\beta) & \dots & b_l(\beta)
\end{vmatrix},
$$

mely rezultánst kifejtve β-nak egy $P(\beta)$ polinomját kapjuk. Mivel α közös gyöke $f(x,\beta)$ és $g(x,\beta)$-nak, azt kaptuk, hogy $P(\beta) = 0$, azaz β gyöke a P-nek.

Másfelől, tegyük fel, hogy $P(y) = R_x(f,g)$ polinomnak gyöke az $y = \beta$. Ha az $a_0(\beta)$ és $b_0(\beta)$ főegyütthatók nem nullák, akkor $P(\beta) = R(f(x,\beta), g(x,\beta))$. De $P(\beta) = 0$, így $f(x,\beta)$-nak és $g(x,\beta)$-nak szükségképpen van közös gyöke.

3.2. Általánosított rezultáns módszer

A rezultáns-módszer hátránya, hogy csak két egyenletből álló, kétváltozós rendszerek redukálhatók egyváltozós polinom valós gyökeinek megkeresésére. Az általánosított rezultánsok elmélete Bezout, Dixon [13], Kapur, Saxena és Young [24] nevéhez fűződik. Az általánosított, vagy Dixon-rezultáns szerepe megegyezik a rezultánséval: adott polinomrendszer esetén olyan indikátort keresünk, amely felírható a polinomok együtthatóinak függvényeként, továbbá pontosan akkor 0, ha a polinomrendszernek van megoldása. Az eljárás leírása lényegesen hosszabb, mint a rezultáns módszeré, ezért itt inkább az algoritmus implementációjával és a futási tapasztalatokkal foglalkozunk.

Robert H. Lewis [30] létrehozta a *Fermat* computer algebra programcsomagot, melyet kifejezetten nagyméretű polinomiális és mátrix-számításokra tervezett. A 4×4-es mátrixok LSM-approximációjából származó 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer a Fermat szoftver segítségével megoldható [4]. A kapott egyváltozós polinom foka 26 és 137 között változik, az adott mátrix elemeinek függvényében. Ezen egyváltozós polinom pozitív valós gyökeinek megkeresésére a Maple program kielégítő eredményt ad. Az eddigi tapasztalatok alapján a pozitív valós gyökök száma 1 és 10 között mozog. Ez lehetőséget ad arra, hogy egyszerű visszahelyettesítéssel az eredeti 3 egyenletből álló 3 ismeretlenes polinomrendszer 3 egyenletből álló

2 ismeretlenes polinomrendszerre redukálódjon. A 3 egyenletből egyszerre csak kettőt tudunk megoldani a rezultáns módszer segítségével, viszont képezve a 3 lehetséges egyenletpár megoldásainak metszetét az eredeti polinomrendszer közös gyökei immáron rendelkezésünkre állnak.

3.3. Gröbner-bázisok

A polinomgyűrűk és ideálok tanulmányozására vezette be Buchberger [6] a Gröbner-bázis fogalmát, mely elnevezést PhD témavezetője iránti tisztelete jeléül választotta.
Egy adott polinomrendszerhez tartozó Gröbner-bázis egy az eredetivel ekvivalens rendszer, azaz pontosan ugyanazok a gyökei, mint az eredetinek. A Gröbner-bázisbeli polinomrendszer azonban rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal is, melyek jól használhatók a polinomokkal való osztás és egyéb vizsgálatok során. A Maple szoftverben írt programjaink futási eredményei azt mutatják, hogy a 3×3-as páros összehasonlítás mátrixokból kapott polinomrendszerre még működik az algoritmus, nagyobb méretekre azonban memória-túlcsordulás miatt leáll.

3.4. Homotópiás módszer

Az utóbbi 25 év során a homotópiás kontinuitási módszerek megbízható és hatékony technikává fejlődtek a polinomiális rendszerek összes megoldásának meghatározására.

Garcia és Zangwill [18], valamint tőlük függetlenül Drexler [14] javasolta elsőként a homotópiás módszerek alkalmazását polinomiális rendszerek összes gyökének numerikus meghatározására. A homotópiás kontinuitás módszer alapgondolata a következő: Adott

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

polinomrendszerhez definiáljuk a $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

polinomrendszert úgy, hogy $\mathbf{Q}$ gyökeit már ismerjük. Definiáljuk a

$$H(\mathbf{x}, t) = (1-t)\mathbf{Q}(\mathbf{x}) + t\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$$

parametrikus egyenletrendszert, ahol $0 \leq t \leq 1$. Q megválasztásánál arra kell ügyelni, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:

(1) trivialitás: Q(x)=0 megoldásai ismertek;

(2) simaság: a H(x,t)=0 ($0 \leq t \leq 1$) megoldáshalmaza véges sok sima útból áll, melyek mindegyike t-vel paraméterezhető;

(3) elérhetőség: a H(x,1)=P(x)=0 rendszer minden izolált megoldása elérhető valamely t=0 -ból induló út mentén, mely út kezdőpontja tehát a H(x,0)=Q(x)=0 rendszer egy megoldása.

Jelölje d_i a P_i polinom teljes fokát,

$$d_i = degP_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

és legyen $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$. A többváltozós polinomokra vonatkozó Bezout-tétel értelmében a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ polinomok teljes fokainak szorzata (d) felső becslést ad a közös gyökök számára (multiplicitással) $\mathbb{C}^n$-ben. Q választására gyakran a következő hatványfüggvények adódnak:

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_1 x_1^{d_1} = 0, \\ Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_2 x_2^{d_2} = 0, \\ &\vdots \\ Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_n x_n^{d_n} = 0, \end{aligned}$$

ahol $d_i = degP_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$, az $a_j, b_j, j = 1, 2, \ldots, n$ pedig tetszőleges, általában véletlenszerűen generált komplex számok. Ezek teljesítik a fenti három tulajdonságot, így a P(x)=0 gyökei a $H(x,t) = 0, (0 \leq t \leq 1)$ megoldásaként adódó d számú út végpontjai között keresendők.

A tapasztalatok szerint azonban d értéke nagyságrendekkel nagyobb lehet, mint a keresett gyökök száma, és az utak többsége nem tényleges gyökhöz konvergál, hanem a végtelenbe. A polinomrendszerek gyökszámának jobb becslésére szolgál Bernshtein [1], Kushnirenko [29] és Khovanskii [26] módszere, amely a kisebb számú út vizsgálatával a homotópiás módszert hatékonyabbá teszi.

E cikk szerzőjének lehetősége nyílt Tien-Yien Li és Tangan Gao [31, 17] algoritmusának tesztelésére. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a páros összehasonlítás mátrixokra felírt legkisebb négyzetes közelítés feladatából adódó polinomrendszerek megoldásának átlagos adatait és a homotópiás algoritmus futási idejét 1 GHz-es processzoron.

A 3×3-as eset elemzésében [3] található olyan mátrix-konstrukció, amelyhez tartozó LSM-feladatnak négy lokális minimumhelye van. Ezek azonban gyakorlati szempontból nem tűnnek elsődleges fontosságúnak. A 3×3-asnál nagyobb esetben néhány tapasztalati (konkrét feladatra döntéshozó által megadott), valamint véletlenszerűen generált páros összehasonlítás mátrixokat vizsgáltunk. Számításaink szerint a tapasztalati mátrixok esetén a legkisebb négyzetes súlyvektor az esetek döntő részében egyértelmű, de még a véletlenszerűen generált mátrixok esetében is csak elvétve fordult elő 2 megoldásnál több.

A mátrix mérete ($n \times n$)	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
CPU time	0.05 mp.	0.5 mp.	20 mp.	14 perc	10 óra	3 nap
Közös gyökök száma	24	224	1840	14000	$\sim 10^5$	$\sim 10^6$
Közös pozitív valós gyökök száma	1 és 4 között					

1. táblázat *Polinomrendszerek megoldása* ($n = 3, 4, \ldots, 8$)

4. Kutatási lehetőségek

Döntési szempontból alapvető fontosságú annak biztosítása, hogy egy páros összehasonlítás mátrixból számolt súlyvektor egyértelmű legyen, ami az 1. fejezetben említett súlyozási módszerek esetében biztosított. A legkisebb négyzetes megoldás egyértelműségére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel azonban még nem ismert. A páros összehasonlítás mátrixok egy osztályában a megoldás nem-egyértelműségére Farkas és Rózsa [16] adott elégséges feltételt.

Döntéselméleti és alkalmazási szempontból is lényeges kérdés a különböző súlymeghatározó módszerek összehasonlítása. Célunk, hogy a döntési feladatok jellegzetes vonásainak, típusainak leginkább megfelelő módszert ki tudjuk választani. Ezen jellegzetességek feltérképezése és azonosítása jelenleg is kutatás tárgya.

5. Összegzés

A cikkben egy, a többszempontú döntési feladatok szempontsúlyrendszerének kialakítására szolgáló módszert vizsgáltunk. Négy eljárást tekintettünk át a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes közelítéséből (LSM) adódó súlyok meghatározására. A kapcsolódó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű. Az általunk tárgyalt módszerek az összes lokális és globális minimumhely megkeresésére alkalmasak. Tapasztalataink alapján a 3×3-as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok, 3×3-as és 4×4-es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver, 3×3-astól 8×8-as méretig pedig a homotópiás kontinuitási módszer.

A kutatás jelenlegi fázisában a 3×3-as esetben tudunk páros összehasonlítás mátrixokat nagy számban generálni, majd azokból automatikusan súlyokat számolni. Ez lehetőséget ad a súlyozás szabályszerűségeinek feltárására, valamint a véletlen és a döntéshozó által megadott mátrixok összevetésére. 3×3-as mátrixokra a tárgyalt 4 módszer mindegyike lényegében azonnali eredményt ad, ezért kis méretű döntési problémák szempont-súlyozásában felhasználhatók.

A 4×4-estől 8×8-as méretig a súlyok számítása egyedileg történik, ezért a statisztikai jellegű elemzés lehetősége korlátozott. A futási eredmények (különösen $n = 7, 8$ esetében) azt mutatják, hogy döntési feladatok valós időben történő megoldására még nem alkalmazhatók, az általunk alkalmazott módszertan a kutatás fázisában van.

A legkisebb négyzetes közelítésből számolt súlyvektor ismeretében lehetőség nyílik e módszer sajátosságainak feltárására valamint más súly-meghatározó módszerekkel való összevetésre. A módszerek előnyeinek és hátrányainak pontosabb ismeretével közelebb kerülünk ahhoz a célhoz, hogy a döntési feladattípusok alapfeltevéseinek megfelelően ki tudjuk jelölni az alkalmazható súlymeghatározó módszerek csoportját.

Köszönettel tartozom Tangan Gao-nak (Michigan State University) a homotópiás algoritmus rendelkezésemre bocsátásáért, valamint Stefán Péternek (Nemzeti Információs Infrastruktúra Fejlesztési Program (NIIF) Szuperszámítógép Központ) a program futtatásában nyújtott technikai segítségéért.
A tanulmány az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok OTKA-T043276 és OTKA-T043241 számú pályázatainak támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Bernshtein, D.N. [1975]: The number of roots of a system of equations, *Functional Analysis and its Applications,* **9**, pp. 183-185.

[2] Borda, J.C. de [1781]: Mémoire sur les électiones au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences,* Paris.

[3] Bozóki, S. [2003]: A method for solving LSM problems of small size in the AHP, *Central European Journal of Operations Research,* **11** pp. 17-33.

[4] Bozóki, S., Lewis, R.H. [2004]: Solving the Least Squares Method problem in the AHP for 3×3 and 4×4 matrices, elküldve: *Central European Journal of Operations Research.*

[5] Bryson, N. [1995]: A goal programming method for generating priority vectors, *Journal of the Operational Research Society,* **46**, No. 5, pp. 641-648.

[6] Buchberger, B. [1985]: An algorithmic method in polynomial ideal theory, in: *Multidimensional System Theory,* N.K. Bose (editor), D. Rediel Publishing Compnay, Dordrecht, Boston, Lancaster, pp. 184-232.

[7] Chandran, B., Golden, B., Wasil, E. [2005]: Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process, *Computers & Operations Research,* **32,** pp. 2235-2254.

[8] Chu, A.T.W., Kalaba, R.E., Spingarn, K. [1979]: A comparison of two methods for determining the weight belonging to fuzzy sets, *Journal of Optimization Theory and Applications* **4,** pp. 531-538.

[9] Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, L.E. [1957]: Introduction to Operations Research, *Wiley,* New York.

[10] Condorcet, M. [1785]: Essai sur l'Application de l'Analyse á la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix, Paris.

[11] Crawford, G., Williams, C. [1985]: A note on the analysis of subjective judgment matrices, *Journal of Mathematical Psychology,* **29,** pp. 387-405.

[12] De Jong, P. [1984]: A statistical approach to Saaty's scaling methods for priorities, *Journal of Mathematical Psychology,* **28,** pp. 467-478.

[13] Dixon, A.L. [1908]: The eliminant of three quantities in two independent variables, *Proceedings of the London Mathematical Society,* **7,** pp. 50-69, 473-492.

[14] Drexler, F.J. [1978]: Eine Methode zur Berechnung sämtlicher Lösungen von Polynomgleichungssystemen, *Numerische Mathematik,* **29**, pp. 45-58.

[15] Farkas, A., Lancaster, P., Rózsa, P. [2003]: Consistency adjustment for pairwise comparison matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications,* **10**, pp. 689-700.

[16] Farkas, A., Rózsa, P. [2004]: On the Non-Uniqueness of the Solution to the Least-Squares Optimization of Pairwsie Comparison Matrices, *Acta Polytechnica Hungarica, Journal of Applied Sciences at Budapest Polytechnic Hungary,* **1**, pp. 1-20.

[17] Gao, T., Li, T.Y., Wang, X. [1999]: Finding isolated zeros of polynomial systems in $\mathbb{C}^n$ with stable mixed volumes, *Journal of Symbolic Computation,* **28**, pp. 187-211.

[18] Garcia, C.B., Zangwill, W.I. [1979]: Finding all solutions to polynomial systems and other systems of equations, *Mathematical Programming,* **16** pp. 159-176.

[19] Gass, S.I., Rapcsák, T. [2004]: Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operations Research,* **154** pp. 573-584.

[20] Golany, B., Kress, M. [1993]: A multicriteria evaluation of methods for obtaining weights from ratio-scale matrices, *European Journal of Operations Research,* **69,** pp. 210-220.

[21] Guilford, J.P. [1936]: Psychometric Methods, McGraw-Hill Book, New York.

[22] Jensen, R.E. [1983]: Comparison of Eigenvector, Least squares, Chi square and Logarithmic least square methods of scaling a reciprocal matrix, *Working Paper 153 http://www.trinity.edu/rjensen/127wp/127wp.htm*

[23] Jensen, R.E. [1984]: An Alternative Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology,* **28,** pp. 317-332.

[24] Kapur, D., Saxena, T., Yang, L. [1994]: Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants. In: *Proc. of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation.* A.C.M. Press.

[25] Kendall, M.G. [1948]: Rank Correlation Methods, C. Griffin & Co., London

[26] Khovanskii, A.G. [1978]: Newton polyhedra and the genus of complete intersections, *Functional Analysis and its Applications,* **12**, pp. 38-46.

[27] Kindler, J., Papp, O. [1977]: Komplex rendszerek vizsgálata - Összemérési módszerek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

[28] Kuros, A.G. [1971]: Felsőbb algebra, Tankönyvkiadó, Budapest.

[29] Kushnirenko, A.G. [1976]: Newton polytopes and the Bézout theorem, *Functional Analysis and its Applications,* **10**, pp. 233-235.

[30] Lewis, R.H. : Computer algebra system *Fermat.* *http://www.bway.net/~lewis/*

[31] Li, T.Y. [1997]: Numerical solution of multivariate polynomial systems by homotopy continuation methods, *Acta Numerica,* **6,** pp. 399-436.

[32] Ross, R.T. [1934]: Optimum orders for the presentation of pairs in the method of paired comparison, *Journal of Educational Psychology,* **25,** pp. 375-382 .

[33] Saaty, T.L. [1980]: The analytic hierarchy process, *McGraw-Hill,* New York.

[34] Thorndike, E.L. [1920]: A Constant Error in Psychological Ratings, *Journal of Applied Psychology,* **4**, pp. 25-29.

[35] Thurstone, L.L. [1927]: The Method of Paired Comparisons for Social Values, *Journal of Abnormal and Social Psychology,* **21,** pp. 384-400.