

KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LIX. ÉVF., 2012. MÁJUS (508–539. o.)

VÁRADI KATA–GYARMATI ÁKOS–LUBLÓY ÁGNES

Virtuális árhatás a Budapesti Értéktőzsdén

Az árhatásfüggvények azt mutatják meg, hogy egy adott értékű megbízás mekkora relatív árváltozást okoz. Az árhatásfüggvény ismerete a piaci szereplők számára fontos szerepet játszik a jövőben benyújtandó ajánlataikhoz kapcsolódó árhatás előrejelzésében, a kereskedés árváltozásból eredő többletköltségének becslésében, illetve az optimális kereskedési algoritmus kialakításában. Az általunk kidolgozott módszer révén a piaci szereplők a teljes ajánlati könyv ismerete nélkül egyszerűen és gyorsan tudnak virtuális árhatásfüggvényt meghatározni, ugyanis bemutatjuk az árhatásfüggvény és a likviditási mértékek kapcsolatát, valamint azt, hogy miként lehet a Budapesti Likviditási Mérték (BLM) idősorából árhatásfüggvényt becsülni. A kidolgozott módszertant az OTP-részvény idősorán szemléltetjük, és a részvény BLM-adatsorából a 2007. január 1-je és 2011. június 3-a közötti időszakra virtuális árhatásfüggvényt becsülünk. Empirikus elemzésünk során az árhatásfüggvény időbeli alakulásának és alapvető statisztikai tulajdonságainak vizsgálatát végezzük el, ami révén képet kaphatunk a likviditás hiányában fellépő tranzakciós költségek múltbeli viselkedéséről. Az így kapott információk például a dinamikus portfólióoptimalizálás során lehetnek a kereskedők segítségére.*
Journal of Economics Literature (JEL) kód: G01, G11.

Tanulmányunk központi témája a piaci likviditás elemzése a Budapesti Értéktőzsdén 2007 januárja és 2011 júniusa között. Általánosságban egy piacot akkor nevezünk likvidnek, ha anélkül hajthatók végre azonnal vagy rövid időn belül nagy volumenű tranzakciók, hogy az hatással lenne a piaci árra (BIS [1999]). Ez-

* A tanulmány a Budapesti Értéktőzsdén végzett kutatás eredményeként jött létre. A szerzők köszönettel tartoznak a Budapesti Értéktőzsdének a kutatási lehetőségért, a BÉT munkatársainak, különösen Végő Richárdnak, Réz Évának pedig a támogatásért és a konzultációs lehetőségekért. A szerzők emellett köszönettel tartoznak Berlinger Edinának és Michaletzky Mártonnak is a témában folytatott inspiráló beszélgetésekért.

Gyarmati Ákos a Morgan Stanley munkatársa, valamint a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és vállalati pénzügy tanszékének PhD-hallgatója (e-mail: akos.gyarmathi@ms.com).

Lublóy Ágnes a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és vállalati pénzügy tanszékének docense (e-mail: agnes.lubloy@uni-corvinus.hu).

Váradi Kata a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és vállalati pénzügy tanszékének PhD-hallgatója (e-mail: kata.varadi@uni-corvinus.hu).

zel szemben, ha egy piac nem likvid vagy likviditáshiányos, akkor a tranzakciók nem hajthatók végre azonnal vagy rövid időn belül úgy, hogy az ne lenne hatással a piaci árra. Nem likvid vagy likviditáshiányos piacokon a piaci szereplők járulékos tranzakciós költséggel szembesülnek, hiszen megbízásokat nem tudják a piaci középárfolyamon végrehajtani. A szakirodalom ezt a járulékos tranzakciós költséget az árhatás költségének nevezi. Tehát az árhatás, valamint az árhatáshoz szorosan kapcsolódó árhatásfüggvények a piaci likviditás központi fogalmai. Tanulmányunkban a piaci likviditást mi is az árhatásfüggvényeken keresztül ragadjuk meg, amelyek azt mutatják, hogy egy adott értékű megbízás mekkora relatív árváltozást okoz.

A szakirodalomban csak néhány tanulmány taglalja, hogy a piacon ténylegesen milyen mértékű a tranzakciók árhatása, azaz a kereskedésnek mekkora az a járulékos költsége, amit a kereskedők nem explicit költségként – mint például a brókeri jutalékok vagy különféle tőzsdei díjak – fizetnek meg. *Torre–Ferrari* [1999] például az S&P 500 indexet alkotó részvények esetében becsülték meg a kereskedés teljes tranzakciós költségét. A szerzők 400 dolláros medián részvényárfolyamot és 10 ezer részvény vételét vagy eladását feltételezve a kereskedés teljes tranzakciós költségét egy részvényre vonatkozóan 25 centben határozták meg. Becslésük szerint a 25 centből a lebonyolítás költsége öt centet tesz ki. A maradék 20 cent a teljes árhatás, amelyből hét cent az árkülönbözet (*spread*) fele, 13 cent pedig az addicionális árhatás. Figyelemre méltó, hogy az addicionális árhatás önmagában is már a teljes tranzakciós költség közel felét teszi ki. Az ITG Global Trading Cost Review adatai szerint az elmúlt öt év során a nagy kapitalizációjú amerikai részvényekkel folytatott kereskedés átlagos tranzakciós költsége 23 bázispont volt, amiből kilenc a jutalékoknak, míg 12 az árhatásnak tudható be (*Ferraris* [2008]). A Budapesti Értéktőzsdén a teljes kereskedési költség becslésére kereskedési tapasztalat, illetve megfelelő adatbázis hiányában nem vállalkozunk, a Budapesti Likviditási Mérték (BLM) adatbázisa alapján azonban egy adott tranzakció implicit kereskedési költségének nagyságára rávilágítunk. A BLM-adatbázis a Budapesti Értéktőzsdén kereskedett értékpapírokra vonatkozóan adja meg a kereskedéssel járó implicit költség értékét bázispontban kifejezve. A BLM tulajdonképpen azt a tranzakciós költséget mutatja, ami annak következtében lép fel, hogy nem lehet középáron kereskedni egy adott értékpapírral. Az adatbázis alapján tudjuk, hogy például 20 ezer euró értékű OTP-részvény vétele és egyidejű eladása esetén a kereskedés implicit költsége a vizsgált időszak (2007. január 1. és 2011. június 3. között) átlagában 17,34 bázispont. Ez az érték azt jelenti, hogy ha egyidejűleg 20 ezer euró értékű OTP-részvényt vennénk és adnánk el, akkor a járulékos költség, ami a likviditás hiányában keletkezne, 34,68 euró ($20\,000 \times 17,34$ bázispont) lenne (*Gyarmati és szerzőtársai* [2010]). A két idézett külföldi tanulmány hathatósan szemlélteti, hogy a teljes tranzakciós költség legnagyobb részét az árhatás jelenti, de a magyar példa is jól mutatja, hogy a kereskedés implicit költsége fontos tényező, nem hagyható figyelmen kívül. Kimondottan fontos tehát, hogy a piaci szereplők tisztában legyenek az árhatás tényével, és azt számításba vegyék a kereskedés során, hiszen ezáltal adott esetben jelentős költséget takaríthatnak meg.

Az árhatásfüggvény ismerete a piaci szereplők számára tehát fontos a jövőben benyújtandó ajánlatokhoz kapcsolódó árhatás előrejelzéséhez, a kereskedés árváltozásból eredő többletköltségének becsléséhez, illetve optimális kereskedési algoritmus kialakításához. Tanulmányunknak kettős célja van. Egyrészt bemutatunk egy olyan módszert, amelynek révén a piaci szereplők a teljes ajánlati könyv ismerete nélkül árhatásfüggvényt, azon belül is virtuális árhatásfüggvényt tudnak becsülni. Látni fogjuk, hogy a Budapesti Likviditási Mérték alapján becsült virtuális árhatásfüggvény egy gyorsan és egyszerűen elvégezhető számolás eredménye. A becslési folyamatban a BLM szerepe kitüntetett, hiszen a mutató a likviditás tranzakciósköltség-jellegét ragadja meg.

Másrészt célunk az árhatásfüggvény időbeli alakulásának és alapvető statisztikai tulajdonságainak vizsgálata. A BLM adatsorából becsült virtuális árhatásfüggvény elemzésével a kereskedők képet kaphatnak a likviditás hiánya miatt fellépő tranzakciós költségek alakulásáról, és ezen keresztül a piaci likviditásról. A kereskedők ezen ismeret birtokában pedig szakszerűbben hajthatják végre a dinamikus portfólió-optimalizálást, amelyhez például hozzátartozik a megbízások feldarabolása (*order splitting*), hiszen ha ismert a likviditás alakulásának piaci dinamikája, a kereskedést időzíteni lehet a kereskedéssel járó tranzakciós költség minimalizálása érdekében.

A tanulmány felépítése a következő. Először ismertetjük az áreltérítő hatáshoz szorosan kapcsolódó fogalmakat, köztük a virtuális és a tényleges árhatás, illetve az árhatásfüggvény fogalmát. Majd összefoglaljuk, hogy az eddigi empirikus kutatások során milyen függvényformákat azonosítottak az árhatásfüggvény alakjára vonatkozóan. Bemutatjuk azt az általunk kidolgozott módszert, amelynek révén a piaci szereplők a Budapesti Likviditási Mérték adatsorából egyszerűen és gyorsan virtuális árhatásfüggvényt tudnak becsülni. Ezt követően a virtuális árhatásfüggvény időbeli alakulását és az alapvető statisztikai tulajdonságait elemezzük. Az elemzés során többek között trendelemzést végzünk, vizsgáljuk az adatok volatilitásának időbeli alakulását, turbulens napokat és strukturális töréseket azonosítunk, illetve megnézzük, hogy lehet-e átlaghoz visszahúzó folyamatként jellemezni az idősort. Végül összefoglaljuk a tanulmány legfőbb állításait.

Virtuális és tényleges árhatásfüggvény

Az árhatás mértékéről információt az árhatásfüggvények segítségével nyerhetünk, amelyek azt adják meg, hogy egy adott q értékű megbízás milyen mértékű relatív árváltozást okoz. Az árhatásfüggvényeknek (*price impact function*, *market impact function*) két nagy csoportját lehet megkülönböztetni: a virtuális és a tényleges árhatásfüggvényt. A *virtuális árhatásfüggvény* (*virtual price impact function*, *vPIF*) azt mutatja meg, hogy ha adott időpontban azonnal végrehajtanánk egy tranzakciót, akkor mennyivel térne el – az ajánlati könyv alapján – az utolsó árszint, amin teljesült a megbízás, attól a középárfolyamtól, amely a tranzakció benyújtásakor volt a piacon. Ekkor marginális árhatásról beszélünk, és az (1) egyenlet alapján tudjuk meghatározni az árhatást:

$$vPIF(q) = \frac{\text{Megbízás utolsó elemének árszinjte}}{\text{Tranzakció benyújtásakor esedékes középár}} - 1 = \frac{P_{\text{utolsó}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1. \quad (1)$$

A függvény tehát azt mutatja meg, hogy mekkora volt az azonnali végrehajtás marginális árhatása (*Bouchaud és szerzőtársai* [2008], *Bouchaud* [2010a], *Gabaix és szerzőtársai* [2003]).

Meghatározható ugyanakkor olyan virtuális árhatásfüggvény is, amely egy tranzakció átlagos árhatását adja meg. Ekkor az ajánlati könyv alapján megállapítjuk, hogy mi volt a tranzakció végrehajtásának átlagos ára, és ez mennyiben tér el a tranzakciót megelőző középárfolyamtól.

$$vPIF(q) = \frac{\text{Megbízás átlagára}}{\text{Tranzakció benyújtásakor esedékes középár}} - 1 = \frac{P_{\text{átlagár}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1. \quad (2)$$

Az átlagos árhatás nagyságának a kereskedésben részt vevők kitüntetett figyelmet szentelnek, hiszen ettől függ, hogy mennyi lesz az a plusz implicit költség, amit egy tranzakció végrehajtásakor a likviditás hiánya miatt fizetniük kell.

A marginális és az átlagos árhatáson felül lehet azonban egy harmadik módon is értelmezni az árhatást, mégpedig annak számszerűsítésével, hogy egy adott nagyságú tranzakció egy adott pillanatban mennyivel mozdítja el a piaci középárat. Ehhez arra van szükség, hogy az ajánlati könyv adatai alapján kiszámítsuk, mennyi volt a tranzakciót megelőző középár, illetve a tranzakciót követő középár. Ekkor az árhatás a következő lesz:

$$vPIF(q) = \frac{\text{Tranzakció utáni középár}}{\text{Tranzakció benyújtásakor esedékes középár}} - 1 = \frac{P_{\text{középár}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1. \quad (3)$$

A virtuális árhatásfüggvény azonban egyik esetben sem adja meg a tényleges árhatást, hiszen annyit mutat pusztán, hogy ha egy kereskedő egy adott pillanatban azonnal szeretne egy adott értékű tranzakciót végrehajtani, akkor mekkora lenne akár a marginális, akár az átlagos, akár a középár megváltozásából eredő árhatás. Innen ered a virtuális árhatásfüggvény elnevezés. Ha ugyanis a kereskedő a virtuális árhatásfüggvényből látja, hogy a tranzakció nagy árváltozást okozna, akkor inkább nem egyben nyújtja be a tranzakciót, hanem feldarabolja azt, és inkább akkor hajtja végre a tranzakciót, amikor látja, hogy az nem vált ki jelentős árhatást a piacon. Vagyis az árhatás, amit a virtuális árhatásfüggvény mutat, ténylegesen nem következik be, mert ez csak akkor lenne az árhatás, ha a kereskedő be is adná a megbízást, és az azonnal teljesülne is.

A virtuális árhatásfüggvény a mindenkori ajánlati könyv alapján határozható meg, hiszen a piac adott mennyiség melletti likviditását legmegfelelőbben az ajánlati könyv aktuális állapota tükrözi. A virtuális árhatás definíciójának könnyebb érthetősége kedvéért egy egyszerű számpéldán keresztül bemutatjuk, hogy mit értünk az egyes árhatásokon. Az árhatás meghatározása során mindhárom esetben szükség

van az ajánlati könyv ismeretére, melyet jelen esetben egy fiktív részvény ajánlati könyve reprezentál (1. táblázat).

1. táblázat

Egy fiktív részvény ajánlati könyve

Ajánlati könyv			
Vételi mennyiség	Vételi ár	Eladási ár	Eladási mennyiség
300	9980	9 990	200
622	9970	10 000	300
400	9960	10 010	220
721	9950	10 020	200
1200	9940	10 030	100

Tételezzük fel, hogy egy adott befektető 7 000 000 forint értékben szeretne venni a fiktív részvényből. A befektető megbízása az ajánlati könyv első három sorát érinti. Az első szinten a befektetőnek 200 részvényhez sikerül hozzájutnia darabonként 9990 forintért. A második szinten újabb 300 részvény megvásárlására kerül sor, darabonként 10 000 forintért. Ezt követően a befektetőnek 2 002 000 forint részvényvásárlásra fordítandó pénze marad, amelyből a harmadik legjobb árszinten (10 010 forint) még további 200 darab részvényt tud megvenni. A vételi ajánlat teljesülésének elemeit külön összefoglaltuk a 2. táblázatban.

2. táblázat

A vételi ajánlat teljesülése

Vételi ajánlat	Darab	Ár (forint)	Érték (forint)
Első szinten teljesül	200	9 900	1 998 000
Második szinten teljesül	300	10 000	3 000 000
Harmadik szinten teljesül	200	10 010	2 002 000
Összesen	700		7 000 000

A tranzakció benyújtásának pillanatában a középárfolyam 9985 forint volt, mert ez a számtani átlaga a legjobb vételi és a legjobb eladási megbízásnak. Számpéldánkban a marginális árhatást az (1) egyenlet felhasználásával a (4) egyenletben feltüntetett módon lehet meghatározni. A marginális árhatás számszerűsítéséhez tehát az ajánlati könyvből meg kell határozni azt az ajánlati szintet, amelyen a megbízás utolsó eleme teljesült. A marginális árhatás pedig tulajdonképpen nem más, mint ennek az árnak a megbízás benyújtásakor esedékes középárhoz képesti relatív változása.

$$vPIF(q) = \frac{P_{\text{utolsó}}^t}{P_{\text{középar}}^{t-1}} - 1 = \frac{10010}{9985} - 1 = 0,25\%. \quad (4)$$

Ha tehát az 1. táblázatban feltüntetett ajánlati könyv mellett a fiktív részvényből 7 000 000 forint értékben vásárol egy befektető, akkor ajánlata 0,25 százalékos relatív árelmozdulást okoz a tranzakció benyújtásának pillanatában esedékes középárra vetítve.

Az ajánlati könyv alapján az átlagos árhatás is egyértelműen meghatározható, hiszen a könyvben látszódik, hogy melyik ajánlati szinten mennyi ajánlat található. Az átlagos árhatást a (2) egyenlet felhasználásával az (5) egyenletben feltüntetett módon lehet meghatározni. A számlálóban a teljesült ajánlat mennyiségekkel súlyozott átlagára szerepel, míg a nevezőben a tranzakció benyújtásának pillanatában esedékes középára.

$$vPIF(q) = \frac{P_{\text{átlagár}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1 = \frac{200 \cdot 9990 + 300 \cdot 10\,000 + 200 \cdot 10\,010}{9985} - 1 = 0,15\%. \quad (5)$$

Ha tehát egy befektető az 1. táblázatban feltüntetett ajánlati könyv mellett a fiktív részvényből 7 000 000 forint értékben vásárol, akkor ajánlata 0,15 százalékos relatív árelmozdulást okoz a tranzakció benyújtásának pillanatában esedékes középárra vetítve.

A középár megváltozásából eredő árhatás számszerűsítéséhez szükség van arra, hogy a tranzakciót követő középárt meghatározzuk. Az ajánlatot követően 9995 forintos középár alakul ki a piacon, ugyanis ez az érték van félúton a 9980 forintos legjobb vételi és a 10 010 forintos legjobb eladási ajánlat között, feltételezve, hogy menet közben semmilyen más megbízás nem érkezett. A tranzakció benyújtásakor esedékes 9985 forintos középár mellett mindez azt jelenti, hogy a tényleges árhatás a (6) egyenletben meghatározott értéket veszi fel.

$$vPIF(q) = \frac{P_{\text{középár}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1 = \frac{9995}{9985} - 1 = 0,1\%. \quad (6)$$

A befektető 7 000 000 forintos vételi ajánlata tehát 0,1 százalékkal megnövelte a középárt, azaz ekkora volt a tranzakció áreltérítő hatása.

A tényleges árhatásfüggvény (*empirical price impact function, ePIF*) – szemben a virtuális árhatásfüggvénnyel – azt az árhatásfüggvényt adja meg, amely ténylegesen megfigyelhető a piacon, vagyis ami a tényleges kereskedés eredménye. Tehát az előző három számpélda azt mutatja, hogy mennyi lenne az árhatás, ha az adott időpontban azonnal beadnánk a megbízást. Ez azonban nem feltétlenül teljesül a piacon, mert a befektető egyéni döntése, hogy ténylegesen be is adja a megbízást, vagy inkább vár, és később nyújtja be. A tényleges árhatásfüggvény ezért nem határozható meg az ajánlati könyvből, csak ténylegesen teljesült kereskedési adatokból. Azokból azonban csak a középár megváltozása olvasható ki, vagyis a (7) összefüggésbeli árhatást tudjuk számszerűsíteni:

$$ePIF(q) = \frac{\text{Tranzakció utáni középár}}{\text{Tranzakció benyújtásakor esedékes középár}} - 1 = \frac{P_{\text{középár}}^t}{P_{\text{középár}}^{t-1}} - 1. \quad (7)$$

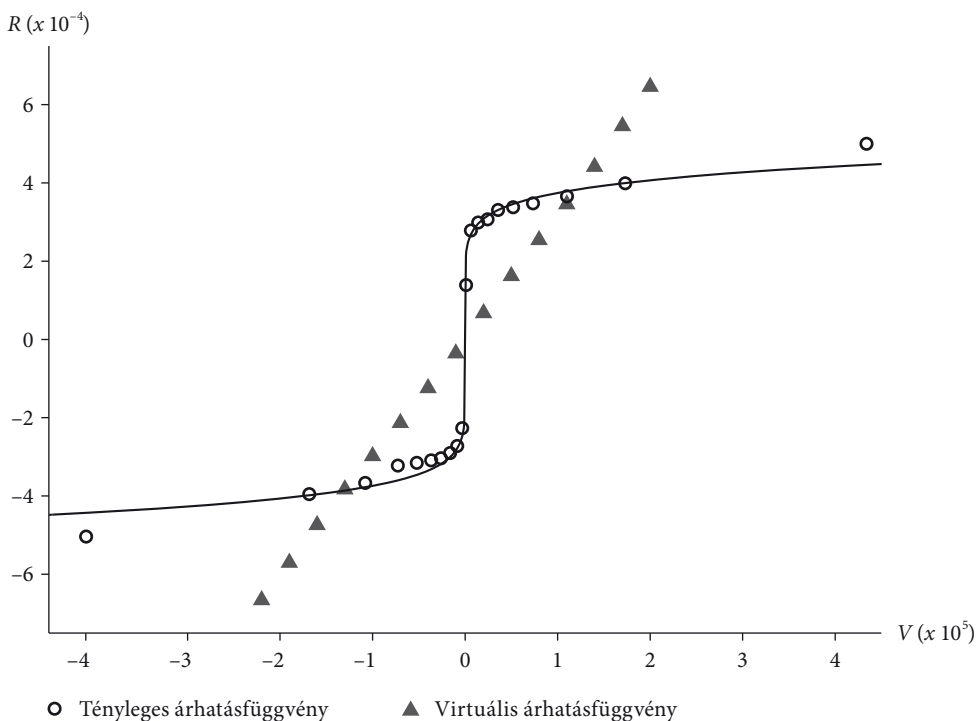
Kereskedési adatokból átlagos árhatást számszerűsíteni nem lehet, hiszen az az árra vonatkozóan csak a középárfolyam megváltozását tartalmazza. Így nem tudjuk kiszámolni, hogy mekkora volt a tranzakció során az az átlagos ár, amelyen teljesült a megbízás, hiszen nem tudjuk, hogy a megbízás egyes részei az ajánlati könyvnek melyik szintjén és milyen áron teljesültek. Csak annyit látunk a kereskedési adatokból, hogy a tranzakciót megelőzően, illetve követően mennyi volt a középár.

A tényleges árhatásfüggvény tehát múltbeli kereskedési adatok alapján, a már teljesült tranzakciók számbavétele révén becsülhető. Ez azt jelenti, hogy a tényleges árhatásfüggvény nem az ajánlati könyvből becsülhető, hanem például a TAQ (*trades and quotes*) adatbázisból. A TAQ adatbázis a tranzakció következtében kialakuló új középárfolyamra vonatkozó információkat tartalmazza. Az előző számpéldákban a (6) egyenlet mutatná a tényleges árhatás mértékét abban az esetben, ha ténylegesen benyújtották volna a megbízást.

A tényleges árhatás becsülésére azonban nem ez az egyetlen mód, ami a tényleges árhatásfüggvény becsülése során nehézséget jelent. A becsülés történhet egyedi vagy aggregált tranzakciók alapján. Az előző során a szakértők azt nézik meg, hogy egy adott értékű tranzakció egy adott időszak (például egy év) alatt átlagosan mennyivel mozdította el a középárfolyamot. Az utóbbi során pedig az elemzők egymás után

1. ábra

A virtuális (háromszög) és a tényleges (kör) árhatásfüggvény



Forrás: Bouchaud és szerzőtársai [2008] 91. o.

következő tranzakciókat adnak össze időben (például ötperces időközönként) vagy tranzakciószám alapján (például az egymást követő 20 tranzakció összegzésével). Ezt követően a szakértők az így kapott egyes tranzakcióméretekhez tartozó árelmozdulás átlagát határozzák meg ugyancsak egy adott időszak (például egy év) alatt. Ezek az átlagok a tényleges árhatásfüggvény elemét alkotják. Az elemzők mind a tényleges, mind a virtuális árhatásfüggvény esetében az árhatást szokták az ajánlat mennyisége (darabszám), illetve összértéke (euró, forint stb.) szerint meghatározni.

A két függvény (*vPIF*, *ePIF*) eltérő becsléséből adódóan nagyon eltérő függvényalakzatokat kaphatunk. Az 1. ábra mutatja, hogy a valós adatokból becsült virtuális és tényleges árhatásfüggvény hogyan viszonyul egymáshoz. Az ábrán az x tengelyen a tranzakció mérete látható (V), míg az y tengelyen a középárfolyam relatív változása szerepel (R).

Az 1. ábra alapján látható, hogy a virtuális árhatásfüggvény egy lineáris egyenessel jól közelíthető, míg a tényleges árhatásfüggvény konkáv alakú az eladási oldal tekintetében. Empirikus adatok alapján a kutatók az árhatásfüggvények számos formáját azonosították, és jellemzően mind az eladási oldal tekintetében adják meg az árhatásfüggvényre a becsléseiket. Az árhatásfüggvény alakjára vonatkozó korábbi empirikus kutatásokat a következőkben ismertetjük.

Összességében tehát a virtuális és a tényleges árhatásfüggvények között az a fő különbség, hogy a virtuális árhatásfüggvényt az ajánlati könyv adataiból becsülhetjük: és azt kapjuk meg, hogy ha egy adott időpontban azonnal beadnánk egy megbízást, akkor milyen lenne akár a marginális, akár az átlagos, akár a középár megváltozásából eredő árhatás, ezért minden pillanatra meg lehet határozni a virtuális árhatást. Ezzel szemben a tényleges árhatás a megvalósult tranzakciók alapján csak a középár megváltozása szerint határozható meg, ugyanis a kereskedési adatokat tartalmazó TAQ adatbázisban csak a középár megváltozása szerepel. Továbbá a tényleges árhatás nem határozható meg minden időpillanatra, ugyanis egy hosszabb időszak átlagos árhatásait tartalmazza, így idősoros elemzésre a tényleges árhatásfüggvény nem alkalmazható.

Az árhatásfüggvények alakja – empirikus megfigyelések

Egy tranzakció árhatása egyrészt függ a tranzakció méretétől, másrészt pedig a vizsgálat időhorizontjától. A 3–6. táblázatokban azon ajánlatvezérelt piacokra vonatkozó tanulmányok legfőbb eredményeit foglaltuk össze, amelyek az árhatást a benyújtott tranzakciók méretének függvényében vizsgálják. A 3., a 4. és az 5. táblázatban a tényleges árhatásfüggvény alakjára vonatkozó kutatásokat gyűjtöttük össze, míg a 6. táblázatban a virtuális árhatásfüggvény alakját vizsgáló kutatásokat. Tanulmányunkban terjedelmi okok miatt nem foglalkozunk az árjegyzői piacok ügyleteinek – a tőzsde szerepvállalása nélküli, bilaterálisan megkötött ügyletek, illetve a rejtett ajánlatok – árhatásával; mindezeket *Bouchaud és szerzőtársai* [2008] taglalja.

A 3. táblázat alapján megállapítható, hogy a *kezdeti tanulmányokban* a kutatók a tényleges árhatásfüggvényt csak grafikonon ábrázolták, annak formális meghatározására

nem került sor. Valamennyi kutató pozitív meredekségű, konkáv függvényt azonosított, azonban a függvény meredekségének változását illetően eltérő eredményre jutottak.

3. táblázat

Kezdeti tanulmányok az árhatásfüggvény alakjára vonatkozóan

Tanulmány	Termékek	Időszak	Árhatásfüggvény alakja	Megjegyzés
<i>Hasbrouck</i> [1991]	NYSE, AMEX és a regionális tőzsdék részvényei	62 nap 1989 elejéről	Pozitív meredekségű, konkáv függvény	Az árhatás késleltetett. Az árhatásfüggvény alakja formálisan nincs meghatározva
<i>Hausman és szerzőtársai</i> [1992]	10 amerikai részvény	1988	Pozitív meredekségű, csökkenő növekményű konkáv függvény	Az árhatásfüggvény alakja formálisan nincs meghatározva
<i>Biais és szerzőtársai</i> [1994]	Paris Bourse CAC 40 indexének részvényei	1991. X. 29.–XI. 26.	Lineárishoz közeli, gyengén konkáv függvény, amely a legjobb ajánlatoknál a legmeredekebb	Az árhatásfüggvény alakja formálisan nincs meghatározva
<i>Niemeyer–Sandas</i> [1995]	Stockholm Stock Exchange OMX index 30 részvénye	1991. XII. 3.–1992. III. 2.	Nemlineáris függvény, amely a legjobb ajánlatoknál laposabb, mint a középárfolyamtól távolabb eső ajánlatoknál	Az árhatásfüggvény alakja formálisan nincs meghatározva
<i>Kempf–Korn</i> [1999]	DAX futures	1993. IX. 17.–1994. IX. 15., aggregálás 5 percre	Pozitív meredekségű, konkáv függvény, amely a két szélén ellaposodik: a nagy ajánlatok relatíve kisebb, míg a kis ajánlatok relatíve nagyobb árváltozással járnak együtt	A szerzők a nettósított ajánlatok kontraktusszáma és a középárfolyam változásának kapcsolatát csak a legjobb vételi és eladási ajánlatra nézik
<i>Evans–Lyons</i> [2002]	Márka/dollár és jen/ dollár valutaárfolyam	1996. V. 1.–VIII. 31., napi aggregálás	Erős pozitív kapcsolat: a nettó ajánlatfolyam a nominális valutaárfolyam volatilitásának jelentős részét képes megmagyarázni	A szerzők a mennyiséget az eladók és vevők által kezdeményezett ajánlatok előjeles különbségeként határozták meg

A 4. táblázat azon tanulmányok legfőbb eredményeit tartalmazza, amelyek a tényleges árhatást *egyedi tranzakciók szintjén* vizsgálják, és a tényleges árhatásfüggvényt formálisan is meghatározzák. A kutatók többsége erősen konkáv függvényt azonosított, azonban a vizsgált piactól függően a függvényt más és más egyenlettel írták fel.¹

¹ A hatványfüggvény konkáv függvényt ad eredményül, amennyiben a kitevő értéke egynél kisebb. A hatványfüggvény konvex függvényt eredményez, ha a kitevő értéke egynél nagyobb. Ha a kitevő értéke eggyel egyelő, akkor a hatványfüggvény egy lineáris egyenes.

4. táblázat Egyedi tranzakciók árhathatása

Szerzők	Termékek	Időszak	Árhathatásfüggvény alakja	Megjegyzés
<i>Lillo és szerzőtársai</i> [2003]	NYSE 1000 legnagyobb kapitalizációjú részvénye	1995–1998	Konkáv, hatványfüggvénnyel nem jellemezhető függvény. A függvény meredeksége a tranzakció méretének függvényében változik	Megfelelő átlagolás és a tengelyek átskalázása után az 1000 részvény árhathatásfüggvénye egy görbére összehozható. A magasabb kapitalizációjú vállalatok részvényei esetén ugyanazon tranzakcióméret kisebb árelmozdulással jár együtt
<i>Bouchaud–Potters</i> [2002]	Paris Bourse és az LSE részvényei	2002. VI. 1.–VII. 15.	Logaritmikus kapcsolat. A kis tranzakciók árhathatása relatíve sokkal nagyobb, mint a nagy tranzakcióké	A kereskedés árhathatása kvázipermanens, azaz a piaci szereplők magát a kereskedést tekintik új információknak
<i>Farmer–Lillo</i> [2004]	LSE 3 részvénye	2000. V.–2002. XII.	Hatványfüggvénnyel jellemezhető kapcsolat, ahol a kitevő értéke 0,26.	A szerzők rávilágítanak a NYSE és az LSE árhathatásfüggvényének különbségére
<i>Lim–Coggins</i> [2005]	Australian Stock Exchange 300 legnagyobb kapitalizációjú részvénye	2001–2004	Hatványfüggvénnyel jellemezhető kapcsolat	Azonos mennyiség kereskedése során a nagyobb kapitalizációjú részvények esetében kisebb az árhathatás mértéke, mint egy kisebb kapitalizációjú részvény esetében
<i>Hopman</i> [2007]	Paris Bourse CAC40 index részvényei	1995. I. 4.–1999. X. 22., 30 perces intervallumra vonatkozó árhathatás	Konkáv, hatványfüggvénnyel felírható függvény, ahol a kitevő értéke az ajánlat sürgősségétől függően 0,37 és 0,47 közötti.	A kitevő értéke piaci ajánlat esetén 0,37, a legjobb vételi és eladási ár közötti különbségre tett ajánlat esetén 0,38, míg az ajánlati könyvbe kerülő ajánlatok esetén 0,47
<i>Zhou</i> [2011]	Shenzhen Stock Exchange 2003 23 részvénye	2003	A <i>teljesült ajánlatok</i> árhathatása hatványfüggvénnyel írható le, ahol a kitevő 0,65 (vételi oldal), illetve 0,69 (eladási oldal); a <i>részben teljesült ajánlatok</i> árhathatása nem túl nagy mennyiség esetén konstans	A hozam és a mennyiség normalizálásával, a részvények kapitalizációjától függetlenül, a különböző részvények árhathatása egy görbére összehozható
<i>Cont és szerzőtársai</i> [2011]	NYSE, AMEX és NASDAQ 50 részvénye	2010. IV.	Az árhathatás a legjobb vételi és eladási ajánlat melletti egyensúlytalanság függvényében lineáris	A lineáris árhathatásfüggvény meredeksége fordítottan arányos a piac mélységével

5. táblázat
Aggregált tranzakciók árhatása

Szerzők	Termékek	Időszak, aggregálás	Árhatásfüggvény alakja	Megjegyzés
<i>Plerou és szerzőitársai</i> [2002]	NYSE 116 leggyakrabban kereskedett részvénye	1994–1995, aggregálás 5 és 195 perc közötti intervallumokra	Két árhatásfüggvény: 1. a számszaki egyensúlytalanság (ϕ), a vevők és az eladók által benyújtott ajánlatok száma közti különbség), 2. a mennyiségi egyensúlytalanság (Ω), a vevők és az eladók által indított tranzakciók száma közti különbség) függvényében meghatározott árhatás. A függvény mindkét esetben konkáv, tangensfüggvénnyel felírható, és az egyensúlytalanság növekedésével ellaposodik	Ha $\Omega > 0$ -hoz közeli, az árhatás $< G >_0 \sim \Omega^{1/\alpha}$ hatványfüggvénnyel írható fel, ahol a kitevő a Δt , azaz az aggregálásra szolgáló időintervallum növekedésével σ csökkenésén keresztül nő
<i>Almgren és szerzőitársai</i> [2005]	Citigroup US közel 30 ezer tranzakciója	2001. XII.–2003. VI., 30 perces aggregáltási szint	A <i>permanens</i> árhatás függvénye lineáris, az <i>ideiglenes</i> árhatás függvénye konkáv hatványfüggvény, ahol a kitevő 0,6	Kizárólag lineáris permanens árhatás biztosítja az arbitrázmentességet és az árhatás e típusának végrehajtási időtől való függetlenségét
<i>Gabaix és szerzőitársai</i> [2006]	TAQ adatbázis 1000 legnagyobb részvénye	1994–1995, 15 perces aggregáltási szint	Növekvő és konkáv árhatás, ami gyökléggé jellemezhető a legjobban	A szerzők a nagy ármozgásokat a nagy ügyleteknek tulajdonítják. <i>Farmer–Lillo</i> [2004] szerint azonban a nagy ármozgásokat a likviditás hiánya okozza. A két kutatócsoport közötti heves vitáról lásd <i>Farmer–Lillo</i> [2004]
<i>Hopman</i> [2007]	Paris Bourse CAC40 index részvényei	1995. I. 4.–1999. X. 22., 7 aggregáltási szint mellett	Lineáris regresszió illesztése. A számítások során a legjobb illesztés napi aggregáltási adatok mellett adódott, $R^2 = 43,5$ százalék mellett. A regresszió meredeksége az aggregáltási szint növekedésével csökken	Különböző időintervallumokon az ajánlatfolyam nagysága gyökléggé írható fel: $SQRT = \sum_{i \in \text{vevők}} v_i^{0,5} - \sum_{i \in \text{eladók}} v_i^{0,5}$
<i>Mangitai</i> [2009]	BÉT Mol-részvény	2007. III. 8-tól 251 kereskedési nap, 5 illetve 20 tranzakció aggregálása	Közeltítés gyökléggé. Az aggregáltási szint növekedésével növekszik a gyökléggé jellemezhető elaposság	A Mol-részvény esetében kapott eredmények összhangban vannak a korábbi empirikus szakirodalommal
<i>Bouchaud és szerzőitársai</i> [2008]	NYSE és LSE részvényei	2000–2002, $N = 1, 8, 64, 512$ tranzakció aggregálása	Az aggregáltási szint növekedésével az árhatásfüggvény ellaposodik. <i>Növekvő linearitás</i> : N növekedésével a mennyiségi egyensúly körül az árhatásfüggvény lineárisra válik. Ha N nagyobb, az árhatásfüggvény lineáris függvénnyel közelíthető része is nagyobb. <i>Csökkenő meredekség</i> : A lineáris regresszió meredeksége N növekedésével csökken.	A megfigyelt összefüggés a tranzakciók aggregálása (N) és az előjeles mennyiségi egyensúlytalanságra (Q) egyaránt érvényes

Az 5. táblázatban azoknak a tanulmányoknak a legfőbb eredményei szerepelnek, amelyek a *tranzakciók aggregálásán* alapulnak. (A táblázat 3. oszlopában az aggregáltság szintjét is feltüntettük.) Látható, hogy a kutatók egymástól igencsak eltérő eredményekre jutottak, a tényleges árhatásfüggvényt formálisan más és más módon írták fel. *Bouchaud és szerzőtársai* [2008] szerint a különbségek az eltérő piacok, eszközök és időszakok vizsgálata mellett az aggregáltság eltérő szintjével magyarázhatók leginkább. Rövid időhorizonton az árhatásfüggvény egyértelműen nemlineáris, hosszabb időtávon (magas aggregáltsági szint mellett) viszont az árhatásfüggvény lineárisává válik, és a függvény meredeksége az aggregáltság szintjének növekedésével csökken.

Végül a 6. táblázat a *virtuális árhatással* kapcsolatos szakirodalmat összegzi. A kezdeti tanulmányok értelmében a virtuális árhatásfüggvény hatványfüggvénnyel becsülhető, amelynek kitevője a tényleges árhatásfüggvényeknél látottaknál lényegesen magasabb. *Weber–Rosenow* [2005] ugyan gyökfüggvényt azonosít, azonban a szerzőpáros szintén megállapítja, hogy a virtuális árhatás jóval nagyobb, mint a tényleges. A szerzők a virtuális árhatás magasabb voltát a hozamok és a limitáras ajánlatok közti negatív korrelációra vezetik vissza.²

A 3–6. táblázat azt mutatja, hogy a korábbi empirikus kutatások értelmében az árhatásfüggvények az esetek döntő többségében hatvány- vagy gyökfüggvénnyel felírható konkáv függvények, míg néhány esetben lineárisak. A konkáv forma azért érdekes, mert ez arra ösztönözi a piaci szereplőket, hogy minél nagyobb tranzakciót adjanak be, hiszen az árhatás annál kevésbé lesz jelentős. A tényleges árhatásfüggvény konkáv alakjára két magyarázat is található az irodalomban (*Bouchaud és szerzőtársai* [2008]). Az első magyarázat *Barclay–Warner* [1993]) nevéhez fűződik: a szerzőpáros azt állítja, hogy a konkáv alak annak tudható be, hogy amennyiben a kis tranzakcióknak ugyanakkora az információtartalmuk a piac számára, mint a nagyméretű tranzakcióknak, akkor a nagy tranzakciók árhatása nem lesz nagyobb, mint a kis tranzakcióké. A második magyarázatot *Farmer és szerzőtársai* [2004] adta, ahol a szerzők a szelektív likviditás fogalmával magyarázzák a tényleges árhatásfüggvény konkáv alakját. A szelektív likviditás azt jelenti, hogy a piaci szereplők a likviditástól teszik függővé, hogy adnak-e megbízást egy tranzakcióra, vagy sem. Ha nagy a likviditás a piacon, akkor nagy tranzakcióra adnak megbízást, különben pedig csak kicsi tranzakciókat hajtanak végre. A piaci szereplők ugyanis igyekeznek olyan tranzakciókra adni megbízást, ami a legjobb ajánlati szintet érinti, és igyekeznek elkerülni azt, hogy az általuk adott megbízás nagyon sok ajánlati szintet töröljön az ajánlati könyvből. Mindez pedig azt jelenti, hogy a tényleges árhatásfüggvény alakját a legjobb ajánlati szinten lévő mennyiségek alakja fogja meghatározni.

² Megjegyzésre érdemes, hogy a 6. táblázatban szereplő tanulmányokon kívül más, a virtuális árhatás függvényének alakját meghatározó szakirodalmat nem találtunk. Véleményünk szerint ez arra vezethető vissza, hogy a kutatók többsége az árelmozdulás okát kereste, nevezetesen azt, hogy a nagy árelmozdulásokat vajon a nagy megbízások okozzák, avagy az a likviditáshiányból következik. A kutatók mindezt pedig kizárólag valós tranzakciós adatokon tudták megnézni, hiszen ténylegesen végbement árelmozdulásokat kellett, hogy vizsgáljanak.

6. táblázat

A virtuális árhatásfüggvények alakjai

Szerzők	Termékek	Időszak	Árhatásfüggvény alakja	Megjegyzés
<i>Challet–Stinchcombe</i> [2001]	Island ECN (NASDAQ), 4 részvény 15 legjobb vételi és eladási ajánlata	Nem ismert	A virtuális árhatásfüggvény hatványfüggvénnyel közelíthető. A kitevő 1 és 3 között változik, naptól és részvénytől függően	A szerzők az árhatásfüggvény témakörét csak érintik, az ajánlati könyv statikus és dinamikus tulajdonságait azonban részletesen bemutatják
<i>Maslov–Mills</i> [2001]	NASDAQ Level II	Nem ismert	A virtuális árhatásfüggvény hatványfüggvény eloszlást követ, ahol a kitevő 1,7 és 2,2 közötti értéket vesz fel	A szerzők a hatványfüggvény magas kitevőjét a valóságtól némiképp elérő virtuális árhatásnak tulajdonítják
<i>Weber–Rosenow</i> [2005]	Island ECN (NASDAQ), 10 leggyakrabban kereskedett részvény	2002, 5 perces aggregált-sági adatok	<i>A limitáras ajánlatok:</i> a virtuális árhatás gyök-függvénnyel jellemezhető konvex függvény; <i>piaci ajánlatok:</i> az árhatás gyök-függvénnyel jellemezhető konkáv függvény	A virtuális árhatás négyszer nagyobb, mint a valós. A valós és a virtuális árhatás közti különbséget a szerzők a hozamok és a limitáras ajánlatok közti negatív korrelációval magyarázzák
<i>Smith és szerzőtársai</i> [2008]	London Stock Exchange (LSE)	Nem ismert	A virtuális árhatásfüggvény alakja lehet lineáris vagy konkáv, ami a modell paramétereinek meghatározásától függ	Elméleti modellt építettek a szerzők, amit az LSE adatai alapján validáltak. A felépített modell tükrözte a valódi adatokban rejlő statisztikai tulajdonságokat

Végezetül említésre érdemes, hogy az árhatásfüggvény alakját tekintve az árhatásban a tranzakciók száma fontosabb szerepet játszik, mint a kereskedett mennyiség (*Bouchaud* [2010a], [2010b]). Emellett egyre inkább elfogadott az is, hogy az árhatás arányos az árkülönbözet (*bid-ask spread*) nagyságával, illetve az egységnyi kereskedeésre jutó volatilitással (*volatility per trade*) (*Bouchaud* [2010b]).

A virtuális árhatásfüggvény meghatározása likviditási mérték segítségével

Tanulmányunk egyik célja, hogy a piaci szereplőknek megmutassunk egy olyan egyszerű módszert, amely révén árhatásfüggvényt lehet becsülni. Illusztrációul a Budapesti Likviditási Mérték adatsora szolgál. A becslés során virtuális árhatásfüggvényt határozunk meg, amely idősorának elemzése segíthet a kereskedési stratégia kialakításában.³ A tényleges árhatásfüggvény idősoros elemzésre nem lenne alkalmas, hiszen az egy adott időintervallum adataira (például egy év)

³ Az idősoros elemzést lásd A virtuális árhatásfüggvény idősorának elemzése című fejezetben.

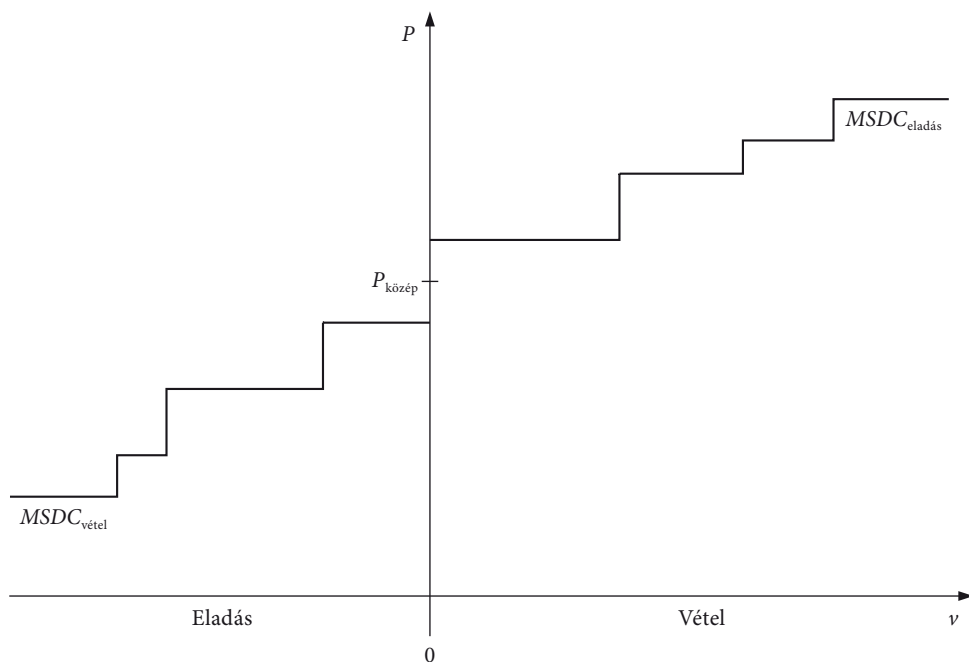
épül. A virtuális árhatásfüggvény ugyanakkor elvileg akár minden másodpercre becsülhető.

Csak a teljes ajánlati könyv ismeretében lehetne a legszakszerűbben meghatározni az árhatás nagyságát. A szereplők döntő többsége számára azonban nem áll rendelkezésre a teljes ajánlati könyv. Egy olyan, általunk kidolgozott módszert mutatunk be, amelynek révén a piaci szereplők a teljes ajánlati könyv ismerete nélkül egyszerűen és gyorsan megbecsülhetik a virtuális árhatásfüggvényt.

A virtuális árhatásfüggvényt legkönnyebben a marginális kereslet-kínálati görbe, azaz az *MSDC* (*Marginal Supply Demand Curve*) meghatározásával becsülhetjük. Az *MSDC* az ajánlati könyv éppen aktuális állapotát mutatja, vagyis azt, hogy milyen ajánlati szintek vannak, és hogy ezeken a szinteken mennyi ajánlat található. Ennek megfelelően az *MSDC* azt adja meg, hogy adott v méretű (darabszám) tranzakció során az utolsó értékpapír eladása/vétele milyen áron teljesült (Acerbi [2010]). Az *MSDC*-t a 2. ábra szemlélteti.

2. ábra

A marginális kereslet-kínálati (*MSDC*) függvény



Az *MSDC* meghatározását az ajánlati könyv egy adott pillanata alapján végezzük el, és nem egy adott T időszaki átlagos ajánlati könyv alapján. Az *MSDC* függvény ismeretében egy tranzakció teljes költsége egy vételi megbízás esetén (fizetendő kö-zépár plusz az implicit költség) a (8) egyenlet⁴ szerint határozható meg:

⁴ Ezt azért írhatjuk így fel a kutatásunk során, mert a teljes költségből becsüljük majd meg az $MSDC(x)$ függvényt, és nem fordítva.

$$\text{Teljes költség}(v) = \int_0^v \text{MSDC}(x) dx. \quad (8)$$

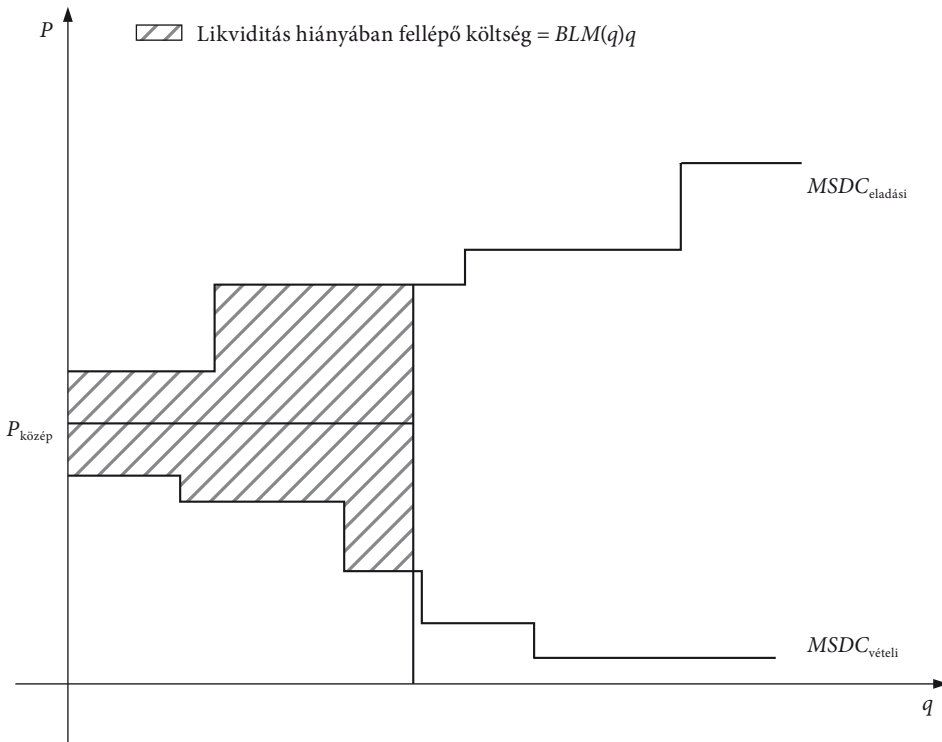
Számos piaci szereplő számára nem áll rendelkezésre a teljes ajánlati könyv, és így nem rendelkeznek információval a piac likviditásáról, illetve nem tudják az *MSDC* függvényt sem meghatározni. Annyi információ van csak a birtokukban, amit az ajánlati könyv első néhány sora szolgáltat számukra: például az árkülönbözet (*bid-ask spread*) vagy a legjobb szinteken lévő ajánlati mennyiség. Egy árhatásfüggvényt azonban nemcsak az ajánlati könyv adatai alapján lehet megbecsülni, hanem a likviditási mértékek alapján is, hiszen a likviditási mértékeket a tőzsde az ajánlati könyv adataiból számolja ki. A tanulmányban a likviditási mértéket a *BLM* reprezentálja. A *BLM*-ről részletesebben lehet olvasni *Kutas-Végh* [2005], valamint *Gyarmati és szerzőtársai* [2010] cikkben.

A *BLM* nem árhatásfüggvény, hiszen a *BLM* értéke nem azt mutatja, hogy egy adott tranzakció után mekkora a relatív árváltozás a piacon. A *BLM* a tranzakció azon implicit költségét méri, amely a likviditás hiányának következtében lép fel. Mivel azonban a *BLM*-t az ajánlati könyv adatai alapján számítják ki, alkalmas arra, hogy segítségével először marginális keresleti-kínálati görbét, majd virtuális árhatásfüggvényt becsüljünk.

Az *MSDC* és a *BLM* függvény közötti kapcsolatot a 3. ábra mutatja.

3. ábra

Az *MSDC* és a likviditási mérték kapcsolata



A 3. ábra értelmében a BLM -et a (9) képlet segítségével lehet meghatározni, ahol q a teljes kereskedett mennyiséget mutatja euróban, tekintve hogy a BLM értéke az ajánlati mennyiség függvényében áll a piaci szereplők rendelkezésére:

$$BLM(q) = \frac{\int_0^q MSDC_{\text{eladás}}(x) dx - \int_0^q MSDC_{\text{vétel}}(x) dx}{q}. \quad (9)$$

A képlet alapján azt a következtetést lehet levonni, hogy mivel kapcsolat van a BLM és az $MSDC$ között, ezért a $BLM(q)$ függvényből virtuális árhatásfüggvényt lehet becsülni. A becslés során az első lépés a $BLM(q)$ függvény alakjának meghatározása. MATLAB-ban készített videó segítségével megnéztük a $BLM(q)$ időbeli lefutását, és azt tapasztaltuk, hogy napi adatok esetében a függvény egyenessel nagyon jól közelíthető. Napon belüli értékek esetében a függvény nagyon eltérő formát vett fel, hol lineáris, hol konkáv, hol pedig konvex volt. Mivel tanulmányunk során napi adatokkal dolgozunk, az árhatásfüggvény becslésénél élhetünk azzal a feltételezéssel, hogy a $BLM(q)$ lineáris, és így az lineáris regresszióval becsülhető. Ekkor a (10) egyenlet adja meg a $BLM(q)$ -t leíró függvényt:

$$BLM(q) = aq + b. \quad (10)$$

Ha felbontjuk a BLM -et komponenseire, és a vételi és az eladási oldalt külön modellezzük, akkor a következőt kapjuk a BLM -re a vételi ($BLM^{\text{vétel}}$) és az eladási oldalra ($BLM^{\text{eladás}}$):

$$BLM = 2LP + APM_{\text{vétel}} + APM_{\text{eladás}} \quad (11)$$

$$BLM^{\text{eladás}} = LP + APM_{\text{eladás}} \quad (12)$$

$$BLM^{\text{vétel}} = LP + APM_{\text{vétel}} \quad (13)$$

ahol LP a likviditási prémiumot jelöli, mely a relatív árkülönbözet (*relative bid-ask spread*), míg az APM áreltérítő hatás (*adverse price movement, APM*) a vételi és az eladási oldalon. Részletesebben lásd *Kutas-Végh* [2005] írásában, ahol a BLM pontos számítási menete látható.

Ekkor a lineáris regressziók a következőképpen néznek ki:

$$BLM^{\text{eladás}}(q) = a_{\text{eladás}}q + b_{\text{eladás}} \quad (14)$$

$$BLM^{\text{vétel}}(q) = a_{\text{vétel}}q + b_{\text{vétel}}. \quad (15)$$

Az $MSDC$ becslése a BLM függvény segítségével az eladási oldalon:

$$\begin{aligned}
BLM^{\text{eladás}}(q) &= \frac{\int_0^q MSDC_{\text{eladás}}(x) dx - qP_{\text{közép}}}{q} \rightarrow \\
BLM^{\text{eladás}}(q)q &= \int_0^q MSDC_{\text{eladás}}(x) dx - qP_{\text{közép}} \rightarrow \\
dBLM^{\text{eladás}}(q) * q + BLM^{\text{eladás}}(q) &= MSDC_{\text{eladás}}(q) - P_{\text{közép}} \rightarrow \\
a_{\text{eladás}}q + a_{\text{eladás}}q + b_{\text{eladás}} + P_{\text{közép}} &= MSDC_{\text{eladás}}(q) \rightarrow \\
2a_{\text{eladás}}q + b_{\text{eladás}} + P_{\text{közép}} &= MSDC_{\text{eladás}}(q).
\end{aligned} \tag{16}$$

MSDC becslése a *BLM* függvény segítségével a vételi oldalon:

$$\begin{aligned}
BLM^{\text{vétel}}(q) &= \frac{qP_{\text{közép}} - \int_0^q MSDC_{\text{vétel}}(x) dx}{q} \rightarrow \\
BLM^{\text{vétel}}(q)q &= qP_{\text{közép}} - \int_0^q MSDC_{\text{vétel}}(x) dx \rightarrow \\
dBLM^{\text{vétel}}(q)q + BLM^{\text{vétel}}(q) &= P_{\text{közép}} - MSDC_{\text{vétel}}(q) \rightarrow \\
P_{\text{közép}} - (a_{\text{vétel}}q + a_{\text{vétel}}q + b_{\text{vétel}}) &= MSDC_{\text{vétel}}(q) \rightarrow \\
P_{\text{közép}} - (2a_{\text{vétel}}q + b_{\text{vétel}}) &= MSDC_{\text{vétel}}(q).
\end{aligned} \tag{17}$$

Az *MSDC*(*q*) segítségével a virtuális árhatásfüggvény meghatározása végül pedig a következő:

$$\nu PIF(q) = \frac{MSDC(q)}{P_{\text{közép}}} - 1. \tag{18}$$

A levezetés során a *BLM*(*q*) függvényről feltételeztük, hogy lineáris, aminek következtében a virtuális árhatásfüggvény is lineáris lett. Azonban a *BLM*(*q*) függvényt becsülhettük volna bármilyen más függvényformával. A választásunk három okból is a lineáris függvényalakra esett. Egyrészt azért, mert a szakirodalom alapján a virtuális árhatásfüggvény alakja jó néhány esetben lineáris (*Almgren és szerzőtársai* [2005], *Biais és szerzőtársai* 1994], *Bouchaud és szerzőtársai* [2008], *Cont és szerzőtársai* [2011], *Hopman* [2007], *Smith és szerzőtársai* [2008]). Másrészt azért választottuk a lineáris függvényformát, mert a *BLM*(*q*) függvény alakját statisztikailag elemeztük, és azt kaptuk eredményül, hogy a lineáris közelítés esetében az R^2 értéke 0,95 körül van, vagyis a lineáris nagyon jó közelítésnek számít. Végezetül

azért választottuk ezt a formát, mert meggyőződésünk, hogy a BLM és az árhatásfüggvény közötti összefüggés ezen legegyszerűbb függvényalak esetében érthető meg a legkönnyebben.

A BLM adatbázis alapján becsült virtuális árhatásfüggvényből tényleges árhatásfüggvényt nem lehet meghatározni, mert annak becslése nem az ajánlati könyvön, hanem múltban megvalósult tranzakciókon kell alapulnia. Tényleges árhatásfüggvény becslésére például a TAQ (*trades and quotes*) adatbázis nyújthat megoldást (*Margitai* [2009]). A TAQ adatbázisból az árhatásfüggvény becslése idő- és számításigényes feladat. Tanulmányunk során azonban az volt a célunk, hogy a piaci szereplők számára egy olyan módszert szolgáltatassunk, amely révén könnyen árhatásfüggvényt tudnak becsülni, amire azután kereskedési stratégia építhető. A BLM alapján becsült virtuális árhatásfüggvény egy gyorsan és egyszerűen elvégezhető számolás eredménye.

A virtuális árhatásfüggvény idősorának elemzése

A virtuális árhatásfüggvény azért érdekes a piaci szereplők számára, mert ennek időbeli alakulásától függően tudnak egy dinamikus portfólióoptimalizálási feladatot megoldani. A kereskedők ugyanis a virtuális árhatásra vonatkozó várakozásaik függvényében hajtják végre a tranzakciókat a piacon. Ezzel összhangban az árhatásfüggvény időbeli alakulását és az alapvető statisztikai tulajdonságait vizsgáljuk. Az elemzés során a következő kérdésekre keressük a választ.

- Milyen alapvető statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik a virtuális árhatásfüggvény (átlag, szórás, minimum, maximum, ferdeség, csúcosság, eloszlás)?
- Van-e trend az adatsorban?
- Hogyan alakul az adatok volatilitása időben?
- Vannak-e kiugró értékek az adatsorban, illetve van-e strukturális törés?
- Átlaghoz visszahúzó folyamatként lehet-e jellemezni az idősort?

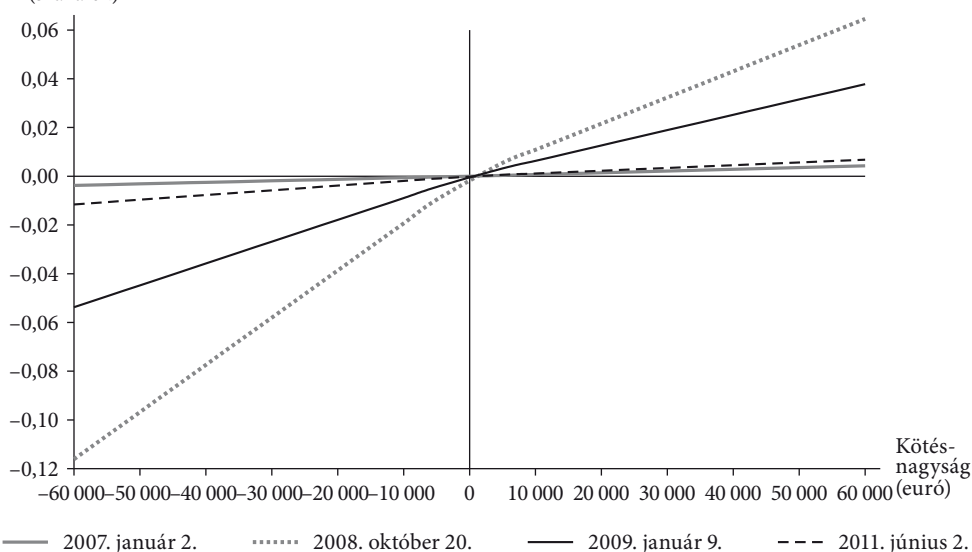
Leíró statisztika

Az adatok, amelyeket vizsgálunk, az OTP napi, 2007. január 1. és 2011. június 2. közötti időszakának BLM-idősorán alapulnak. Az adott időszak alatt a virtuális árhatásfüggvényt az előbb bemutatott módszer alapján becsültük meg minden egyes kereskedési napra.

A 4. ábra mutatja néhány kereskedési nap esetében a virtuális árhatásfüggvényt, mind a vételi, mind az eladási oldalra vonatkozóan. A négy napot annak megfelelően választottuk ki, hogy megmutathassuk, mennyiben tér el az árhatás nyugodt időszakban (2007. július 2. és 2011. június 2. között), illetve válságos időszak (2008. október 20. és 2009. január 9. között). Az ábrán látható, hogy válság során az árhatásfüggvény sokkal meredekebb, ami azt tükrözi, hogy ekkor a piacon lényegesen nagyobb a likviditás hiánya miatt keletkező tranzakciós költség.

4. ábra

Virtuális árhatásfüggvény

Átlagos árhatás
(százalék)

A tanulmány elején található 1. ábra esetében a virtuális árhatásfüggvényt ajánlati könyv adatiból becsülték a szerzők, és így kaptak egy közel lineáris formát a függvény alakjára. Tanulmányunkban mi azonban azért kaptunk lineáris árhatásfüggvényt, mert egy egyenessel közelítettük a $BLM(q)$ függvényt. Napon belüli adatok alapján a virtuális árhatásfüggvény alakja feltételezhetően már nem lenne lineáris.

A virtuális árhatásfüggvény ($vPIF$) idősoros elemzése előtt érdemes megnézni a leíró statisztikák néhány kötésnagyságra vonatkozó értékét, amely révén teljesebb képet kaphatunk az árhatásfüggvényről (7. táblázat).

7. táblázat

Leíró statisztikák a virtuális árhatás értékére különböző kötésnagyságok mellett (bázispont)

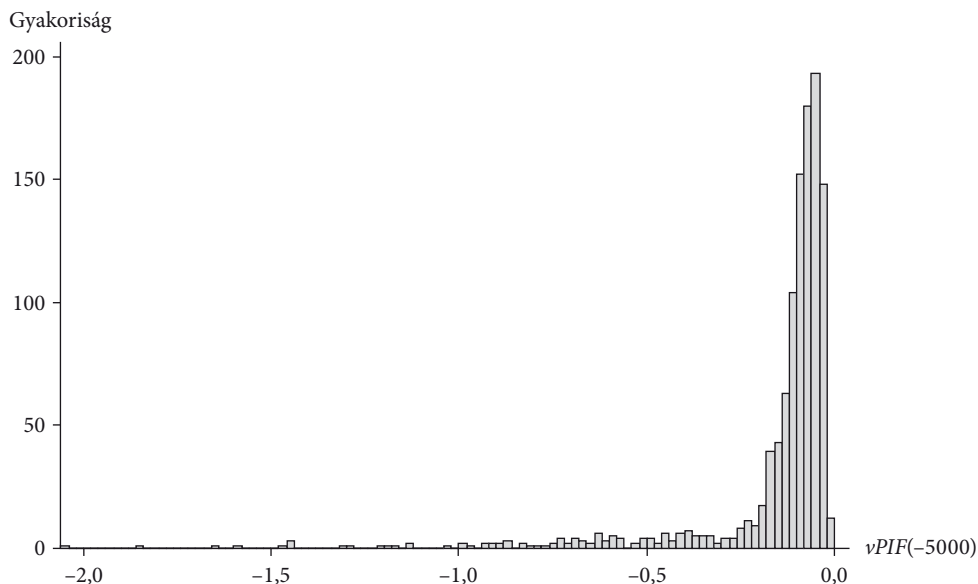
	Vétel				Eladás			
	$vPIF$ (-5000)	$vPIF$ (-20 000)	$vPIF$ (-40 000)	$vPIF$ (-50 000)	$vPIF$ (5 000)	$vPIF$ (20 000)	$vPIF$ (40 000)	$vPIF$ (50 000)
Átlag	-0,150	-0,606	-1,213	-1,517	0,143	0,568	1,134	1,417
Medián	-0,082	-0,332	-0,665	-0,831	0,082	0,325	0,649	0,811
Szórás	0,222	0,894	1,789	2,236	0,198	0,788	1,574	1,967
Minimum	-2,048	-8,237	-16,489	-20,620	0,014	0,055	0,110	0,137
Maximum	-0,015	-0,061	-0,123	-0,153	2,043	8,123	16,230	20,284
Ferdeség	-3,955	-3,952	-3,952	-3,952	3,895	3,898	3,898	3,899
Csúcsosság	19,244	19,220	19,215	19,215	19,709	19,757	19,765	19,767

Amikor egy kereskedő eladni akar a piacon, akkor a vételi ár érvényesül, míg ha venni akar, akkor a kereskedő az eladási oldali árat üti meg a könyvben. A 7. táblázat alapján az ajánlati könyv vételi és eladási oldala eltérő sajátosságokat mutat. A középértékek esetében az figyelhető meg, hogy adott kötési szinten a számtani átlag és a medián az árhatásfüggvény vételi oldalán abszolút értékben rendre nagyobb. Ez annak tudható be, hogy amikor a befektetők részvényt vesznek, akkor azt nem egyszerre teszik, míg eladás esetén például egy pánikhangulat következtében piaci megbízások révén mindenki egyszerre szeretne eladni. Stresszhelyzetben a befektetők a pozícióikat akár nagyobb tranzakciós költség esetén is hajlandók azonnal zárni, és ezáltal jelentős árhatást gyakorolnak a piacra. Vagyis a nyájhatás következtében előfordulhat az, hogy az árhatásfüggvény vételi oldalán abszolút értékben átlagosan nagyobb számok találhatóak: eladni egyszerre kívánnak a piaci szereplők, míg a vételt elszórva hajtják végre, ami tükröződik az ajánlati könyvre épülő árhatásfüggvény értékeiben. A rendelkezésünkre álló adatsor magában foglalja a 2007–2008-as pénzügyi válságot, ami a két oldal különbözőségét magyarázza, hiszen a válság során néhányszor olyan pánikhangulat uralkodott a piacon, ami likviditási hiánnyal párosult.

A többi leíró statisztikai érték esetében is ugyanaz figyelhető meg, mint amit a középértékek adatainak vizsgálata során megállapítottunk. A vételi oldalon abszolút értékben nagyobb értékek találhatóak mind a szórást, mind a maximális és minimális értékeket tekintve.⁵ Ezekből az értékekből ugyanazt a következtetést

5. ábra

Az árhatás sűrűségfüggvénye 5000 euró OTP vétele esetén (2007. október 1. és 2011. június 2. között)



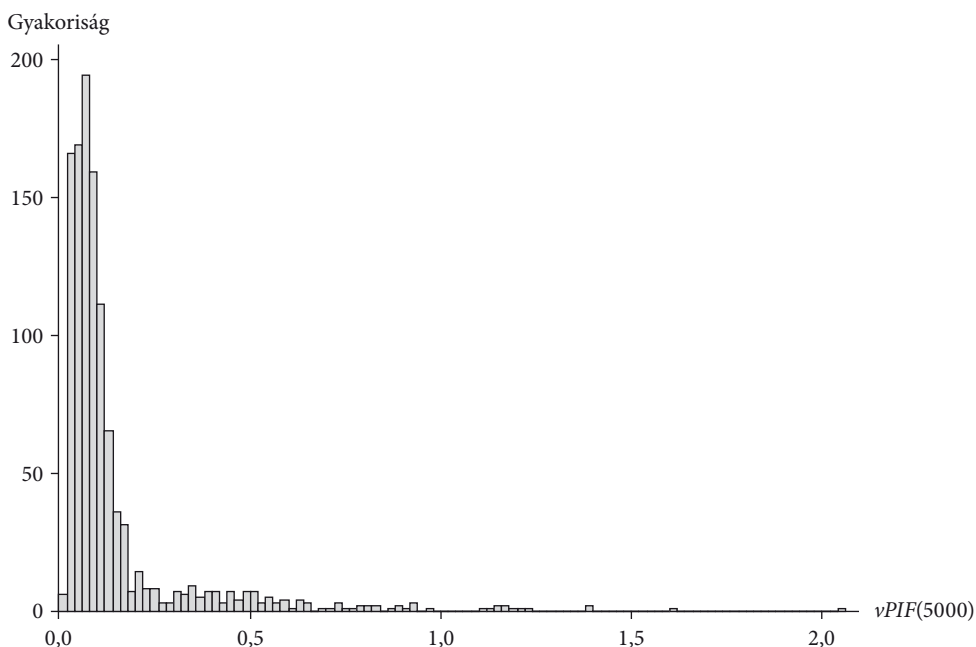
⁵ A vételi oldali maximális/minimális értéket az eladási oldali minimális/maximális értékkel kell összehasonlítani.

tudjuk levonni, mint a középértékek esetében: az ajánlati könyv felépítésében tükröződik az, hogy a vételi megbízások nem olyan koncentráltan érkeznek a piacra, mint az eladási megbízások.

A ferdeséget és a csúcosságot, vagyis azt, hogy mennyire tér el az árhatások eloszlása a normális eloszlástól, érdemes hisztogramok révén is megragadni. Az 5. és a 6. ábra alapján megállapítható, hogy a vételi oldalon az árhatások sűrűségfüggvénye jobbra ferde, míg az eladási oldalon az árhatások sűrűségfüggvénye balra ferde. A vételi oldali sűrűségfüggvény azonban ferdébb, mint az eladási oldali – ez a 7. táblázatból látszódik –, ami szintén az előbb említett oknak tudható be.

6. ábra

Az árhatás sűrűségfüggvénye 5000 euró OTP eladása esetén
(2007. október 1. és 2011. június 2. között)



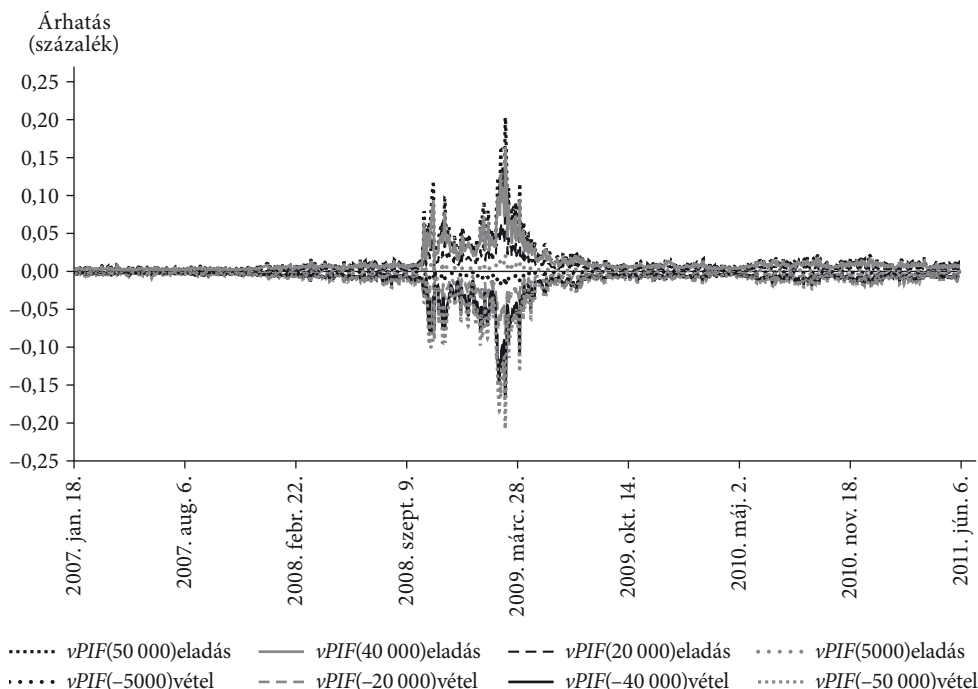
Van-e trend az adatsorban?

Az árhatásfüggvény idősoros elemzését az idősorban lévő trend vizsgálatával kezdjük. A trend ismerete azért fontos a piaci szereplők számára, mert ez segítheti őket annak becslésében, hogy mikor érdemes a pozícióikat nyitni vagy zárni, ugyanis adott esetben előre tudják jelezni, hogy mikor fog várhatóan nőni vagy csökkenni a likviditás. Ennek megfelelően első lépésben érdemes néhány kötésnagyságra ábrázolni a virtuális árhatásfüggvény idősoros alakulását (7. ábra).

Az ábra alapján látható, hogy egyetlen vizsgált kötési szint mellett sincs lineáris trend az adatsorban. Ez azonban logikus is, hiszen a trend jelenléte arra utalna,

7. ábra

A virtuális árhatásfüggvény időbeli alakulása eltérő kötésmennyiségek mellett

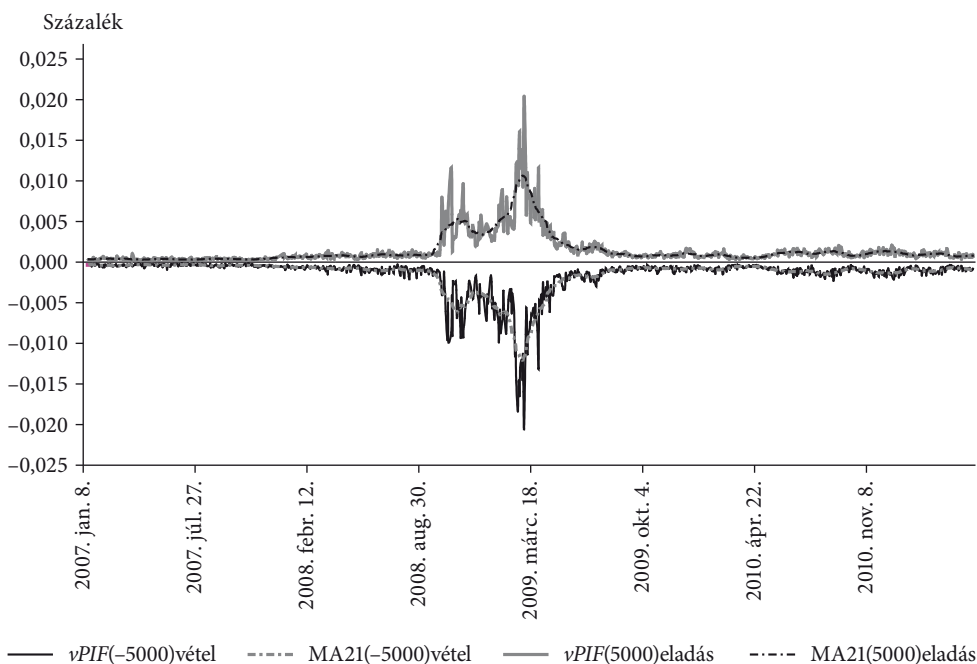


hogy a likviditás szisztematikusan nő vagy éppen szisztematikusan csökken az adott trend szerint az idő függvényében. Több év távlatában azonban nehezen képzelhető el, hogy a likviditás folyamatosan nő vagy csökken egy adott piacon. Annak érdekében, hogy egyértelműen kizárhassuk a trend jelenlétét, további vizsgálatokat is végeztünk. Megnéztük például, hogy vajon polinomiális trendet tartalmaznak-e az adatok. A vizsgálatot az 5000 eurós, illetve 60 000 eurós kötésekre végeztük el. Az R^2 még hatodfokú polinomok esetében is alacsony értéket vett fel: $R^2(5000) = 0,419$, illetve $R^2(60\ 000) = 0,413$. Ennél alacsonyabb fokú polinomok esetében az R^2 értéke még kisebb volt. Vagyis ez azt jelenti, hogy ezek a polinomok nem illeszkednek jól az adatsorra, alacsony a magyarázó erejük. Emiatt egy másik trendelemzési módszert is alkalmaztunk, a mozgóátlagok módszerét. A 8. ábra mutatja a 21 napos mozgóátlagok (MA21) alakulását 5000 eurós kötésekre mind a vételi, mind az eladási oldalon.

A 8. ábrán jól látható, hogy nincs egy, az egész idősorra jellemző trend sem a vételi, sem az eladási oldalon, valamint az is, hogy az árhatás a 2008-as pénzügyi válságot megelőző időszakban viszonylag állandó érték körül mozgott, majd a válság során lényegesen megnőtt, a válság vége felé újra a válságot megelőző érték körül mozgott, bár nem lett olyan alacsony, mint 2007-ben. Érdekes az adatokban az, hogy a válság kirobbanását megelőzően, vagyis 2008 ősze előtt a likviditás magas volt a piacon, vagyis 2007 során – mikor tulajdonképpen az egész válság indult – még kedvező likviditási viszonyok voltak a piacon.

8. ábra

A virtuális árhatás 21 napos mozgóátlagai 5000 eurós kötésekre



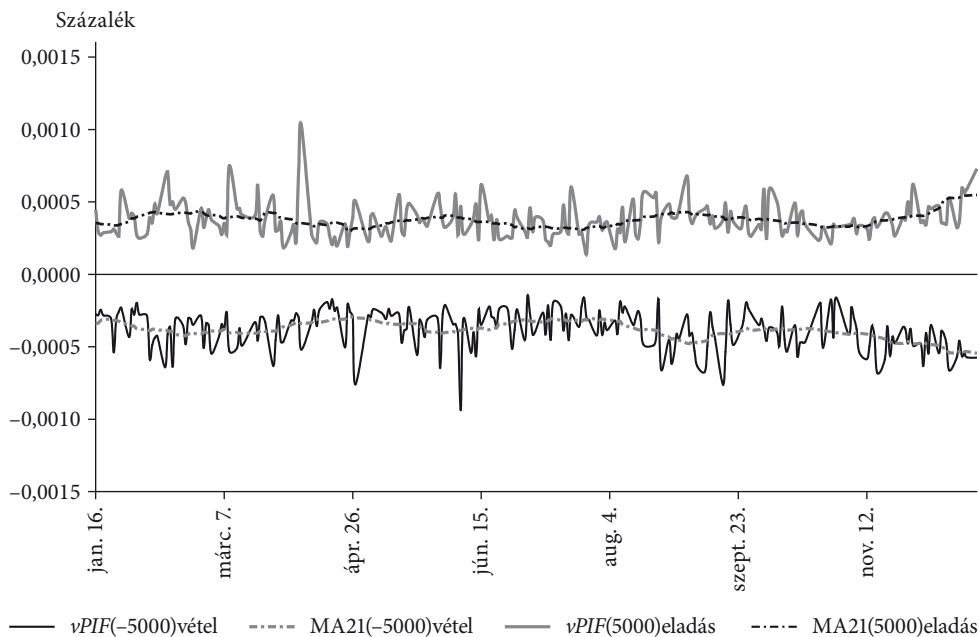
Nincs tehát statisztikai értelemben jól megragadható trend az adatsorban, viszont úgy tűnik, a gazdasági ciklusokat követi az árhatás alakulása. E ciklikusság miatt érdemesnek tartottuk felbontani az adatsort válság előtti, válság alatti és válságot követő időszakra. A válság előtti és utáni egyéves időszakot úgy választottuk ki, hogy azok az adatokban megfigyelhető strukturális törések előtt, illetve után legyenek (lásd a Kiugró értékek és strukturális törések című alfejezetet).

Mind a válságot megelőző, mind a válságot követő időszakra hasonló eredményeket, jellegzetességeket kaptunk. Az egyik ilyen jellegzetesség, hogy a vételi és az eladási oldalon hasonlóan alakult az árhatás, ami azt mutatja, hogy a két oldal likviditása közel azonos. A másik ilyen jellegzetesség az, hogy annak ellenére, hogy nincsen statisztikai értelemben jól megfogható trend az idősorban, negyedévenkénti ciklikusság felfedezhető. Az eredményeket a 9. és a 10. ábra mutatja.

Ez a ciklikusság a negyedéves jelentések közzétételével hozható összefüggésbe. A jelentések közzétételének napján a befektetők információs aszimmetriája az OTP működésére vonatkozóan vélhetően csökken, így szívesebben kereskednek az értékpapírral, ami egy likvidebb részvényt eredményez. Vagyis az ábrákon az látszik, hogy a negyedéves jelentések közzétételkor (január 15., április 15., július 15., valamint október 15. környékén) a legkisebb az árhatás, ha pedig a negyedéves jelentések közzétételének időpontja távoli, akkor az árhatás magas.

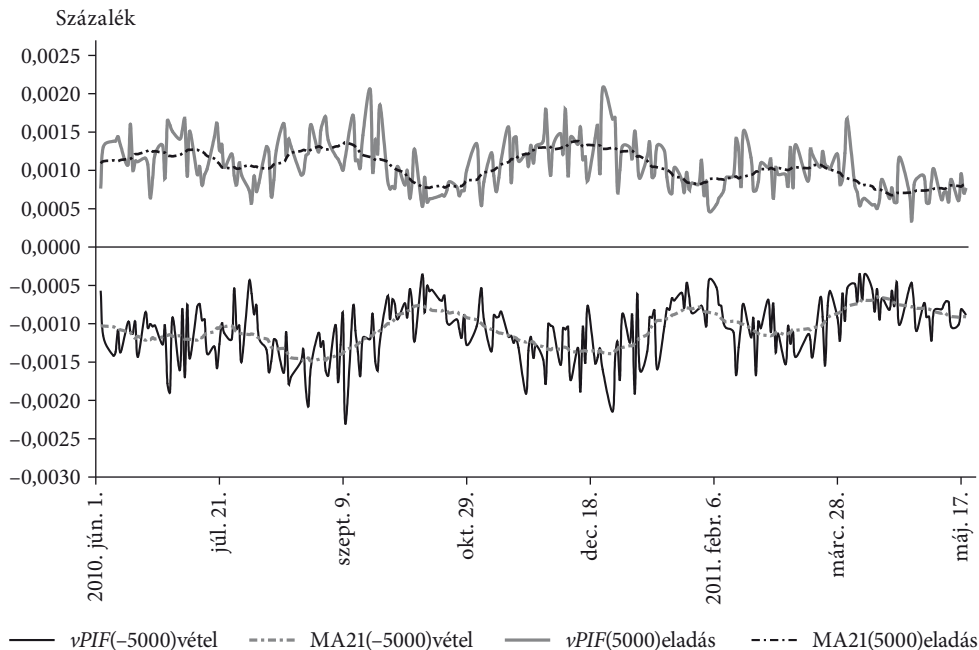
9. ábra

Az árhatás ciklikussága 21 napos mozgóátlag alapján a válságot megelőzően (2007)



10. ábra

Az árhatás ciklikussága 21 napos mozgóátlag alapján a válságot követően

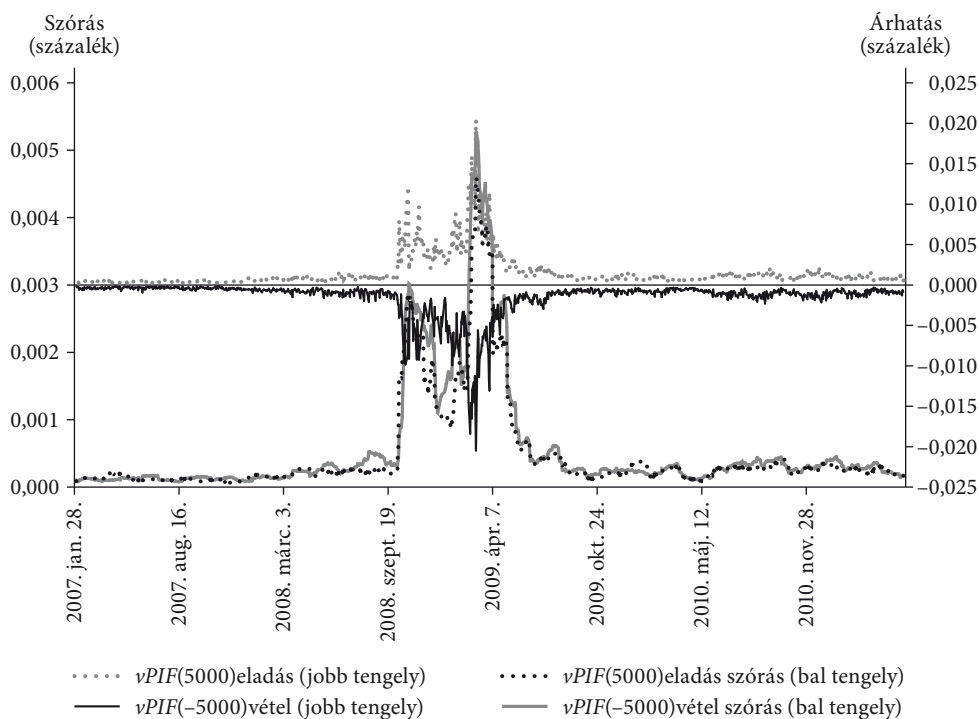


Az idősor volatilitásának és korrelációjának alakulása

A virtuális árhatásfüggvény volatilitásának változását valamennyi kötési szinten megvizsgáltuk. Azt találtuk, hogy a volatilitás együtt mozog a gazdasági ciklusokkal. Amikor az árhatás értéke a likviditás hiányának következtében megnőtt, akkor az értékek volatilitása is megemelkedett mind a vételi, mind az eladási oldalon. A 11. ábra mutatja 5000 eurós kötésekre az eredményeket, ahol egy adott dátumhoz tartozó volatilitást az adott napot megelőző egyhavi adatok alapján számoltuk ki.

11. ábra

Az árhatás szórásának alakulása



A 11. ábra alapján látható az is, hogy az 5000 eurós kötési szinten a vételi és eladási oldal értékei közötti korreláció magas. Kutatásunk során megnéztük, hogy van-e korreláció az idősor különböző kötésmagyságra vonatkoztatott értékei között. Előzetesen arra számítottunk, hogy ha a piacon például az ajánlati könyv vételi oldala alacsony likviditást mutat, attól még az eladási oldal lehet likvid, hiszen ha mindenki eladni akar a piacon, venni könnyen lehet, így a likviditásnak is nagyoknak kellene lennie azon az oldalon. Az adatok az előzetes várakozásainkat nem támasztották alá. A 8. táblázat az egyes kötési szintek árhatásértékeinek vételi és eladási oldala közötti korrelációját foglalja össze. A korrelációk valamennyi esetben tökéleteshez közeledek, ami arra utal, hogy a vételi és az eladási oldal likviditása, illetve likviditáshiánya valamennyi kötési szinten szorosan együtt mozog.

8. táblázat

Az egyes kötési szintek árhatásértékeinek vételi és eladási oldala közötti korrelációja

$vPIF$ -eladás (kötési szint euróban)	$vPIF$ -vétel (kötési szint euróban)				
	5000	20 000	40 000	50 000	60 000
5000	-0,95164	-0,95204	-0,95210	-0,95211	-0,95212
20 000	-0,95133	-0,95173	-0,95180	-0,95181	-0,95182
40 000	-0,95128	-0,95168	-0,95174	-0,95176	-0,95177
50 000	-0,95127	-0,95167	-0,95173	-0,95175	-0,95176
60 000	-0,95126	-0,95166	-0,95173	-0,95174	-0,95175

A 11. ábra alapján látható az is, hogy az egyes napok árhatásadatai között van kapcsolat, hiszen amikor egyik nap alacsony az árhatás mértéke, akkor valószínűsíthetően a következő nap is alacsony lesz az értéke. Ugyanez igaz olyan esetekben is, amikor likviditás hiányában magas az értéke. Statisztikai módszerekkel megvizsgáltuk, hogy az egymás utáni napok között van-e kapcsolat, vagyis első- és magasabb rendű autokorrelációt számoltunk. Mivel a virtuális árhatásfüggvény különböző kötőmértékeihez tartozó idősorai esetében a hibatagok eloszlása nem normális, illetve vélhetően magasabb rendű autokorreláció is jelen van, így az elsőrendű autokorreláció vizsgálatára általánosan használt Durbin–Watson-próba nem alkalmazható (Darvas [2004]). Helyette a lényegesen kevesebb korlátozó feltétellel operáló Breusch–Godfrey-féle Lagrange-multiplikátor próbát végeztük el. Ennek alapján egyértelműen megállapítható, hogy az idősorban valamennyi kötőmérték esetén pozitív autokorreláció van jelen. A hibatagok autokorrelálatlanságát a próba elutasította, az idősorban igen magas fokú autokorreláció mutatható ki. Az idősor tizedrendű, de még akár huszadrendű késleltetett értékeivel vett korrelációja valamennyi kötőmérték esetén egyaránt szignifikáns. A kereskedők számára mindez annyit jelent, hogy az alacsony (magas) árhatással együtt járó likvid (nem likvid) napokat vélhetően alacsony (magas) árhatással együtt járó likvid (nem likvid) napok követik. A likviditás időben fokozatosan változik, ami alacsony árhatású periódusban jó hír, míg magas árhatású periódusban kevésbé, hiszen ez utóbbi esetben jó néhány napnak kell eltelni ahhoz, hogy a piac újra magasabb likviditású legyen.

Kiugró értékek és strukturális törések

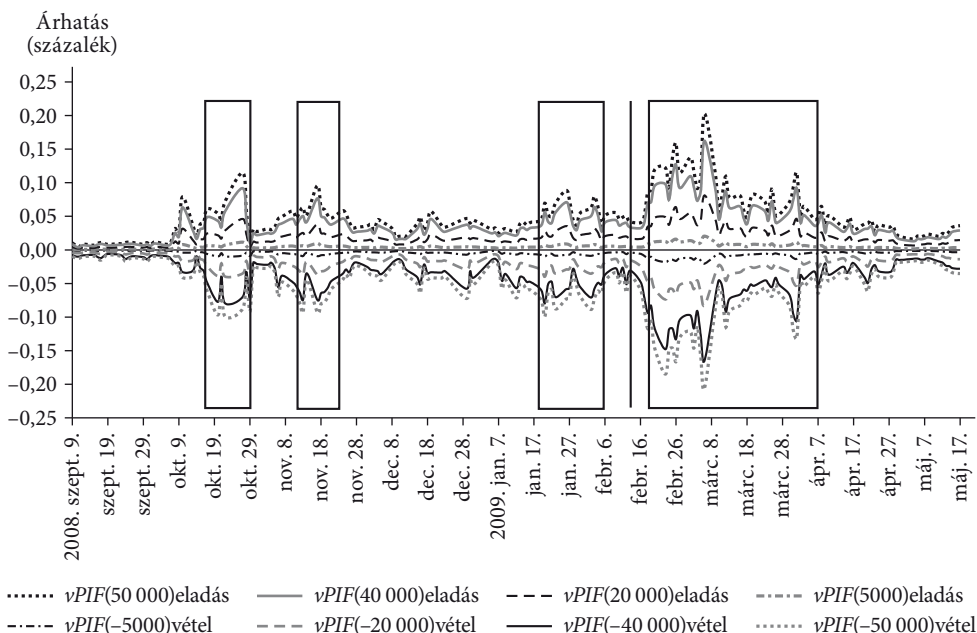
A 7. ábra alapján látható, hogy 2008 októberében és novemberében, valamint 2009 januárjában és februárjában a virtuális árhatásfüggvény értékei mind az eladási, mind a vételi oldalon jelentősen megugranak. A kvartilisekre épülő dobozdiagramok (boxplot) amellet, hogy képesek a virtuális árhatásfüggvény adott kötőmértékéhez tartozó értékeinek eloszlását tömören bemutatni, alkalmasak az adatsor kiugró értékeinek meghatározására is (McGill és szerzőtársai [1978]). A turbulens időszak azonosítása céljából így dobozdiagramokat készítettünk. (A tanulmányban az ábrá-

kat terjedelmi okok miatt nem szerepeltetjük.) A következőkben Q1 az első kvartilis értékét, Q3 a harmadik kvartilis értékét, míg IQR a Q1 és Q3 értékek közti távolságot, azaz az interkvartilis távolságot jelöli. Mind a vételi, mind az eladási oldalon extrém pontoknak azokat az értékeket tekintettük, amelyek alacsonyabbak, mint a $Q1 - 5 \times IQR$ kifejezés által meghatározott küszöbszám, vagy magasabbak, mint a $Q3 + 5 \times IQR$ összefüggés által meghatározott küszöbszám.

A dobozdiagramok segítségével a kiugró értékeket valamennyi kötőmérés esetén meghatároztuk, majd azonosítottuk a hozzájuk tartozó időpontokat. Azokat a napokat, amelyeken az árhatásfüggvény értéke valamennyi kötőmérés esetén extrém értéket vett fel, turbulens napnak tekintettük. Mindezek alapján a vizsgált időszakban 52 turbulens napot azonosítottunk, amelyek a következő öt időszak egyikébe esnek: 2008. október 17. és október 27. közötti, 2008. november 10. és 20. közötti időszak, 2009. január 20. és február 4. közötti, 2009. február 12., illetve 2009. február 18. és 2009. április 3. közötti időszak. Mindegyik időszak a 2007-ben induló jelzálogpiaci válságból kibontakozó, majd 2008-ban a teljes világgazdaságot elérő globális válság idejére tehető, amelynek legsúlyosabb időszaka ezen időperiódusokat öleli fel. Ezen időszakok árhatás értékeit a 12. ábrán külön bejelöltük.

12. ábra

Az árhatás értéke a turbulens időszakokban



A 7. ábra alapján megállapítható, hogy a virtuális árhatás idősorában – mind az eladási, mind a vételi oldalon – strukturális törés van. Ennek kimutatására formális statisztikai próbákat is elvégeztünk. A Chow-próba az egyik legismertebb statisztikai próba strukturális törés kimutatására, segítségével két vagy több részmintára

becsült modellek együttthatóinak stabilitása vizsgálható (Chow [1960]). Jelen esetben három részmintára választottuk a teljes idősort, 2008. október és 2009. április közötti periódust kiemelve. A kiemelt periódus kezdetének 2008. október 17-ét tekintettük, időrendben az első olyan napot, amikor valamennyi vizsgált kötésméret esetében a dobozdiagram-módszerrel kiugró értéket (*outlier*) azonosítottunk. A turbulens periódus végének 2009. április 3-át vettük, ami az utolsó olyan nap volt, amikor az alkalmazott dobozdiagram-módszer valamennyi vizsgált kötésméret esetében kiugró értéket jelzett. A próba alapján minden szokásos (5 százalék, 1 százalék) szignifikanciaszinten azt találtuk, hogy az idősorban strukturális törés van. Strukturális törést jelzett a Quandt–Andrews-próba is, amely előre nem ismert helyen található strukturális törés meglétét képes kimutatni (Andrews [1993]). Mindezek alapján joggal állíthatjuk, hogy a 2008 ősze és 2009 tavasza közötti válságos időszak strukturális törést jelent az idősorban.

A függvény abszolút értéke a 2008. októberi–novemberi és a 2009. tavaszi turbulenciát követően magasabb szintre került, a töréseknél egy egyszeri eltolódás történt a folyamatban. Az eladási oldalon a turbulens időszakot követően a virtuális árhatásfüggvény értékei átlagosan 76 százalékkal alacsonyabb értéket vettek fel, míg a vételi oldalon a függvény értékei átlagosan közel 86 százalékkal voltak magasabbak. Mindez azt jelenti, hogy a pénzügyi válságot követően a piaci szereplőknek a tőzsdei likviditás tartós és jelentős csökkenése miatt lényegesen magasabb, közel kétszeres árhatással és ebből eredő implicit tranzakciós költséggel kellett szembenéznük, mint a válságot megelőző időszakban.

Átlaghoz való visszahúzás

A 7. ábra alapján úgy tűnik, hogy a virtuális árhatásfüggvény értékei esetében nem mutatható ki véletlen bolyongás, hanem ezek az értékek az átlaghoz való visszahúzással (*mean reversion*) jellemezhetők. Erről a kibővített Dickey–Fuller-próba (*Augmented Dickey-Fuller test, ADF*) segítségével győződhetünk meg. Míg az egyszerű Dickey–Fuller-próba autokorreláló reziduumok esetén nem alkalmazható, a kibővített Dickey–Fuller-próba ilyen esetekben is célravezető (Darvas [2004]). Ekkor ugyanis a függő változó késleltetett értékei szerepelnek a regresszióban. A kibővített Dickey–Fuller-próba mögötti intuíció az, hogy ha az idősor integrált folyamatot követ, akkor a függő változó késleltetett értékei alapján nem lehet előre jelezni az idősor soron következő értékét. Ebben az esetben azt az alternatív hipotézist, amely szerint nincs egységgyök, nem tudjuk elvetni. A folyamatban vélhetően egységgyök van, azaz az idősor értékei véletlenül bolyonganak.

Ha a folyamat egységgyököt tartalmaz, akkor a becsült paraméter aszimptotikus tulajdonságai különbözők, és attól függnek, hogy a becsült egyenlet tartalmaz konstanst és/vagy időtrendet, illetve hogy a tényleges folyamat eltolásos vagy eltolás nélküli véletlen bolyongás. Az általunk alkalmazott kibővített Dickey–Fuller-próba során a függő változó Schwert-féle kritérium alapján meghatározott késleltetett értékeit szerepeltettük (Schwert [1989]). A virtuális árhatásfüggvény idősorának ko-

rábbiakban feltárt tulajdonságai alapján emellett azt is feltételeztük, hogy időtrend nincs, azonban konstans van a regresszióban.

A virtuális árhatásfüggvény eladási oldalán valamennyi kötőmérték esetén az kibővített Dickey–Fuller-próba értéke két tizedesjegy pontossággal $-2,65$ -re kerékelhető, míg a vételi oldalon valamennyi kötőmérték esetén $-2,6$ körüli. Mivel a kapott ADF-értékek legalább 90 százalékos szignifikanciaszinten rendre kisebbek, mint ami az ADF-táblázatban szerepel, így elvethetjük azt a nullhipotézist, hogy van egységgyök az idősorban. A virtuális árhatásfüggvény idősorában nem azonosítható tehát egységgyök, ami jelen esetben arra utal, hogy a függvény adott kötőmértékhez tartozó értékei nem bolyonganak véletlenül, hanem átlaghoz való visszahúzás folyamatával jellemezhetők.

Következtetések

Nem likvid piacokon a piaci szereplőknek – méret, költség és idő szerinti – dinamikus portfólióoptimalizálást kell végrehajtaniuk. Ehhez feltételezéssel kell élniük a sztochasztikus alapfolyamatról, azaz a likviditás hiányában fellépő tranzakciós költség alakulásáról. Tanulmányunkban bemutattuk, hogy a Budapesti Értéktőzsde által közzétett Budapesti Likviditási Mérték idősora minderre lehetőséget nyújt, hiszen abból a teljes ajánlati könyv ismerete nélkül virtuális árhatásfüggvény becsülhető. Kutatásunk során egy olyan módszert dolgoztunk ki, amelynek révén a piaci szereplők egy meglévő adatsorból könnyen és gyorsan tudnak árhatásfüggvényt becsülni. A virtuális árhatásfüggvény becsülését követően statisztikailag elemeztük a függvény múltbeli alakulását. Az elemzés a kereskedőknek a jövőben benyújtandó ajánlatok árhatásának előrejelzése, a kereskedés árelmozdulásból eredő többletköltségének becsülése, illetve az optimális kereskedési algoritmus kidolgozása során nyújthat egyfajta támpontot.

Az elemzés során megállapítottuk, hogy a vételi oldali árhatás alapvető statisztikai értékei – mint például az átlag, a medián vagy a szórás – minden esetben magasabb értéket mutattak, mint az eladási oldali értékek. A jelenséget azzal magyaráztuk, hogy az árhatásban tükröződik az, hogy az egyes piaci szereplők részvényvásárlásai elszórtaan történnek a piacon, míg eladás során, egy esetleges pánikhangulat következtében sokkal koncentráltabbak a tranzakciók. A jelenséget tehát végeredményben a nyájhatással magyaráztuk. Emellett megállapítottuk azt is, hogy az virtuális árhatásfüggvény idősoros adatai nem tartalmaznak trendet, viszont negyedévenkénti ciklikusság felfedezhető az adatokban, amit a negyedéves jelentések információs aszimmetriát csökkentő hatásának tudtunk be. A kutatás során kiugró értékek vizsgálata révén 52 turbulens napot azonosítottunk. Ezek a napok mind a 2008-as válság idejére esnek, hiszen 2008. október 17-e és 2009. április 3-a közötti időszakban találhatóak. Az idősorban formalizált statisztikai próbák segítségével strukturális törést is azonosítottunk. Az elemzésünket az átlaghoz való visszahúzás vizsgálatával zártuk, s azt tapasztaltuk, hogy az árhatás átlaghoz való visszahúzó folyamatként jellemezhető.

A jövőben érdekes lehet annak vizsgálata, hogy az árhatásfüggvény hogyan alakul napon belül. Ehhez azonban a $BLM(q)$ függvény alakját minden időpillanatra kell megbecsülnünk, ami egy összetett feladat, hiszen a napon belüli $BLM(q)$ függvény a napi adatokkal ellentétben már nem közelíthető lineárisan. A napon belüli $BLM(q)$ függvény bármilyen alakot felvehet, lehet konvex, konkáv és akár egyenes is. A napi BLM értéket a napon belüli értékek átlagaként számítottuk ki. Az átlagolás következtében az esetlegesen kiugró értékek az átlagba simultak, s így a napi $BLM(q)$ függvény lineárisan jól közelíthető volt. A napon belüli $BLM(q)$ függvények alakjának becslésére a hozamgörbe becslésére alkalmazott eljárások nyújthatnak esetlegesen megoldást.

Emellett érdemes lenne megvizsgálni azt is, hogy miként viszonyul egymáshoz a tényleges és a virtuális árhatásfüggvény. A két függvény összehasonlítása révén megállapítható lenne, hogy szükség van-e egyáltalán a tényleges árhatásfüggvény becslésére, vagy elegendő a befektetési döntések során a virtuális árhatásfüggvény ismerete. Az összehasonlítást azonban megnehezíti, hogy míg virtuális árhatásfüggvényt a BLM-adatbázis alapján akár minden másodpercre lehet becslni, addig tényleges árhatásfüggvényt csak viszonylag hosszabb időszak, például egy hónap adatai alapján lehet meghatározni. Ráadásul a tényleges árhatásfüggvény nem alkalmas arra, hogy idősoros elemzést végezzünk rajta, így a piaci szereplők befektetési döntéseiben kevésbé játszhat jelentős szerepet, mint a virtuális árhatásfüggvény.

Végezetül megjegyzésre érdemes, hogy nagyon fontos lenne a kereskedés implicit költségének piacenkénti összehasonlítása. A hazai eredmények más piacokon tapasztalt eredményekkel való összevetése egyelőre megfelelő adatok hiányában nem lehetséges. Az implicit kereskedési költségek becslése ugyanis nehezen vagy egyáltalán nem hozzáférhető adatbázisok ismeretét feltételezi. Így igazából csak remélni tudjuk, hogy a jövőben egyre több olyan adatbázis, illetve tanulmány áll majd a kutatók és a piaci szereplők rendelkezésére, ami az összehasonlító elemzést lehetővé teszi.

Hivatkozások

- ACERBI, C. [2010]: The Value of Liquidity – Can It Be Measured? RBC Dexia Investor Services.
- ALMGREN, R.–THUM, C.–HAUPTMANN, E.–LI, H. [2005]: Equity Market Impact. Risk, július, 21–28. o. http://corp.bankofamerica.com/publicpdf/equities/Equity_Mkt_impact.pdf.
- ANDREWS, D. W. K. [1993]: Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, Vol. 61. No. 4. 821–856. o.
- BARCLAY, M.–WARNER, J. [1993]: Stealth Trading and Volatility: Which Trades Move Prices? *Journal of Financial Economics*, Vol. 34. 281–305. o.
- BIAIS, B.–HILLION, P.–SPATT, C. [1995]: An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse. *Journal of Finance*, Vol. 50. No. 5. 1655–1689. o.
- BIS [1999]: Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications. Committee on the Global Financial System, Bank for International Settlements, Publications No. 11.
- BOUCHAUD J.-P.–GEFEN, Y.–POTTERS, M.–WYART, M. [2004]: Fluctuations and Response in Financial Markets: The Subtle Nature of „Random” Price Changes. *Quantitative Finance*,

Vol. 4. No. 2. 176–190. o.

- BOUCHAUD, J-P. [2010a]: Price Impact. Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley Online Library.
- BOUCHAUD, J-P. [2010b]: The Endogenous Dynamics of Markets: Price Impact and Feedback Loops. arXiv.org, Quantitative Finance Papers, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1009/1009.2928v1.pdf. Letöltve: 2011. július 14.
- BOUCHAUD, J-P.–FARMER, J. D.–LILLO, F. [2008]: How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand. Megjelent: *Hens, T.–Schenk-Hoppe, K.* (szerk): Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution. Elsevier, Amszterdam, 57–160. o. <http://tuvalu.santafe.edu/~jdf/papers/MarketsSlowlyDigest.pdf>.
- BOUCHAUD, J-P.–POTTERS, M. [2002]: More Statistical Properties of Order Books and Price Impact. *Physica, A*, Vol. 324. 133–140. o.
- CHALLET, D.–STINCHCOMBE, R. [2001]: Analyzing and Modeling 1+1d Markets. *Physica A*, Vol. 300. 285–299. o.
- CHOW, G. C. [1960]: Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. *Econometrica*, Vol. 28. No. 3. 591–605. o.
- CONT, R.–KUKANOV, A.–STOIKOV, S. [2011]: The Price Impact of Order Book Events. arXiv.org Quantitative Finance Papers. <http://ssrn.com/abstract=1712822>. Letöltve: 2011. július 10.
- DARVAS ZSOLT [2004]: Bevezetés az időszerelemzés fogalmaiba. Jegyzet. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
- EVANS, M. D. D.–LYONS, R. K. [2002]: Order Flow and Exchange Rate Dynamics. *Journal of Political Economy*, Vol. 110. No. 1. 170–180. o.
- FARMER, J. D.–LILLO, F. [2004]: On the Origin Of Power-Law Tails in Financial Markets. *Quantitative Finance*, Vol. 4. No. 1. 7–11. o.
- FARMER, J.–GILLEMOT, L.–LILLO, F.–MIKE, S.–SEN, A. [2004]: What Really Causes Large Price Changes? *Quantitative Finance*, Vol. 4. No. 4. 383–397. o.
- FERRARIS, A. [2008]: Equity Market Impact Models. Mathematics at the Interface between Business and Research. Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, december 4. Berlin. <http://www.dbquant.com/Presentations/Berlin200812.pdf> (letöltve: 2011. június 28.).
- GABAIX, X.–GOPIKRISHNAN, P.–PLEROU, V.–STANLEY, H. E. [2003]: A Theory of Power-Law Distributions in Financial Market Fluctuations. *Nature*, Vol. 423. 267–270. o.
- GABAIX, X.–GOPIKRISHNAN, P.–PLEROU, V.–STANLEY, H. E. [2006]: Institutional Investors and Stock Market Volatility. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 121. 461–504. o.
- GYARMATI ÁKOS–MICHALETZKY MÁRTON–VÁRADI KATA [2010]: A likviditás alakulása a Budapesti Értéktőzsdén 2007–2010 között. *Hitelintézeti Szemle*, 9. évf. 6. sz. 497–520. o. http://www.bankszovetseg.hu/anyag/feltoltott/497_520_gyarmati_1.pdf.
- HASBROUCK, J. [1999]: Measuring the Information Content of Stock. *Journal of Finance*, Vol. 46. No. 1. 179–207. o. <http://faculty.chicagobooth.edu/jeffrey.russell/teaching/Finecon/readings/hasbrouck.pdf>.
- HAUSMAN, J. A.–LO, A. W.–MACKINLAY, A. C. [1992]: An Ordered Probit Analysis of Transaction Stock Prices. *Journal of Financial Economics*, Vol. 31. No. 3. 319–379. o.
- HOPMAN, C. [2007]: Do Supply and Demand Drive Stock Prices? *Quantitative Finance*, Vol. 7. No. 1. 37–53. o.
- KEMPF, A.–KORN, O. [1999]: Market Depth and Order Size. *Journal of Financial Markets*, Vol. 2. 29–48. o.
- KUTAS GÁBOR–VÉGH RICHÁRD [2005]: A Budapesti Likviditási Mérték bevezetéséről. *Közgazdasági Szemle*, 52. évfolyam, 7–8. sz. 686–711. o.

- LILLO, F.–FARMER, J. D.–MANTEGNA, R. [2003]: Master Curve for Price Impact Function. *Nature*, Vol. 421. 129–130. o.
- LIM, M.–COGGINS, R. [2005]: The Immediate Price Impact of Trades on the Australian Stock Exchange. *Quantitative Finance*, Vol. 5. 365–377. o.
- MARGITAI ISTVÁN [2009]: Piaci likviditás és mikrostruktúra. Szakdolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem.
- MASLOV, S.–MILLS, M. [2001]: Price Fluctuation from the Order Book Perspective – Empirical Facts and A Simple Model. *Physica A*, Vol. 299. 234–246. o.
- MCGILL, R.,–TUKEY, J. W.–LARSEN, W. A. [1978]: Variations of Box Plots. *The American Statistician*, Vol. 32. No. 1. 12–16. o.
- NIEMEYER, J.–SANDAS, P. [1995]: An Empirical Analysis of the Trading Structure at the Stockholm Stock Exchange. *Stockholm School of Economics Working Paper*, No. 44.
- PLEROU, V.–GOPIKRISHNAN, P.–GABAIX, X.–STANLEY, H. E. [2002]: Quantifying Stock Price Response to Demand Fluctuations. *Physical Review E*, Vol. 66. 027104. 1–4. o.
- SCHWERT, G. W. [1989]: Tests for Unit Roots: A Monte-Carlo Investigation. *Journal of Business–Economic Statistics*, Vol. 7. No. 2. 147–159. o.
- SMITH, E.–FARMER, J. D.–GILLEMOT, L.–KRISHNAMURTHY, S. [2003]: Statistical Theory of the Continuous Double Auction. *Quantitative Finance*, Vol 3. No. 6. 481–514. o.
- TORRE, N. G.–FERRARI, M. J. [1999]: The Market Impact Model™. BARRA Research Insights, http://www.msibarra.com/research/articles/barra/Market_Impact_Model.pdf.
- WEBER, P.–ROSENOW, B. [2005]: Order Book Approach to Price Impact. *Quantitative Finance*, Vol. 5. No. 4. 357–364. o.
- ZHOU, W.-X. [2011]: Universal Price Impact Functions of Individual Trades in an Order-Driven Market. *Quantitative Finance*, megjelenés alatt.