Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén[1]

A kockázat jó mérése és elosztása elengedhetetlen a bankok, biztosítók, befektetési alapok és egyéb pénzügyi vállalkozások belső tőkeallokációjához vagy teljesítményértékeléséhez. A cikkben bemutatjuk, hogy a koherens kockázati mértékek axiómáit nem likvid portfóliók esetén is el lehet várni. Így mérve a kockázatot, ismertetünk a kockázatelosztásra vonatkozó két kooperatív játékelméleti cikket. Az első optimista, eszerint mindig létezik stabil, az alegységek minden koalíciója által elfogadható, általános módszer a kockázat (tőke) elosztására. A második cikk pesszimista, mert azt mondja ki, hogy ha a stabilitás mellett igazságosak is szeretnénk lenni, akkor egy lehetetlenségi tételbe ütközünk.

1. Bevezetés

A *tőkeallokáció* a kockázatok fedezésére szükséges tőke felosztása az egyes üzletágakra, portfólióelemekre vagy más módon meghatározott alegységekre. A Bázel II. tőkeegyezmény bevezetésével, a felkészüléssel a Bázel III.-ra és a pénzügyi piacok szabályozásának szigorodásával párhuzamosan, a tőkeallokáció egyre nagyobb szerephez jut napjainkban.

A fenti értelemben háromféle tőkefogalmat különböztethetünk meg: *gazdasági tőke* (economic capital, l. *Tasche* [2004]) alatt olyan tartalékot értünk, amely a portfólión elszenvedett veszteségek fedezésére szolgál, és valamilyen kockázati mérték határozza meg. A gazdasági tőke tehát az a minimális tőke, amely az adott pénzintézet, biztosító, vagy egyéb pénzügyi vállalkozás saját belső kockázatmérése alapján kalkulált, várható veszteségeire nyújt fedezet. Ezzel szemben a *szabályozói tőke* egy külső szabályozó által elvárt, minimális tőkeszükségletet jelent. Végül a harmadik tőkefogalom a *rendelkezésre álló tőke* (saját tőke és szavatoló tőke), amely a jelenleg birtokolt tőke mennyiségét jelenti, és remélhetőleg mind a gazdasági, mind a szabályozói tőke elvárásainak megfelel.

A pénzintézeteknek két okból szükséges tőkét tartalékolniuk: egyrészt azért, hogy elkerüljék a fizetésképtelenség, illetve a csőd állapotát, másrészt pedig azért, hogy megfeleljenek a szabályozó előírásainak. Mivel a tartandó tőkét mindig valamilyen kockázati mérték határozza meg (a szabályozói tőke esetén ezt a kockázati mértéket szabályozói kockázati mértéknek hívhatjuk), ezért ebben a keretben a tőkeallokáció és a kockázatelosztás szinonimaként kezelhető.

A kockázatot sokféleképpen lehet mérni. A lehetséges módszerekről és azoknak a hasznosságelmélethez, sztochasztikus dominanciához és sztochasztikus programozáshoz való kapcsolatáról jó áttekintést ad *Krokhmala* et al. [2011]. Kiemelt módszernek tekinthető a *koherens kockázati mértékek* családja (*Artzner* et al. [1999]), ahol a szerzők a következő

1 Csóka Péter köszöni a TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt támogatását. Pintér Miklós kutatásait az OTKA kutatási pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának a támogatásával végezte.

négy természetes követelményt (axiómát) támasztják egy megfelelő (koherens) kockázati mértékkel szemben: monotonitás, transzláció invariancia, pozitív homogenitás és szubadditivitás. *Csóka* et al. [2007] az általános egyensúlyelméleti megközelítés szempontjából mindegyik axiómát elfogadhatónak találta, *Acerbi* és *Scandolo* [2008] pedig újraértelmezte azokat úgy, hogy *nem likvid portfóliókra* is igazak legyenek. A szubadditivitás a diverzifikációs hatás a matematika nyelvén megfogalmazva.

Ebben a tanulmányban bemutatjuk a koherens kockázati mértékek melletti tőkeallokáció lehetőségeire vonatkozó, főbb kooperatív játékelméleti eredményeket. Csóka et al. [2009] megmutatta, hogy a koherens kockázati mértékekkel minden kockázatelosztási szituáció megfeleltethető ún. teljesen kiegyensúlyozott vagy egzakt átruházható hasznosságú kooperatív játéknak, attól függően, hogy az eredeti modellben van vagy nincs aggregált kockázat. Ugyanakkor Csóka és *Pintér* [2010] kooperatív játékelméleti módszereket használva)[2] megmutatja, hogy nincs a kockázatoknak olyan elosztása, ami eleget tesz három erősen elvárható, „igazságos" feltételnek (lásd a *4.4. tételt*).

A cikk felépítése a következő: először áttekintjük a tőkeallokáció gyakorlati alkalmazásait, majd egyet visszalépve bemutatjuk, hogyan lehet az allokálandó tőkét meghatározni egy koherens kockázati mértékkel. A következő részben formálisabban is ismertetjük a kooperatív játékelméleti eredményeket a tőkeallokáció lehetőségeire vonatkozóan. Ezután a lehetséges tőkeallokációs módszereken megyünk végig, azt vizsgálva, hogy (szükségszerűen) milyen tulajdonságot nem teljesítenek. Zárásként összefoglaljuk az eredményeket.

2. A TŐKEALLOKÁCIÓ GYAKORLATI ALKALMAZÁSAI

A tőkeallokáció a gyakorlatban az alábbi esetekben fordul elő:

A bankok üzletágakra osztják fel a tartandó tőkét. Mivel a tőke tartása a bank számára költség (hiszen vagy készpénz, vagy kockázatmentes, alacsony hozamú eszköz tartását jelenti), fontos tudni, hogy a bank egyes üzletágai közül melyik mennyiben járul hozzá a teljes tőkeigényhez. A tőkeallokációba bevont üzletágak tipikusan az alábbiak a kereskedelmi bankok esetén: retail üzletág, ezen belül lakossági, kis- és középvállalati, valamint privát banki szolgáltatások; kereskedelmi banki tevékenységek; vállalati üzletág; treasury; de jellemző a lízing és a biztosítási üzletágak jelenléte is.

A tőkeallokáció a *stratégiai* döntéshozatalban is megjelenhet. Amikor egy pénzintézet új üzletággal kívánja bővíteni a tevékenységét, esetleg egy működő üzletágat tervez újabb tevékenységekkel, termékekkel bővíteni, akkor természetesen annak az alapján dönt, hogy e lépés hatására hogyan változik a teljes banki jövedelmezőség. Ilyenkor nem elég az új üzletág várható hozamát figyelembe venni; jelentősen befolyásolja a döntést az is, hogy az új divízió hatására mennyivel növekszik a bank és a már működő üzletágak tőkeszükséglete – ez szintén az allokációs módszerek segítségével határozható meg.

Amennyiben nem üzletágakat, hanem termékeket tekintünk, akkor a tőkeallokációs módszerek *termékárazásra* is használhatók. Ilyenkor az előzőekben ismertetetthez hason-

2 A kooperatív játékelméleti módszerek használatára magyar nyelven lásd Csóka [2003]; Pintér [2007; 2009].

lóan azt vizsgálják, hogy az új termék milyen többletterhet ró majd a bankra, mennyivel növeli meg a vállalkozás tőkeszükségletét, majd az árat ennek megfelelően határozzák meg.

Népszerű alkalmazási terület a *teljesítményértékelés* is, vagyis annak a meghatározása, hogy egy-egy üzletág mennyire jövedelmező. A tőkeallokáció ebben azért játszik fontos szerepet, mert nem elég pusztán azt vizsgálni, hogy mennyi a divízió abszolút értékben elért jövedelme, hanem ezt a tőkeszükséglethez kell viszonyítani. Ennek a mérését szolgálja például a kockázattal korrigált hozam, a RORAC (Return On Risk-Adjusted Capital; *Tasche* [2008]).

Az *egyéni teljesítményértékelésben* a portfóliókezelőknél is jelentős szerepe van a tőkeallokációnak. Ez az egyes üzletágaknak az előző bekezdésben tárgyalt teljesítményértékeléséhez hasonlóan zajlik, csak éppen egyénekre lebontva. Néhány fejlett pénzintézetben a tőkeallokációs módszerek segítségével történő teljesítményértékelés szolgál a vezetők, menedzserek javadalmazásának (bónuszainak) alapjául, de egyes pénzügyi vállalkozásokban még az alsóbb (beosztotti) szinteken is megfigyelhető ez a gyakorlat.

Végül a banki tőkeallokáció alkalmazási területeinek áttekintésekor a *kockázati limitek* kialakításáról sem szabad megfeledkeznünk. Ez esetben nem a bank egyes üzletágai között kell a kockázatot megosztani, hanem egy konkrét divízión, a treasuryn belül. Az üzletág elsősorban piaci, de hitelkockázat szempontjából is kiemelt figyelmet igényel, hiszen itt bonyolódik a bank minden tőzsdei ügylete (pl. deviza- és értékpapír-kereskedés). Kockázati limiteket mind portfóliókra, mind az egyes kereskedőkre fel lehet állítani a treasuryn belül. Ilyenkor tehát azt a tőkemennyiséget osztják tovább a kereskedőkre vagy portfóliókra, amelyet a bank üzletágai közötti tőkeallokáció során a treasuryre osztottak. Amennyiben a kereskedőkről beszélünk, ugyanez a „rá osztott" kockázat – amely ekkor limitként funkcionál – szolgálhat az egyéni teljesítményértékelés alapjául is.

A hazai bankok tőkeallokációs gyakorlatával kapcsolatban eddig mindössze egy felmérés készült (*Balogh* [2006]). A vizsgálat megállapította, hogy a hazai bankok leginkább csak szabályozói alapon meghatározott tőkét számítottak az egyes divíziókra, a kockázatalapon számított belső tőkeallokáció nem volt jellemző Magyarországon. *Homburg* és *Scherpereel* [2005] a német bankok tőkeallokációs gyakorlatával foglalkozik. A szerzők azt találták, hogy Németországban a bankok 56%-a valójában nem használt tőkeallokációs módszereket, mindössze az egyes üzletágak külön-külön meghatározott kockázatát használta fel erre a célra (ami a diverzifikációs hatás hiánya miatt azt jelenti, hogy összességében a szükségesnél több tőkét tart a bank).

Manapság sokat foglalkoznak a tőkeallokációval a biztosítótársaságok (*Buch* és *Dorfleitner* [2008]; *Kim* és *Hardy* [2009]): itt elsősorban annak a meghatározására használják, hogy az egyes biztosított kockázatokra mennyi tőke tartalékolása szükséges, hogyan ossza meg a társaság a teljes tőkéjét az egyes kockázatok, illetve az egyes üzletágak között.

A tőkeallokáció alkalmazási területeinek áttekintése után nézzük meg, hogyan lehet az allokálandó tőkét egy megfelelő, a piacok „kiszáradásának" lehetőségét is figyelembe vevő kockázati mértékkel meghatározni.

3. Koherens kockázati mértékek nem likvid portfóliók esetén

A koherens kockázati mértékeket Csóka et al. [2007] jelölései alapján definiáljuk.

Jelölje *V* a véges számú világállapotok számát, és tekintsük a realizációs vektorok $\Re^V$ halmazát. A *v* világállapot bekövetkezési valószínűsége legyen p_v, ahol $\sum_{v=1}^{V} p_v = 1$.

Az $X \in \Re^V$ vektor megadja egy portfólió lehetséges nyereségeit/veszteségeit egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan. A portfólió kifizetése *v* világállapot esetén X^v, ahol a negatív értékek veszteséget jelentenek.

A $\rho : \Re^v \to \Re$ függvényt *kockázati mérték*nek nevezzük, ez adja meg a portfólió kockázatát mai szemmel nézve.

3.1. definíció

Legyen $X, Y \in \Re^V$ két realizációs vektor, és legyen *h*>0 valós szám. A $\rho : \Re^v \to \Re$ függvényt *koherens kockázati mérték*nek nevezzük (Artzner et al. [1999]), ha kielégíti a következő axiómákat:

- *Monotonitás:* ha $X \geq Y$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$,
- *Szubadditivitás:* $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$,
- *Pozitív homogenitás*: $\rho(hX)=h\rho(X)$,
- *Transzláció invariancia*: $\rho(X+a1^v)= \rho(X)-a$.

A monotonitás értelmezése a következő: ha az *X* portfólió kifizetése tetszőleges világállapot estén legalább akkora, mint az *Y*-é, akkor az *X* kockázata (tőkekövetelménye) nem lehet nagyobb. A pozitív homogenitást (és *X* = *Y* esetén a szubadditivitást) szokták azért kritizálni – a likviditást is figyelembe véve –, mert kétszer akkora portfólió kockázata lehet akár több mint kétszer akkora is.

Acerbi és Scandolo [2008] ehhez hozzáteszi, hogy ilyen alapon a transzláció invariancia (amit ők inkább transzláció kovarianciának hívnának) ugyancsak kritizálható. Tegyük fel, hogy 1 millió forintot kell fizetünk 10 nap múlva, és birtoklunk egy nem likvid kockázatos eszközt, valamint félmillió forintot. Ekkor 1 millió forintot hozzáadva a portfóliónkhoz, a tőkekövetelmény több mint 1 millió forinttal is csökkenhet, hiszen nem kell olcsón likvidálnunk a kockázatos eszközünket. Ugyanakkor a szerzők azt is hozzáteszik, hogy az összes eddigi kritika csalóka volt, az axiómák nem a portfóliók nagyságáról szólnak (kétszer annyi részvény), hanem a portfóliók kifizetéséről, értékéről (kétszer akkora értékű részvény).

A portfólió nagysága és értéke közötti lineáris kapcsolat nem likvid piacok esetén felborul. Ilyenkor a portfóliónk jövőbeli értéke attól függ, hogy milyen jövőbeli korlátaink vannak (liquidity policy): például 1 forintot kell fizetnünk 10 nap múlva, kockázati limiteket kell betartanunk, az általunk kezelt alap befektetési politikája korlátoz stb. Portfólióértékként értelmezve az *X*, *Y* változókat, likviditási alapon egyik axióma sem támadható. Például a példához visszatérve, a transzláció invariancia azt jelentheti, hogy ha ma 0,5 millió forintot hozzáadok a portfóliómhoz, annak a kockázata 1 millió forinttal csökken, mert a portfólióm jövőbeli értéke nő 1 millió forinttal (hiszen így már ki tudjuk fizetni az 1 millió forintot).

A továbbiakban feltesszük, hogy minden világállapotnak azonos a bekövetkezési valószínűsége. Ez nem jelentős megkötés, hiszen egyrészt, ha múltbeli adatokból dolgozunk historikus alapon, akkor mindegyik múltbeli realizáció azonos esélyűnek tekinthető; másrészt, ha valamelyik világállapotnak nagyobb az esélye, akkor (racionális számok esetén) könnyen szerkeszthetünk egy új világállapotteret, amelyikben minden állapotnak azonos az esélye, és ha az eredeti állapotokat kellő számban ismételjük, akkor az eredeti állapotoknak megfelelő valószínűségekhez jutunk.

A koherens kockázati mértékek családja bő, azonos valószínűségű világállapotok esetén lényegében leírható úgy, mint egy súlyozott átlagos maximális veszteség; ha a legnagyobb súly a legnagyobb veszteségen van, a következő legnagyobb súly a második legnagyobb veszteségen, és így tovább. Ezeket a kockázati mértékeket spektrális kockázati mértékeknek hívják, Acerbi és Simonetti [2002] portfólió-optimalizálásnál vizsgálja őket.

Speciális esetként kapjuk az *expected shortfall* kockázati mértéket (Acerbi és Tasche [2002]), ami a legrosszabb *k* százaléknyi veszteség átlaga. Ennél is speciálisabb eset a maximális veszteség, ami tehát szintén koherens.

4. A TŐKEALLOKÁCIÓ KOOPERATÍV JÁTÉKELMÉLETI MODELLJE

Tegyük fel, hogy egy pénzügyi vállalkozásnak n divíziója van, jelölje $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a divíziók halmazát, X_i pedig legyen az i divízió lehetséges jövőbeli nyereségeit/veszteségeit leíró, realizációs vektor. $S \subseteq N$ koalíció alatt a divíziók egy S részhalmazát értjük. Adott ρ koherens kockázati mérték esetén egy *c:*$2^N \to$*N kockázatelosztási (tőkeallokációs) játék* megadja a divíziók tetszőleges koalíciójának kockázatát. Formálisan: minden $S \subseteq N$ koalícióra:

$$c(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset \\ \rho\left(\sum_{i \in S} X_i\right) & \text{különben} \end{cases}.$$

4.1. példa

Három divíziónk van, tehát $N = \{1, 2, 3\}$, és hat világállapottal (V) írjuk le a valószínűségi változókat. Az alkalmazott kockázati mérték (ρ) a *maximális veszteség* koherens kockázati mérték.

1. táblázat

A maximális veszteség által generált kockázatelosztási játék

V\S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
1	–10	–2	13	–12	3	11	1
2	13	6	11	19	24	17	30
3	–2	6	5	4	3	11	9
4	–6	–11	–3	–17	–9	–14	–20
5	10	–14	–1	–4	9	–15	–5
6	10	6	0	16	10	6	16
c(S)	10	14	3	17	9	15	20

A legalsó sorban látható a maximális veszteség koherens kockázati mérték által meghatározott c kockázatelosztási játék.

Vegyük észre, hogy a három divízió összefogásával jelentős diverzifikációs hatás érhető el ahhoz képest, mint ha a divíziók külön-külön kezelnék kockázatukat:

$$c(N) = 20 < 27 = \sum_{i \in N} c(\{i\})$$

Felmerül a kérdés, hogy miként osszuk el a diverzifikációs hatás eredményeként jelentkező megtakarítást az egyes divíziók között. Erre a kérdésre az átruházható hasznosságú kooperatív játékok elméletében alkalmazott *megoldáskoncepció* segítségével kísérelünk meg választ adni.

Legyen Γ_k^N az N játékoshalmazzal rendelkező kockázatelosztási játékok osztálya. Ekkor $\Psi : \Gamma_k^N \to 2^{\Re^N}$ függvényt a kockázatelosztási játékok osztályán értelmezett *megoldás*nak nevezzük. A Ψ megoldás értelmezése a következő: minden kockázatelosztási játék egy kockázatelosztási szituációt reprezentál. Egy Ψ megoldás azt határozza meg, hogy az egyes kockázatelosztási szituációkban az egyes divíziók (játékosok) mennyivel részesednek az összkockázatból: $c(N) = \rho\left(\sum_{i \in N} X_i\right)$. Másképpen fogalmazva, adott *c* kockázatelosztási játék esetén megoldáson az N-komponensű vektorok egy olyan $\Psi(c)$ halmazát értjük, amely vektorok i komponense megadja az i divízióra allokált tőkét. Tehát $\Psi(c)$ az adott kockázatelosztási szituáció esetén a Ψ megoldás által javasolt lehetséges tőkeallokációk halmaza.

A kooperatív játékelméleti irodalom két népszerű megoldása: a *mag* (*Gilles* [1959]) és a *Shapley-érték* (Shapley [1953]).

Egy $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék *magja* a következő halmaz[3]:

$$\mathrm{Mag}(c) = \left\{ x \in \Re^N : \sum_{i \in N} x_i = c(N) \quad \text{és} \quad \text{minden} \quad S \subseteq N - \text{re} \quad \sum_{i \in S} x_i \le c(S) \right\} .$$

A mag értelmezése a következő: az összkockázat olyan elosztásait tartalmazza, amelyek a divíziók egyik csoportjához sem rendelnek akkora allokált tőkét, amelyik meghaladja az adott divíziók együttes kockázatát. Tehát a csoportracionális (az egyfős csoportot is beleérve) elosztások halmaza.

Ha egy kockázatelosztási játékot csak a játékosok egy részhalmazán tekintünk, akkor *részjátékról* beszélünk. Azokat a játékokat, amelyeknek a magja tetszőleges részjáték esetén sem üres, *teljesen kiegyensúlyozott* játékoknak nevezzük.

4.2. tétel

A kockázatelosztási játékok osztálya egybeesik a teljesen kiegyensúlyozott játékok osztályával (Csóka et al. [2009]).

Az állításnak két iránya van, az első szerint tetszőleges kockázatelosztási játék teljesen kiegyensúlyozott, vagyis mindig található magbeli, csoportracionális kockázatelosztás. A

3 Az üres Σ értéke 0.

másik irány szerint tetszőleges teljesen kiegyensúlyozott játék előállhat kockázatelosztási játékként, bármilyen teljesen kiegyensúlyozott játékból eredő szituáció előfordulhat a tőkeallokáció során.

A Shapley-megoldás egy tetszőleges $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék esetén az i játékoshoz a

$$\Phi(c)_i = \sum_{S \subseteq N,\ i \in S} \frac{(|S|-1)!\,|N-S|!}{|N|!}(c(S) - c(S - \{i\}))$$

számot rendeli. $\Phi(c)_i$-t az i játékos c játékbeli *Shapley-érték*ének nevezzük.

A Shapley-érték egy lehetséges értelmezése a következő: vesszük a divíziók egy tetszőleges sorrendjét, és meghatározzuk, hogy ha a divíziók az adott sorrendben „érkeznek", akkor mi a határhozzájárulásuk (c(S)–c(S–{i})) a már előzőleg „megérkezett" divíziók csoportjához. A határhozzájárulásokat hozzárendeljük a divíziókhoz, majd ezt elvégezzük a divíziók minden sorrendjére, és vesszük a határhozzájárulások átlagát. Ez az átlag a Shapley-érték.

4.3. példa (a 4.1. példa folytatása)

Tekintsük a 4.1. példában bemutatott c kockázatelosztási játékot. Ekkor

	a Shapley-érték
$\Phi(c)_i =$	6,5
$\Phi(c)_i =$	11,5
$\Phi(c)_i =$	2

és $\Phi(c) \notin$ Mag(c), hiszen $\Phi(c)_1 + \Phi(c)_2 = 18 > 17 = c(\{1,2\})$.

Vegyük észre, hogy míg a Shapley-megoldás minden játékhoz pontosan egy vektort, elosztást rendel, addig a Mag egy játékhoz rendelhet akár üres halmazt, akár „népes" halmazt is.

A következőkben áttekintjük, hogy milyen tulajdonságokat várhatunk el az alkalmazott tőkeallokációs módszerektől.

4.4. definíció

Ψ, a kockázatelosztási játékok Γ_k^N osztályán értelmezett megoldás

- *hatékony*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék esetén $\sum_{i \in N} \Psi(c)_i = c(N)$,
- *szimmetrikus*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék és tetszőleges olyan $i, j \in N$ játékos esetén, hogy minden $S \subseteq N$, $i, j \in S$ koalícióra $c(S - \{i\}) = c(S - \{j\})$: $\Psi(c)_i = \Psi(c)_j$,
- *erősen monoton*, ha minden $c, v \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játék és tetszőleges olyan $i \in N$ játékos esetén, hogy minden $S \subseteq N$ koalícióra $c(S) - c(S - \{i\}) \leq v(S) - v(S - \{i\})$: $\Psi(c)_i \leq \Psi(v)_i$,
- *magkompatibilis*, ha minden $c \in \Gamma_k^N$ kockázatelosztási játékra $\Psi(c) \in \mathrm{Mag}(c)$.

A fent ismertetett axiómák értelmezése a következő. A *hatékonyság* követelménye természetes: az egyes portfóliókra allokált tőkék összegének meg kell egyeznie a teljes portfólió tőkekövetelményével. A *szimmetria* elvárásával azt követeljük meg, hogy ha két divízió kockázat szempontjából megkülönböztethetetlen, tehát felcserélve őket, a generált kockázatelosztási játék nem változik, akkor az értékelésük legyen egyenlő. Az *erős monotonitás* hasonló követelményt mond ki, mint a szimmetria, csak itt nem két játékost, hanem két kockázatelosztási szituációt hasonlítunk össze. Ha egy divízió egy kockázatelosztási szituációban „kockázatosabb" (nagyobb a határhozzájárulása a divíziók tetszőleges halmazához, beleértve az üres halmazt is), mint egy másikban, akkor az elsőben hozzá allokált tőke nem lehet kisebb a másodikban hozzá allokáltnál. Tehát az allokált tőke a kockázatosság monoton növő függvénye.

A *magkompatibilitás* követelménye azt fejezi ki, hogy minden egyes divíziónak és az ezekből álló „koalícióknak" legfeljebb ugyanannyi kockázatot kell viselniük a „nagykoalíció", vagyis a teljes portfólió részeként, mint amennyivel önállóan rendelkeznek. Egyéb esetben ugyanis lenne olyan koalíció, melynek érdekében állna az N nagykoalícióból kilépve különálló szereplőként folytatnia a tevékenységét.

4.5. megjegyzés

Vegyük észre, hogy a 4.4. definícióban felsorolt axiómák nem függetlenek. A magkompatibilitásból következik a hatékonyság.

A fent ismertetett fogalmak bevezetése után már ki tudunk mondani egy, az „igazságos" kockázatelosztás lehetetlenségéről szóló tételt:

4.6. tétel

Nincs olyan minden kockázatelosztási szituáción (Γ_k^N) értelmezett tőkeallokációs módszer (ψ), ami szimmetrikus, erősen monoton és magkompatibilis (Csóka és Pintér [2010]).

Koherens kockázati mértékek esetén a magbeliség tehát általános esetben nem fér össze a szimmetria és az erős monotonitás követelményeivel, ezt a három természetes elvárást nem követelhetjük meg egyszerre egy kockázatelosztási szabálytól.

A bizonyítás vázlata:

- A 4.2. tételből következik, hogy *Young* [1985] Shapley-érték axiomatizálását (az egyetlen hatékony, szimmetrikus és erősen monoton megoldás) kell meggondolnunk a teljesen kiegyensúlyozott (és az egzakt) játékok osztályán.
- Ehhez Pintér [2009] eredményére van szükségünk (lásd Csóka és Pintér [2010]).
- Végül a 4.1. és 4.3. példákból következik a lehetetlenségi állítás.

5. Tőkeallokációs módszerek

A következőkben áttekintünk néhány, a legismertebbek közé tartozó tőkeallokációs módszert a már említett Shapley-érték mellett. Ezeket teljesen általánosan, a kockázati mérték specifikálása nélkül definiáljuk, így azok a maximális veszteség mellett könnyen alkalmazhatók más kockázati mérték (pl. VaR) mellett is. A módszerek közül az első négyet Homburg és Scherpereel [2008] cikke alapján mutatjuk be, ezeket pedig egy ötödikkel, a Tasche [2008] által is vizsgált Euler-módszerrel egészítjük ki. A felsorolás után, a 4.1. példa adatait használva, mindegyik módszert kiszámítjuk a maximális veszteségre. Azt is megadjuk, hogy a szimmetria, erős monotonitás és magkompatibilitás közül általában melyik tulajdonságot nem teljesítik.

Tegyül fel tehát továbbra is, hogy egy pénzügyi vállalkozásnak n divíziója van, jelölje $N = \{1,2,...n\}$ a divíziók halmazát, X_i pedig legyen az i divízió lehetséges jövőbeli nyereségeit/veszteségeit leíró, realizációs vektor. A pénzügyi vállalkozás aggregált portfóliójára vezessük be az $X = \sum_{i \in N} X_i$ jelölést. A kockázatot a ρ kockázati mértékkel mérjük.

5.1. Egyéni kockázattal arányos módszer (activity based method)

Lényege, hogy a közös kockázatot az egyes divíziók egyedi, a többi divíziótól független kockázatának arányában osztja szét:

$$\Psi_i(c) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^{n} \rho(X_j)} \cdot \rho(X) .$$

A módszer komoly hátránya, hogy nem veszi figyelembe az egyes divíziók közötti függőségi struktúrát, így nem „jutalmazza” kisebb kockázati hozzájárulásokkal azokat az divíziókat, amelyek negatívan korrelálnak a többiekkel.

5.2. Béta-módszer

Jelölje $Cov(X_i, X)$ az *i* divízió és a vállalkozás aggregált portfóliójának kovarianciamátrixát. Mint ismert, az *i* divíziónak a nagykoalíció portfóliójára vonatkozó bétája a következőképpen számítható: $\beta_i = \frac{Cov(X_i, X)}{\sigma(X)^2}$. Ha a béták összege 1, akkor az *i* divízió kockázata:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \beta_i \cdot \rho(X).$$

Amennyiben a béták össze nem 1, a módszert módosítani szükséges annak érdekében, hogy az egyes divíziókra allokált kockázatok összege kiadja a teljes portfólió kockázatát, ekkor:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \beta_i \cdot \frac{\rho(X)}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j}.$$

5.3. Növekményi módszer[4]

Az *i* divízió által okozott kockázatnövekményt adott *S* koalíció mellett a következőképpen definiáljuk: $\Delta(X_i|S) = \rho(S) - \rho(S\setminus i)$, minden $S \in N$ koalícióra és $X_i \in S$ -re, ahol $\rho(\emptyset) \coloneqq 0$. Vegyük észre, hogy csak a jelölés más, a kockázatnövekmény azonos a Shapley-értéknél számolt határhozzájárulással.

A növekményi módszer az egyéni kockázatnövekmények arányában adja meg az egyes divíziókra allokált tőkét:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \frac{\Delta\rho(X_i|N)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)} \cdot \rho(X) = \Delta\rho(X_i|N) + \frac{\Delta\rho(X_i|N)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)} \cdot \left(\rho(X) - \sum_{j=1}^{n} \Delta\rho(X_j|N)\right),$$

ahol a második felírásra azért volt szükség, hogy könnyebben hasonlíthassuk össze a következő költségrés módszerrel.

5.4. Költségrés (cost gap) módszer

A növekményi módszer kis módosításával kapjuk a költségrés módszert, amellyel a következőképpen kaphatjuk meg az egyes egységekre allokált tőkét:

$$\Psi_i(\mathbf{c}) = \begin{cases} \Delta\rho(X_i|N), & ha\ \rho(X) - \sum_{i=1}^{n} \Delta\rho(X_i|N) = 0, \\ \Delta\rho(X_i|N) + \frac{\gamma_i}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k} \cdot \left(\rho(X) - \sum_{i=1}^{n} \Delta\rho(X_i|N)\right), & \textbf{egyébként}, \end{cases}$$

4 A növekményi módszerről bővebben lásd többek között Jorion [1999].

ahol $\gamma_j = \min_{\emptyset \neq K \subset N, i \in K} \left\{ \rho(K) - \sum_{j \in N} \Delta\rho(X_j | N) \right\} \geq 0.$

Amennyiben tehát a kockázatnövekmények összege kiadja a teljes kockázatot, akkor ez lesz az elosztás – ez esetben a költségrés és a növekményi módszer ugyanazt az eredményt adja. Egyébként pedig mindkét esetben egy korrekciós tényező garantálja, hogy az egyes egységekre allokált tőkék összességében kiadják a teljes kockázatot, eltérés csak a korrekció módszertanában van.

5.5. Gradiens (vagy Euler-) módszer

A gradiens módszer tárgyalásához vezessük be a következő jelöléseket!

Először fejezzük ki a portfóliót az azt alkotó divíziók súlya és az egyes divíziók értékének szorzatösszegeként: $X = Y(u) = Y(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i$.

Legyen $f_{\rho,Y} = \rho\big(Y(u)\big)$ első fokon homogén. Az *i* divízióba való marginális befektetésre jutó kockázatnövekményt jelöljük $\hat{\Psi}_{\mathbf{i}}(\mathbf{c})$-vel, amelyet a következő módon számíthatunk:

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{i}}(\mathbf{c}) = \frac{d\rho(Y + hY_i)}{dh}\bigg|_{h=0} = \frac{df_{\rho,Y}(\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1})}{du_i},$$

feltéve, hogy $f_{\rho,Y}$ folytonosan parciálisan differenciálható.

Amennyiben tehát $f_{\rho,Y}$ folytonosan parciálisan differenciálható, valamint első fokon homogén, alkalmazható rá az Euler-tétel:

$$f_{\rho,Y} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{df_{\rho,Y}(u)}{du_i},$$

így – visszatérve a korábban használt jelölésünkhöz – erre a módszerre is teljesül, hogy

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \hat{\Psi}_{\mathbf{i}}(\mathbf{c}).$$

Tasche [2000] belátja, hogy maximális veszteség esetén – amennyiben az differenciálható – az i divízióra allokált tőke megegyezik azzal a veszteséggel, amelyet akkor szenved el, amikor az aggregált portfólió vesztesége maximális.

Buch és Dorfleitner [2008] megmutatta, hogy koherens kockázati mérték alkalmazása esetén a gradiens módszer mindig magbeli tőkeallokációt eredményez, ugyanakkor általános esetben a gradiens módszer nem szimmetrikus (ha szimmetrikus lenne, akkor a kockázati mérték lineáris lenne).

5.6. A módszerek összehasonlítása

Az alábbiakban megadjuk a 4.1. példa kockázatának elosztását a fenti hat módszer szerint.

2. táblázat

A 4.1. példa kockázatának elosztása a különböző módszerek szerint

	Tőkeallokáció		
Módszer	**divízió 1**	**divízió 2**	**divízió 3**
Shapley	6,5	11,5	2
Egyéni kockázattal arányos	7,41	10,37	2,22
Béta	6,85	8,84	4,31
Növekményi	5,26	11,58	3,16
Költségrés	5,5	11,5	3
Gradiens	6	11	3

Ahogy láthatjuk, a 4.1. példában egyik módszer sem adott azonos eredményt. Általános esetben elmondhatjuk, hogy csak a gradiens módszer magkompatibilis, a többi nem. Ugyanakkor, ahogy már említettük, a gradiens módszer nem szimmetrikus.

6. Összefoglalás

A dolgozatban a pénzintézetekben alkalmazott belső tőkeallokáció általános kérdéseinek áttekintése után arra kerestük a választ, hogy tudunk-e olyan tőkeallokációs módszert ajánlani, amely három természetes szempontot minden esetben kielégít: magkompatibilis, szimmetrikus és erősen monoton. Míg magkompatibilis kockázatelosztás mindig létezik, a másik két követelményt is kielégítő nincs; valamilyen szempontról szükségszerűen le kell mondanunk.

Irodalomjegyzék

Acerbi, C.–Scandolo, G. [2008]: Liquidity risk theory and coherent measures of risk. *Quantitative Finance* 8. (7.) 681–692. o.

Acerbi, C.–Simonetti, P. [2002]: Portfolio optimization with spectral measures of risk. http://arxiv.org/PS_cache/cond–mat/pdf/0203/0203607v1.pdf

Acerbi, C.–Tasche, D. [2001]: On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance* 26. (7.) 1487–1503. o.

Artzner, P.–Delbaen, F.–Eber, J.-M.–Heath, D.[1999]: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9. (3.) 203–228. o.

Balogh Csaba [2006]: Felmérés a banki belső tőkeallokáció hazai alkalmazásáról. *Hitelintézeti Szemle* V. (4.) 32–34. o.

Buch, A.–Dorfleitner, G. [2008]: Coherent risk measures, coherent capital allocation and the gradient allocation principle. *Insurance: Mathematics and Economics* 42. (1.) 235–242. o.

Csóka Péter [2003]: Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*, L. évf. 10. szám, 855–880. o.

Csóka P.–Herings, P. J. J.–Kóczy L. Á. [2007]: Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. *Journal of Banking and Finance* 31. (8.) 2517–2534. o.

Csóka P.–Herings, P. J. J.–Kóczy L. Á. [2009]: Stable allocations of risk. *Games and Economic Behaviour* 67. (1.) 266–276. o.

Csóka P.–Pintér M. [2010]: On the impossibility of fair risk allocation. Munich RePEc Personal Archive, ID: 26515

Denault, M. [2001]: Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk* 4. (1.) 1–34. o.

Gillies D. B. [1959]: Solutions to general non–zero–sum games. In: Tucker, A. W.–Luce, R. D. (eds.): Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press, Princeton

Homburg, C.–Scherpereel, P. [2008]: How should the joint capital be allocated for performance measurement? *European Journal of Operational Research* 187. (1.) 208–217. o.

Jorion, P. [1999]: A kockázatott érték. Panem Kiadó, Budapest

Kalkbrener, M. [2005]: An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance* 15. (3.) 425–437. o.

Kim J. H. T.–Hardy M. R. [2009]: A capital allocation based on a solvency exchange option. *Insurance: Mathematics and Economics* 44. (3.) 357–366. o.

Krokhmala, P.–Zabarankin, M.–Uryasev, S. (2011]: Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science* 16. (2.) 49–66. o.

Pintér M. [2007]: Regressziós játékok. *Szigma* 38. (3–4.) 131–147. o.

Pintér M. [2009a]: A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 26., 289–315. o.

Pintér M. [2009b]: Young's axiomatization of the Shapley value – a new proof. arXiv:0805.2797v2.

Shapley L.S. [1953]: A value for n–person games. In: Kuhn, H. W.–Tucker, A.W. (eds.): Contributions to the Theory of Games II. Princeton University Press, Princeton. 307–317. o.

Tasche, D. [2000]: Risk contributions and performance measurement. http://www–m4.ma.tum.de/pers/tasche/riskcon.pdf

Tasche, D. [2008]: Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0708/0708.2542v3.pdf

Young H. P. [1985]: Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory* 14. (2.) 65–72. o.