Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. november (949–969. o.)

GYARMATI ÁKOS–MEDVEGYEV PÉTER

Válság és hitelderivatívák

A szintetikus fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k) árazása és kockázataik

A dolgozat első részében röviden áttekintjük a 2007-ben kezdődött pénzügyi válság lefolyását és a válsághoz vezető okokat. A bemutatás során igyekszünk végig a mögöttes folyamatokra és azok mozgatórugóira koncentrálni, ezzel megragadva a válság egyfajta „elméletét". A bemutatásból láthatóvá válik a hitelderivatívák kiemelt szerepe a válság során. A dolgozat második részében az egyik legnépszerűbb hitelderivatív termék, a szintetikus fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k) matematikai modellezését és annak problémáit mutatjuk be. Sokak szerint ezek a matematikai modellek okozták – vagy legalábbis felerősítették – a válságot. Az elemzés során megmutatjuk, hogy nemcsak a modellezési eszközök nem voltak megfelelők, hanem az árazás elve sem állta meg a helyét a kockázatsemleges árazási keretben. Ez az eredmény élesen rámutat a mögöttes elméletek válságára.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G01.

A 2007–2010-es pénzügyi és globális válság kapcsán gyakran szokás említeni, hogy a komplex derivatív termékek árazásához használt matematikai modellek központi szerepet játszottak a válság kialakulásában, de legalábbis erősítésében. Egyes cikkek még attól az állítástól sem riadtak vissza, hogy egyetlen formula hibáztatható a *Wall Street* összeomlásáért (*Salmon* [2009]).

Jóllehet ez nyilvánvaló túlzás, hangsúlyozzuk, hogy e cikkek egyike sem tekinthető tudományosnak, mégis reflektorfénybe helyezték ezeket a modelleket. Célunk, hogy megvizsgáljuk, pontosan mely termékek, milyen szerepet töltöttek be a válság során, illetve e termékek árazásához pontosan milyen modelleket is használtak.

A tanulmány első részében a válság rövid bemutatásával foglalkozunk. Feltárunk néhány jól követhető folyamatot, amelyek bemutatják, mi történt a válság során, és mi vezetett idáig. Ezek a megjegyzéseink jól rámutatnak a hitelderivatívák központi szerepére, illetve arra, hogy a tényleges folyamatoknak mely tulajdonságait nem tükrözték megfelelően az alkalmazott modellek.

A második részben a szintetikus fedezett adósságkötelezettségekre (CDO) és *Li* [2000] elhíresült gaussi kopula modelljére helyezzük a hangsúlyt. A Li-modell ismertetése számos helyen megtalálható, a modell közismert, és a téma iránt érdeklődő olvasó könnyen találhat felkészült elemzéseket. Beleértve akár egyetemi tananyagokat, szakdolgozatokat is. A Li-modell azonban számunkra nem önmagában érdekes. Célunk nem a modell sokadik bemutatása. A modellt azért tárgyaljuk, mert kristálytisztán tartalmazza mindazokat az elvi problémákat, amelyekkel megítélésünk szerint a válság hatására átalakuló pénzügyi közgazdasági elméletnek szakítani kell. A Li-modell tárgyalása inkább illusztráció,

Gyarmati Ákos, Budapesti Corvinus Egyetem, Morgan Stanley.
Medvegyev Péter a Budapesti Corvinus Egyetem matematika tanszékének egyetemi docense.

mint valódi ismertetés. A modell tárgyalását megelőzően röviden bemutatjuk a szintetikus CDO-kat, azok elterjedésének fő okait, majd ezt követően természetesen magát a modellt. Elemezzük miért terjedt el ennek a modellnek a használata, milyen hibái, hiányosságai vannak, és miért hibáztatták utólag. Meg kell jegyezni, hogy ezek a hibák, hiányosságok a modellezők, kutatók számára ismertek voltak, ők nem állítják, hogy kizárólag a modell lett volna a problémák fő forrása.

A modellnek több kiterjesztése, általánosítása ismert (lásd *Andersen–Sidenius* [2005], *Gregory–Laurent* [2004] vagy *Kalemanova és szerzőtársai* [2005]), ezeknek egy része az eredeti modellkeretben marad, de vannak egészen más utat követők is. Részletes tárgyalásuk azonban nem célja cikkünknek.

A tanulmány egyik legfőbb célja, hogy bemutassa az „elmélet válságát”, hogy – az ismert hiányosságok mellett – milyen elméleti jellegű problémák voltak a modellel. Az CDO-árazás elvét alaposabban megvizsgálva, azt találjuk, hogy az nem igazán, vagy legalábbis nem egyértelműen illik bele a szokásos kockázatsemleges árazási keretbe. Ezt nemcsak az eredeti modell, hanem a kiterjesztések is figyelmen kívül hagyják. A pénzügyi elmélet igen vonzó és impozáns épülete az arbitrázs fogalmára és az abból következő úgynevezett kockázatsemleges árazás elvére épül. Az „elmélet válságán” azt a meggyőződésünket értjük, hogy az elmélet ezen saroköve megítélésünk szerint „kimozdult a helyéről”, és a továbbiakban nem tekinthető egyfajta axiomatikus kiindulási pontnak, és ez az elméletet és a ráépülő gyakorlatot igen ingataggá teszi. Nemcsak az elméletet, hanem a gyakorlatot is! A pénzügyi elmélet éppen a közvetlenül ráépülő gyakorlat miatt alapvetően egyszerűsítő és rendkívül gyakorlati megfontolásokra épül. A gyakorlatban a piaci szereplőknek nincs idejük a modelleket megalapozó elméletek helyességét vizsgálni, sokkal inkább a gyors és viszonylag elfogadhatóan működő számolásokat részesítik előnyben. Éppen ezért nem is cél egy „tökéletes” modell fejlesztése, csak egy éppen „elég jó” használatára törekszenek. A Li-modell fő jellemzője és legfőbb előnye éppen ez a gyakorlatias hozzáállás. Ennek a következménye viszont az lehet, hogy a megalapozó elmélet nem állja meg a helyét. Amíg nem történtek tényleges veszteségek, amíg nem lett válság, ez érthetően nem érdekelte a piaci szereplőket. Az általános közgazdasági-egyensúlyelméleti megfontolásokból a pénzügyi elmélet egyetlen gondolatot vesz át: „kockázat nélkül nincs nyereség”. Ugyanakkor a válság eredményeként nekünk úgy tűnik, hogy ez az elegáns hozzáállás nem tartható. A pénzügyi gyakorlat által támasztott gyakorlatias megközelítés igénye és a tudományosnak mondható megbízható és elegáns elmélet követelménye nyíltan ellentmond egymásnak. És ezt az ellentmondást nevezzük mi az elmélet válságának. Nekünk úgy tűnik, hogy a pénzügyi elmélet válsága éppen a pénzügyi válság elmélete.

A válság elmélete – mi történt és miért?

Ebben a részben röviden áttekintjük a pénzügyi válság okait és következményeit. A téma iránt érdeklődőknek részletesebb áttekintést ad Michael Lewis A nagy dobás című könyve (*Lewis* [2010]), illetve *Király és szerzőtársai* [2008] cikke. Előbbi az amerikai történéseket veszi sorra, utóbbi azonban a hazai következményeket is tárgyalja.

A válság lefolyása

A válság közvetlen kiváltó okának az amerikai ingatlanpiaci buborék kipukkanását lehet tekinteni, ez indította el az úgynevezett másodrendű *(subprime)* jelzálogválságot. A megnevezés a gyengébb minősítésű hitelekre utal, amelyek kockázatosabbak, nagyobb a valószínűsége a csődnek, mint a jó minősítésű, elsőrendű *(prime)* hitelek esetén. Két folyamatot vizsgálunk most meg. A másodrendű jelzáloghitelek bedőlése dominószerű események sorozatát indította el. Közvetlenül az ingatlanépítések lassulása, illetve a háztartások vagyoni helyzetének és fogyasztásának mérséklődése hatott a gazdaságra. A jelzáloghitelek nemfizetése természetesen a kibocsátó és befektető bankok számára veszteséget jelentettek, és mivel a bankok jó része magas tőkeáttétellel működött, ez forrásoldalon a saját tőke kimerüléséhez vezetett. Ennek két további súlyos következménye lett: egyrészt sok bank csődbe ment, másrészt megnőtt a bizalmatlanság a hitelezés terén (bizalmi válság), ezt a bankközi hitelkamat és a TED-felár (bankközi hitelkamat és az amerikai diszkontkincstárjegyek kamata közötti különbség) növekedése mutatja. Ez okozta a likviditási válságot, ugyanis az új körülmények között nehéz volt hitelhez jutni. Ez tovább lassította a gazdaságot, elkerülhetetlenné vált a kormányzati beavatkozás – gazdaságélénkítő csomagok, a háztartások támogatása, valamint bankok csődtől való megmentése formájában.

A kezdeti folyamat öngerjesztő hatású volt. Az ingatlanárak csökkenése a rossz minőségű jelzáloghitelek bedőléséhez vezetett. A fizetni nem tudó hitelesek ellen megindultak a behajtások, ami így megnövelte az ingatlankínálatot, ez pedig tovább nyomta le az árakat. Ezáltal azonban már a jó hitelesek, akik tudták volna fizetni a jelzálog törlesztőrészleteit, is olyan helyzetbe kerülhettek, hogy a házuk már csak a jelzálog töredékét érte, így már számukra sem érte meg tovább fizetni, egyszerűen „elsétáltak” *(„walk away”),* hagyták, hogy a bank vigye a házat.[1] Emiatt az ingatlanok tovább vesztettek értékükből, a folyamat körbeért, és egyre szélesebb rétegeket érintett, s a fizetések elmaradása miatt a már említett banki veszteségekkel és a hitelezés szigorításával járt, aminek a következménye a gazdaság lassulása, a munkanélküliség növekedése volt. Ennek következtében viszont egyre többen nem tudtak fizetni, ezzel tovább erősítve a fenti folyamatokat. Miként látható, az itt leírt folyamatok legfőbb jellemzője öngerjesztő voltuk. Az árazásra használt modellek azonban végletesen statikusak voltak. Nem csak abban az értelemben, hogy nem tartalmazták a válságban alapvető szerepet játszó visszacsatolást, semmilyen dinamika nem volt a modellekben, és így – ha lehet mondani – éppen a lényeg hiányzott belőlük. A következőkben ismertetett Li-modell legfőbb hiányossága nem az, hogy egyetlen korrelációs paramétert tartalmazott, még az sem, hogy *ad hoc* módon normális és exponenciális eloszlást tételezett fel, hanem az, hogy a tényleges folyamatok alapvető jellemzőjét, a kaszkád hatásokat még utalásszerűen sem tartalmazta. Természetesen ez a kockázatkezelők által régóta ismert dilemma. Nyilvánvaló, hogy a gazdasági ciklusok, a makroökonómiai folyamatok alapvető szerepet játszanak a pénzügyi folyamatokban. De miként lehet a makrofolyamatokat, a makroökonómia számtalan eredményét beépíteni a kockázatkezelés napi gyakorlatába? Valószínűleg sehogy.

A válsághoz vezető okok

A hitelválság alapvetően az emberek két csoportját kapcsolja össze: a befektetőket és az ingatlantulajdonosokat. A befektetők a pénzükkel képviselik magukat, míg a tulajdonosok a jelzáloghitelekkel. A befektetők pénze különböző intézményeken keresztül (biztosítók, nyugdíjalapok, befektetési alapok) jelenik meg a piacon, míg a jelzálogok házak formájában. A kettőt a pénzügyi rendszer kapcsolja össze, elsősorban kereskedelmi, jelzálog- és befektetési bankokon keresztül.[2]

[1] Megjegyezzük, hogy ez az Egyesült Államokban lehetséges, ugyanakkor Magyarországon természetesen nem.

[2] A pénz és a hitel alapvető szerepe, hogy feloldja a „természet irtózik a negatív számoktól” törvényét. Nincs negatív vagy tört ház. Ugyanakkor nem véletlen, hogy az általános iskolában éppen a tartozással magyarázzuk a

A befektetők természetesen szeretnék a meglévő pénzüket tovább gyarapítani, normál esetben biztos befektetés gyanánt államkötvényt vesznek, azonban a Fed alapkamatát a dotcombuborék és a 9/11 terrorista támadások hatásainak enyhítésére 2001–2003-ig 6 százalékról egészen 1 százalékig csökkentik, így az államkötvény kedvezőtlen, alacsony hozamú befektetéssé válik. Másrészt az alapkamat csökkenése a bankok számára olcsó hitelfelvételi lehetőséget jelent. A bankok elkezdik növelni tőkeáttételüket, hiszen így jóval nagyobb profitot tudnak elérni. Ez egyben beindítja a hitelderivatívák piacának gyors fejlődését is. Ugyanis a befektetők kereslete, látva a nagyobb profitlehetőségeket, megnő a hiteltermékek iránt, amit a bankok igyekeznek kielégíteni. Ennek módja, hogy a befektetőket közvetve összekötik a jelzálogokon keresztül az ingatlantulajdonosokkal. Gyakorlatilag ez úgy működik, hogy a befektetési bankok megvásárolják a jelzálogbankok által kibocsátott jelzáloghiteleket, majd új, komplex pénzügyi termékeket létrehozva, ezeket a befektetőknek eladják. Az ilyen komplex pénzügyi termékek közül talán a legismertebbek a fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k). Ezek a termékek sok jelzáloghitelt tartalmaznak, ezeket úgy csomagolják újra, hogy létrehoznak a biztonságostól a kockázatosig különböző szeleteket *(tranch)*[3] a befektetők számára. Az egyes szeletekre jutó prémiumokat komplex matematikai modellek segítségével határozzák meg. A jelzálogokból befolyó pénzekből fizetik ki a befektetőket, akik cserébe vállalják az előbb említett kockázatot, így végső soron átveszik a mögöttes jelzálogok hitelkockázatát. A biztonságos befektetést keresők számára egy CDO „biztonságos" szelete tökéletes megoldásnak tűnik,[4] és ezek a szeletek a hitelminősítőktől ugyanazt az *AAA* minősítést megkapják, mint ami az államkötvényeknek jár, ugyanakkor általában 2-3 százalékkal magasabb hozamlehetőséget nyújtanak.

Ezt egyre több befektető veszi észre, nő a befektetői kockázatéhség, ami tovább növeli a keresletet a CDO-k iránt. A jelzálogpiacon azonban már nincs lehetőség új jelzálogok kibocsátására, ugyanis az ingatlantulajdonosok részéről nincs kereslet (a hitelfeltételeknek megfelelő háztartásoknak már van jelzáloga). Ennek megoldása a feltételek könnyítésével (például nem szükséges önerő, jövedelemigazolás) lehetséges, ez egyben teljesen elfogadhatónak számít (legalábbis akkor így gondolták), ugyanis ha esetleg nem fizetnének az új hitelesek, a bank akkor is behajthatja az ingatlant, és az ingatlanárak folyamatos növekedése miatt ez fedezi a bank veszteségét. Hozzátéve, hogy az Egyesült Államok kormányzatának politikája az otthonnal rendelkezők arányának növekedését tűzte ki célul, ez az új, könnyített feltételű, már említett másodrendű jelzáloghitelek növekedéséhez vezet. A CDO-k árazásához használt matematikai modellek, éppen az említett gyakorlatias megközelítés miatt, azonban nem képesek ezeknek a hiteleknek a valós kockázatát modellezni, a meghatározott prémiumok nem reprezentálják a mögöttes hitelek valódi kockázatát, így a befektetők, akik alapvetően a modellek alapján ítélik meg a befektetéseik értékét, továbbra is azt hiszik, hogy biztos befektetésbe teszik a pénzüket. Miként jeleztük, a kockázatkezelési modellek legfőbb sajátja, hogy az alapvető szerepet játszó makrotényezőket csak jó esetben is leegyszerűsítve (stilizálva) tartalmazzák. A makrotényezők formális beépítése a kockázatkezelési és árazómodellekbe azonban nem egyszerű dolog. Ezek helyettesítésére szolgálnak a különböző stressztesztek, amelyek keretében szélsőséges paraméterállások esetén is meg kell vizsgálni a modell viselkedését. Érdemes

negatív számokat. A hitel lehetővé teszi a negatív ház fogalmát: Ez egy olyan ház, amely egyúttal tartozás. Ez a látszólag nevetséges észrevétel azonban alapvető szerepet játszik a pénzügyi elméletben, ugyanis ennek következtében a különböző szereplők stratégiai halmazai lineáris terek, és nem, mondjuk, csak konvex halmazok, amely a matematikai modelleket jelentősen leegyszerűsíti.

[3] Az irodalomban és a gyakorlatban egyaránt a *tranch* elnevezést szokás használni. Lehetséges fordítása az itt is használt *szelet* kifejezés, bár nincs kizárva, hogy egy ennél jóval elegánsabb elnevezés is található. (*Király és szerzőtársai* [2008] az *ügyletrész* kifejezést használta.)

[4] Hogy miért csak tűnik, az éppen az elmondandó történet lényege.

hangsúlyozni, hogy a stressztesztek jelezték a pozíciók kockázatos jellegét. Ugyanakkor sajnos éppen a feltételezett szélsőséges elmozdulások extremitása miatt ezeket az eredményeket nem vették figyelembe.

A Fed 2004 közepétől kezdte emelni az alapkamatot, valamint 2006 közepétől az Egyesült Államokban a lakásárak sok helyen esni kezdtek. A várt ingatlanár-növekedés elmaradása, a könnyű kezdeti feltételek elmúlása következtében egyre gyakoribbá vált a rossz minőségű hitelek bedőlése. Itt el is érkeztünk az előzőkben bemutatottakhoz.

Látható tehát a fedezett adósságkötelezettségek (CDO-k) központi szerepe a válság során. A következőkben ezek egy speciális változatával, a szintetikus CDO-kkal ismerkedünk meg közelebbről.

Az elmélet válsága – a CDO-król

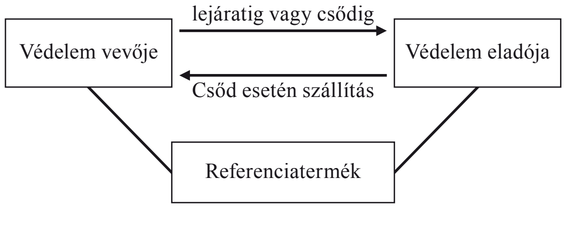
A következőkben bemutatjuk, mi egy szintetikus CDO, és hogy a válság előtt miért szerepeltek a legkedveltebb termékek között. A leírásban csak a hitelderivatívák alapfogalmának megértéshez szükséges fogalmakat használjuk. Ugyanezek a fogalmak lesznek segítségünkre a matematikai modellezés tárgyalásában.

A CDS (mulasztási csereügylet)

Bár a célunk a szintetikus CDO-kal való megismerkedés, szükséges érintenünk olyan alapvető hitelderivatív termékek működését, mint a CDS-ek (*Credit Default Swap* – mulasztási csereügylet). Továbbá, ahogy látni fogjuk, ezek azok a termékek, amelyekből a szintetikus CDO-k felépülnek, és amiért a „szintetikus" jelzőt kapták. Csak a CDS-ek definícióját adjuk meg, további részletekkel és árazással nem foglalkozunk.

Egy CDS *(Credit Default Swap)* olyan hitelderivatív termék, amelyben két személy, a védelem vevője és a védelem eladója, elcserélik egy harmadik – referenciaterméknek nevezett – termék vagy személy hitel- (csőd-) kockázatát. A megegyezésben rögzítik, hogy csőd esetén a védelem eladója kártérítést fizet a védelem vevőjének, cserébe a védelem vevője rendszeres időközönként prémiumot fizet a védelem eladójának lejáratig vagy a csődesemény bekövetkeztéig. Lehetséges, hogy a referenciaterméken van úgynevezett megtérülés, vagy a felek megegyeznek egy bizonyos mértékű megtérülésben. Ebben az esetben, csőd esetén a védelem eladója csak a megtérüléssel csökkentett összeget köteles kifizetni. Az elmondottakat szemlélteti a *1. ábra.* A CDS-ek esetében, szemben egy biztosítással, a védelem vevőjének nem kell rendelkeznie a védelem tárgyával, ez nagyban hozzájárult e termékek elterjedéséhez, illetve a hitelderivatív piac jelentős növekedéséhez.

1. ábra
A CDS-ek alapvető struktúrája



Mi egy szintetikus CDO?

A CDO a fedezett adósságkötelezettség angol rövidítése *(Collateralized Debt Obligation).* Ez a pénzügyi termék egy úgynevezett *hitelderivatíva-kosár,* azaz a pénzáramlása egy olyan *referenciaportfólióból* származik, amelyben hitelkockázatot futó termékek vannak.

A *szintetikus* jelző abból a tényből ered, hogy esetünkben a referenciaportfólió CDS-eket tartalmaz, amelyek maguk is hitelderivatív termékek, így a hitelkockázat szintetikusan, ezeken a CDS-eken keresztül jelenik meg. A később bemutatott modellben feltesszük, hogy a CDS aktív piaccal rendelkezik. Vagyis nem eseményekből – a közvetlen csődökből – származik a CDO értéke, pénzáramlata, hanem azokra kötött és kereskedett „fogadások" piaci értékéből vezethető le a CDO által megtestesített pénzáram. Ilyen értelemben tehát az általunk vizsgált szintetikus CDO – első ránézésre – egy klasszikus származtatott termék, vagyis piaccal rendelkező alaptermékek értékéből matematikai úton származtatott, levezetett értékpapír. Ugyanakkor az alaptermék CDS-értékét meghatározó csőd, következésképpen a CDO értékváltozása egy olyan véletlen esemény, amely nem kiküszöbölhető a kereskedett alaptermékekből álló portfólióval. Ugyanis azt, hogy a meghatározott csődesemény mögött éppen melyik alaptermék áll, előre nem tudjuk, pontosabban a CDO szempontjából érdektelen. Hiába tartunk bármelyik alaptermékből valamennyit, ha nem éppen az a termék mögötti csőd következik be, a „fedező" CDS-portfólió haszontalan volt.

Miként azt később látni fogjuk, a CDO feltételezett kockázatcsökkentő jellege intuitíve a diverzifikációra, és nem a matematikai pénzügyekben megszokott fedezésre épül: A CDO kockázatcsökkentő hatása mögötti intuíció az, hogy nem valószínű, hogy sok alaptermék egyszerre kerül csődbe, és ezért a magasabb emeletek biztonságosabbak. A gondolatmenet nem a klasszikus matematikai pénzügyek gondolatmenete, hanem a valószínűségszámítás, illetve a biztosításmatematika gondolatmenete. A klasszikus pénzügyi matematika fogalomrendszere szerint a CDO-piac nem teljes, ugyanis a származtatott termék kockázata nem fedezhető le az alaptermékekkel. Ilyenkor a klasszikus elmélet lényegében használhatatlan. Óriási a csábítás, hogy akkor használjuk a biztosítási matematikában használt ekvivalenciaelvet és tekintsünk a CDO-kra mint biztosítási termékre. De ez sem jó. Minden, ami kereskedés tárgya, a piaci szereplők várakozásainak függvénye. Miként láttuk, a csődesemények végül is racionális döntések eredője. Nem földrengések tüntették el a házakat, hanem a piaci szereplők igencsak racionális gazdasági döntései okozták a jelzálogok értékvesztését.

Ha a csődesemények függetlenek, vagy jól körülírható sztochasztikus kapcsolat jellemzi őket, akkor elvileg a nagy számok törvénye által a kockázat diverzifikálható, de az említett kaszkádhatások miatt éppen a kritikus helyzetben nem működik a feltételezett diverzifikációs hatás. Ugyanis közgazdasági és nem természeti törvények mozgatják az eseményeket. További probléma, hogy mivel alapvetően kereskedett termékekről van szó, a CDS ármozgását megadó önerősítő folyamatok akkor is beindulhatnak, ha a várakozások változnak, például a likviditás megváltozik, vagy bármi módon a piac „értékítélete" módosul. Némiképpen technikai nyelvezeten nem a csődvalószínűségek határozzák meg a CDS-ek árát, hanem a kockázatmentes mérték alatti csődvalószínűségek. És ez utóbbi igen könnyen és öngerjesztő módon változhat, még akkor is, ha az első esetleg stabil, vagy alig-alig változik.

Egy szintetikus CDO egyben *korrelációs* termék is, ugyanis általában véve a CDS-ek csődjei éppen a már említett makrohatások miatt nem függetlenek, figyelembe kell venni a közöttük lévő korrelációt.[5] Már most látni lehet, hogy egy szintetikus CDO a referenciaportfólió hitelkockázatát továbbítja (amely már maga is továbbított volt a CDS-ek által). A következőkben azt mutatjuk be, hogyan történik ez pontosan.

Egy szintetikus CDO egy úgynevezett strukturált hitelderivatíva, a következőkben a strukturálás alapelvét részletezzük:

– a referenciaportfóliót úgynevezett *tranchokra* (szeletekre) szeletelik fel, amelyek a CDS-eken bekövetkező veszteségeket egy előre meghatározott tartományban fogják fel. Például – miként említettük – az *equity* szelet 0–3 százalék, ami azt jelenti, hogy ez a rész a referenciaportfólióban bekövetkező veszteségek első 3 százalékát fogja fel;

– ezekre a szeletekre meghatározott időközönként (általában negyedévente, a futamidő végéig) prémiumot/felárat *(spread)* fizetnek a CDS-ekből befolyó pénzáramlásból;

– a szeletekre fizetett prémium a kockázattól függ, és mindig csak a fennálló tőkére vonatkozik. Például az első 3 százalék nyilvánvalóan kockázatosabb, mint a 12–22 százalékos szelet, így az előbbire magasabb prémium jár. Ugyanakkor tekintsük például az első 3 százalékos szeletet. Ha 1 százaléknyi veszteség bekövetkezik, akkor a prémium már csak a fennmaradó 2 százalékra fog járni;

– egy szintetikus CDO-ban ezek a szeletek a termékek, amelyekbe be lehet fektetni, és a prémiumot tekintjük a szeletek árának.

Az elmondottakat szemléltetésére nézzünk egy fiktív számpéldát! Tekintsük az *1. táblázatbeli* struktúrát!

1. táblázat

Példa indexekkel való kereskedésre

Referenciaportfólió	A szelet neve	A szelet határai
	Super senior	22–100 százalék
	Super senior (junior)	12–22 százalék
125 vállalat likvid CDS-eit tartalmazó portfólió	*Senior*	9–12 százalék
	Mezzanine (senior)	6–9 százalék
	Mezzanine (junior)	3–6 százalék
	Equity	0–3 százalék

Ez az *1. táblázatbeli* struktúra a *DJ iTraxx Europe* index szintetikus CDO-struktúrája. Itt a referenciaportfólió CDS-ei egyenlő súlyozásúak és a prémiumokat negyedévente fizetik. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk el csőd esetén a megtérüléstől!

Tegyük fel, hogy 1 millió eurót fektetünk a *mezzanine (junior)* szeletbe, amellyel jelenleg 300 bázisponton kereskednek. Ebben az esetben a védelem eladói vagyunk. Ismét az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez most egyben a negyedéves prémium (a prémiumot éves szinten szokás megadni). Ekkor, ha nincs csődesemény, negyedévente 1 millió × 300 bázispont = 30 000 eurót kapunk.

Most tegyük fel, hogy 6 CDS csődbe ment. Ez a teljes portfólió 6/125 = 4,8 százaléka, így a veszteségek elérték a mi szeletünket is. A kifizetés mértéke: (4,8 – 3)/(6 – 3) = 60 százaléka a teljes befektetésünknek, azaz 600 ezer eurót veszítünk ekkor (a teljes befektetésünket elvesztenénk, ha több mint 6 százalék veszteség keletkezik a referenciaportfólión).

Innentől, ha nincs több csőd, a 300 bázispontnyi prémiumot csak a megmaradó 400 ezer euróra kapjuk, azaz negyedévente 12 ezer eurót.

[5] Vagyis a korrelációs paraméter helyettesíti a makrokörnyezetet.

A szintetikus CDO-k jelentősége

A CDO-k globális kibocsátása a válságot megelőző években ugrásszerűen nőtt. A motiváció ezen termékek kibocsátása mögött mind a kibocsátók, mind a befektetők részéről megtalálhatók.[6]

A kibocsátókat tekintve két fő ok található:

– *a tőketartalék felszabadítása (regulatory capital relief)*: ez volt a CDO-k kibocsátásának eredeti indoka. A kibocsátó a referenciaportfólió értékpapírosítása után csökkentheti a szabályozói tőkéjét, mivel védelmet vett, tehát a hitelkockázatot a befektetőknek adja át, így a fenntartott részekre kell csak tőkét tartalékolnia;

– *kamatarbitrázs (spread arbitrage)*: a válság előtt ez volt a CDO-k kibocsátásának fő oka. A gyakorlatban a referenciaportfólió CDS-eiből összegyűjtött felárak általában meghaladják a CDO-szeletek befektetőinek kifizetendő prémiumokat. A kibocsátó ezt kihasználhatja és begyűjtheti a különbözetet.

Természetesen egy sikeres piachoz elengedhetetlen, hogy a befektetők is vonzónak találják ezt a lehetőséget. A befektetők szemszögéből a CDO-k előnyei a következők:

– *széles kockázat–hozam spektrum:* a referenciaportfólió feldarabolásával egyszerre hozunk létre az igazán kockázatostól a nagyon biztonságosig befektetési lehetőségeket, még akkor is, ha eredetileg a referenciaportfólióban csak közepes kockázatú termékek voltak;

– *magas tőkeáttétel*: ahogy az az *1. táblázatbeli* példából is látható, a CDO-k nagyon nagy tőkeáttételű befektetési lehetőségeket kínálnak, ami kifejezetten vonzó virágzó piacon – mint amilyen például a válság előtt.

Az árazás kérdése

AZ ÁLTALÁNOS MEGKÖZELÍTÉS. Ebben a részben a fent bemutatott szintetikus CDO-k matematikai leírását adjuk meg, és elemezzük az árazásukat. Emlékeztetőül: egy CDO-szelet árán az arra fizetett prémiumot, „védelmi díjat” értjük. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy fő célunk az árazási modell bemutatásával az elméleti, fogalmi kérdések hangsúlyozása. Ezért a modellezés során a gyakorlati kérdéseket, mint például a kamatarbitrázs-lehetőségeket, figyelmen kívül hagyjuk, ezek beépítése a lényeget nem érinti, ugyanakkor nehézzé és szükségtelenül bonyolultabbá tenné a modelleket.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

n: a referenciaportfólióban lévő CDS-ek száma.

V_i: az i-edik CDS névértéke.

R_i: az i-edik CDS megtérülése.

τ_i: az i-edik CDS csődjének ideje.

$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ az időpontok, amikor a prémiumokat fizetik.

$0 = K_0 < K_1 < ... < K_m = 1$ az egyes szeletek úgynevezett csatlakozási és leválási *(attachment and detachment)* pontjai, azaz a kezdő és végpontja annak a tartománynak, amelyben védelmet nyújtanak. Például az i-edik szelet K_{i-1} és K_i között véd. Ezeket a pontokat a referenciaportfólió százalékában adjuk meg.

– $B(0, t)$ a diszkontfaktor 0 és t között.

– r_i az i-edik szeletnek fizetett fix prémium, ezt szeretnénk a számítások során meghatározni.

[6] Általánosabban egy szelet *(tranch)* vásárlóját *védelemeladónak*, az eladóját *védelemvevőnek* nevezzük.

Ezekkel a jelölésekkel definiálhatjuk a referenciaportfóliót t-ig érő százalékos veszteséget,[7] amit $L(t)$-vel fogunk jelölni:

$$L(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-R_i)V_i \cdot \chi_{(\tau_i<t)}}{\sum_{i=1}^{n}V_i},$$

ahol χ_A az A halmaz indikátorfüggvénye (az adott halmazon 1, különben 0). Ezt felhasználva meghatározható az i-edik szeletet t-ig érő veszteség:

$$L_i(t) = \max(\min[L(t); K_i] - K_{i-1}; 0).$$

A továbbiakban két feltevéssel élünk:

– a CDS-ek névértéke megegyezik,

– a megtérülési ráta is azonos minden CDS-re.

Ezért a CDS-ek i indexeit elhagyjuk. Ezek megkérdőjelezhető feltevések, elsőre igen irreálisnak tűnnek, de például a névértékek azonossága teljesül a már említett standardizált indexekből képzett CDO-k esetén, a megtérülési rátára vonatkozó feltétel pedig szintén szokásos (általában 40 százalék). Ugyanakkor a matematikai levezetéseket ezek a feltevések nagyban megkönnyítik és jobban követhetővé teszik. Mindazonáltal ezek nem feltétlenül szükségesek a folytatáshoz, sok a gyakorlatban is használt modell nem használja ezeket a feltevéseket.

Az árazás pénzügyekben használt szokásos elve a következő. A prémiumot úgy kell meghatározni, hogy mindkét fél esetében a mára diszkontált *várható pénzáramlások* megegyezzenek, vagyis az üzlet nettó jelenértéke nulla legyen. Mint általában a vállalati pénzügyekben, az már egy külön kérdés, hogy mi legyen a diszkontfaktor, és miként számoljuk a várható értéket. Természetesen bizonytalan kifizetés esetén a diszkontfaktor, illetve a várható érték számos más tényező mellett a jövőbeli kifizetés kockázatosságát tükrözi. Mivel a CDO-k kifizetése értelemszerűen egy ismeretlen jellegű és lefolyású folyamat eredménye, ezért az árazás központi kérdése az, hogy ebből az ismeretlenségből eredő bizonytalanság hogyan tükröződik a diszkontfaktorban, illetve a jövőben esedékes kifizetés várható értékében. Az irodalomban szokásos módon diszkontfaktorként a kockázatsemleges kamatlábat használjuk. Ennek következtében a kifizetés bizonytalanságának modellezése áttolódik a várható érték modellezésére. Ha ugyanis a különböző kifizetéseket, modelltől és konkrét pénzügyi tartalomtól függetlenül ugyanazzal a diszkontfaktorral hozzuk jelenértékre, akkor csak a várható érték számolásának módjával tudjuk figyelembe venni az eltérő kockázatokat, illetve általában az eltérő pénzügyi szituációkat. Ennek pontos megvalósítását és időnként némiképpen misztikus módját szokás *a kockázatsemleges mérték* elnevezés mögé rejteni. Erre később visszatérünk.

A fent meghatározott veszteségek segítségével meghatározatjuk mindkét pénzáramlást. A befektetőnek fizetett pénzáramlást *prémiumágnak* nevezzük *(Premium Leg, PL),* a befektető által fizetettet pedig *csődágnak (Default Leg, DL).* Emlékeztetőül mind a *prémiumág,* mind a *csődág* diszkontált várható pénzáramlás.

Az i-edik szelet befektetőjének *prémiumága* a következőképpen fejezhető ki:

$$PL_i(r_i) = \sum_{k=1}^{N} B(0,t_k)\cdot(t_k - t_{k-1})\cdot r_i \cdot \mathrm{E_Q}\left[(K_i - K_{i-1}) - L_i(t_k)\right]\cdot nV, \tag{1}$$

ahol $(K_i - K_{i-1}) - L_i(t_k)$ az i-edik szelet egyenlege t_k-ban, $\mathrm{E_Q}$ jelöli a kockázatsemleges mérték alatt vett várható értéket, az nV szorzó a százalékos forma miatt szerepel. Az

[7] A továbbiakban végig százalékos veszteségekkel dolgozunk.

i-edik szeletre fizetett r_i prémiumot évesítve szokás jegyezni, így arányosítani kell a ténylegesen eltelt időszak hosszával. Az általánosság kedvéért $(t_k - t_{k-1})$-gyel jelöltük a k-adik időszak hosszát, a gyakorlatban a prémiumfizetések általában negyedévente történnek. A formula szerint tehát össze kell adni a jövőben esedékes bizonytalan nagyságú veszteségekből származó kifizetések jelenre diszkontált értékét, ahol az egyedüli probléma az, hogy nem tudjuk, mennyit kell majd a jövőben fizetni. Így ezek jelenértéke bizonytalan, és a bizonytalanságból származó „várható érték" kiszámításának módját a misztikus **Q** szimbólum mögé rejtettük. Nyilvánvalóan minden azon múlik, hogy hogyan modellezzük a **Q** mértéket.

Rátérve a *csődágra*, feltesszük, hogy a kötelezettségeket csak az előre megadott diszkrét $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ időpontokban kell teljesíteni, nem pedig közvetlenül a csőd bekövetkezése után. Ezt felhasználva, az i-edik szelet befektetőjének *csődága* a következőképpen írható fel:

$$DL_i = \sum_{k=1}^{N} B(0,t_k) \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left(L_i(t_k) - L_i(t_{k-1})\right) \cdot nV. \tag{2}$$

Világos, hogy $L_i(t_k) - L_i(t_{k-1})$ az a mennyiség, amit az i-edik szelet befektetőjének fizetnie kell a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumban. Itt is a **Q** mértéké a főszerep. Talán érdemes arra is felhívni a figyelmet, hogy az (1) és a (2) egyenletekben szereplő két **Q** azonos. Mivel a **Q** eredendően a piaci szereplők kockázati preferenciáit tükrözi, a modell hallgatólagosan feltételezi, hogy a vételi és eladási oldalon azonos kockázati preferenciák vannak, vagy legalábbis a vételi és eladási oldalon a preferenciák valamilyen egyensúlyi mechanizmus által kiegyenlítődtek, vagyis a piaci szereplő képesek voltak egyfajta egyensúlyi **Q** mértékben megegyezni. Mivel a **Q** mérték valamiképpen éppen a véletlen kimenetelek bizonytalanságát árazza be, ezért az alábbi egyenlőség mögött a közgazdaságtan szokásos elképzelése van elrejtve, miszerint a kereslet és a kínálat képes egy egyensúlyi árban megegyezni. Ezt az egyensúlyi árat helyettesíti most implicite a **Q** kockázatsemleges mérték.

A már említett egyensúlyi feltétel miatt, vagy ami ugyanaz, a diszkontált jelenértékek azonosságát axiomatikusan kimondó feltétel alapján a kockázatsemleges mérték alatt r_i-nek ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$PL_i(r_i) = DL_i.$$

Az (1)-ből és a (2)-ből az i-edik szelet méltányos prémiuma már könnyen kifejezhető:

$$r_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} B(0,t_k) \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left(L_i(t_k) - L_i(t_{k-1})\right)}{\sum_{k=1}^{N} B(0,t_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) \cdot r_i \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left((K_i - K_{i-1}) - L_i(t_k)\right)}. \tag{3}$$

Természetesen ezzel nem oldottuk meg a problémát, ugyanis pont a lényeget – az $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[L_i(t_k)]$ kockázatsemleges várható értékeket – nem ismerjük. Világos, hogy ezek meghatározásához az $L(t)$ veszteségeloszlást, és így a mögöttes CDS-ek együttes eloszlását kell modellezni – természetesen a kockázatsemleges mérték alatt! És ezen a ponton nagyon egyértelműen kell fogalmazni. Az árak a piaci szereplők preferenciáitól függnek. Például ugyanaz a sztochasztikus folyamat különböző likviditási helyzetben más és más kockázati preferenciákat eredményez – következésképpen más és más **Q** mértéket. Miként nincsen semmilyen garancia arra, hogy például a likviditás nem változik, és arra sem, hogy a **Q** nem változik. Az irodalomban található legtöbb, a CDO-árazással foglalkozó modell kézenfekvő módon a **Q** alatti együttes eloszlás meghatározásának problémájára koncentrál. Általában valamilyen matematikailag kellemesen kezelhető modellfeltétellel él, például az általunk bemutatott alábbi Li-féle kopulamodellben a normalitás, feltételes függetlenség feltételei pont ilyen kellemes feltételek. Ezt követően a modell paramétereit megpróbálják a piaci adatok alapján statisztikai módszerekkel kalibrálni. Azt választják ki az elvileg lehetséges kockázatsemleges mértékek közül, amelyik eredményeképpen a tényleges piaci adatok „legjobban" illeszkednek a modell által rögzített körülményekhez. A „legjobban" érték kiválasztása azonban valamilyen további mesterséges külső kritérium szerint történik, ami nagyrészt szintén kényelmi szempontok által determinált. Ezzel indirekt módon megkapjuk a misztikus **Q** mértéket.

Problémák az árazás elvével. Mielőtt a Li-féle kopulamodell ismertetésére rátérnénk, néhány elvi megjegyzést teszünk, ugyanis ahogy említettük, a modellek nem veszik figyelembe, hogy az árazás elvével is vannak problémák. Ezeket vizsgáljuk meg ebben az alpontban.

Ahogy az előző pontban is említettük, az árazás elve az összes ismert CDO-árazási modellben ugyanaz. Ugyanakkor ez nem teljesen illik bele a szokásos matematikai pénzügyekben a derivatív termékek árazására alkalmazott keretbe, a felhasznált eszközök keverednek az aktuáriusi irodalomban alkalmazottakkal.

Tekintsük át először, hogyan árazunk a szokásos matematikai pénzügyi és aktuáriusi keretben a bizonytalan vagy kockázatos kifizetéssel rendelkező termékeket!

Matematikai pénzügyi keret, derivatív árazás:

– a derivatív termék pénzáramlását *szintetikusan* előállítjuk az ismert árral rendelkező alaptermékekkel, vagyis a derivatív termék kifizetésére egy *önfinanszírozó*, *replikáló* portfóliót hozunk létre. Az ármeghatározásnál követett egyedüli elv az, hogy a derivatív termék árával ne vezessünk be arbitrázslehetőséget. Következésképpen az önfinanszírozó, replikáló portfólió jelenbeli létrehozási költsége nyilván a derivatív termék ára is lesz egyben, különben szándékunk ellenére arbitrázslehetőség nyílna.

Aktuáriusi irodalom, biztosítás:

– valós világban, ekvivalenciaelv alapján árazunk, azaz a prémiumot úgy határozzuk meg, hogy a valós valószínűségek szerint számolt várható pénzáramlások jelenértéke megegyezzen (a nettó jelenérték nulla legyen), nem zárjuk ki az arbitrázst, csak méltányos árat határozunk meg.

Mielőtt továbbmennénk, érdemes még egy megjegyzést tenni. Természetesen az ár mindig annyi, amennyit a piac ad érte. Mind a két árazási elv csak akkor érvényes, ha a termék nem rendelkezik aktuális piaci árral. Ha piaci ár már ismert, akkor a két elv legfeljebb tudományos célra használható, és arra, hogy tudományos érdeklődésből utólag ellenőrizzük az árazáskor használt modellünk relevanciáját. A különböző árazási modelleknek csak egy termék piaci bevezetése előtt van jelentőségük, vagy csak akkor, ha a termékre nincs aktív szabványosított piac, következésképpen nem ismert a kereslet-kínálat által megadott ár.[8] A válság előtt a különböző árazómodellek azért voltak igen fontosak, mert a CDO-kkal, szemben a korábban említett CDO-indexekkel, legtöbbször nem kereskedtek szabványos piacon, általában a piaci szereplők közötti egyedi, közvetlen megállapodások születtek, így a szerződő felek a termékek árát egyedül a modellekből tudták valamiképpen kiolvasni. Vagyis bármilyen meglepő is, a piaci szereplők a pénzüket olyan matematikai képletekbe fektették, amelyek által meghatározott

[8] Ez a kijelentés némiképpen szándékosan sarkított. Egy modellt lehet előrejelzésre, stressztesztelésre is használni. Ennek a kockázatkezelésben van alapvető szerepe. A Li-modell kockázatkezelési felhasználása, amennyiben a kalibrálás valóban piaci adat alapján történik, ha nem is tökéletesnek, de mivel jól használható, célszerűnek és ezért korrektnek tekinthető.

árak nem álltak valódi pénzügyi, piaci kontroll alatt. Amikor a termékektől meg akartak szabadulni, nem lévén az árak mögött valódi kereslet és kínálat, nem túl meglepő módon meglepődtek. Őszintén ki kell mondani, erre az ostobaságon kívül más érdemi magyarázat nincs. És tegyük hozzá, ez a magyarázat alapvetően a szerzők jóindulatára és esetleges naivitására épül.

De térjünk vissza a fenti modellre! Az előbbiekben kockázatsemleges árazást alkalmaztunk. Ezzel hallgatólagosan feltettük, hogy a piac valamiképpen arbitrázsmentes, nagyrészt abban az értelemben, hogy az árazófüggvény alapvetően lineáris, következésképpen a véletlen kifizetések ára – egy alkalmas mérték szerint – várható értékkel számolható.[9] Ugyanakkor ennek az elvnek a CDO-kra vonatkozó[10] használhatósága megbízhatóan nem tisztázott. Még ha fel is tesszük, hogy a piac arbitrázsmentes, akkor sem világos, hogy milyen piaci termékek árából olvashatjuk ki a kockázatsemleges árakat. Vajon a CDO-k alaptermékek vagy származtatott termékek? Ha alaptermékek, akkor a piacon megfigyelt adatokon kívül miből olvashatjuk ki az áraikat? Ha meg az árakat a piacról ismerjük, akkor a már említett kockázatkezelésen kívül miért akarjuk az árakat modellezni? Ha származtatott termékek, akkor milyen termékekkel replikálhatók, és miként? A fenti modellkeretben nincs dinamika, mindig csak egy adott napra érvényes, így a szokásos dinamikus fedezés az önfinanszírozó replikáló portfólióval nem értelmezhető. Egy CDO-ba nyilván bármi becsomagolható. Ha a piacon nem kereskedett jelzálogok veszteségeit csomagoljuk be, akkor olyan alapterméket kapunk, amivel esetleg majd nem kereskedünk. Ha kereskedett termékeket, például kereskedett CDS-eket csomagolunk be, akkor a származtatott termékek irodalma alapján illene megadni, hogy miként lehet a fedező – vagy legalább a kockázatcsökkentő – portfóliót megadni. Ez azonban nemigen lehetséges, mert ahogy már említettük, nem tudjuk, hogy konkrétan melyik elem fog csődbe menni, így az egyedi CDS-ek vásárlásával nem lehet a CDO kockázatát csökkenteni.[11] Nem véletlen tehát, hogy nem találkoztunk a szokásos matematikai pénzügyi irodalomban használatos fedezésről szóló irodalommal. Vagyis úgy tűnik, hogy a CDO-kat, a fedezés lehetetlensége miatt, olyan származtatott terméknek kell tekinteni, amely az értékét meghatározó termékektől tisztázhatatlan módon függ, és amely jószerével önálló életet él, önálló kockázati forrás, amelyet következésképpen alapterméknek is lehet tekinteni.

De akkor mi az árazómérték? Ennek meghatározása általában tisztán gyakorlati alapú kalibrációval történik, és a mértéket az esetlegesen ismert piaci adatokból szokás visszaszámolni. Vagyis ha vannak piaci adatok, akkor az árat mindenfajta elméleti megfontolás nélkül a modell piaci adatokhoz való illesztésével adjuk meg. Ennek fő hátránya, *hogy elveszítjük azt a nagyon erős közgazdasági érvet,* hogy miért kellene annak lennie az árnak, amit a modell mond. Enélkül a modellezés *ad hoc* jelleget ölt, és a mélyebb elméleti megfontolások hiánya miatt könnyen összekeverhető a biztosításban használt ekvivalen-

[9] Az arbitrázsmentesség némiképpen elnagyolva azt jelenti, hogy portfólióképzéssel nem lehet tartósan és biztosan pozitív profitot generálni. Ennek a feltételnek triviális következménye, hogy az árazófunkcionál, amely megmondja az egyes portfóliók értékét, lineáris. A linearitáshoz természetesen alapvető, hogy a lehetséges döntések halmaza is lineáris legyen. Ehhez persze szükséges a negatív súlyok megengedése is. Az pedig már tiszta matematika, hogy egy lineáris függvény mikor írható fel alkalmas valószínűségi mérték szerinti integrálként. Általában ezek a szabályok nem teljesülnek. Nagy tételben való vásárlás esetén az összár általában nem lineáris függvénye a mennyiségnek, és van tartós haszon is, a negatív értékű portfóliók nagysága korlátozott stb.

[10] Az általános képlet nem más, mint a kockázatmentes hozammal diszkontált kifizetésnek a kockázatsemleges várható értéke.

[11] Természetesen egy teljes szeletre lehet CDS-t kötni, és ténylegesen kötöttek is. Ez nyilván fedezi a szeletet, de ez csak a már említett a „természet irtózik a negatív számtól” elve egy újabb megjelenése. Nincs negatív CDO. Rajta csináljunk egyet! De ez egy újabb származtatott termék, amelyet nem szabad összekeverni a szelet értékét meghatározó CDS-ekkel.

ciaelvvel, és könnyen az a benyomás keletkezik, hogy nem a piaci szereplők preferenciáit modellezzük, hanem valamiféle véletlen folyamat statisztikai elemzését végezzük.[12]

Végül egy mélyebb jellegű problémára szeretnénk felhívni a figyelmet. Ez a közgazdasági elméletekből jól ismert *hatékony piacok problémája*. A piacon megfigyelt árakban, a hatékony piacok feltételezése szerint minden információ (múltbeli, jelenlegi nyitott és bennfentes) tükröződik, így azok nem tartalmaznak arbitrázst. Már említettük, hogy a gyakorlatban a piacon megfigyelt adatokból szokás kalibrálni a modelleket, így ezek a modellek nagyban építenek a hatékonyság teljesülésére. Ha ez egy adott időszakban, például egy válság során, akár hosszabb ideig sem áll fenn, akkor láthatóan aláássa az egész módszert.

Gyakorlati modellezés – együttes eloszlások. Ebben az alpontban röviden megvizsgáljuk a jól ismert egyfaktoros gaussi kopulát az együttes eloszlások modellezésére. Célunk a modellezés lényegének bemutatása, a matematikai levezetések néhány részét átugorjuk, ezek a függelékben megtalálhatók[13] (vagy lásd például *Eberlein és szerzőtársai* [2008]).

Megjegyezzük, hogy az előző alpont alapján nincs egyértelmű közgazdasági intuíció a modellezés mögött, így a felhasznált eszközök a modellező választásától, következésképpen kényelmétől függnek.

Ahogy azt korábban említettük, mivel a diszkontálás az ismertnek feltételezett kockázatmentes kamatlábbal történik, a (3)-ban az $\mathrm{E_Q}[L_i(t_k)]$ kockázatsemleges várható értékeket kell kiszámolnunk. A gyakorlatban az egyfaktoros gaussi kopula modell volt a legelterjedtebb a mögöttes CDS-ek együttes eloszlásának modellezésére.

Rendeljünk minden CDS-hez egy X_i valószínűségi változót a következőképp:

$$X_i = \sqrt{\rho} M + \sqrt{1-\rho} Z_i, \tag{4}$$

ahol $M, Z_1, \ldots, Z_n$ mind független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.[14]

Ezeket az X_i-ket állapotváltozóknak nevezzük. A konstrukció miatt nyilván X_i is standard normális eloszlású, valamint az X_i-k közötti korrelációra: $\mathrm{corr}(X_i, X_j) = \rho$. Itt rögtön meg kell jegyezni, hogy ez azt jelenti, hogy minden páronkénti korreláció ρ-val egyezik meg, így (4) alapján a mögöttes n számú CDS korrelációs mátrixát egyetlen számmal írjuk le.

Két faktor határozza meg az i-edik CDS állapotát: M reprezentálja a piacot, amely minden CDS-re hat (ez az egy közös faktor, innen az elnevezés), Z_i pedig az egyéni faktor, amely specifikusan az i-edik CDS-t írja le.

Azt mondjuk, hogy az i-edik CDS csődbe ment, ha a hozzá tartozó állapotváltozó, mint a Merton-modellben (*Merton* [1974]), egy adott szint alá csökken. Ezeket az

[12] Itt érdemes megjegyezni, hogy az általunk ismert irodalomban ezt a kérdést nem szokás tisztázni. Amikor a CDO-irodalommal a szerzők megismerkedtek, számukra a legnagyobb gondot annak tisztázása jelentette, hogy a várható érték milyen mérték alatt értendő. Ebben a kérdésben az irodalom, véleményünk szerint, homályos és nem egyértelmű. Ennek szándékolt vagy szándékolatlan oka, vélelmezhetően a nevezetes lóláb elrejtése, vagy fel nem ismerése. Ugyanakkor az volt a benyomásunk, hogy az árazómérték alatt inkább valós valószínűségre gondoltak a modell használói. Ez azonban olyan alapvető tévedés, amely ellentmond a pénzügyi tankönyvek első tíz oldalán leírtaknak. Ugyanakkor persze az is szerepel ezen az említett tíz oldalon, hogy az idegen devizában felvett hitel kockázatosabb, mint a hazai devizában felvett hitel, és egy termék értékét a hozama és a kockázata együtt határozza meg.

[13] A dolgozat alapvetően nem a matematikai részletkérdésekről szól, ezért az olvasó a *Függeléket* nyugodtan el is hagyhatja.

[14] Nyilván a kockázatsemleges mérték alatt. Hogy egy valószínűségi változó eloszlása miért normális egy tömegjelenség esetén, nyilván számtalan módon indokolható. De arra nincs semmilyen minimálisan értelmezhető gondolatmenet, hogy ennek miért kell teljesülnie a várakozások által generált valószínűségszerű matematikai konstrukciókra.

időtől függő szinteket [amelyeket $k(t)$-vel fogunk jelölni[15]] az egyes CDS-ek τ_i csődidejének marginális kockázatsemleges eloszlásából lehet meghatározni. *Li* [2000] nyomán a szokásos feltételezés, hogy τ_i-k a kockázatsemleges mérték alatt exponenciális eloszlásúak,[16] λ_i intenzitással, azaz: $Q(\tau_i < t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$. A λ_i kockázatmentes csődintenzitásokat piaci adatokból lehet visszaszámolni (lásd például *Embrechts és szerzőtársai* [2005] 9. fejezet).

A (4) szerinti felírás mögötti ötlet a következő: ha a piaci faktorra feltételesen vizsgálódunk, akkor a konstrukciónál fogva a csődök már függetlenek, így könnyen számolható a „feltételes" együttes eloszlás. Innen a „feltétel nélküli" együttes eloszlást, már egyszerűen M szerinti integrálással kaphatjuk.

Formálisan M-re feltételesen egy CDS-re a következőt írhatjuk:

$$Q(\tau_i < t \mid M) = Q(X_i < k(t) \mid M) = Q\left(Z_i < \frac{k(t) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}} \mid M\right) = \Phi\left(\frac{k(t) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}\right) \doteq p(t \mid M),$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Az együttes eloszlásokra pedig:

$$Q(\tau_1 < t_1, \ldots, \tau_n < t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} p(t_i \mid M = m)\, dF_M(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} p(t_i \mid M = m) f(m)\, dm, \quad (5)$$

ahol $f(\cdot)$ a standard normális sűrűségfüggvény. Ez utóbbi integrál reprezentálja az úgynevezett faktor gaussi kopulát.

Az (5) integrált numerikusan lehet közelíteni. Azonban (5)-ből zárt alakú kifejezést is lehet kapni a CDS-csődök relatív nagyságának eloszlására (tehát, hogy a teljes portfólió hány százaléka ment csődbe), ha felhasználjuk az úgynevezett *nagy homogén portfólió* közelítést *(Large Homogeneous Portfolio, LHP, approximation)* (*Vasicek* [1991]). Itt csak a végeredményt közöljük a matematikai levezetés megtalálható a *Függelékben*.

Jelölje D_t a t-ig csődbe ment CDS-ek relatív nagyságát, azaz a csődbe ment és összes CDS arányát! A kockázatsemleges eloszlásra a következőt lehet kapni:

$$F_{D_t}(h) = Q(D_t < h) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1} - k(t)}{\sqrt{\rho}}\right). \quad (6)$$

A (6) összefüggést felhasználva, már kiszámíthatók az i-edik szelet árazásához szükséges $E_Q[L_i(t_k)]$ kockázatsemleges várható értékek. Mivel feltettük, hogy van R nagyságú megtérülés, ezért a tényleges, t-ig bekövetkezett veszteség $(1 - R)L_i(t)$-ként számolható. Ezt figyelembe véve, a várható értékekre kapjuk:

$$E_Q(L_i(t_k)) = (1-R)\left(\int_{\frac{K_{i-1}}{1-R}}^{1} \left(h - \frac{K_{i-1}}{1-R}\right) dF_{D_{t_k}}(h) - \int_{\frac{K_i}{1-R}}^{1} \left(h - \frac{K_i}{1-R}\right) dF_{D_{t_k}}(h)\right), \quad (7)$$

mivel az i-edik szelet várható vesztesége két „*senior*"[17] szelet várható veszteségének különbségeként számolható $L_{[K_{i-1}, K_i]} = L_{[K_{i-1}, 1]} - L_{[K_i, 1]}$, ahol $L_{[K_{i-1}, K_i]}$ jelöli a K_{i-1} és K_i között védő szelet várható veszteségét.

[15] Formálisan $k(t)$ a következő egyenletet elégíti ki: $Q(\tau_i < t) = Q[X_i < k(t)]$.

[16] Hogy miért? Nincs rá válasz. Illetve van. Csak. Mert így kényelmes. Az exponenciális várakozási idők a csődök számában Poisson-folyamatot eredményeznek. Ugyanakkor a tapasztalat szerint a csődök száma az idő függvényében nem homogén módon jelentkezett. Ez azonban nem ellentmondás, ugyanis a Poisson-folyamat jellegnek a kockázatsemleges mérték mellett kell jelentkeznie. Ebből is látható, hogy mivel az összes összefüggés a kockázatsemleges mérték alatt értendő, ezért a modellt tapasztalati, statisztikai tény nem cáfolhatja. Az egyetlen konkrét tapasztalati tényekre támaszkodó ellentmondás a *korrelációs mosoly* (lásd később).

[17] *Senior* szeleten most azokat értjük, amelyek fölött már nincs további szelet.

A szintetikus CDO-k kockázata

EGY SZINTETIKUS CDO AKTUÁLIS PIACI (MARK-TO-MARKET) ÉRTÉKE. Az eddigi modellkeretben a következőképpen definiálhatjuk egy szintetikus CDO i-edik szeletének aktuális piaci (*MTM*) értékét:[18]

$$MTM_i(t) = PL_i\left(r_i, r^{CDS}(t), \rho(t)\right) - DL_i\left(r^{CDS}(t), \rho(t)\right), \tag{8}$$

ahol r_i az i-edik szelet prémiuma, $r^{CDS}(t)$ az (átlagos) CDS-felár, $\rho(t)$ pedig a korreláció. Gyakorlatilag a t-beli várható kifizetések különbségét vesszük. Emlékeztetőül az árazás elve szerint a prémiumot úgy határozzuk meg, hogy az i-edik szelet 0-adik időpontbeli (kibocsátáskori) *MTM* értéke éppen 0. Később azonban a várható kifizetések megváltozhatnak, következésképpen veszteségre vagy nyereségre tehetünk szert.

A (8)-ban kiemeltük a kockázat fő forrásait. Ezek a következők:

– a *CDS-felár megváltozása*: egy átlagos CDS-felár, abban az esetben, ha a CDS-ek nem lennének „egyformák", azaz ha névértékük és megtérülési rátájuk nem egyezne meg. Esetünkben ezt feltettük, így a CDS-ek felára is megegyezik;

– a *korreláció megváltozása*: az előző alfejezetben bemutatott modellben külön hangsúlyoztuk, hogy egyetlen korrelációs paraméter írja le a kapcsolatot a CDS-ek között;

– *hitelkockázat*: ezt a *Mi egy szintetikus CDO?* című alfejezetben tárgyaltuk, ahol bemutattuk a szintetikus CDO-k struktúráját és működését.

E tényezők hatása közgazdaságilag indokolható, a következőkben ezeket tekintjük át. A (8)-ban jeleztük, hogy a *PL* függ a prémiumtól is, azonban ezt kibocsátáskor rögzítik, és nem változik a futamidő alatt.

Ha emelkedik a CDS-felár, az gyakorlatilag azt jelenti, hogy *ceteris paribus* a CDS-ek kockázatosabbá váltak, ezért magasabb prémium lenne elvárható, de ahogy említettük, a prémium fix, így (8) alapján az i-edik szelet *MTM* értéke csökkeni fog.

A korreláció esetében tekintsük a következőt! Ha magas a korreláció, az azt jelenti, hogy magas a valószínűsége a sok egyidejű csődnek, mint ahogy annak is, hogy egyáltalán nem lesz csőd. Fordítva, ha a korreláció alacsony, az azt jelenti, hogy nem valószínű, hogy sok csőd következik be egyszerre, de az sem valószínű, hogy egyáltalán nem lesz csőd.

Az első eset a *senior* szeletek befektetőinek rossz, ugyanis a *senior* szelet elbír néhány csődöt, de sokat egyszerre nem, ugyanakkor az *equity* szelet befektetőinek ez jó, hiszen ekkor nagyobb az esélye, hogy nem lesz csőd egyáltalán, így annak is, hogy „túléljen" (az *equity* szelet gyakorlatilag nem bír el semennyi csődöt sem, hiszen ő az első a csődök felfogásában). A második esetben a helyzet fordított: a *senior* befektetőnek kedvezőbb, ekkor nem kell túl sok csődtől tartani, ugyanakkor az *equity* befektetőnek kicsi az esélye, hogy elkerülje a veszteségeket.

A fenti gondolatmenetből következően *ceteris paribus* magasabb korreláció kockázatosabbá teszi a *senior* szelet befektetéseket és biztonságosabbá az *equity* szelet befektetéseket, és fordítva: alacsonyabb korreláció esetén a *senior* befektetés válik biztonságosabbá, és az *equity* kockázatosabbá. Ez azt jelenti, hogy ha nő a korreláció, akkor a *senior* szeletek prémiumának nőnie kéne és így (8) alapján az *MTM* értéke csökkenni fog, míg az *equity* szeletek prémiumának csökkennie kéne, ami azt jelenti, hogy *MTM* értéke nőni fog. A *mezzanine* szeletekre a hatás nem egyértelmű, ezeket külön kell megvizsgálni.

A hitelkockázat hatását már vizsgáltuk, itt csak egy érdekes jelenségre mutatunk rá: nem szükséges, hogy a csődök szintje elérjen egy adott szeletet ahhoz, hogy a hitelkockázat miatt károsodjon. Tekintsük a következőt: a csődök éppen kimerítették az *equity*

[18] Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy az aktuális piaci árak melletti *(mark-to-market, MTM)* érték az idő függvényében azért nem nulla, mert a prémium a futamidő során már előre rögzített. Így lehet, hogy sokat, és lehet, hogy keveset fizetünk a később kialakult kockázati helyzetért.

szeletet, de még nem érték el a *mezzanine* szeletet. Ekkor a *mezzanine* befektetők kockázata jócskán megnő, hiszen, most már ők az „új” *equity* befektetők, semmi nem védi őket a további csődöktől. Ez azt jelenti, hogy a prémiumnak növekednie kéne, így a befektetés *MTM* értéke csökkenni fog.

A GAUSSI KOPULA POZITÍV OLDALA. A gaussi kopula használatának fő előnye, hogy ezáltal az $E_Q[L_i(t_k)]$ kockázatsemleges várható értékek *analitikusan* számolhatók. A (7)-beli integrálok kiszámítása után az $E_Q[L_i(t_k)]$-ra a következő kifejezést kapjuk (lásd például *O'Kane–Schloegl* [2001]):

$$E_Q\left(L_i\left(t_k\right)\right)=\left(1-R\right)\left(\Phi_2\left(f\left(K_{i-1}\right),k\left(t\right),\Sigma\right)-\Phi_2\left(f\left(K_i\right),k\left(t\right),\Sigma\right)\right), \tag{9}$$

ahol Φ_2 a kétváltozós normális eloszlás függvény, $f(x) = -\Phi^{-1}[x/(1-R)]$ és

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{1-\rho} \\ -\sqrt{1-\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

a korrelációs mátrix.

A (9) egyenletet felhasználva, könnyen és gyorsan elvégezhetők a modellre épülő számítások:

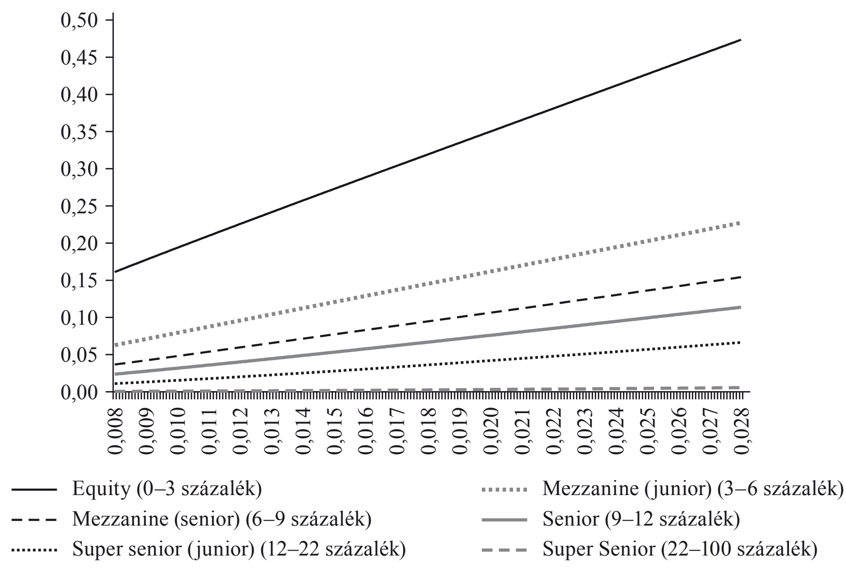
– a szeletprémiumok számítása,
– érzékenységvizsgálat a kockázati faktorokra és fedezési számítások.

Hogy bemutassuk a gaussi kopula használatát, a következőkben ismertetünk néhány általunk elvégezett ilyen típusú számítást. A számítások alapjául szolgáló adatok a 2010. április 8-án megfigyelt *DJ iTraxx Europe* ötéves futamidejű indexéből származnak.

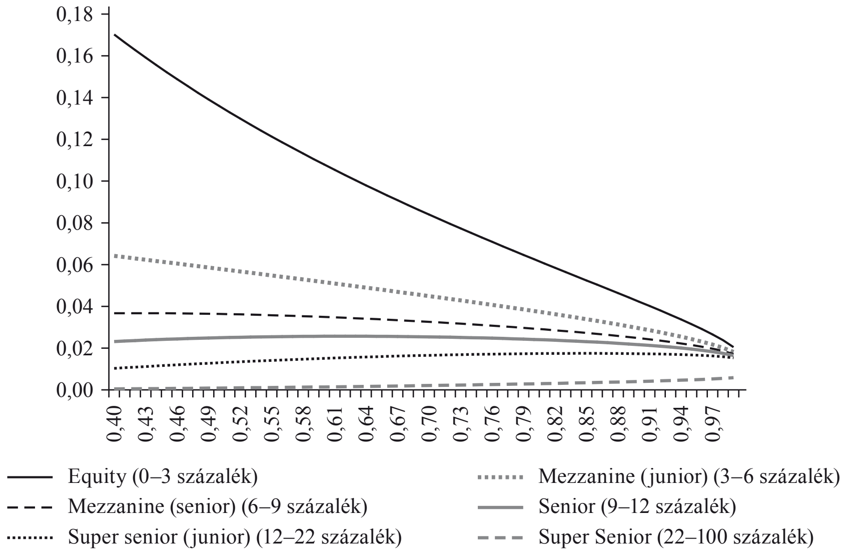
A *2. ábrán* láthatjuk a szeletprémiumokat a CDS-felár és a korreláció függvényében. Ezek az ábrák pontosan azt mutatják, amit az előző alpont alapján várunk. A prémiumok nőnek, ha CDS-felár nő, és látható a korreláció kettős hatása is.

2. ábra
Szeletprémiumok a CDS-felár és a korreláció függvényében

a) A CDS-felár függvényében



b) A korreláció függvényében

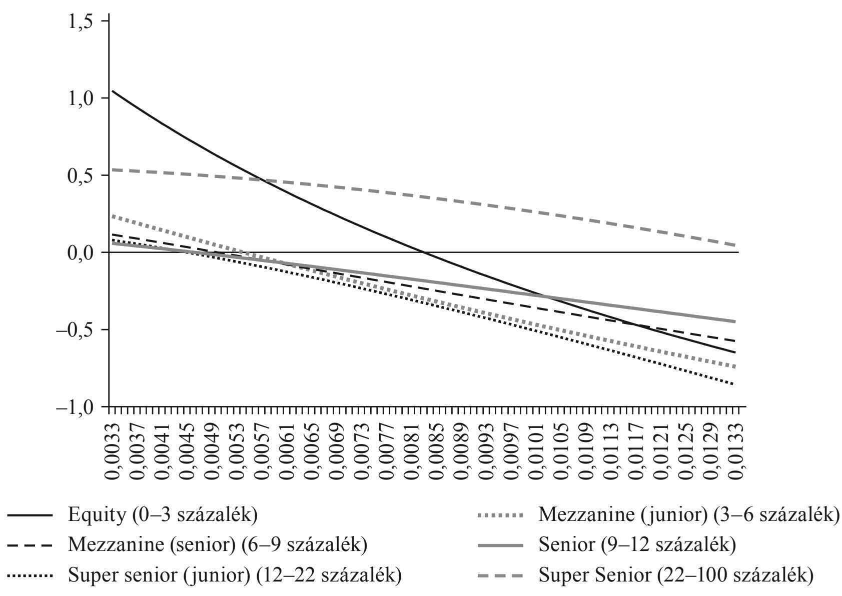


A szeletek *MTM* értékeit tekintve, az előző ábráknak egyfajta ellentétére számítunk, hiszen a prémium rögzített a CDO futamidejére. A számításokat elvégeztük az *MTM* értékek tekintetében is, az eredmények az *3. ábrán* láthatók. Ismét megfigyelhető, hogy az eredmények egybevágnak közgazdasági érvelésünkkel, és épp az „ellenkezőjét" látjuk a prémiumok ábrájának.

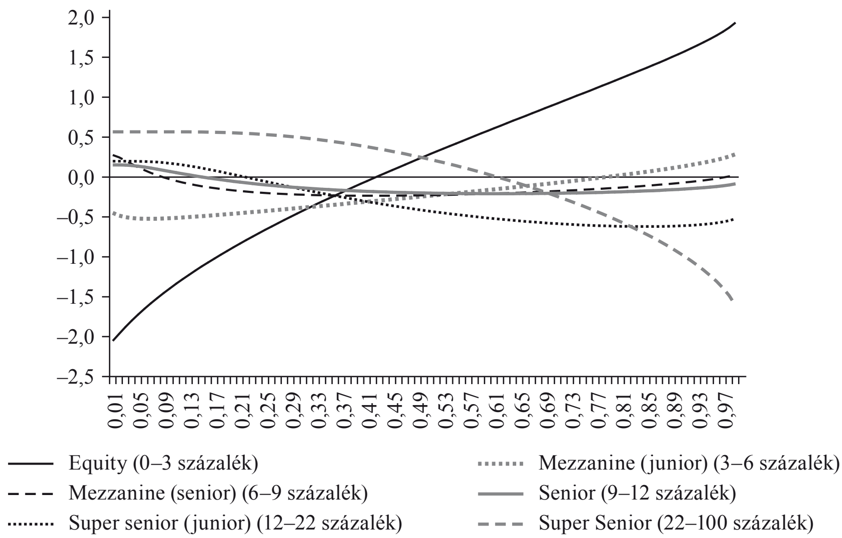
3. ábra

A szeletek *MTM* értékei a CDS-felár és a korreláció függvényében

a) A CDS-felár függvényében



b) A korreláció függvényében



A GAUSSI KOPULA NEGATÍV OLDALA. A gaussi kopulának komoly hátrányai is vannak. Matematikai szempontból a legfontosabbak a következők:

– csak egyetlen szabad paraméter van: a korreláció,

– a modell normális eloszlású faktorokat használ, ami alábecsüli az együttes csődök valós valószínűségét.

Ezek következményeképpen ezzel a modellel nehéz eltalálni a piaci adatokat, ezért ez a modell komoly félreárazásokhoz és rosszul összeállított fedezési stratégiákhoz vezethet. Ezek a fő gyakorlati problémák, amelyek miatt ezt a modellt okolták a válság kialakulásáért.

Ezenfelül van egy további, valamivel elméletibb jellegű probléma a modellel: ha implicit korrelációkat számolunk a szeletekre,[19] akkor ha a modell helyes, ugyanazt a visszaszámított korrelációt kellene kapni minden szeletre. Nem ez a helyzet azonban, egy úgynevezett korrelációs mosolyt kapunk [*correlation smile,* hasonlóan a Black–Scholes-modell volatilitásmosolyához *(volatility smile)*], így a modell nyilvánvalóan inkonzisztensen áraz.

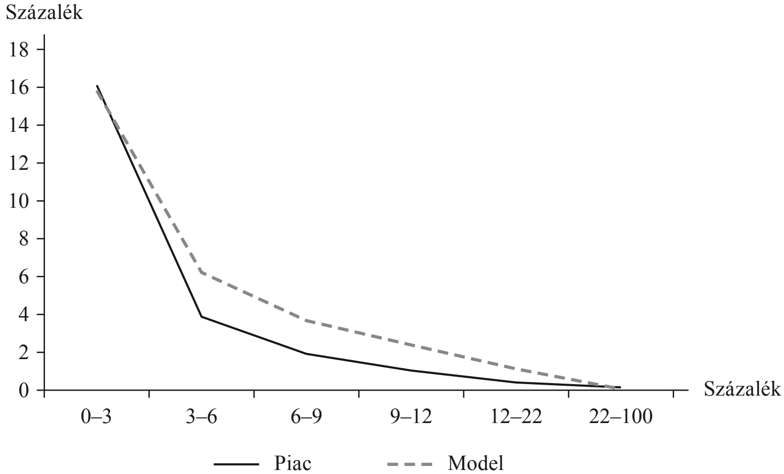
A *4. ábrán* ezeket a jelenségeket láthatjuk, saját számításainkon. Az ábra felső része mutatja a valós piaci adatokat és a kalibrált modell által generált prémiumokat az egyes szeletek függvényében. A kalibrációt az egyetlen szabad paraméter, a korreláció szerint végeztük. A modell képes eltalálni az *equity* és *super senior* szeleteket, ugyanakkor a köztes szeletek esetén jelentősen, akár 2 százalékponttal is félreáraz.

Az ábra alsó része az egyes szeletekre számolt implicit korrelációt mutatja. Jellemzően az alsó és felső szeletekre magasabb értéket kapunk, míg a középső szeletekre alacsonyabbat.

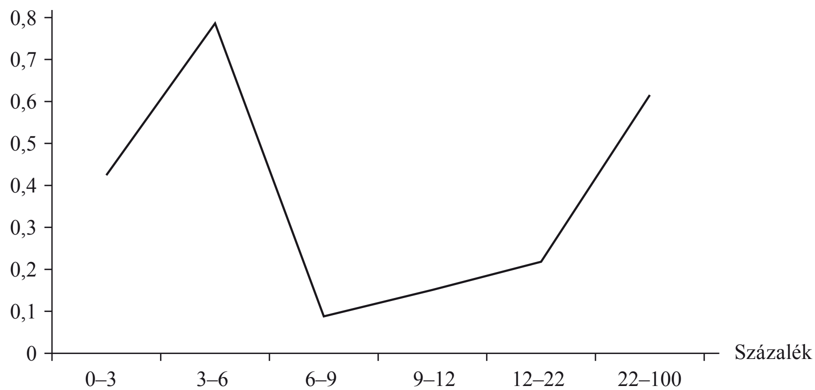
[19] Az implicit korreláció az a korreláció, amellyel a modell a piacon megfigyelt árakat adja.

4. ábra
Piaci és modell szeletprémiumok, a középső szeletek esetén jelentős a félreárazás, valamint a korrelációs mosoly

a) Piaci adatokhoz illesztés



b) Implicit korreláció



Hivatkozások

Andersen, L.–Sidenius, J. [2005]: Extensions to the gaussi an Copula: random recovery and random factor loadings. Journal of Credit Risk, 1. 29–70. o.

Badics Tamás [2011]: Arbitrázs, kockázattal szembeni attitűd és az eszközárazás alaptétele. Hitelintézeti Szemle, 10. évf. 4. sz. 325–335. o.

Dömötör Barbara [2011]: A kockázat megjelenése a származtatott pénzügyi termékekben. Hitelintézeti Szemle, 10. évf. 4. sz. 360–369.

Eberlein, E.–Frey, R.–von Hammerstein, E. A. [2008]: Advanced Credit Portfolio Modeling and CDO Pricing. Megjelent: *Jäger, W.–Krebs, H.-J.* (szerk.): Mathematics: Key Technology for the Future. Springer, 253–280. o.

Embrechts, P.–Frey, R.–McNeil, A. [2005]: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools. Princeton Series in Finance, Princeton University Press.

Ferrarese, C. [2006]: A Comparative Analysis of Correlation Skew Modeling Techniques for CDO Index Tranches. Master's thesis, King's College, London.
Gregory, J.–Laurent, J.-P. [2004]: In the Core of Correlation. Risk, október, 87–91. o.
Gyarmati Ákos [2010]: Matematikai modellek és a pénzügyi válság, szintetikus CDO-k árazása és kockázataik. Szakdolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.
Kalemanova, A.–Schmid, B.–Werner, R. [2005]: The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic CDO Pricing. Working Paper, Risklab Germany, München.
Király Júlia–Nagy Márton–Szabó E. Viktor [2008]: Egy különleges eseménysorozat elemzése – a másodrendű jelzáloghitel-piaci válság és (hazai) következményei, Közgazdasági Szemle, 55. évf. 7–8. sz. 573–621. o.
Lewis, M. [2010]: A nagy dobás. Alinea Kiadó, Budapest.
Li, D. X. [2000]: On default correlation: a copula function approach. The Journal of Fixed Income, 6. 43–54. o.
Medvegyev Péter–Száz János [2010]: A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon. Kockázatok vételre és eladásra. Nemzetközi Bankárképző Központ, Budapest.
Merton, R. C. [1974]: On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. Journal of Finance, 29. 449–470. o.
O'Kane, D.–Schloegl, L. [2001]: Modeling Credit: Theory and Practice. Lehman Brothers Analytical Research Series.
Salmon, F. [2009]: Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street. Wired Magazine, február 23. http://www.wired.com/techbiz/it/magazine/17-03/wp_quant?currentPage=all.
Száz János [2011]: Valószínűség, esély, relatív súlyok. Opciók és reálopciók. Hitelintézeti Szemle, 10. évf. 4. sz. 336–348. o.
Vasicek, O. A. [1991]: Limiting Loan Loss Probability Distribution. KMV Corporation, San Francisco, http://www.moodysanalytics.com/~/media/Insight/Quantitative-Research/Portfolio-Modeling/91-08-09-Limiting-Loan-Loss-Probability-Distribution.ashx.

Függelék

Itt megmutatjuk, hogyan kapható meg a (6)-ban szereplő veszteségeloszlás.

Jelölje A_k^t azt az eseményt, hogy t-ig pontosan k CDS ment csődbe.[20] Ha M-re feltételesen nézzük, akkor A_k^t azt jelenti, hogy n független eseményből pontosan k következett be. Ezért A_k^t binomiális eloszlású $p(t|M)$ és n paraméterekkel. A feltétel nélküli eloszlás meghatározásához M szerint kell integrálni.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a veszteségeloszlást, szükségünk van arra a valószínűségre, hogy k-nál nem több csőd következett be. Jelölje D_t a csődök relatív nagyságát. Ekkor a keresett valószínűség:

$$F_{D_t}(h) = \mathrm{Q}(D_t < h) = \sum_{k=0}^{[nh]} \mathrm{Q}\left(A_k^t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{[nh]} \binom{n}{k} p(t \mid m)^k \left(1 - p(t \mid m)\right)^{n-k} dF_M(m). \quad (10)$$

Most alkalmazzuk a *nagy homogén portfólió* közelítését. Tekintsünk $p_t(M) \doteq \doteq \Phi\left(\left(k(t) - \sqrt{\rho} M\right) \big/ \sqrt{1-\rho}\right)$-re mint valószínűségi változóra, amelynek eloszlásfüggvénye G_{p_t}. Ezzel a jelöléssel és az $y = p_t(u)$ helyettesítéssel újraírhatjuk a (10)-et:

$$F_{D_t}(h) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{[nh]} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} dG_{p_t}(y). \quad (11)$$

A *nagy homogén portfólió* közelítés azt jelenti, hogy az integrandust vizsgáljuk $n \to \infty$ esetén. Legyenek B_i-k ($i = 1, \ldots, n$) független Bernoulli-eloszlású valószínűségi változók y paraméterrel. A nagy számok törvénye miatt $\bar{B}_n = 1/n \cdot \sum_i B_i \to y$ majdnem mindenütt,

[20] Ezzel a jelöléssel a veszteségek relatív nagysága: $L(t) = \frac{k}{n}(1-R)$.

így az eloszlásokra $F_{\bar{B}_n}(x) \to \chi_{[0,x]}(y)$ pontonként $\mathbb{R}/\{y\}$-on. A Bernoulli-változók összege binomiális eloszlású, így $h \neq y$, $n \to \infty$ esetén (legyen A binomiális eloszlású y, n paraméterekkel):

$$\sum_{k=0}^{[nh]} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} = \mathrm{Q}(A < nh) = \mathrm{Q}\left(\sum_i B_i < nh\right) = \mathrm{Q}(\bar{B}_n < h) \to \chi_{[0,h]}(y).$$

A bal oldalon lévő összegnek az $\mathbf{1} \in L^1$ függvény majoránsa, így a dominált konvergencia Lebesgue-féle tétele következtében a (11)-ből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} F_{D_t}(h) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{[nh]} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} \, dG_{p_t}(y) \to \int_0^1 \chi_{[0,h]}(y) \, dG_{p_t}(y) = G_{p_t}(h) = \\ &= \mathrm{Q}\left(\Phi\left(\frac{k(t) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}\right) < h\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{k(t) - \sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(h)}{\sqrt{\rho}} < M\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{k(t) - \sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(h)}{\sqrt{\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\,\Phi^{-1}(h) - k(t)}{\sqrt{\rho}}\right). \end{aligned}$$

Ahol felhasználtuk, hogy M standard normális eloszlású, és hogy $1 - \Phi(-x) = \Phi(-x)$.