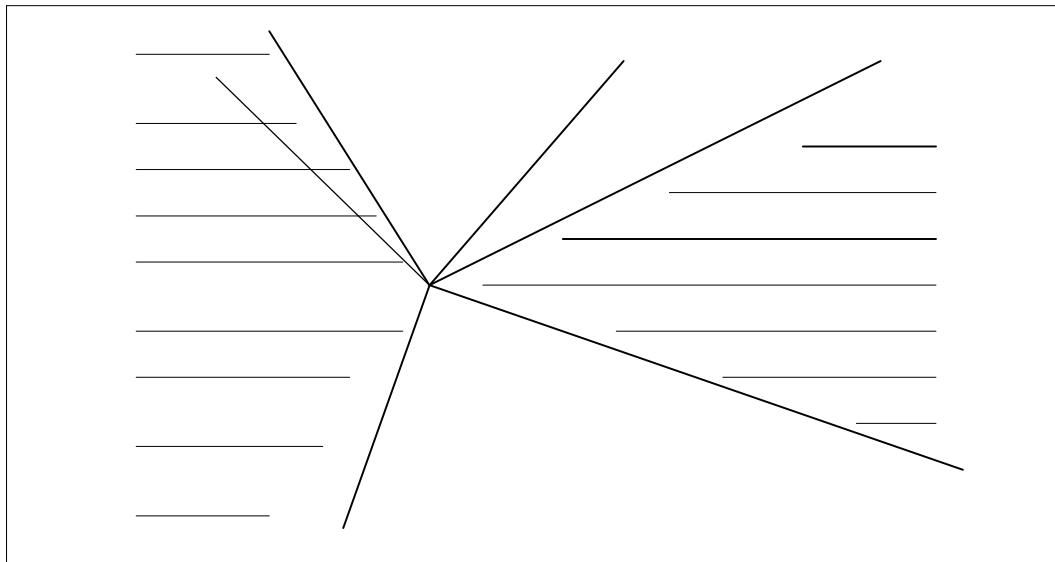


OPERÁCIÓKUTATÁS

No.1.

Nagy Tamás – Klafszky Emil

SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK



Budapest 2002

Nagy Tamás – Klafszky Emil
SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK

OPERÁCIÓKUTATÁS No.1
Szerkeszti: Komáromi Éva

Megjelenik a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás Tanszéke
gondozásában

Budapest, 2002

Nagy Tamás – Klafszky Emil
SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK

Lektorálta: Medvegyev Péter

Készült az Aula Kiadó Digitális Gyorsnyomdájában.
Nyomdavezető: Dobozi Erika

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítási összefoglaló	5
1.1. A valószínűségi változó várható értéke és szórása	5
1.2. Nevezetes eloszlások	8
1.2.1. Karakterisztikus vagy Bernoulli eloszlás	9
1.2.2. Binomiális eloszlás:	9
1.2.3. Normális eloszlás	9
1.2.4. Lognormális eloszlás	11
1.3. Központi határeloszlás tétel	12
1.4. Kovariancia és korreláció	14
2. Geometriai Brown-mozgás	19
2.1. A geometriai Brown-mozgás definíciója	19
2.2. A geometriai Brown-mozgás paraméterei	21
2.3. A geometriai Brown-mozgás egy egyszerű modellel való közelítése	22
2.4. A Brown-mozgás	23
3. Opciók	27
3.1. Az opciók alapvető típusai	27
3.2. Opcióstratégiák	30
3.2.1. Egy opciót és egy részvényt tartalmazó stratégia	30
3.2.2. Különbözeti stratégiák	32
3.2.3. Kombinációs stratégiák	34
3.3. A Put-Call paritás	36
3.4. Egzotikus opciók	39
3.5. Az opciók értékének lehetséges tartományai	39
3.5.1. Alsó korlátok	40
3.5.2. Felső korlátok	40
3.6. Az opciók árazása	41
3.6.1. Binomiális opcióárazási modell	41
3.6.2. A részvényárfolyam-változás mértékének meghatározása	48
3.6.3. A részvényárfolyam volatilitásának mérése	50
3.7. Black-Scholes formula	50
3.8. Az opcióár tulajdonságai	56
4. Felhasznált irodalom	59

1. fejezet

Valószínűségszámítási összefoglaló

E rövid összefoglaló nem terjed ki a valószínűségszámítás alapvető fogalmainak, mint az eseménytér, elemi esemény, valószínűség, valószínűségi változó, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény valamint az alapvetően fontos sztochasztikus függetlenség fogalmának ismertetésére. Feltételezzük, hogy az olvasó ezeket jól ismeri. Célszerűnek láttuk azonban, hogy ezen fogalmakkal kapcsolatos és a későbbiekben sűrűn használt formulákat megismételjük és példákkal is illusztráljuk őket.

1.1. A valószínűségi változó várható értéke és szórása

A gyakorlati alkalmazásoknál gyakran előfordul, hogy egyetlen vagy néhány számadattal kell jellemezni a valószínűségi változót ill. annak eloszlását. A legfontosabb jellemzők a várható érték és a szórás (ill. variancia).

A várható érték fogalma:

Ha az X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3 \dots$ és ezeket rendre $p_1, p_2, p_3 \dots$ valószínűséggel veszi, akkor az X várható értéke

$$E(X) = \sum_i p_i x_i,$$

ha X folytonos valószínűségi változó és sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az X várható érték

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

A variancia és a szórás fogalma:

Ha az $X - E(X)$ valószínűségi változó négyzetének létezik várható értéke, akkor ezt az X varianciájának nevezzük, azaz

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2),$$

ennek négyzetgyöke az X valószínűségi változó szórása.

A variancia számítható az X^2 és az X valószínűségi változók várható értékének segítségével is, azaz

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Míg a várható érték az X valószínűségi változó eloszlásának "centrumát" adja meg, addig a variancia ill. a szórás az eloszlásnak a centrum körüli ingadozását méri.

Az alábbiakban a várható érték és a variancia néhány fontos, az alkalmazásokban hasznos tulajdonságát ismertetjük:

1. Ha az X valószínűségi változónak létezik várható értéke és szórása, akkor

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b, \\ \text{Var}(aX + b) &= a^2 \text{Var}(X). \end{aligned}$$

2. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n tetszőleges valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, ekkor az összegük várható értéke megegyezik a várható értékük összegével, azaz

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

3. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, ekkor a szorzatuk várható értéke megegyezik a várható értékük szorzatával, azaz

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

4. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független valószínűségi változók, amelyeknek létezik a szórásuk, ekkor az összegük varianciája megegyezik a varianciájuk összegével, azaz

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Példa:

Az alábbi példa jól illusztrálja a várható értékkel és a varianciával (szórással) kapcsolatos összefüggéseket.

Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású valószínűségi változók, a közös várható érték és variancia legyen $E(X_i) = m$ és $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ minden i -re. Legyen Y valószínűségi változó ezeknek a valószínűségi változóknak a számtani átlaga, amelyet mintaátlagnak hívunk, legyen továbbá s^2 valószínűségi változó a minta varianciája. A mintaátlag és a minta variancia az alábbi képletekkel adottak:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - Y)^2}{n - 1}.$$

- a) Mutassuk meg, hogy $E(Y) = m$.
- b) Mutassuk meg, hogy $\text{Var}(Y) = \sigma^2/n$.
- c) Mutassuk meg, hogy $E(s^2) = \sigma^2$.

Megoldás:

A várható értékre és a varianciára vonatkozó tulajdonságokat alkalmazzuk.

- a)

$$E(Y) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} nm = m$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

c) E kérdés megválaszolását több lépésben végezzük.

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - Y)^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - Y)^2\right)$$

Most az összeget írjuk át más alakra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - Y)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i Y + Y^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2Y \sum_{i=1}^n X_i + nY^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2YnY + nY^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - nY^2 \end{aligned}$$

Ennek a várható értékét a várható értékre vonatkozó addíciós összefüggés felhasználásával számítjuk ki.

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - Y)^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - nY^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - nE(Y^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(Y^2) \end{aligned}$$

A következő lépésben az Y valószínűségi változó négyzetének várható értékét számítjuk ki, felhasználva többek között a független valószínűségi változók szorzatára vonatkozó

összefüggést.

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= E\left(\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right]^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^2} E\left(\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \left[\sum_{j=1}^n X_j\right]\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j\right) = \\
&= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j\right) = \\
&= \frac{1}{n^2} \left[E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j\right) \right] = \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E(X_i X_j) \right] = \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E(X_i) E(X_j) \right]
\end{aligned}$$

Legutoljára pedig a varianciára megismert

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

összefüggést alkalmazzuk az $E(X_i^2)$ számítására.

$$\begin{aligned}
E(s^2) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(Y^2) \right) = \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - n \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E(X_i) E(X_j) \right] \right) = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E(X_i) E(X_j) \right) = \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n (E(X_i))^2 \right) - \\
&\quad - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E(X_i) E(X_j) \right) \\
&= \frac{1}{n} (n\sigma^2 + nm^2) - \frac{1}{n(n-1)} (n^2 - n)m^2 = \\
&= \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

1.2. Nevezetes eloszlások

Az alábbiakban négy eloszlást ismertettünk, ezek az eloszlások játszik a legnagyobb szerepet a további vizsgálódásainkban.

1.2.1. Karakterisztikus vagy Bernoulli eloszlás

Legyen A tetszőleges esemény, amelynek bekövetkezési valószínűsége p ($0 \leq p \leq 1$). Ha az X valószínűségi változó csak a 0 és az 1 értékeket veheti fel az alábbiak szerint

$$X = \begin{cases} 1, & \text{ha az } A \text{ esemény bekövetkezik,} \\ 0, & \text{ha az } A \text{ esemény nem következik be,} \end{cases}$$

akkor az A esemény X karakterisztikus valószínűségi változójáról beszélünk. Tehát a

$$P(X = 1) = p \text{ és a } P(X = 0) = 1 - p$$

számok alkotják a karakterisztikus eloszlást. Jellemzői:

$$E(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

1.2.2. Binomiális eloszlás:

Tekintsünk n független kísérletet az A esemény megfigyelésére és jelölje X valószínűségi változó a kísérletsorozat során az A esemény bekövetkezéseinek számát. Ha X_i az i -edik kísérletre vonatkozó karakterisztikus valószínűségi változó, akkor a kísérletsorozatra jellemző X valószínűségi változót az alábbiak szerint írhatjuk

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Legyen p az A esemény bekövetkezésének valószínűsége, ekkor felhasználva a karakterisztikus eloszlás jellemzőit és az összegre vonatkozó összefüggéseket, az X valószínűségi változó várható értéke

$$E(X) = np,$$

szórása pedig a függetlenség miatt

$$\text{Var}(X) = np(1 - p).$$

A binomiális eloszlás valószínűségeloszlása

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

1.2.3. Normális eloszlás

A normális eloszlásnak központi szerepe van az eloszlások között, az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás.

A X valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezünk, jele $N(m, \sigma)$, ha sűrűségfüggvénye a következő alakú

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

ahol m valós, σ pedig pozitív állandó. Az eloszlásfüggvényt az alábbiak szerint számíthatjuk ki

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

A normális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke és varianciája

$$\begin{aligned} E(X) &= m, \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Kitüntetett szerepe van annak a normális eloszlásnak, amelynek várható értéke 0, szórása pedig 1, azaz $m = 0$, $\sigma = 1$. Az ilyen eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük, jele $N(0; 1)$.

Ha X normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $aX + b$ valószínűségi változó is normális eloszlású. Ezt a tényt felhasználva minden $N(m, \sigma)$ eloszlást a

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

transzformációval $N(0; 1)$ eloszlásba vihetünk. A két eloszlás eloszlásfüggvénye között az alábbi a kapcsolat

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right),$$

ahol $\Phi(z)$ az $N(0; 1)$ ún. standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Így elegendő a standard normális eloszlás $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény értékeit táblázatba foglalni, mert erre visszavezethető tetszőleges paraméterű normális eloszlás. Sőt elegendő csupán a pozitív x -ekre közölni a táblázatokat, mivel igaz, hogy

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

A normális eloszlás alkalmazásakor táblázatot kell használnunk a $\Phi(x)$ standard normális eloszlásfüggvény értékének meghatározására. Táblázat hiányában az alábbi, nagy pontosságú közelítő képletet szokták használni $\Phi(x)$ számítására. Ez az összefüggés van beépítve számos statisztikai programcsomagba is:

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5),$$

ahol

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + 0.2316419x}, \\ a_1 &= 0.319381530, \\ a_2 &= -0.356563782, \\ a_3 &= 1.781477937, \\ a_4 &= -1.821255978, \\ a_5 &= 1.330274429. \end{aligned}$$

Végül egy fontos összefüggést ismertetünk a független, normális eloszlású valószínűségi változók összegére vonatkozóan.

Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független, normális eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek várható értéke és varianciája legyen $E(X_i) = m_i$ és $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Az $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összeg szintén normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke és varianciája

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= m_1 + m_2 + \dots + m_n, \\ Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2. \end{aligned}$$

1.2.4. Lognormális eloszlás

A X valószínűségi változót m és σ paraméterű lognormális eloszlásúnak nevezünk, ha az $Y = \log X$ valószínűségi változó normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással.

A lognormális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (x > 0).$$

A lognormális eloszlású X valószínűségi változó várható értéke és varianciája

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}, \\ Var(X) &= e^{2(m + \frac{\sigma^2}{2})} (e^{\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

Az alábbiakban a normális és a lognormális eloszlás alkalmazására egy példát mutatunk be.

Példa:

Legyen egy bizonyos részvény ára az n -edik hét végén $S(n)$, ahol $n \geq 1$. Tegyük fel, hogy az $S(n)/S(n-1)$ árárány minden $n \geq 1$ értékre független és azonos eloszlású lognormális valószínűségi változó. Legyen a szóbanforgó lognormális valószínűségi változó két paramétere $m = 0.0165$ és $\sigma = 0.0730$.

a) Mi a valószínűsége, hogy a részvény ára egyik hétről a másikra növekedik?

b) Mi a valószínűsége, hogy a részvény ára három héttel később nagyobb lesz, mint az induló ár?

Megoldás:

a) A keresett valószínűség $P(S(n) > S(n-1))$ bármely $n \geq 1$ értékre. Mivel a feladatban megfogalmazott feltevés minden n -re azonos, így elegendő az $n = 1$ esetre elvégezni a számítást, azaz a keresett valószínűség $P(S(1) > S(0))$.

Mivel a részvény ára pozitív, ezért az $S(1) > S(0)$ egyenlőtlenség ekvivalens a $\log S(1) > \log S(0)$ ill. a $\log \frac{S(1)}{S(0)} > 0$ egyenlőtlenséggel. Ezt felhasználva, és tudva, hogy az $X = \log \frac{S(1)}{S(0)}$ valószínűségi változó $m = 0.0165$ várható értékű és $\sigma = 0.0730$ szórással normális eloszlású valószínűségi változó, valamint a $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ valószínűségi változó $m = 0$ várható értékű és

$\sigma = 1$ szórású standard normális eloszlású valószínűségi változó, így a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} P(S(1) > S(0)) &= P\left(\log \frac{S(1)}{S(0)} > 0\right) = P\left(\frac{\log \frac{S(1)}{S(0)} - m}{\sigma} > \frac{0 - m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{-0.0165}{0.0730}\right) = P(Z > -0.2260) \\ &= 1 - P(Z < -0.2260) \\ &= 1 - \Phi(-0.2260) = 1 - (1 - \Phi(0.2260)) \\ &= \Phi(0.2260) = 0.5894. \end{aligned}$$

b) A keresett valószínűség $P(S(n+2) > S(n-1))$ bármely $n \geq 1$ értékre. A feltevés szerint minden n -re azonosak a viszonyok, így az $n = 1$ esetre végezzük el a számítást, azaz a keresett valószínűség $P(S(3) > S(0))$.

Mivel a részvény ára pozitív, ezért az $S(3) > S(0)$ egyenlőtlenség ekvivalens a $\log S(3) > \log S(0)$ ill. a $\log \frac{S(3)}{S(0)} > 0$ egyenlőtlenséggel. Ez utóbbi további alakítással $\log \frac{S(3)}{S(2)} \frac{S(2)}{S(1)} \frac{S(1)}{S(0)} > 0$ és ebből a számunkra már használható $\log \frac{S(3)}{S(2)} + \log \frac{S(2)}{S(1)} + \log \frac{S(1)}{S(0)} > 0$ egyenlőtlenség adódik. A $Z = \log \frac{S(3)}{S(2)} + \log \frac{S(2)}{S(1)} + \log \frac{S(1)}{S(0)}$ valószínűségi változó három darab független normális eloszlású valószínűségi változó összege, amelyről tudjuk, hogy szintén normális eloszlású valószínűségi változó. A Z várható értéke $3m$, azaz $3 \cdot 0.0165 = 0.0495$, varianciája pedig $3\sigma^2$, így szórása $\sigma\sqrt{3}$, azaz $\sqrt{3} \cdot 0.0730 = 0.12644$. Hasonlóan az a) részbeni megoldáshoz, a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} P(S(3) > S(0)) &= P\left(\log \frac{S(3)}{S(2)} + \log \frac{S(2)}{S(1)} + \log \frac{S(1)}{S(0)} > 0\right) \\ &= P\left(\frac{Z - 3m}{\sigma\sqrt{3}} > \frac{0 - 3m}{\sigma\sqrt{3}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{-0.0495}{0.12644}\right) = P(Z > -0.39149) = \\ &= \Phi(0.39149) = 0.6517. \end{aligned}$$

1.3. Központi határeloszlás tétel

Legyenek X_1, X_2, \dots azonos eloszlású, független valószínűségi változók, m közös várható értékkel és σ közös szórással és legyen S_n valószínűségi változó az első n darab X_i valószínűségi változó összege

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Mint tudjuk az S_n valószínűségi változó várható értéke nm , szórása pedig $\sigma\sqrt{n}$.

A központi határeloszlás azt mondja ki, hogy bármely x valós számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Szavakban ez azt jelenti, hogy elég nagy n esetén az $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ valószínűségi változó eloszlása közel standard normális eloszlás.

A normális eloszlásnak a tétel adja meg a valószínűségszámításban játszott központi szerepét.

Példa:

Tekintsük egy részvény ármozgására az alábbi modellt. Ha egy adott időben a részvény ára s , akkor egy időperiódus után a részvény ára vagy p valószínűséggel us vagy pedig $(1-p)$ valószínűséggel ds ($u > 1$, $0 < d < 1$). Tegyük fel, hogy az egymás utáni időperiódusokban az ármozgás független. Határozzuk meg közelítőleg annak a valószínűségét, hogy a következő 1000 időperiódus után a részvény ára legalább 30 %-kal nagyobb lesz, mint az induló ár!

Megoldás:

Jelölje az S_i valószínűségi változó a részvény árát az i -edik periódusban. Ekkor a keresett valószínűség

$$P\left(\frac{S_{1000}}{S_0} \geq 1.30\right).$$

Elemi számolással a keresett valószínűséget átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_{1000}}{S_0} \geq 1.30\right) &= P\left(\log \frac{S_{1000}}{S_0} \geq \log 1.3\right) = \\ &= P\left(\log \frac{S_{1000}}{S_{999}} \frac{S_{999}}{S_{998}} \dots \frac{S_2}{S_1} \frac{S_1}{S_0} \geq \log 1.3\right) = \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{1000} \log \frac{S_i}{S_{i-1}} \geq \log 1.3\right). \end{aligned}$$

Legyen $X_i = \log \frac{S_i}{S_{i-1}}$ valószínűségi változó az i -edik és a közvetlen megelőző periódusbeli ár hányadosának logaritmus. Először határozzuk meg X_i várható értékét és varianciáját. Az X_i lehetséges értékei: $\log u$ ill. $\log d$.

$$\begin{aligned} m &= E(X_i) = p \log u + (1-p) \log d = p \log \frac{u}{d} + \log d, \\ \sigma^2 &= Var(X_i) = p(\log u)^2 + (1-p)(\log d)^2 - [p \log u + (1-p) \log d]^2 = \\ &= p(1-p) \left(\log \frac{u}{d}\right)^2. \end{aligned}$$

Ha $u = 1.1$, $d = 0.9$, $p = 0.55$, akkor $m = 0.005$ ill. $\sigma = 0.1$.

A keresett valószínűség kiszámítására most a központi határeloszlás tételt alkalmazzuk. Mivel $n = 1000$ elég nagy és az összegben szereplő X_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak és függetlenek, így a tétel feltételei fennállnak, a keresett valószínűség közelítő értékét az alábbi szerint határozhatjuk meg

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq \log 1.3\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000m}{\sigma\sqrt{1000}} \geq \frac{\log 1.3 - 1000m}{\sigma\sqrt{1000}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\log 1.3 - 1000m}{\sigma\sqrt{1000}}\right) \\ &= 0.93296. \end{aligned}$$

Példa:

Egy bizonyos részvény minden időperiódusban vagy 0.39 valószínűséggel 1-el csökken, vagy 0.20 valószínűséggel nem változik, vagy pedig 0.41 valószínűséggel 1-el növekszik. Feltéve az egymás utáni időperiódusok árváltozásainak függetlenségét, mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő 700 időperiódus után a részvény ára legalább 10-el nagyobb lesz az induló árnál?

Megoldás:

Jelölje az X_i valószínűségi változó a részvény árának megváltozását az i -edik periódusban. Először határozzuk meg X_i várható értékét és varianciáját.

$$\begin{aligned} E(X_i) &= (-1) * 0.39 + 0 * 0.2 + 1 * 0.41 = 0.02, \\ Var(X_i) &= [(-1)^2 * 0.39 + 0^2 * 0.2 + 1^2 * 0.41] - 0.02^2 = 0.7996, \end{aligned}$$

amelyből a közös várható érték $m = 0.02$ és a szórási $\sigma = 0.8942$.

A kezdő és a 700 időperiódus utáni árváltozást az X_i valószínűségi változók összege adja, így a keresett valószínűség

$$P\left(\sum_{i=1}^{700} X_i \geq 10\right).$$

Ennek kiszámítására alkalmazhatjuk a központi határeloszlás tételt, mivel $n = 700$ elég nagy és az összegben szereplő X_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak és függetlenek. A tétel szerint

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{700} X_i \geq 10\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{700} X_i - 700 \cdot 0.02}{0.8942\sqrt{700}} \geq \frac{10 - 700 \cdot 0.02}{0.8942\sqrt{700}}\right) = \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{700} X_i - 700 \cdot 0.02}{0.8942\sqrt{700}} \geq -0.16907\right) = \\ &= \Phi(0.16907) = 0.5675. \end{aligned}$$

1.4. Kovariancia és korreláció

A gyakorlatban nagyon sokszor kell két valószínűségi változó egymástól való függőségét, kapcsolatának szorosságát vizsgálni. Azt vizsgáljuk, hogy a saját várható értékeik körüli ingadozásuk milyen kapcsolatban van egymással. Ennek az ún. sztochasztikus kapcsolatnak a mérésére két mutatót is szokás használni, egyik a kovariancia, másik a korrelációs együttható.

Az X és az Y valószínűségi változók kovarianciája alatt az alábbi várható értéket értjük

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Az X és az Y valószínűségi változók korrelációs együtthatója alatt a kovariancia és a szórási hányadosát értjük, azaz

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Az alábbiakban a fogalmakra vonatkozó néhány fontos tulajdonságot ismertetünk.

1. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$, szimmetria
3. $Cov(X, X) = Var(X)$
4. $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$
5. $Cov(a, Y) = 0$
6. $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$, linearitás
7. $Cov(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = Cov(X_1, Y_1) + Cov(X_2, Y_1) + Cov(X_1, Y_2) + Cov(X_2, Y_2)$
8. $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$
8. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
9. Ha lineáris a kapcsolat X és Y között, azaz $Y = aX + b$, akkor $\rho(X, Y) = \text{sgn}(a)$, vagyis 1, ha $a > 0$ és -1 , ha $a < 0$.

Most néhány fontos általánosítást ismertetünk:

10. A 7. tulajdonság általánosításai több valószínűségi változó összegére

$$Cov\left(\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Cov(X_i, Y_j),$$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^m a_i X_i + b_i, \sum_{j=1}^n c_j Y_j + d_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i c_j Cov(X_i, Y_j).$$

11. A 3. tulajdonság általánosításai n darab valószínűségi változóra

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n Cov(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b_i\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b_i, \sum_{j=1}^n a_j X_j + b_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 Cov(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Ha $Cov(X, Y) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az X és az Y valószínűségi változók korrelálatlanok.

A korrelálatlanságot nem szabad összekeverni a függetlenséggel.

Mint korábbról tudjuk, ha X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

E fontos összefüggést felhasználva állítható, hogy ha X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$Cov(X, Y) = \rho(X, Y) = 0,$$

vagyis a függetlenségből következik a korrelálatlanság, fordítva nem.

Több valószínűségi változó esetén ezek páronkénti kovarianciáit és korrelációit együtt-hatóit a tömörebb leírás végett egy-egy mátrixba foglalhatjuk össze. Legyen X_1, X_2, \dots, X_n n darab valószínűségi változó és legyen $c_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ és $r_{ij} = \rho(X_i, X_j)$. A c_{ij} ill. r_{ij} számokból alkotott C ill. R mátrixot kovariancia-mátrixnak ill. korreláció mátrixnak nevezzük. A C és az R mátrixok szimmetrikusak és pozitív szemidefinit mátrixok, továbbá $c_{ii} = Var(X_i) = \sigma_i^2$ és $r_{ii} = 1$. Független valószínűségi változók esetén a C egy diagonális mátrix, az R pedig egységmátrix.

Ha bevezetjük az S diagonális mátrixot, amelynek főátlójában az egyes valószínűségi változók szórása szerepel, akkor az ismert $c_{ij} = \sigma_i r_{ij} \sigma_j$ összefüggés a

$$C = SRS, \quad \text{ill.} \quad R = S^{-1}CS^{-1}$$

alakban írható.

Gyakran van szükségünk arra, hogy több valószínűségi változó súlyozott számtani átlagát vizsgáljuk. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n valószínűségi változók és legyenek w_1, w_2, \dots, w_n súlyok ($\sum w_i = 1$ és $w_i \geq 0$ minden i -re).

Jelölje Y valószínűségi változó a súlyozott számtani átlagot, azaz

$$Y = \sum_{i=1}^n w_i X_i,$$

ennek várható értéke és varianciája a korábban megismert összefüggésekből

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n w_i E(X_i),$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Cov(X_i, X_j).$$

Ha a súlyokat és a várható értékeket egy-egy vektorba foglaljuk úgy, hogy $m = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$ és $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, akkor a fentieket vektor-mátrix műveletek segítségével tömörebb formában is írhatjuk.

$$E(Y) = w^T m,$$

$$Var(Y) = w^T C w = w^T S R S w.$$

Ha a valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$Var(Y) = w^T S S w = (S w)^T (S w),$$

ahol T a transzponálás jele.

Példa:

Tegyük fel, hogy egy adott időperiódusban egy bizonyos részvény ára egyenlő valószínűséggel nő vagy csökken 1 egységgel és különböző időperiódusok kimenetele egymástól független. Jelölje az X valószínűségi változó az első periódusbeli változást, az Y valószínűségi változó pedig az első három periódusbeli változás összegét. Határozzuk meg az X és Y valószínűségi változók közötti kovarianciát és a korrelációs együtthatót!

Megoldás:

Az egyszerűbb számolás kedvéért készítsünk egy táblázatot a lehetséges esetek vizsgálatára. A $+$, $-$ jelekkel az értékpapír árának növekedését ill. csökkenését jeleztük. A 2. oszlopban az X valószínűségi változó, a 2. sorban pedig az Y valószínűségi változó lehetséges értékeit tüntettük fel. A táblázat belseje az XY szorzat valószínűségi változó valószínűség eloszlását mutatja. Az utolsó sor és oszlop az X és az Y valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket mutatja.

		+	+	+	+	-	-	-	-	
		+	+	-	-	+	+	-	-	
		+	-	+	-	+	-	+	-	
	$X \setminus Y$	3	1	1	-1	1	-1	-1	-3	
+	1	1/8	1/8	1/8	1/8	0	0	0	0	1/2
-	-1	0	0	0	0	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
		1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$E(Y) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + (-3) \cdot \frac{1}{8} = 0,$$

$$E(XY) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot (-3) \cdot \frac{1}{8} = 1,$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} - 0^2 = 1,$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{8} [3^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2] - 0^2 = 3.$$

A kovariancia és a korrelációs együttható

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1,$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} = 0.577.$$

Bemutatunk egy másik megoldási módot is.

Jelöljék az X_1, X_2, X_3 valószínűségi változók az 1., a 2. és a 3. periódusbeli változást. (Az X_1 azonos az előző megoldásban szereplő X -el.) Ezek a valószínűségi változók függetlenek. A feladat értelmében az X_1 és az $X_1 + X_2 + X_3$ valószínűségi változók

kovarianciáját kell meghatározni, amelyet az alábbiak szerint végezhetünk, felhasználva a kovariancia additivitását és a függetlenséget

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_1 + X_2 + X_3) &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_1, X_3) = \\ &= \text{Cov}(X_1, X_1) = \text{Var}(X_1) = 1. \end{aligned}$$

A korrelációs együttható számításához szükségünk van a három független valószínűségi változó összegének varianciájára, amely az alábbiak szerint számítható

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) = \\ &= 3\text{Var}(X_1) = 3, \end{aligned}$$

$$\rho(X_1, X_1 + X_2 + X_3) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_1 + X_2 + X_3)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 .$$

2. fejezet

Geometriai Brown-mozgás

2.1. A geometriai Brown-mozgás definíciója

Jelölje $S(y)$ egy értékpapír árát y idő elteltével a jelentől. Az $S(y), 0 \leq y < \infty$ értékpapír árák együttese m és σ paraméterű geometriai Brown-mozgást követ az alábbi két feltétel fennállása esetén:

1. ha minden nemnegatív y és t értékre az

$$\frac{S(t+y)}{S(y)}$$

valószínűségi változó független az y időpont előtti áráktól,

2. a

$$\log \left(\frac{S(t+y)}{S(y)} \right)$$

valószínűségi változó mt várható értékű és $\sigma^2 t$ varianciájú ($\sigma\sqrt{t}$ szórású) normális eloszlású valószínűségi változó.

Más szavakkal: az árák sorozata akkor követ geometriai Brown-mozgást, ha az árák hányadosa nem függ a múltbeli áráktól és lognormális valószínűség-eloszlású mt és $\sigma\sqrt{t}$ paraméterekkel. A geometriai Brown-mozgást tehát két paraméter meghatározza. Az m paramétert drift (növekedési) paraméternek, a σ paramétert pedig volatilitási (változékonysági) paraméternek szokás nevezni. A feltevés szerint egy adott t hosszúságú időszakban az árák hányadosa ugyanolyan eloszlást követ, függetlenül attól, hogy mi az időszak kezdete. Eszerint tehát egy értékpapír árának pl. egy hónap alatti megduplázódása ugyanakkora valószínűségű mintha 10-ről vagy 25-ről duplázódott volna meg.

Ha a kezdő ár $S(0)$, akkor a t időbeli ár várható értéke és varianciája a lognormális eloszlásra megismert összefüggések alapján

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= S(0)e^{t(m+\sigma^2/2)}, \\ Var[S(t)] &= [S(0)]^2 e^{2t(m+\sigma^2/2)}(e^{t\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

Példa:

Tegyük fel, hogy egy értékpapír $S(y), y \geq 0$ ára geometriai Brown mozgást követ, $m=0.01$ és $\sigma=0.2$ paraméterekkel. Ha $S(0) = 100$, akkor $t = 10$ esetén

- a) $E[S(10)] = ?$, $Var[S(10)] = ?$,
- b) $P(S(10) > 100) = ?$,

c) $P(S(10) < 120) = ?$

Megoldás:

a) A várható értékre és a varianciára adott képletekbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E[S(10)] &= 100e^{10(0.01+0.2^2/2)} = 134.99, \\ Var[S(10)] &= 100^2 e^{2 \cdot 10(0.01+0.2^2/2)} (e^{10 \cdot 0.2^2} - 1) = 8961.6 . \end{aligned}$$

b) A keresett valószínűséget átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(S(10) > 100) &= P(S(10) > S(0)) = P(\log S(10) > \log S(0)) \\ &= P\left(\log \frac{S(10)}{S(0)} > 0\right) . \end{aligned}$$

Az $X = \log \frac{S(10)}{S(0)}$ valószínűségi változó tm várható értékű és $t\sigma^2$ varianciájú normális valószínűségi változó, azaz a várható érték = 0.1, a szórás = 0.63246. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} P(S(10) > 100) &= P(X > 0) = P\left(\frac{X - 0.1}{0.63246} > \frac{-0.1}{0.63246}\right) \\ &= P\left(\frac{X - 0.1}{0.63246} > -0.15811\right) \\ &= \Phi(0.15811) = 0.5636 . \end{aligned}$$

c) A keresett valószínűséget átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(S(10) < 120) &= P\left(S(10) < S(0) \frac{120}{S(0)}\right) = P\left(\log S(10) < \log \left[S(0) \frac{120}{S(0)}\right]\right) \\ &= P\left(\log S(10) < \log S(0) + \log \frac{120}{S(0)}\right) \\ &= P\left(\log \frac{S(10)}{S(0)} < \log \frac{120}{100}\right) . \end{aligned}$$

Az $X = \log \frac{S(10)}{S(0)}$ valószínűségi változó 0.1 várható értékű és 0.63246 szórású normális valószínűségi változó, így a keresett valószínűség

$$\begin{aligned} P(S(10) < 120) &= P\left(X < \log \frac{120}{100}\right) = P(X < 0.18232) \\ &= P\left(\frac{X - 0.1}{0.63246} < \frac{0.18232 - 0.1}{0.63246}\right) \\ &= P\left(\frac{X - 0.1}{0.63246} < 0.13016\right) \\ &= \Phi(0.13016) = 0.5517 . \end{aligned}$$

2.2. A geometriai Brown-mozgás paraméterei

Az m drift paraméter, a σ volatilitási paraméter értéke attól függ, hogy milyen mértékegységben mérjük az időt. A gyakorlat az időt évben mérik, így éves driftről és éves volatilitásról szokás beszélni. Mit fejeznek ki e paraméterek, ezt szeretnénk néhány szóban bemutatni.

A részvény két árfolyamának hányadosát Jelöljük X valószínűségi változóval a definícióban szereplő $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ valószínűségi változót, azaz $X = \log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$, amelyből

$$S(t+y) = S(y)e^X.$$

Ezen összefüggés szerint az X valószínűségi változó a részvény hozamát jelenti t időtartam alatt, azaz a részvényárfolyam folytonos növekedési üteme X . A definíció szerint tehát a részvény hozama normális eloszlást követ mt várható értékkel és $\sigma^2 t$ varianciával (ill. $\sigma\sqrt{t}$ szórással). Amennyiben t értékét 1-nek választjuk, úgy az m drift paraméter a részvény várható éves hozamát, a σ volatilitási paraméter pedig részvény éves hozamának szórását jelenti. A várható hozamot és a szórást százalékosan szokták megadni.

Példa:

Egy részvény árfolyamának várható éves hozama 16 %, volatilitása évi 30 %. A részvényárfolyam egy adott nap végén 1000 Ft.

- Mennyi a várható részvényárfolyam a következő nap végén?
- Mennyi a részvényárfolyam várható szórása a 2. nap végén?
- Mi a valószínűsége, hogy a részvényárfolyam a 10. nap végén 950 és 1100 között lesz?

Megoldás:

Az adataink alapján $m = 0.16$, $\sigma = 0.30$, $S(0) = 1000$. Az árfolyamoknál kereskedői napokban számolnak, ami 252 nap, így 1 nap $\frac{1}{252}$ évnek felel meg.

a) $t = \frac{1}{252} \approx 0.004$,

$$E[S(0.004)] = 1000e^{0.004(0.16+0.3^2/2)} = 1000.8.$$

b) $t = \frac{2}{252} \approx 0.008$,

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(0.008)] &= 1000^2 e^{2 \cdot 0.008(0.16+0.3^2/2)} (e^{0.008 \cdot 0.3^2} - 1) = 722.63, \\ \text{szórás} &= \sqrt{722.63} = 26.88. \end{aligned}$$

c) $t = \frac{10}{252} \approx 0.04$, és tudjuk, hogy az $X = \log\left(\frac{S(0.04)}{S(0)}\right)$ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke és szórása

$$\begin{aligned} E(X) &= mt = 0.16 \cdot 0.04 = 0.0064, \\ \sqrt{\text{Var}(X)} &= \sigma\sqrt{t} = 0.3 \cdot \sqrt{0.04} = 0.06. \end{aligned}$$

A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}
 P(950 < S(0.04) < 1100) &= P\left(\frac{950}{S(0)} < \frac{S(0.04)}{S(0)} < \frac{1100}{S(0)}\right) \\
 &= P\left(\log \frac{950}{1000} < \log \frac{S(0.04)}{S(0)} < \log \frac{1100}{1000}\right) \\
 &= P(-0.0513 < X < 0.0953) \\
 &= P\left(-0.9617 < \frac{X - 0.0064}{0.06} < 1.4817\right) \\
 &= \Phi(1.4817) - \Phi(-0.9617) = 0.76269.
 \end{aligned}$$

2.3. A geometriai Brown-mozgás egy egyszerű modellel való közelítése

Az alábbiakban egy egyszerű modellt mutatunk be, amely ugyan pontatlanul, de elfogadható interpretálását adja a geometriai Brown-mozgásnak. Tekintsünk egy t hosszúságú időtartamot, amelynek a kezdő ideje y , befejező ideje $t + y$. Legyen egy bizonyos részvény ára a két időpontban $S(y)$ ill. $S(t + y)$. Osszuk fel a t időtartamot n egyenlő részre és tegyük fel, hogy a részvény ára csak a részintervallumok végén változik. Minden részintervallum végén a részvény ára vagy p valószínűséggel u -szorosára változik ($u > 1$, tehát növekszik), vagy $(1 - p)$ valószínűséggel d -szorosára változik ($0 < d < 1$, tehát csökken), ahol

$$\begin{aligned}
 u &= e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, & d &= e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \\
 p &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{\sigma} \sqrt{\frac{t}{n}}\right).
 \end{aligned}$$

Legyen X_i egy Bernoulli valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az árfolyam növekszik és 0, ha az árfolyam csökken az i -edik részintervallumban. Az X_i valószínűségi változók mindegyikének ugyanaz a várható értéke és varianciája, mégpedig $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1 - p)$. Ekkor az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó mutatja, hogy a lejáratú idő alatt hányszor növekedett a részvény árfolyama. Az $n - Y$ valószínűségi változó pedig a lejáratú idő alatt a részvényárfolyam csökkenéseinek számát mutatja. Ezt figyelembevéve az időtartam alatt a részvény árfolyama $u^Y d^{n-Y}$ szorosára változik, azaz

$$S(t + y) = S(y)u^Y d^{n-Y}.$$

Most számítsuk ki a két árfolyam hányadosának a logaritmusát, felhasználva u és d faktorokra adott összefüggést, kapjuk, hogy

$$\log\left(\frac{S(t + y)}{S(y)}\right) = Y \log \frac{u}{d} + n \log d = 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}Y - \sigma\sqrt{nt}.$$

Az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó, mint ismeretes, binomiális eloszlású $E(Y) = np$ várható értékkel és $Var(Y) = np(1 - p)$ varianciával. A centrális határeloszlástétel értelmében elég nagy n esetén az Y valószínűségi változó ún. standardizáltja (az $\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}$ valószínűségi változó) standard normális eloszláshoz közelít $p = \frac{1}{2}$ esetén vagy amennyiben

p az n növekedésével $\frac{1}{2}$ -hez tart. A $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ valószínűségi változó standardizáltja is standard normális eloszlású lesz, mivel ez az Y lineáris transzformációja. A következőkben kiszámítjuk a $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ valószínűségi változó várható értékét és varianciáját.

$$\begin{aligned} E\left[\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)\right] &= E\left(2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}Y - \sigma\sqrt{nt}\right) = 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}E(Y) - \sigma\sqrt{nt} \\ &= 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}np - \sigma\sqrt{nt} = \sigma\sqrt{nt}(2p - 1) \\ &= \sigma\sqrt{nt}\left(\frac{m}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right) \\ &= mt. \end{aligned}$$

A variancia számításánál felhasználjuk, hogy $p \approx \frac{1}{2}$ elég nagy n -re.

$$\begin{aligned} Var\left[\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)\right] &= Var\left(2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}Y - \sigma\sqrt{nt}\right) = \left(2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2 Var(Y) \\ &= 4\sigma^2\frac{t}{n}np(1-p) \\ &\approx \sigma^2t. \end{aligned}$$

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy ha a t időtartam beosztásainak a számát egyre növeljük, úgy a $\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ valószínűségi változó eloszlása mt várható értékű és σ^2t varianciájú normális eloszláshoz közelít. Mivel az árfolyamváltozások függetlenek és azonos valószínűséggel (mindig p ill. $(1-p)$ valószínűséggel) történnek, ebből következik, hogy az $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ valószínűségi változó független a y időpont előtti áráktól. Tehát a geometriai Brown-mozgás mindkét feltétele teljesül.

2.4. A Brown-mozgás

Jelölje $S(y)$ egy értékpapír árát y idő elteltével a jelentől. Az $S(y), 0 \leq y < \infty$ értékpapír árak együttese m és σ paraméterű Brown-mozgást követ, ha az

$$S(t+y) - S(y)$$

valószínűségi változó

1. minden nemnegatív y és t értékre független az y időpont előtti áráktól és
2. mt várható értékű és σ^2t varianciájú ($\sigma\sqrt{t}$ szórású) normális eloszlású.

Ha a kezdő ár $S(0)$, akkor a t időbeli ár várható értéke és varianciája a normális eloszlásra megismert összefüggések alapján

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= S(0) + mt, \\ Var[S(t)] &= \sigma^2t. \end{aligned}$$

Az alábbi egyszerű modell jó közelítését adja a Brown-mozgásnak. Tekintsünk egy t hosszúságú időtartamot, amelynek a kezdő ideje y , befejező ideje $t+y$. Legyen egy bizonyos

részvény ára a két időpontban $S(y)$ ill. $S(t + y)$. Osszuk fel a t időtartamot n egyenlő részre és tegyük fel, hogy a részvény ára csak a részintervallumok végén változik. Minden részintervallum végén a részvény ára vagy p valószínűséggel u -val növekszik ($u > 0$), vagy $(1 - p)$ valószínűséggel $|d|$ -vel csökken ($d < 0$), ahol

$$\begin{aligned} u &= \sigma \sqrt{\frac{t}{n}}, & d &= -\sigma \sqrt{\frac{t}{n}}, \\ p &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{\sigma} \sqrt{\frac{t}{n}} \right). \end{aligned}$$

Legyen X_i egy Bernoulli valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az árfolyam növekszik és 0, ha az árfolyam csökken az i -edik részintervallumban. Az X_i valószínűségi változók mindegyikének ugyanaz a várható értéke és varianciája, mégpedig $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1 - p)$. Ekkor az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó mutatja, hogy a lejáratú idő alatt hány alkalommal növekedett a részvény árfolyama. Az $n - Y$ valószínűségi változó pedig a lejáratú idő alatt a részvényárfolyam csökkenéseinek számát mutatja. Ezt figyelembe véve az időtartam alatt a részvény árfolyama $Y u + (n - Y) d$ -vel változik, azaz

$$S(t + y) = S(y) + Y u + (n - Y) d.$$

Az u és d növekedést ill. csökkenést figyelembe véve, a részvényárfolyam különbségére az alábbi összefüggés adódik

$$S(t + y) - S(y) = Y(u - d) + nd = 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} Y - \sigma \sqrt{nt}.$$

Az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó, mint ismeretes, binomiális eloszlású $E(Y) = np$ várható értékkel és $Var(Y) = np(1 - p)$ varianciával. A centrális határeloszlástétel értelmében elég nagy n esetén az Y valószínűségi változó eloszlása normális eloszláshoz közelít. A $S(t + y) - S(y)$ valószínűségi változó is normális eloszlású lesz, mivel ez az Y lineáris transzformációja. Az $S(t + y) - S(y)$ valószínűségi változó várható értéke és varianciája a következő (a variancia számításánál felhasználjuk, hogy $p \approx \frac{1}{2}$ elég nagy n -re)

$$\begin{aligned} E[S(t + y) - S(y)] &= E\left(2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} Y - \sigma \sqrt{nt}\right) = 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} E(Y) - \sigma \sqrt{nt} \\ &= 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} np - \sigma \sqrt{nt} = \sigma \sqrt{nt}(2p - 1) \\ &= \sigma \sqrt{nt} \left(\frac{m}{\sigma} \sqrt{\frac{t}{n}}\right) \\ &= mt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[S(t + y) - S(y)] &= Var\left(2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} Y - \sigma \sqrt{nt}\right) = \left(2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2 Var(Y) \\ &= 4\sigma^2 \frac{t}{n} np(1 - p) \\ &\approx \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Tehát, ha a t időtartam beosztásainak a számát egyre növeljük, úgy a $S(t + y) - S(y)$ valószínűségi változó eloszlása mt várható értékű és $\sigma^2 t$ varianciájú normális eloszláshoz közelít.

A Brown-mozgást először Robert Brown angol botanikus (1827) használta folyékony anyagok és gázok részecskéinek mozgásának vizsgálatában. A részvények árfolyam-változásának vizsgálatában a Brown-mozgást Louis Bachelier francia matematikus használta 1900-ban.

A Brown-mozgásnak a részvényárfolyam leírásában két fő problémája van. Egyik, mivel a részvényár normális valószínűségi változó, így elméletileg negatív is lehet. Második, az a feltevés, hogy az árfolyamkülönbség egy fix hosszúságú intervallumon ugyanolyan normális eloszlású, nem egészen gyakorlatias. Nehezen elképzelhető, hogy egy értékpapír árának pl. egy hónap alatt 10-el való növekedése ugyanakkora valószínűségű mintha 50-ről vagy 80-ról növekedett volna meg. A geometriai Brown-mozgás kiküszöböli ezeket a problémákat. Egyrészt a logaritmus nem tesz lehetővé negatív árakat, másrészt nem az abszolút árváltozás, hanem az arányos árváltozás valószínűsége nem függ a kezdeti ártól. A két modell abban viszont hasonló, hogy mindkettő két darab paraméterrel egyértelműen jellemezhető.

3. fejezet

Opciók

A pénzügyi eszközök nagyon fontos csoportját alkotják a származtatott ügyletek (derivatívok). Ezek olyan ügyletek (pozíciók), amelyek értékét más értékpapírok árfolyama határozza meg, azaz értéke más értékpapírok árfolyamából "származik". Két fontos ilyen származtatott ügylet az opciók és a határidős (futures) ügyletek. Részletesebben az opciókkal foglalkozunk. Ezekkel való kereskedés először 1973-ban a Chicagói Opciók Tőzsdén indult meg. Magyarországon a Budapesti Értéktőzsdén a 90-es évek elejétől lehet az opciókkal kereskedni. A további alfejezetekben először az opciók fajtáit, majd néhány opciók kereskedési stratégiát mutatunk be. Végül az opcióárazással foglalkozunk, bemutatunk néhány opcióárazási modellt, majd levezetjük a nevezets Black-Scholes formulát.

3.1. Az opciók alapvető típusai

Az opcióknak két alapvető fajtája van, a vételi és az eladási opció.

Egy vételi opció (long call, LC) arra ad jogot tulajdonosának, hogy az opció szerződés tárgyát egy előre meghatározott áron a jövőben megvásárolja. Ezzel szemben az eladási opció (long put, LP) arra jogosítja tulajdonosát, hogy a szerződés tárgyát egy előre meghatározott áron a jövőben eladja.

Az ügyletben szereplő előre meghatározott árfolyamot kötési vagy lehívási árfolyamnak (exercise price), az előre meghatározott időpontot (illetve az időtartam végét) az opció lejáratának nevezzük.

Az opcióknak két fő típusát különböztetjük meg aszerint, hogy a vételi vagy eladási joggal mikor élhet az opció jogosultja, azaz mikor hívhatja le opcióját. Ha az opció európai típusú, az opció jogosultja csak az előre meghatározott időpontban jogosult lehívni opcióját, tehát megvenni vagy eladni a szerződés tárgyát az előre meghatározott áron. Ha az opció amerikai típusú, akkor az opció tulajdonosa az előre meghatározott időpontig bármikor lehívhatja az opciót.

Az opció jogosultjaival szembenálló szerződő feleket az opció kiíróinak nevezik. Ha valaki tehát kiír egy vételi opciót, ő tulajdonképpen egy eladási kötelezettséget (short call, SC) vállal a szerződés tárgyára a jövőben az előre megadott árfolyamon. Hasonlóan, az eladási opciók kiírói vételi kötelezettséget (short put, SP) vállalnak arra, hogy megvegyék a szerződés tárgyát az előre rögzített árfolyamon.

Az opció egy olyan értékpapír, ahol a szerződés tárgya egy másik értékpapír, vagy áru, emiatt nevezzük származtatott értékpapírnak.

Az opció tehát feljogosít egy bizonyos cselekvésre (vételtre vagy eladásra), az opció tulajdonosa azonban nem köteles élni e jogával. Ez különbözteti meg a határidős ügyleteket

tól, ahol a két szerződő fél azonosan kötelezettséget vállal a szerződés tárgyának jövőbeli adásvételére egy előre rögzített áron. Az opciós ügyletnél a felek közül csak az egyik, az opció kiírója vállal kötelezettséget, míg az opció vásárlója csak jogot szerez, kötelezettség nem terheli. A határidős ügylet megkötése nem kerül semmibe, ellenben az opciós ügylet megkötésénél költség merül fel. Az opció vásárlója a jogáért a kiírónak opciós díjat (premiomot) fizet.

A vételi opció illusztrálásaként képzeljünk el egy bizonyos részvényre szóló, 700 Ft kötési árfolyamú, 2001. áprilisában lejáró európai típusú vételi opciót (LC), amelyet 20 Ft-ért adtak el 2001. januárjában. A lejáratati napon a vételi opció megvásárlója 700 Ft árfolyamon veheti meg a szerződés tárgyát képező részvényt. Ha lejáratkor a részvény árfolyama a 700 Ft-os kötési árfolyam alatt van, akkor nyilvánvaló, hogy az opció tulajdonosa nem fog élni jogával, hisz a tőzsdén 700 Ft alatt vásárolhat részvényt, ekkor az opció értéktelenül jár le, a vételi opciót megvásárló befektető elveszti az opcióért kifizetett 20 Ft-ot. Ezzel szemben, ha a lejáratkor a részvény árfolyama a 700 Ft-os kötési árfolyam fölött van (pl. 750), akkor a vételi opció nyereségesnek bizonyul, mivel az opció tulajdonosának lehetősége van arra, hogy 700 Ft-ot fizessen egy olyan részvényért, amely 750 Ft-ot ér. Az opció értéke ekkor $750 - 700 = 50$ Ft, a befektető nyeresége pedig $50 - 20 = 30$ Ft.

Az eladási opció illusztrálásaként képzeljünk el egy bizonyos részvényre szóló, 1000 Ft kötési árfolyamú, 2001. áprilisában lejáró európai típusú eladási opciót (LP), amelyet 30 Ft-ért adtak el 2001. januárjában. A lejáratati napon az eladási opció megvásárlója 1000 Ft árfolyamon eladhatja a részvényt. Ha a lejáratkor a részvény árfolyama az 1000 Ft-os kötési árfolyam fölött van, akkor nyilvánvaló, hogy az opció tulajdonosa nem fog élni jogával, hisz a tőzsdén 1000 Ft fölött adhat el részvényt, ekkor az opció értéktelenül jár le, az eladási opciót megvásárló befektető elveszti az opcióért kifizetett 30 Ft-ot. Ezzel szemben, ha a lejáratkor a részvény árfolyama az 1000 Ft-os kötési árfolyam alatt van (pl. 950), akkor az eladási opció nyereségesnek bizonyul, mivel az opció tulajdonosának lehetősége van arra, hogy 1000 Ft-ért adjon el egy olyan részvényt, amely 950 Ft-ot ér. Az opció értéke ekkor $1000 - 950 = 50$ Ft, a befektető nyeresége pedig $50 - 30 = 20$ Ft.

Összefoglalva, ha európai típusú vételi opcióval rendelkezünk, akkor fogjuk lehívni opciónkat lejáratkor, ha a szerződés tárgyának aznap magasabb a piaci ára, mint ami az opció kötési árfolyama. Az európai típusú eladási opció esetén akkor érdemes opciónkat lejáratkor lehívni, ha az aznapi piaci ár alacsonyabb, mint a kötési árfolyam.

Az opciók értékét az alábbiak szerint foglалhatjuk össze. A lejáratkor egy európai típusú vételi opció értéke az azonnali ár és a kötési árfolyam különbsége, vagy nulla, amikor az azonnali ár alacsonyabb, mint a kötési árfolyam. Ezt az értéket az ismert $\max()$ függvény segítségével egyszerűen leírhatjuk és a későbbiekben is ezt használjuk más opciók értékének leírásánál is. Ha a kötési árfolyamot X -el, a lejáratkori (T időpontbeli) azonnali árfolyamot pedig S_T -vel jelöljük, akkor a vételi opciók értéke képletben

$$\max(S_T - X, 0).$$

Eladási opció esetén az opció értéke lejáratkor a kötési árfolyam és az azonnali árfolyam különbsége, vagy nulla, ha az azonnali árfolyam magasabb, mint a kötési árfolyam.

Mint az előzőekből láttuk minden opciós ügyletnek két oldala van. Az egyik oldalon az a befektető áll, aki hosszú pozícióban van (aki megvette az opciót), a másik oldalon pedig rövid pozícióban lévő befektető van (aki eladta ill. kiírta az opciót). Az opció kiírója induláskor pénzt kap, de később kötelezettségei lehetnek. A vételi opció kiírója eladási kötelezettséget, míg az eladási opció kiírója vételi kötelezettséget vállal. A kiíró befektető

nyeresége vagy vesztesége pontosan az ellentettje, mint az opciót megvásároló befektető nyeresége vagy vesztesége. Ezek alapján négy alapvető opciós pozíció lehetséges, ezek a következők.

1.	Hosszú pozíció egy vételi opcióban, vételi jog (LC)
2.	Hosszú pozíció egy eladási opcióban, eladási jog (LP)
3.	Rövid pozíció egy vételi opcióban, eladási kötelezettség (SC)
4.	Rövid pozíció egy eladási opcióban, vételi kötelezettség (SP)

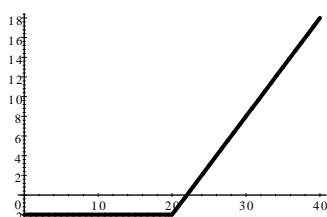
A négyféle opciós pozíció lejáratkori értékét (kifizetését) az alábbi képletekkel adhatjuk meg. Az opciónak mint láttuk kétféle értéke lehet attól függően, hogy mi a részvény lejáratkori árfolyama. A kötési árfolyamot X -el, a lejáratkori azonnali árfolyamot pedig S_T -vel jelölve az alábbi táblázat mutatja az opció értékét (kifizetését). A táblázatban a lehetséges részvény árfolyam esetén adódó kifizetéseket is megadtuk.

	Érték	$S_T \leq X$	$S_T > X$	képletben
1.	Vételi jog (LC)	0	$S_T - X$	$\max(S_T - X, 0)$
2.	Eladási jog (LP)	$X - S_T$	0	$\max(X - S_T, 0)$
3.	Eladási kötelezettség (SC)	0	$X - S_T$	$-\max(S_T - X, 0)$
4.	Vételi kötelezettség (SP)	$S_T - X$	0	$-\max(X - S_T, 0)$

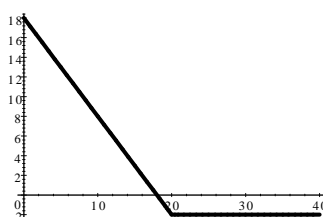
Az opciók nyereségét úgy kapjuk, hogy az opció lejáratkori értékét módosítjuk az opciós díjjal, csökkentjük a hosszú pozíciók esetén, növeljük a rövid pozíciók esetén. Ha C ill. P jelöli a vételi ill. eladási opció díját, akkor az alábbi táblázat mutatja a négyféle opció nyereségfüggvényét

1.	Vételi jog (LC) nyeresége	$\max(S_T - X, 0) - C$
2.	Eladási jog (LP) nyeresége	$\max(X - S_T, 0) - P$
3.	Eladási kötelezettség (SC) nyeresége	$-\max(S_T - X, 0) + C$
4.	Vételi kötelezettség (SP) nyeresége	$-\max(X - S_T, 0) + P$

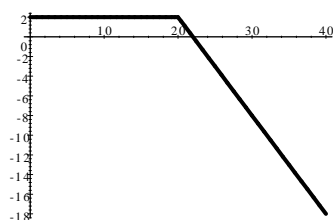
Az alábbi ábrákon az opciók nyereségét ábrázoltuk az opció lejáratkori árfolyamának függvényében. A kötési árfolyam 20, az opciós díj pedig 2.



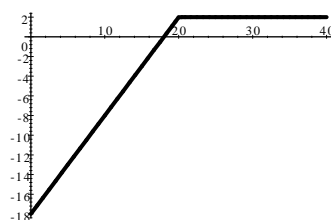
LC nyereségfüggvénye



LP nyereségfüggvénye



SC nyereségfüggvénye



SP nyereségfüggvénye

Az amerikai opciók esetében nem ilyen könnyű eligazítást adni abban a kérdésben, hogy mikor érdemes az opciót lehívni. Egy biztos: csak olyan vételi opciót érdemes lehívni, amelynél a termék azonnali árfolyama magasabb a kötési árfolyamnál, és csak olyan eladási opciót, amely esetén az azonnali árfolyam alacsonyabb a kötési árfolyamnál.

3.2. Opciós stratégiák

A spekulánsok azért kedvelik az opciókat, mert a legkülönbözőbb nyereségfüggvényeket alkothatják meg az opciók segítségével, attól függően, hogy mik az adott spekuláns árelképzelései. Az alábbiakban a legismertebb stratégiákat ismertetjük.

3.2.1. Egy opciót és egy részvényt tartalmazó stratégia

Biztonsági eladási jog stratégia

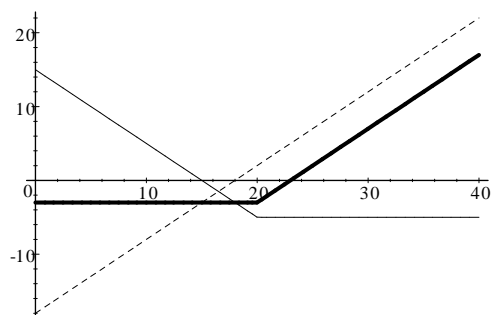
Tekintsük az alábbi stratégiát: befektetünk egy részvénybe és ugyanerre a részvényre vásárolunk egy eladási jogot. Ennek a portfóliónak az értéke az opció lejáratakor nem más mint a részvény lejáratkori árfolyamának és az opció lejáratkori értékének az összege, azaz

$$S_T + \max(X - S_T, 0).$$

A portfólió nyereségét a részvény nyereségének és az opció nyereségének összege adja. A nyereséget úgy kapjuk, hogy az értékből kivonjuk a létrehozás költségét, azaz a részvény esetén a kezdő árfolyamot, opció esetén pedig az opció díját vonjuk ki az értékből, azaz portfólió nyeresége

$$S_T - S_0 + \max(X - S_T, 0) - P.$$

Az alábbi ábrán a vastag vonal a portfólió nyereségét, a szaggatott vonal a részvény nyereségét, a vékony vonal pedig az opció nyereségét mutatja. Az ábrán a kötési árfolyam $X = 20$, az opciós díj $P = 2$, a kezdő árfolyam $S_0 = 18$.



Biztonsági put stratégia

Ez a stratégia valamiféle biztosítást jelent a részvény árfolyamának csökkenése ellen, mivel korlátozza a veszteséget. A részvény árfolyamának növekedése esetén az a védelem ára, hogy a nyereség csökken a szükségtelennek bizonyult opció költségével.

Fedezett eladási kötelezettség stratégia

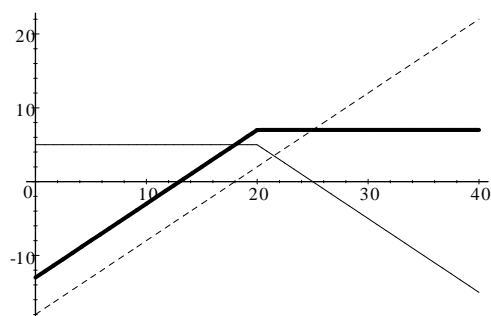
Befektetünk részvénybe és ugyanerre a részvényre eladunk egy vételi jogot (eladási kötelezettséget vállalunk). Ennek a portfóliónak az értéke az opció lejáratakor

$$S_T - \max(S_T - X, 0),$$

a nyeresége pedig az opció díjával növelt és a részvény kezdő árfolyamával csökkentett érték, azaz

$$S_T - S_0 - \max(S_T - X, 0) + C.$$

A alábbi ábra mutatja a portfólió nyereségét. Az ábrán a kötési árfolyam $X = 20$, az opciós díj $C = 2$, a kezdő árfolyam $S_0 = 18$.



Fedezett eladási kötelezettség stratégia

Ezt a stratégiát azért nevezik fedezettnek, mert az esetleges részvényeladási kötelezettséget fedezi a portfólióban tartott részvény.

3.2.2. Különbözeti stratégiák

A különbözeti stratégiák lényege, hogy két vagy több egyforma típusú opcióban vállalunk pozíciót.

Vertikális különbszet (money spread)

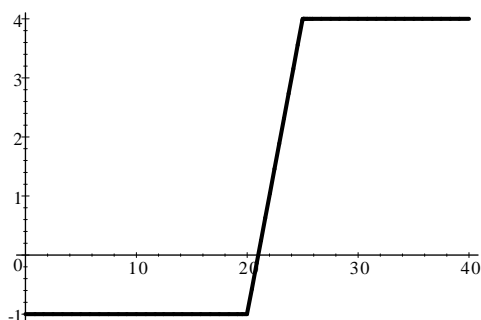
A vertikális különbszet két opcióból áll. Két fajtája van. Ha vételi opciókból állítjuk elő, akkor az erősödő különbözetet (bull spread), ha pedig eladási opciókból, akkor a gyengülő különbözetet (bear spread) kapjuk. Az erősödő különbözet egy vételi opció (LC) alacsonyabb kötési árfolyammal (X_1) történő vételét és egy vételi opció (SC) magasabb árfolyammal (X_2) történő kiírását jelenti. A gyengülő különbözet ezzel ellentétben egy eladási opció (SP) alacsonyabb kötési árfolyammal történő kiírását és egy eladási opció (LP) magasabb kötési árfolyammal történő vételét jelenti.

Az erősödő különbözet értékét és a benne szereplő portfólió-elemek lejáratkori értékét az alábbi táblázatba foglalhatjuk.

	$S_T \leq X_1$	$X_1 < S_T \leq X_2$	$S_T > X_2$	képletben
LC	0	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$	$\max(S_T - X_1, 0)$
SC	0	0	$X_2 - S_T$	$-\max(S_T - X_2, 0)$
összesen	0	$S_T - X_1$	$X_2 - X_1$	

Legyen az egyik vételi opció vételára C_1 , a másik vételi opció eladási ára C_2 , ekkor a portfólió nyereségét az alábbi képlettel írhatjuk le

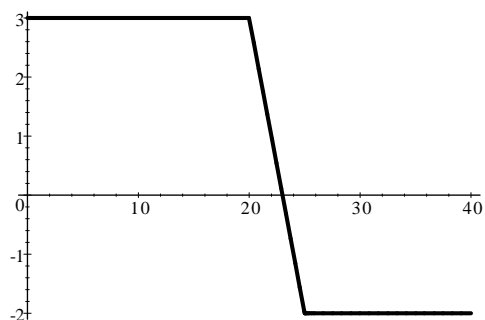
$$\max(S_T - X_1, 0) - C_1 - \max(S_T - X_2, 0) + C_2.$$



Erősödő különbözet

Hasonlóan kaphatjuk meg a gyengülő különbözet nyereségfüggvényét, amelyet az alábbiakban közlünk grafikonjával együtt.

$$-\max(X_1 - S_T, 0) + P_1 + \max(X_2 - S_T, 0) - P_2.$$



Gyengülő különbözet

A vertikális különbözeteknek - a fenti ábrákból láthatóan - az a jellegzetességük, hogy mind a veszteséget, mind pedig a nyereséget korlátozzák. Az erősödő különbözet stratégiát, mint neve is mutatja, akkor érdemes alkalmazni, ha a spekuláns az árak emelkedésére számít, a gyengülőt pedig akkor, ha inkább az árak csökkenésére számít.

A vertikális különbözeti stratégia mellett léteznek horizontális különbözeti stratégiák (time spread) is, ahol az opciók a lehívási időben térnek el.

Pillangó (butterfly spread)

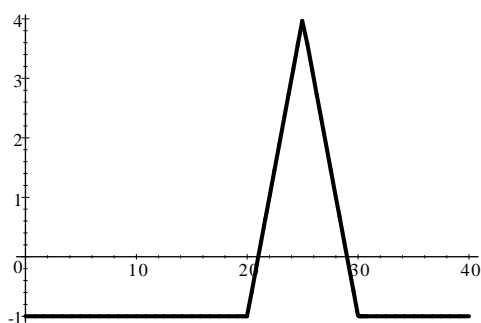
A pillangó pozíció létrehozásához három opcióra van szükségünk. Ez is kialakítható vételi ill. eladási opciókból.

A vételi opciókból történő kialakítás esetén kétféle kötési árfolyammal kell egy-egy vételi opciót vennünk és a két kötési árfolyam közé eső harmadik kötési árfolyammal pedig két vételi opciót kiírnunk. Az alábbi táblázat a portfólió kifizetését mutatja a lejáratkori árfolyam függvényében. A második összesen sorban az az eset áll, amikor a középső kötési árfolyam a két szélső számtani átlaga.

	$S_T \leq X_1$	$X_1 < S_T \leq X_2$	$X_2 < S_T \leq X_3$	$S_T > X_3$
LC	0	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$
LC	0	0	0	$S_T - X_3$
2 db SC	0	0	$2(X_2 - S_T)$	$2(X_2 - S_T)$
összesen	0	$S_T - X_1$	$2X_2 - X_1 - S_T$	$2X_2 - X_1 - X_3$
összesen	0	$S_T - X_1$	$X_3 - S_T$	0

A pillangó portfólió nyereségfüggvénye és annak grafiakonja az alábbi

$$\max(S_T - X_1, 0) - C_1 + \max(S_T - X_3, 0) - C_3 + 2[-\max(S_T - X_2, 0) + C_2]$$



Pillangó nyereségfüggvénye

Az eladási opciók segítségével úgy hozhatunk létre pillangót, hogy a legalacsonyabb és legmagasabb kötési árfolyammal egy-egy eladási opciót veszünk, a középsővel pedig két eladási opciót kiírunk.

A pillangó stratégiák arra spekulálnak, hogy az eszköz ára a lejáratkor egy bizonyos érték környezetében lesz.

A stratégia fordítottja is megvalósítható (ezt fordított pillangónak nevezzük), ha a pozíciókban az opciók vétele helyett kiírjuk őket, a kiírt opciók helyett pedig ugyanazokat megvesszük. Ekkor egy olyan portfóliót állítunk elő, amely igen veszteséges, ha egy adott érték körül van lejáratkor a részvény árfolyama, de nyereséges, ha ettől az értéktől jelentősen eltér.

A pillangó stratégiában igazából arra fogadunk, hogy a szerződés tárgyának ára a jövőben mennyire fog ingadozni, idegen szóval mennyire volatilis. Ha az ár a lejáratig kevésbé ingadozik, mint amennyire a piac jelenleg várja, a pillangó stratégia várhatóan nyereséges lesz.

3.2.3. Kombinációs stratégiák

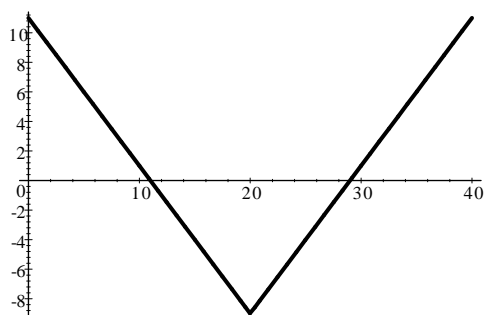
A kombinációs stratégiák nem azonos típusú opciókból állnak, hanem vételi és eladási opciók is szerepelnek benne.

Terpesz (straddle)

A terpesz stratégia egy vételi és egy eladási opció egyidejű vásárlását jelenti ugyanolyan kötési árfolyammal. Hasonlóan a fordított pillangóhoz, létrehozásakor arra spekulálunk, hogy a lejáratkori árfolyam a mostani kötési árfolyamtól jelentősen eltér majd (illetve a lejáratig erősen ingadozni fog).

A terpesz pozíció nyereségfüggvénye és ábrája a következő:

$$\max(S_T - X, 0) - C + \max(X - S_T, 0) - P$$



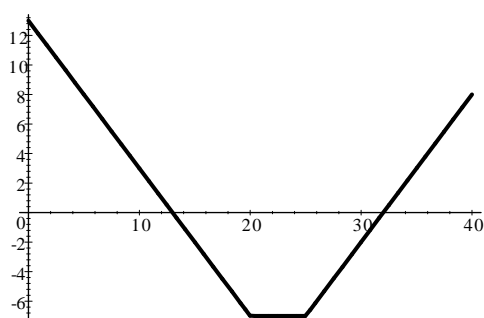
Terpesz nyereségfüggvénye

Ennek a stratégiának a fordítottja is létrehozható a már említett módszerrel: ha a vételi és az eladási opciókat nem vesszük, hanem kiírjuk, nyereségfüggvényünk sátor alakú lesz. A fordított terpesz azonban rendkívül kockázatos pozíció: veszteségünk nincs limitálva, akár felfelé, akár lefelé mozdul el az árfolyam.

Széles terpesz (strangle)

A széles terpesz pozíció egy alacsonyabb kötési árfolyamú eladási és egy magasabb kötési árfolyamú vételi opcióból áll. Hasonló a terpeszhez, a különbség az, hogy a lejáratkori árfolyam nagyobb intervallumán eredményez veszteséget, cserébe viszont ez a veszteség kisebb, mint a terpesz legnagyobb vesztesége. Nyereségfüggvénye az alábbiakban látható:

$$\max(X_1 - S_T, 0) - P_1 + \max(S_T - X_2, 0) - C_2$$



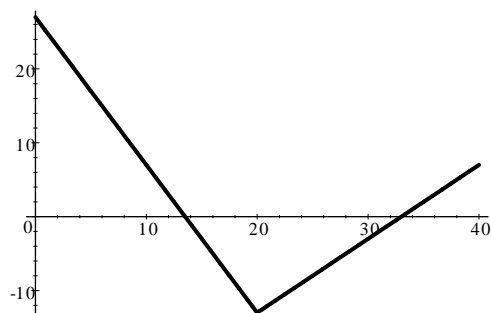
Széles terpesz nyereségfüggvénye

Bal terpesz (strip) és jobb terpesz (strap)

A bal terpesz egy vételi és két eladási opcióból áll, amelynek kötési árfolyama megegyezik, a jobb terpesz pedig két vételi és egy eladási opcióból, ugyancsak egyező kötési árfolyamokkal. A stratégia lényege az, hogy ha nagyobb valószínűséget adunk a piac elmozdulásának az egyik irányba, nyereségünk nagyobb lesz, ha ez a várakozásunk be is teljesül.

A bal terpesz nyereségfüggvénye és ábrája:

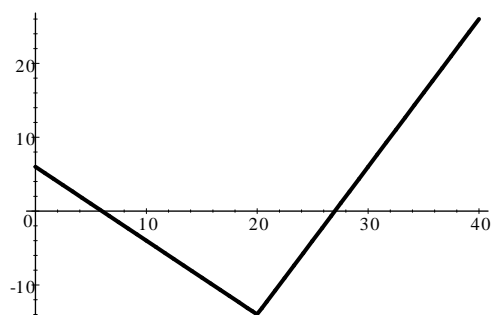
$$\max(S_T - X, 0) - C + 2[\max(X - S_T, 0) - P]$$



Bal terpesz nyereségfüggvénye

A jobb terpesz nyereségfüggvénye és ábrája:

$$2[\max(S_T - X, 0) - C] + \max(X - S_T, 0) - P$$



Jobb terpesz nyereségfüggvénye

Javasoljuk az olvasónak, hogy próbáljon meg különböző stratégiákat megalkotni az opciókból.

3.3. A Put-Call paritás

Mint tudjuk a biztonsági put portfólió egy részvény vásárlásából és egy erre a részvényre szóló eladási jog vásárlásából áll. Ez a portfólió egy garantált alsó korláttal rendelkező kifizetést biztosít, de nem korlátozza a részvényárfolyam növekedésekor nyeresési lehetőséget. Ilyenfajta biztonság más portfólióval is kialakítható. Ha veszünk egy vételi jogot és egy kincstárjegyet, akkor ez a portfólió is korlátozza az árfolyam csökkenéskor kockázatot korlátlan nyereség lehetősége mellett.

A biztonsági put portfólió értéke a lejáratkori időpontban, mint azt már korábbról tudjuk.

Első portfólió	$S_T \leq X$	$S_T > X$
részvény értéke (R)	S_T	S_T
eladási opció értéke (LP)	$X - S_T$	0
portfólió értéke (R+LP)	X	S_T

Vizsgáljuk meg a második portfólió értékét, ahol vásárolunk egy vételi jogot és az opció kötési árfolyamával megegyező névértékű és az opció lejáratával megegyező lejáratú kincstárjegyet. A kockázatmentes kötvény mint tudjuk a lejáratkor névértéken jár le, így a második portfólió lejáratkori értékét az alábbiak szerint írhatjuk.

Második portfólió	$S_T \leq X$	$S_T > X$
kötvény értéke (K)	X	X
vételi opció értéke (LC)	0	$S_T - X$
portfólió értéke (K+LC)	X	S_T

A fentiekből látható, hogy a két portfólió mindig azonos kifizetést biztosít. Az egységes ár törvénye alapján a portfóliók létrehozási költségének is meg kell egyeznie. Ezért a részvényből és eladási opcióból álló portfóliónak ugyanannyiba kell kerülnie, mint a kötvényből és vételi opcióból álló portfóliónak. A részvény megvásárlása S_0 -ba kerül (a nulladik időpontbeli árfolyam). A vételi opció ár C , az eladási jog ára pedig P . Az X névértékű kötvény induláskori értéke (jelenértéke) a kockázatmentes kamatlábbal diszkontált érték, azaz $X/(1+r)^T$, folytonos kamatozást feltételezve pedig Xe^{-rT} . Ezek alapján az alábbi egyenlet írható

$$S_0 + P = Xe^{-rT} + C.$$

Ezt az egyenletet Put-Call paritásnak nevezik, mert a vételi és az eladási opció ára közötti kapcsolatot adja meg. Ha ez a paritásos kapcsolat nem áll fenn, akkor arbitrázsra nyílik lehetőség. Ezt a fontos információt egy tétel formájában is kimondjuk.

TÉTEL:

Legyen C egy vételi opció ára, amely lehetővé teszi, hogy tulajdonosa X kötési árfolyamon vásároljon a T lejáratú időben egy részvényt és legyen P egy eladási opció ára, amely lehetővé teszi, hogy tulajdonosa X kötési árfolyamon eladjon a T lejáratú időben egy részvényt. Legyen továbbá S_0 a részvény 0 kezdőidőben a részvény árfolyama. A T lejáratú időig érvényes (folytonosan számított) r kockázatmentes nominális kamatlábat feltételezve, vagy

$$S_0 + P = Xe^{-rT} + C,$$

vagy van arbitrázs lehetőség, azaz ki lehet alakítani olyan portfóliót, amelynél bármilyen részvényárfolyam kimenet esetén biztos nyeresi lehetőség áll fenn.

A tétel bizonyítása.

1.) Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $S_0 + P < Xe^{-rT} + C$.

Ekkor alakítsuk ki az alábbi portfóliót

- veszünk egy részvényt,
- veszünk egy eladási opciót és
- eladunk (kiírunk) egy vételi opciót.

Ennek a portfóliónak a létrehozási költsége $S_0 + P - C$. Ennek fedezéséhez $S_0 + P - C$ mennyiségű pénzeszeget kölcsön veszünk a banktól, amelyet T -ben vissza kell fizetnünk

kamatostól, vagyis T -beli kiadásunk $(S_0 + P - C)e^{rT}$. Most nézzük meg, hogy mit ér a portfólió T -ben. Két esetet vizsgálunk, attól függően, hogy mekkora a részvény árfolyama.

a) Ha $S_T \leq X$, ekkor

- a megvett eladási opcióval élni fogunk, hisz X -ért el lehet adni a részvényt $S_T \leq X$ helyett, így ebből a portfólió elemből a bevételünk X lesz,

- az eladott vételi opció értéktelen, mert az opció vevője nem fog élni vételi jogával, hisz X -ért nem vásárol, mikor a tőzsdén $S_T \leq X$ árfolyamon is tud vásárolni.

Tehát a bevételünk $S_T \leq X$ esetben X .

b) Ha $S_T > X$, ekkor

- a megvett eladási opció értéktelen, mert nem érdemes X -ért eladni a részvényt $S_T > X$ helyett,

- az eladott vételi opciót az opció vevője érvényesíteni fogja, tehát kötelességünk X -ért eladni neki a részvényt, így ebből a portfólió elemből a bevételünk X lesz.

Tehát a bevételünk az $S_T > X$ esetben is X .

A T -beli bevétel és 0-beli kiadás különbsége $X - (S_0 + P - C)e^{rT}$, ami az $S_0 + P < Xe^{-rT} + C$ kiinduló feltételezésünk miatt pozitív, tehát biztos nyereségre tettünk szert.

2.) Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $S_0 + P > Xe^{-rT} + C$.

Ekkor alakítsuk ki a következő portfóliót

- eladunk egy részvényt,
- eladunk (kiírunk) egy eladási opciót és
- veszünk (kiírunk) egy vételi opciót.

Ennek a portfóliónak a létrehozása $S_0 + P - C$ bevételt eredményez. Ezt a $S_0 + P - C$ mennyiségű pénzeszeget betesszük a bankba, amelyet T -ben kamatostól visszkapunk, vagyis T -beli bevételünk $(S_0 + P - C)e^{rT}$. Most nézzük meg, hogy mit ér a portfólió T -ben. Két esetet vizsgálunk, attól függően, hogy mekkora a részvény árfolyama.

a) Ha $S_T \leq X$, ekkor

- az eladott eladási opció (vételi kötelezettség) esetén a vevő, aki megvette az eladási jogot, élni fog jogával, azaz eladja nekünk a részvényt X -ért, amit kötelességünk megvenni, így kiadásunk ebből a portfólió elemből X lesz,

- a megvett vételi opció értéktelen, mert nem érdemes X -ért részvényt vásárolni, mikor a tőzsdén $S_T \leq X$ árfolyamon is tudnánk venni.

Tehát a kiadásunk $S_T \leq X$ esetben X .

b) Ha $S_T > X$, ekkor

- az eladott eladási opció (vételi kötelezettség) értéktelen, hiszen a vevő nem fog X -ért eladni a részvényt $S_T > X$ helyett.

- a megvett vételi opciót érvényesíteni fogjuk, veszünk részvényt X -ért eladni, így ebből a portfólió elemből a kiadásunk X lesz.

Tehát a kiadásunk az $S_T > X$ esetben is X .

A 0-beli bevétel és a T -beli kiadás különbsége $(S_0 + P - C)e^{rT} - X$, ami az $S_0 + P > Xe^{-rT} + C$ kiinduló feltételezésünk miatt pozitív, tehát ebben az esetben is biztos nyereségre tettünk szert.

Ezzel a Put-Call paritásra vonatkozó tételt bebizonyítottuk.

Végezetül megjegyezzük, hogy a bizonyítást végezhetjük volna a pénzáramlási táblázat segítségével is. Az alábbiakban az 1. eset bizonyítását mutatjuk be. A portfólió kialakításának költségéhez a banktól Xe^{-rT} hitelt veszünk fel, amit lejáratkor kamatostól visszafizetünk, azaz összesen X -et.

	Indulás	$S_T \leq X$	$S_T > X$
részvény vásárlása	$-S_0$	S_T	S_T
eladási opció vétele (LP)	$-P$	$X - S_T$	0
vételi opció eladása (SC)	C	0	$X - S_T$
hitel felvétel	Xe^{-rT}	$-X$	$-X$
összesen	$Xe^{-rT} + C - S_0 + P$	0	0

A lejáratkor mindkét kimenet esetén zérus a pénzáramlás, induláskor pedig $Xe^{-rT} + C - S_0 - P$. A feltételezés szerint $S_0 + P < Xe^{-rT} + C$, így az induláskor pozitív a pénzáramlásunk, azaz nyereségre tettünk szert. Hasonlóan bizonyítható a 2. eset is.

3.4. Egzotikus opciók

Egzotikus opcióknak azokat a bonyolultabb opciókat nevezzük, amelyek a közönséges európai ill. amerikai vételi vagy eladási opcióktól eltérnek.

Ázsiai opciók

Az ázsiai opciók olyan opciók, amelyek attól függő összeget fizetnek, hogy mekkora volt az opció tárgyának átlagos árfolyama az opció futamidejének egy szakasza alatt.

Bináris opciók

A bináris vagy fogadásos opcióknak fix kifizetésük van, amely attól függ, hogy az eszköz bizonyos követelményeknek eleget tesz-e. Például az opció nem fizet semmit, ha lejáratkor a részvényárfolyam a kötési árfolyam alatt van és egy fix összeget fizet, ha fölötte van.

Visszatekintő opciók

A visszatekintő opcióknak olyan kifizetésük van, amely a részvény árfolyama által az opció futamideje alatt elért minimális vagy maximális áráról függ. Például lehet a kifizetés a futamidő alatt elért maximális árfolyam és a kötési árfolyam különbözete.

Limitáras opciók

A limitáras opciók kifizetése nemcsak a lejáratkori árfolyamtól függ, hanem attól is, hogy az opció élettartama alatt a részvény árfolyama átlép-e egy adott korlátot.

Választható opció

Az opció tulajdonosa egy meghatározott időperiódus után eldöntheti, hogy az opció vételi vagy eladási jog legyen.

3.5. Az opciók értékének lehetséges tartományai

Ebben az alfejezetben olyan összefüggéseket adunk az opció árára, amelyekhez nincs szükségünk sem a részvény volatilitására (árfolyamának változékonyságára), sem a részvényár alakulását meghatározó valószínűségi mutatókra.

3.5.1. Alsó korlátok

Az opciók értékének legnyilvánvalóbb lehetséges alsó korlátja, hogy az opció értéke nem lehet negatív, azaz

$$C \geq 0, \quad P \geq 0.$$

A vételi opció árára egy jobb alsó korlátot is felállíthatunk. Tekintsünk két portfóliót. Az egyik portfólió egy részvényre szóló vételi opciót tartalmazzon, a másik pedig ugyanebből a részvényből és egy Xe^{-rT} hitelfelvételből álljon. A másodikat szokás tőkeáttételes pozíciónak is nevezni. A hitel kamatostól való visszafizetése az opció lejáratának napján esedékes. A portfóliók értékét az alábbi táblázatok mutatják a részvény árfolyamának függvényében a lejáratkor.

Első portfólió	$S_T \leq X$	$S_T > X$
vételi opció értéke (LC)	0	$S_T - X$
Tőkeáttételes pozíció	$S_T \leq X$	$S_T > X$
részvény értéke (R)	S_T	S_T
hitel+kamat törlesztés (HK)	$-X$	$-X$
portfólió értéke (R+HK)	$S_T - X$	$S_T - X$

A fentiekből látható, hogy a két portfóliónak $S_T > X$ esetben ugyanaz a kifizetése lesz. Viszont $S_T \leq X$ esetben a vételi opció többet ér, mint a tőkeáttételes pozíció negatív kifizetése. Mivel tehát az opció kifizetése mindig nagyobb vagy egyenlő a tőkeáttételes pozíció kifizetésénél, így az egységes ár törvénye alapján a portfóliók létrehozási költsége között is ennek a viszonyoknak kell fennállni. Eszerint a vételi opció árának nagyobbnak vagy egyenlőnek kell lennie a tőkeáttételes pozíció létrehozásának költségével, azaz a részvény S_0 nulladik időpontbeli árfolyamának és a hitelnek a különbségével, azaz

$$C \geq S_0 - Xe^{-rT}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti korlát a Put-Call paritásból is kijön, mivel P -ről tudjuk, hogy $P \geq 0$.

Figyelembevéve a nyilvánvaló zérus alsó korlátot, a vételi opció C árára az alábbi alsó korlát írható

$$C \geq \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0).$$

Az eladási opcióra is felírhatunk egy felső korlátot, amelyet legegyszerűbben a Put-Call paritásból olvashatunk ki, ez a következő

$$P \geq \max(Xe^{-rT} - S_0, 0).$$

3.5.2. Felső korlátok

A vételi opcióra az induló S_0 részvényár egy felső korlátot szab, hiszen senki nem fizetne S_0 -nál többet egy olyan részvény megvásárlásának jogáért, amely a vásárláskor S_0 -t ér. Így

$$C \leq S_0.$$

Az eladási opció árára pedig a

$$P \leq X$$

felső korlát érvényes. Ha a részvény ára nullára esne, még akkor sem tudna az eladási opció tulajdonosa a részvény eladásával X -nél több pénzhez jutni, így nem is fizetne X -nél többet az eladási jogáért.

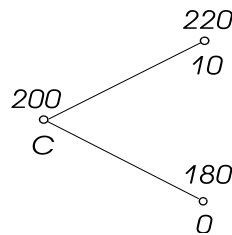
3.6. Az opciók árazása

Az eddigiekben már nagyon sok összefüggést ismertünk meg az opciók áraival kapcsolatban, de még nem adtunk választ arra, hogy mennyit ér valójában egy opció. A továbbiakban ezzel foglalkozunk részletesen. Megismerünk többféle értékelési módszert, majd végül levezetjük a nevezetes Black-Scholes formulát.

3.6.1. Binomiális opcióárazási modell

Egyperiódusú binomiális fák

Arbitrázsmentességen alapuló értékelés. A könnyebb megértés végett kezdjük egy számpéldával és az eredményeket általánosítani fogjuk. Tekintsünk egy európai vételi opciót, amelynek kötési árfolyama $X = 210$, futamideje 6 hónap, azaz $T = 0.5$ év. Ennek a vételi opciónak az értékét, árát szeretnénk meghatározni. A kiinduláskori részvényárfolyam legyen $S_0 = 200$ és tétélezzük fel, hogy az opció lejáratakor a részvény árfolyama két érték lehet, vagy $S^+ = 220$ vagy pedig $S^- = 180$. Az opció értéke lejáratakor tehát vagy 10 vagy 0, attól függően, hogy a részvény árfolyama nőtt vagy csökkent. Megkönnyíti a tájékozódást, főleg a későbbi általánosításoknál, ha a részvényárfolyamokat és az opció értékeket egy ábrával (fagráffal) szemléltetjük. A csúcspontokhoz felülre a részvény árfolyamát, alulra az opció értékét írjuk.



Ebben a leegyszerűsített esetben viszonylag könnyű lesz az opciót árazni. Az arbitrázs lehetőséget kell kizárni. Állítsunk össze egy portfóliót, ami részvényből és az arra szóló vételi opcióból álljon. A részvényben hosszú pozíciónk legyen, azaz részvényt vásárolunk, a vételi opciónkból pedig rövid pozíciónk legyen, azaz kiírjuk az opciót, ami eladási kötelezettséget jelent. Azt akarjuk, hogy ez a portfólió kockázatmentes legyen, azaz a kimenettől független legyen az értéke a lejáratkor. Mivel a portfólió csak két elemet tartalmaz és a kimenetek száma is csak kettő, így biztosan kialakítható kockázatmentes portfólió. Álljon a keresett portfólió Δ mennyiségű részvényből és 1 rövid pozíciós vételi opcióból. Ennek a portfóliónak az értéke vagy $220\Delta - 10$ vagy 180Δ . A portfólió akkor kockázatmentes, ha a két kimenetre azonos kifizetést biztosít, azaz

$$220\Delta - 10 = 180\Delta,$$

amelyből

$$\Delta = 0.25$$

adódik. Tehát a kockázatmentes portfólió 0.25 részvényből és 1 vételi opcióból áll. A lejáratkor a portfólió értéke 45. Miután a portfóliónak nincs kockázata, hozamának meg kell egyeznie a kockázatmentes kamatlábbal. Tegyük fel, hogy a kockázatmentes kamatláb évi 12 %, azaz $r = 0.12$. A lejáratkori hozamot visszaszámolva az indulásra (jelenértéket

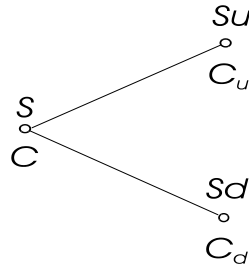
számolva) $45e^{-0.12 \cdot 0.5} = 42.379$ adódik. Ez tehát a portfólió induláskori értéke. Ennek egyenlőnek kell lenni a portfólió kialakítás költségével, azaz

$$42.379 = 200\Delta - C,$$

amelyből $C = 7.621$ adódik az opció értékére. Ha az opció értéke 7.621-nél nagyobb vagy kisebb lenne, akkor arbitrázs lehetőség állna fenn. Ha az opció ára 7.621-nél magasabb lenne (felülárazás), akkor a portfólió létrehozása 42.379-nél kevesebbe kerülne, így a kockázatmentes kamatlábnál nagyobb nyereséget biztosítana. Amennyiben viszont 7.621-nél alacsonyabb lenne (alulárazás), akkor a részvényt rövidre adnánk el, ami a kockázatmentes kamatlábnál olcsóbb hitel felvételére adna módot.

A részvény rövidre eladását az alábbiakban magyarázzuk. Normál esetben veszünk egy részvényt és azt eladjuk, rövidre eladás esetében pedig először eladjuk a részvényt majd megvesszük. Mindkét esetben tehát részvény nélkül kezdünk és végzünk. A rövidre eladás a részvényár csökkenéséből biztosít profitálási lehetőséget. A tőzsdén természetesen a rövidre eladás szabályozva van, csak árnövekedéskor lehet rövidre eladni.

Ahhoz, hogy a fenti gondolatmenetet felhasználhassuk az opcióárazás bonyolultabb módjaiban, formulázzuk meg a számításainkat. Legyen S az induló árfolyam, amely felfelé vagy lefelé mozdulhat el a T lejáratú idő végére, mégpedig S -ről Su -ra ill. S -ről Sd -re, ahol $u > 1, 0 < d < 1$. Ez azt jelenti, hogy a részvény árfolyama $100(u - 1)$ %-kal nő ill. $100(1 - d)$ %-kal csökken. Ha a részvény árfolyama Su -ra növekszik, akkor tegyük fel, hogy az opció értéke C_u , csökkenés esetén pedig legyen az opció értéke C_d .



A portfólió álljon Δ mennyiségű részvényből és 1 kiírt vételi opcióból, ekkor a két kimenet esetén a portfólió értéke

$$Su\Delta - C_u \quad \text{ill.} \quad Sd\Delta - C_d.$$

A két érték egyenlő, ha

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd}.$$

Tehát a Δ , amely a kockázatmentes portfólióban a részvény mennyiségét jelenti, nem más mint az opció és a részvény árváltozásának a hányadosa. Tehát az árváltozások arányában kell tartani részvényt és opciót a portfólióban. Ezt az arányt fedezeti aránynak vagy kockázatmentes lefedezésnek is nevezik. Az elnevezés onnan ered, hogy Δ mennyiségű részvényt kell tartani a rövid pozícióban tartott vételi opció mellett, ahhoz, hogy az opciós pozíciót kockázatmentesen fedezzük.

A példában indokolva, a portfólió jelenértékének meg kell egyeznie a portfólió létrehozásának költségével, azaz fenn kell állnia, hogy

$$(Su\Delta - C_u)e^{-rT} = S\Delta - C.$$

Ha ebbe a képletbe a Δ -t behelyettesítjük, akkor egyszerű átalakításokkal a következő formulát kapjuk a C opciós díjra

$$C = e^{-rT} [pC_u + (1 - p)C_d], \quad (3.1)$$

ahol

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \quad (3.2)$$

E két utóbbi formula szolgál az egyperiódusú binomiális modell szerinti árazásra. Az előző példa adataival számolva, ahol $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.12$, $T = 0.5$, $C_u = 10$, $C_d = 0$. A p értéke

$$p = \frac{e^{0.12 \cdot 0.5} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.80918,$$

az opció értéke pedig

$$C = e^{-0.06}(0.80918 \cdot 10 + 0.19082 \cdot 0) = 7.621.$$

Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a portfóliót egy kicsit általánosabban fogalmazzuk meg és egy kicsit másképpen okoskodunk. Ezt a megközelítést a fenti példa adataival az alábbiak mutatjuk be.

Álljon a portfólió x mennyiségű részvényből és y mennyiségű vételi opcióból. Az x, y értékek lehetnek pozitívok vagy negatívok is. Ha x pozitív, akkor x mennyiségű részvényt vásárolunk, ha negatív, akkor pedig $-x$ mennyiségű részvényt eladunk. Hasonlóan, ha y pozitív, akkor y mennyiségű vételi opciót vásárolunk, ha negatív, akkor pedig $-y$ mennyiségű vételi opciót eladunk (eladási kötelezettséget vállalunk). A gondolatmenetet

A portfólió értéke a lejáratkor $220x + 10y$, ha az árfolyam 220, ill. $180x$, ha az árfolyam 180.

Ez a portfólió akkor kockázatmentes, ha a két kimenetkor azonos az értéke, azaz

$$220x + 10y = 180x,$$

amelyből

$$x = -0.25y$$

adódik. Tehát első észrevételünk, hogy a kockázatmentes portfólióban x és y előjele ellenkező. Ha y pozitív, akkor y mennyiségű vételi opciót vásárolunk és $0.25y$ mennyiségű részvényt eladunk. Hasonlóan, ha y negatív, akkor $-y$ mennyiségű vételi opciót eladunk és $-0.25y$ részvényt vásárolunk. Az előzőeknek megfelelő eredményt kaptunk, ahol az $y = -1$ esettel dolgoztunk és $x = \Delta = 0.25$ adódott.

A portfólió induláskori értéke $200x + Cy$. Ha ez pozitív, akkor ennek megfelelő pénzeszeget beteszünk a bankba, ha ez negatív, akkor felvesszünk a banktól pénzt, hogy a kiadásunkat fedezni tudjuk. Az opció lejáratkori időpontjában vagy kamatostól visszakapjuk a banktól a pénzt, vagy kamatostól visszafizetjük a banknak a pénzt, mégpedig előjelhelyesen $e^{0.12 \cdot 0.5}(200x + Cy)$ mennyiséget. A lejáratkor a nyereségünk (N) a portfólió értékének és az előjelhelyes $e^{0.12 \cdot 0.5}(200x + Cy)$ mennyiségnek a különbsége lesz, azaz

$$N = 180x - e^{0.12 \cdot 0.5}(200x + Cy),$$

amelyből, felhasználva, hogy $x = -0.25y$, az alábbi nyereséget kapjuk.

$$N = ye^{0.12 \cdot 0.5}(50 - 45e^{-0.12 \cdot 0.5} - C).$$

Ha $C = 50 - 45e^{-0.12 \cdot 0.5} = 7.621$, akkor a nyereség 0. Egyéb esetben, akár nagyobb, akár kisebb az opció értéke 7.621-nél, mindig tudunk olyan portfóliót kialakítani, amelynél biztosan pozitív nyereséget érünk el. Ha ugyanis $C > 7.621$, akkor $y < 0$ választással pozitív lesz a nyereségünk, ha viszont $C < 7.621$, akkor $y > 0$ választással lesz pozitív a nyereségünk. Tehát felülárazáskor a nyerő stratégiánk az, hogy vételi opciót adunk el (kiírunk) és részvényt vásárolunk, alulárazáskor pedig vételi opciót vásárolunk és részvényt adunk el. A biztos nyerési stratégia lehetőségét nevezzük arbitrázsnek.

Egy kis számolás után ebben az esetben is az előzőekben levezetett (1), (2) képleteket kapjuk.

Kockázatmentes értékelés. Az alábbiakban egy másik értékelési megközelítést mutatunk be. A C -re a fentebb levezetett (1), (2) képletekben szereplő p -t az árfolyamnövekedés valószínűségéeként is felfoghatjuk, az $1 - p$ -t pedig a csökkenés valószínűségének, ekkor a C -ben szereplő

$$pC_u + (1 - p)C_d$$

kifejezés az opció várható értékét adja a lejáratkor. A C -re felírt (1) egyenlet szerint az opció ára nem más, mint ennek a várható kifizetésnek a jelenértéke.

A p -nek ilyen módon való értelmezése alapján a részvényárfolyam T -beli várható értéke

$$E(S_T) = pSu + (1 - p)Sd.$$

Ha most p helyébe a behelyettesítjük a p -re adott (2) képletet, akkor

$$E(S_T) = Se^{rT}$$

adódik, amely azt mutatja meg, hogy a részvényárfolyam átlagosan a kockázatmentes kamatlábnak megfelelő ütemben növekszik. Az a feltételezés, hogy a p -t az árfolyamnövekedés valószínűségének tekintjük, egyenértékű azzal a feltételezéssel, hogy a részvény várható hozama egyenlő a kockázatmentes kamatlábbal. Ezzel a kockázatmentes értékeléssel is megoldhatjuk a bevezetőben említett feladatot. Eszerint a p -nek ki kell elégítenie a

$$220p + 180(1 - p) = 200e^{0.06}$$

egyenletet, amelyből $p = 0.80918$. Az opció várható értéke

$$10p + 0(1 - p) = 8.0918,$$

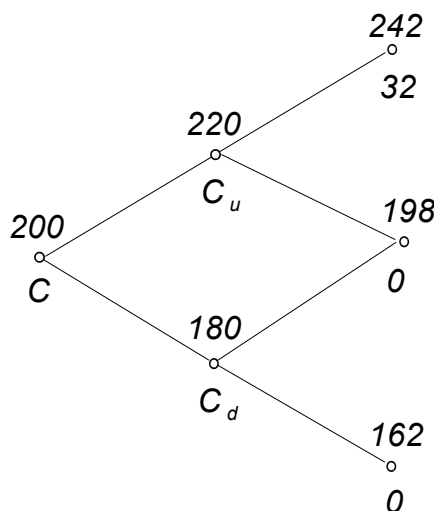
amelynek jelenértéke adja az opció értékét

$$C = e^{-0.06}8.0918 = 7.621.$$

Tehát az arbitrázsérvelés és a kockázatmentes értékelés azonos eredményt ad.

Többperiódusú binomiális fák

Módosítsuk modellünket oly módon, hogy a T lejáratú időt osszuk fel két azonos hosszúságú részre és mindkét időszakban szintén kétféle módon nőhet a részvény árfolyama. Az előző példánál maradván vagy 10 %-kal nő vagy 10 %-kal csökken. A részvény árfolyamának változását az alábbi fagráffal szemléltethetjük.



A végpontokban meg tudjuk határozni a vételi opció értékét. Ezen értékeket is feltüntettük a fenti ábrába a végpontokbeli árfolyamok alatt. Célunk a fa gyökerénél lévő C opció értéket meghatározni. Ezt lépésről-lépésre visszafelé haladva határozhatjuk meg. A többperiódusos modell felfogható egyperiódusos modellek láncolatának, amelyekre vonatkozóan már ismerjük a számítást. Az utolsó periódus két felső ágát tekintve, a két végső pont adataiból meghatározhatjuk ugyanezen periódus kezdő pontjához tartozó C_u opció értékét. A kockázatsemleges valószínűség

$$p = \frac{e^{0.12 \cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.65227,$$

a megfelelő időbeli opcióérték

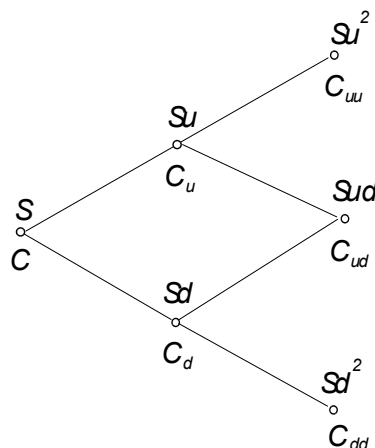
$$C_u = e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.65227 \cdot 32 + 0.34773 \cdot 0) = 20.256 .$$

Hasonló számítással határozható meg az utolsó periódus alsó két ágán is az opció érték, amely ez esetben zérus ($C_d = 0$).

Végül az első időperiódusra is hasonló számítást alkalmazva megkapjuk a vételi opció kezdőpontbeli értékét, vagyis az opció árát. Mivel az árfolyam ebben a periódusban is ugyanúgy változott és az időperiódus is azonos hosszúságú, így a p érték azonos az előzővel. A vételi opció ára tehát

$$C = e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.65227 \cdot 20.256 + 0.34773 \cdot 0) = 12.822 .$$

A következőkben a fenti számolást általánosítjuk. Tekintsük a részvény árfolyamait és az opció értékeit szemléltető bináris fát. A felső adat a részvény árfolyamát, az alsó pedig az opció értékét jelöli a megfelelő időpontban.



A számítás képletei a következők:

$$\begin{aligned} C_u &= e^{-rT/2} [pC_{uu} + (1-p)C_{ud}], \\ C_d &= e^{-rT/2} [pC_{ud} + (1-p)C_{dd}], \\ C &= e^{-rT/2} [pC_u + (1-p)C_d]. \end{aligned}$$

Ha a felső két egyenletet az alsó egyenletbe behelyettesítjük, akkor az alábbi egyetlen formulát kapjuk az opció árára

$$C = e^{-rT} [p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}].$$

Ez a formula azt mutatja, hogy a kockázatmentes világban az opció ára megegyezik az időszak végén adódó opciókifizetések várható értékének a kockázatmentes kamatlábbal diszkontált jelenértékével. A végpontokban a valószínűségek ugyanis p^2 , $2p(1-p)$, $(1-p)^2$. Ez az eredmény megfelel a korábban ismerttetett kockázatmentes értékelés alapelveivel.

Az opció értékének az opciókifizetések várható értékének jelenértékékként való számítása a példa adataival a következő

$$\begin{aligned} C &= e^{-0.12 \cdot 0.5} (0.65227^2 \cdot 32 + 2 \cdot 0.65227 \cdot 0.34773 \cdot 0 + \\ &\quad + 0.34773^2 \cdot 0) = 12.822. \end{aligned}$$

Amennyiben kettőnél több periódusra bontjuk az opció lejáratát idejét, ugyanígy fennáll a kockázatmentes értékelés elve. Bontsuk fel a T lejáratát időt n részre. Ekkor a végpontokban $n + 1$ -féle árfolyam lehetséges, amelyeknek értéke (S_0 -al jelölve az induló árfolyamot, k -val pedig azt, hogy hány részperiódus alatt nőtt a részvény árfolyama a T idő alatt)

$$S_0 u^k d^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

a megfelelő valószínűségek pedig

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Mint ismeretes, a végpontokban az opció értéke

$$\max(S_0 u^k d^{n-k} - X, 0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

A fenti érvelés alapján a vételi opció értéke az opció várható kifizetéseinek a jelenértéke, képletben

$$C = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \max(S_0 u^k d^{n-k} - X, 0).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti gondolatmenetet nemcsak vételi opció árazására, hanem eladási opció árának meghatározására is alkalmazhatjuk, csupán az eladási opció lejáratkori értékeit kell figyelembe venni, azaz

$$P = e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \max(X - S_0 u^k d^{n-k}, 0).$$

Példa:

Gyakorlásképpen határozzuk meg a fenti példa adataival az eladási opció árát. A lejáratkori opció értékek könnyen számíthatók, ezek a következők: 0, 12, 48. A visszafelé számolt opció értékek

$$\begin{aligned} P_u &= e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.65227 \cdot 0 + 0.34773 \cdot 12) = 4.0494, \\ P_d &= e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.65227 \cdot 12 + 0.34773 \cdot 48) = 23.794. \end{aligned}$$

Az eladási opció értéke

$$P = e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.65227 \cdot 4.0494 + 0.34773 \cdot 23.794) = 10.593.$$

Természetesen számolhattunk volna a lejáratkori opciós kifizetések várható értékének jelenértékével is, ekkor ugyanazt az eredményt kapjuk az eladási opció értékére

$$\begin{aligned} P &= e^{-0.12 \cdot 0.5} (0.65227^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0.65227 \cdot 0.34773 \cdot 12 + \\ &\quad + 0.34773^2 \cdot 48) = 10.593. \end{aligned}$$

Ha már a példában meghatároztuk mind a vételi, mind az eladási opció árát, ellenőrizzük, hogy fennáll-e a kétfajta opció árára vonatkozó Put-Call paritás. A Put-Call paritás képlete: $S_0 + P = X e^{-rT} + C$, amelynek két oldala

$$\begin{aligned} 200 + 10.593 &= 210.59, \\ 210 e^{-0.12 \cdot 0.5} + 12.822 &= 210.59. \end{aligned}$$

Amerikai opciók

Eddigiekben európai típusú opciókkal foglalkoztunk. Az amerikai opciók binomiális fa segítségével szintén árazhatók. Az eljárás hasonló az európaihoz, azaz visszafelé haladunk a fa végpontjaitól a kezdőpontig, de minden csúcspontnál ellenőrizzük, hogy az adott időpontban érdemes-e lehívni az opciót. A végső csúcspontokban nyilván azonos az opció értéke az európaiéval.

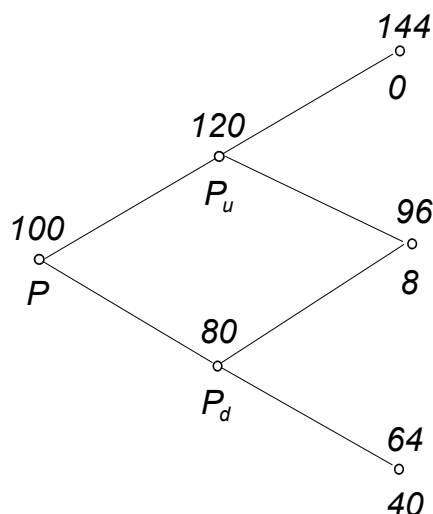
Példa:

Példaként tekintsünk most egy amerikai típusú eladási opciót. Legyenek az adatok az alábbiak: $S_0 = 100$, $X = 104$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, $r = 5\%$ (évi), $T = 2$ év, $n = 2$.

A kockázatsemleges valószínűség

$$p = \frac{e^{0.05 \cdot 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.62818,$$

Az árfolyamokat és a végpontokban lévő opcióértékeket az alábbi fagráffal szemléltethetjük



Az első időszak utáni két opció érték az ismert képletekkel számolva

$$\begin{aligned} P_u &= e^{-0.05 \cdot 1}(0.62818 \cdot 0 + 0.37182 \cdot 8) = 2.8295, \\ P_d &= e^{-0.05 \cdot 1}(0.62818 \cdot 8 + 0.37182 \cdot 40) = 18.928. \end{aligned}$$

Most ellenőrizni kell a számított opció-értékeket. Amikor a részvény árfolyama 120, akkor nem érdemes lehívni az eladási opciót, hiszen akkor csak 104 pengzegységért tudnánk eladni a részvényt. Amikor a részvény ára 80, akkor érdemes lehívni az opciót, ekkor az opció értéke $104 - 80 = 24$. Tehát ebben az esetben azt mondjuk, hogy a lejárat előtti lehívás optimális és az opció értéke 24 lesz. Ezután az ellenőrzött és esetlegesen módosított opcióértékekkel számolunk tovább. A kezdőpontbeli opcióérték, azaz az amerikai eladási opció ára

$$P = e^{-0.05 \cdot 1}(0.62818 \cdot 2.8295 + 0.37182 \cdot 24) = 10.179.$$

3.6.2. A részvényárfolyam-változás mértékének meghatározása

A binomiális modellben az u , d paraméterek a részvényárfolyam kétféle változását mutatják egy adott időszakban. Kérdés, hogy ezeket a fontos paramétereket mekkorára válasszuk meg. Tekintsünk egy Δt hosszúságú időintervallumot. Feltételezéseink szerint a részvény árfolyama geometriai Brown-mozgást végez m és σ paraméterekkel. Jelölje S_0 a Δt hosszúságú időintervallum elején a részvény árfolyamát. A részvény árfolyamának várható értéke és varianciája a Δt hosszúságú időintervallum végén a geometriai Brown-mozgásnál megismert képletekkel az alábbiak szerint írható fel

$$\begin{aligned} E(S) &= S_0 e^{(m + \sigma^2/2)\Delta t}, \\ \text{Var}(S) &= S_0^2 e^{2(m + \sigma^2/2)\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1). \end{aligned}$$

A kockázatsemleges értékelésnél megmutattuk, hogy

$$E(S) = S_0 e^{r\Delta t},$$

amelyből kockázatsemleges világban az árfolyammozgás m és σ paramétereit, valamint az r kockázatmentes kamatláb között az alábbi összefüggés áll fenn

$$r = m + \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{ill.} \quad m = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Az árfolyam várható értékét a kockázatsemleges p valószínűséggel számolva, a kockázatsemleges értékelésnél már megismert fontos összefüggést kapjuk

$$S_0 e^{r\Delta t} = pS_0 u + (1-p)S_0 d,$$

amelyet S_0 -al osztva

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d.$$

A részvény árfolyamának varianciáját az ismert összefüggéssel számolva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= E(S^2) - [E(S)]^2 = p(S_0 u)^2 + (1-p)(S_0 d)^2 - \\ &\quad - (pS_0 u + (1-p)S_0 d)^2. \end{aligned}$$

Ezt egyenlővé téve a geometriai Brown-mozgásra megismert varianciaképlettel (felhasználva az m és r közötti összefüggést), rendezés után kapjuk, hogy

$$S_0^2 e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = pS_0^2 u^2 + (1-p)S_0^2 d^2.$$

Összefoglalva tehát az alábbi két formula áll rendelkezésünkre az u , d , p meghatározására

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= pu + (1-p)d, \\ e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= pu^2 + (1-p)d^2. \end{aligned}$$

Ha harmadik feltételként felvesszük az

$$u = \frac{1}{d}$$

előírást, akkor az u , d , p paraméterekre az alábbi képleteket kapjuk

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\Delta t}, \\ d &= e^{-\sigma\Delta t}, \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned}$$

A felfelé és a lefelé való mozgás mértékét tehát a részvény árfolyam volatilitásának függvényeként kaptuk meg.

3.6.3. A részvényárfolyam volatilitásának mérése

Az előző pontban megismertük, hogy a részvény árfolyamának felfelé és lefelé történő mozgását a részvény árfolyamának változékonysága határozza meg. Ebben a pontban ennek a σ paraméternek a becslésével foglalkozunk. Ezt úgy végzik, hogy a részvényárat meghatározott időintervallumokban (naponta, hetente, havonta) megfigyelik. Végezzünk $n + 1$ megfigyelést, $0, 1, 2, \dots, n$ jelölésekkel. Jelölje Δt az időintervallum hosszát években, S_i pedig a részvény árfolyamát az i -edik időintervallum végén. A megfigyelt árfolyamokból képezzük a

$$z_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}},$$

értékeket minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re. A z_i értékek számtani átlagát a

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n},$$

a korrigált szórását pedig az

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n - 1}}$$

ismert képletekkel kiszámítjuk.

A részvényárfolyam feltevésünk szerint geometriai Brown-mozgást végez m és σ paraméterekkel. Ez azt jelenti, hogy egy Δt időintervallumban a részvényárak hányadosának logaritmusának $m\Delta t$ várható értékű és $\sigma\sqrt{\Delta t}$ szórású normális eloszlást követ. Ha a $\sigma\sqrt{\Delta t}$ szórás becslésére a korrigált szórást használjuk, akkor a σ becslésére

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$$

adódik. Amennyiben a megfigyeléseinket naponként végezzük és feltételezzük, hogy egy évben 252 kereskedési nap van (célszerű nem naptári napokban számolni), úgy $\Delta t = \frac{1}{252}$ év, így a σ paraméterre vonatkozó becslésünk a következő

$$\sigma = s\sqrt{252}.$$

3.7. Black-Scholes formula

Az előző részben az opciók árazásának egyfajta módját, az ún. binomiális opcióárazási modellt mutattuk be. 1973-ban F. Black és M. Scholes levezettek egy képletet az opcióárazásra, amelyet ma is használnak és Black-Scholes opcióárazási formula néven ismerünk.

Az alábbi megszokott jelöléseket használjuk:

S_0 : az induló részvényárfolyam,

X : a vételi opció kötési árfolyama,

r : a nominális kamatláb folytonos kamatozással,

T : a vételi opció lejárat ideje,

σ : a részvényárfolyam szórás paramétere.

Tegyük fel, hogy a részvény árfolyama geometriai Brown-mozgást végez σ paraméterrel.

Osszuk fel az opció T lejáratási idejét n egyenlő részre, egy részidőtartam hossza így $\frac{T}{n}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden részintervallumban az árfolyam vagy növekszik, vagy csökken. Minden részintervallumban ugyanakkora legyen az u növekedési faktor értéke, hasonlóan a d csökkenési faktor értéke is.

Legyen X_i egy Bernoulli valószínűségi változó, amelynek értéke 1, ha az árfolyam növekszik és 0, ha az árfolyam csökken az i -edik részintervallumban. Az X_i valószínűségi változók mindegyikének ugyanaz a várható értéke és varianciája, mégpedig $E(X_i) = p$, $Var(X_i) = p(1-p)$. Ekkor az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó mutatja, hogy a lejáratási idő alatt hányszor növekedett a részvény árfolyama. Az $n - Y$ valószínűségi változó pedig a lejáratási idő alatt a részvényárfolyam csökkenéseinek számát mutatja. Ezt figyelembevéve a lejáratási időben a részvény árfolyamát, mint valószínűségi változót az alábbiak szerint írhatjuk

$$S_T = S_0 u^Y d^{n-Y}.$$

A kockázatmentes értékelés alapján ismert, hogy az opció ára a lejáratási időbeli opció értékek várható értékének a jelenértékével egyezik meg. Az opció lejáratkori értéke mint ismeretes $\max(S_T - X, 0)$. A továbbiakban a $\max(S_T - X, 0)$ mennyiség jelölésére a szakirodalomban is alkalmazott, rövidebb $(S_T - X)^+$ jelölést használjuk. Tehát a fentiek alapján a vételi opció C értéke (ára) az alábbiak szerint írható

$$C = \left(1 + r \frac{T}{n}\right)^{-n} E[(S_T - X)^+] = \left(1 + r \frac{T}{n}\right)^{-n} E[(S_0 u^Y d^{n-Y} - X)^+].$$

Az előző alpontokban javasoltuk, hogy az u növekedési és a d csökkenési faktorok az árfolyam szórásparaméterével legyenek kapcsolatban, mégpedig előzőekben már megismert formulákkal adottan, azaz

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}, \\ d &= e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}. \end{aligned}$$

Az arbitrázsmentességet biztosító valószínűség (növekedés valószínűsége) a szintén ismert képlettel adott (egyszerű kamatozást feltételezve)

$$p = \frac{1 + r \frac{T}{n} - d}{u - d}.$$

A továbbiakban közelítsük az u és d faktorokat az exponenciális függvény MacLaurin sorának első három tagjával, ekkor az u , d és p paraméterek az alábbiak lesznek.

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}, \\ d &= e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 - \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}, \\ p &= \frac{1 + r \frac{T}{n} - d}{u - d} \approx \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma} \sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{\sigma}{4} \sqrt{\frac{T}{n}}. \end{aligned}$$

Ezeket a közelítéseket figyelembe véve az opció árára a következő formulát kapjuk

$$\begin{aligned} C &= \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^{-n} E[(S_0 u^Y d^{n-Y} - X)^+] \\ &= \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S_0 \left(\frac{u}{d}\right)^Y d^n - X\right)^+\right] \\ &= \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - X\right)^+\right]. \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$W = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y - \sigma\sqrt{nT}$$

valószínűségi változót, ekkor az opció ára

$$C = \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^{-n} E\left[\left(S_0 e^W - X\right)^+\right].$$

Az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó, mint ismeretes, binomiális eloszlású $E(Y) = np$ várható értékkel és $Var(Y) = np(1-p)$ varianciával. A következőkben kiszámítjuk a W valószínűségi változó várható értékét és varianciáját.

$$\begin{aligned} E(W) &= E\left(2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y - \sigma\sqrt{nT}\right) = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}E(Y) - \sigma\sqrt{nT} \\ &= 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}np - \sigma\sqrt{nT} = 2\sigma\sqrt{nT}\left(p - \frac{1}{2}\right) \\ &\approx 2\sigma\sqrt{nT}\left(\frac{r}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T. \end{aligned}$$

A variancia számításánál felhasználjuk, hogy $p \approx \frac{1}{2}$ elég nagy n -re.

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var\left(2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Y - \sigma\sqrt{nT}\right) = \left(2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)^2 Var(Y) \\ &= 4\sigma^2\frac{T}{n}np(1-p) \\ &\approx \sigma^2T. \end{aligned}$$

Ha a lejáratidő beosztásainak a száma elég nagy, úgy a központi határeloszlástétel alapján az $Y = \sum X_i$ valószínűségi változó a normális eloszláshoz tart. A W valószínűségi változó is normális eloszlású lesz, mivel W az Y lineáris transzformációja.

A határátmenetet a diszkontfaktorra is alkalmazva, a vételi opció árát az alábbi formula írja le

$$C = e^{-rT} E\left[\left(S_0 e^W - X\right)^+\right],$$

ahol a W valószínűségi változó normális eloszlású $(r - \frac{\sigma^2}{2})T$ várható értékkel és $\sigma^2 T$ varianciával.

Már csak egy lépés szükséges a híres Black-Scholes formula előállításához, nevezetesen a várható érték kiszámítása, amelyet integrálszámítással végzünk az alábbiak szerint.

A fenti formula a részvény árfolyamának S_T valószínűségi változójával is felírható, amely

$$C = e^{-rT} E[(S_T - X)^+],$$

ahol $S_T = S_0 e^W$. Látható, hogy a részvény árfolyama geometriai Brown-mozgást végez, mivel az $\ln S_T = \ln S_0 + W$ valószínűségi változó normális eloszlású

$$\begin{aligned} E(S_T) &= \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \\ \text{Var}(S_T) &= \sigma^2 T \end{aligned}$$

várható értékkel és varianciával. Az opció árában szereplő várható értéket az S_T log-normális valószínűségi változó sűrűségfüggvénye segítségével az alábbiak szerint írhatjuk fel

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} \int_{s_T=X}^{\infty} (s_T - X) f(s_T) ds_T \\ &= e^{-rT} \int_X^{\infty} (s_T - X) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}s_T} e^{-\frac{[\ln s_T - (\ln S_0 + rT - \frac{\sigma^2}{2}T)]^2}{2\sigma^2 T}} ds_T \end{aligned}$$

Végezzük el a $z = \ln \frac{s_T}{S_0} - rT$ helyettesítést ($dz = \frac{ds_T}{s_T}$, $z_a = \ln \frac{X}{S_0} - rT$) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} \int_{z_a}^{\infty} (S_0 e^{z+rT} - X) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{(z+\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2 T}} dz \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{z_a}^{\infty} e^z e^{-\frac{(z+\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2 T}} dz - \frac{X e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{z_a}^{\infty} e^{-\frac{(z+\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2 T}} dz. \end{aligned}$$

A fenti formula pozitív (A) és negatív (B) előjelű tagjait külön integráljuk. A pozitív előjelű tagban a kitevő átalakítása után

$$A = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{z_a}^{\infty} e^z e^{-\frac{(z+\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2 T}} dz = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{z_a}^{\infty} e^{-\frac{(z-\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2 T}} dz.$$

Most alkalmazzuk az $y = \frac{z-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$ helyettesítést ($dy = \frac{dz}{\sigma\sqrt{T}}$, $y_a = \frac{\ln \frac{X}{S_0} - rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$) és a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének segítségével az alábbiakat kapjuk

$$\begin{aligned} A &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_a}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = S_0 \Phi(-y_a) \\ &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

A negatív előjelű tag az alábbiak szerint írható

$$B = \frac{Xe^{-rT}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{z_a}^{\infty} e^{-\frac{(z+\frac{\sigma^2}{2}T)^2}{2\sigma^2T}} dz,$$

amelynél az $y = \frac{z+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$ helyettesítéssel ($dy = \frac{dz}{\sigma\sqrt{T}}$, $y_a = \frac{\ln \frac{X}{S_0} - rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$) szintén a standard normális eloszláshoz jutunk, ahonnan az eloszlásfüggvény segítségével az alábbiakat kapjuk

$$\begin{aligned} B &= Xe^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_a}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = Xe^{-rT} \Phi(-y_a) \\ &= Xe^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Végül a vételi opció ára

$$C = S_0 \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Xe^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Ezt a képletet nevezzük Black-Scholes formulának.

Az alábbiakban két példát mutatunk be a Black-Scholes formula alkalmazására.

Példa:

Tekintsünk egy részvényre szóló vételi opciót, amelynek lejárat ideje fél év, a kötési árfolyama pedig 400. A részvény ára a lejárat előtt hat hónappal 420, a volatilitása 20 %. Az éves kockázatmentes kamatláb 10 %. A szokásos jelölésekkel tehát az alábbi adatok adottak:

$$S_0 = 420, X = 400, r = 0.1, T = 0.5, \sigma = 0.2.$$

A Black-Scholes formulában szereplő standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének argumentumai:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} &= \frac{\ln \frac{420}{400} + 0.1 \cdot 0.5 + \frac{0.2^2}{2} \cdot 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.76926, \\ \frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} &= \frac{\ln \frac{420}{400} + 0.1 \cdot 0.5 - \frac{0.2^2}{2} \cdot 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.62784. \end{aligned}$$

Az opció ára a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázatból való kikeresése (vagy a közelítő formula használata) után

$$\begin{aligned} C &= 420 \cdot \Phi(0.76926) - 400 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.5} \cdot \Phi(0.62784) \\ &= 420 \cdot 0.77913 - 400 \cdot 0.95123 \cdot 0.73495 \\ &= 47.592. \end{aligned}$$

Az eladási opció árát a Put-Call paritásból határozhatjuk meg, amely mint tudjuk a vételi opció árának és a kötési árfolyam jelenértékének összege az induló árfolyammal csökkentve, azaz

$$P = 47.592 + 400 \cdot e^{-0.1 \cdot 0.5} - 420 = 8.0838.$$

A Black-Scholes formula használatához tehát öt adatra van szükségünk, amelyek közül négy (S_0, X, T, r) egyértelmű. Az alkalmazandó kamatlábnak az opció lejártával egyező időtávra vonatkozó pénzügyi éves kamatlábnak kell lenni. Az ötödik adat a részvény volatilitása (σ) , amelyet becsülni szoktak múltbeli adatokból, amiről már korábban említést tettünk.

Példa:

Tekintsünk egy eladási opciót, amelyre vonatkozó egyértelmű adatok az alábbiak:

$$S_0 = 300, X = 340, r = 0.08, T = 0.25.$$

A szóbanforgó részvény árfolyamáról az előző 500 napban feljegyzett árfolyamadatunk van. Az egymást követő napokban mért árfolyamok hányadosának logaritmusát tekintve, kiszámítottuk ezen logaritmusok korrigált szórását, amely $s = 0.0126$ -ra adódott. Ebből, a már ismert képlet alapján a részvény éves volatilitása

$$\sigma = s\sqrt{252} = 0.01269 \cdot \sqrt{252} = 0.2.$$

Először a Black-Scholes formulát a vételi opció árának meghatározására alkalmazzuk, majd a Put-Call paritást használjuk. Jelöljük d_1 és d_2 -vel az argumentumokat, ekkor

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{X} + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln \frac{300}{340} + 0.08 \cdot 0.25 + \frac{0.2^2}{2} \cdot 0.25}{0.2\sqrt{0.25}} = -1.0016, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} = -1.0016 - 0.2\sqrt{0.25} = -1.1016. \end{aligned}$$

A vételi opció ára a Black-Scholes formulából a d_1 és d_2 paraméterek bevezetésével

$$\begin{aligned} C &= S_0\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= 300 \cdot \Phi(-1.0016) - 340 \cdot e^{-0.08 \cdot 0.25} \cdot \Phi(-1.1016) \\ &= 2.3835. \end{aligned}$$

A Put-Call paritás alkalmazásával az eladási opció ára

$$P = 2.3835 + 340 \cdot e^{-0.08 \cdot 0.25} - 300 = 35.651.$$

Az eladási opció árára a vételi opció Black-Scholes formulájához hasonló formula a Put-Call paritásból egyszerűen levezethető. Az előző jelöléseket használva

$$\begin{aligned} P &= C + Xe^{-rT} - S_0 \\ &= S_0\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) + Xe^{-rT} - S_0 \\ &= Xe^{-rT}[1 - \Phi(d_2)] - S_0[1 - \Phi(d_1)], \end{aligned}$$

amelyből az eladási opcióra vonatkozó Black-Scholes formula

$$P = Xe^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1).$$

A gyakorlatban a piaci szereplők sokszor megfordítják az opcióértékelési problémát. Nem az opció árát számolják, hanem egy adott opcióár esetén azt számolják ki, hogy milyen részvény volatilitás felel meg a Black-Scholes formulának. Ha az aktuális volatilitás nagyobb, mint a visszaszámított volatilitás, akkor az opciót jó vételnek tekintik.

3.8. Az opciós ár tulajdonságai

A részvényopciók árára öt tényező van hatással, ezek a következők:

1. az induló részvényárfolyam (S_0),
2. a részvényárfolyam volatilitása (σ),
3. az opció kötési árfolyama (X),
4. az opció lejárat ideje (T),
5. a kockázatmentes kamatláb (r).

Megjegyezzük, hogy valójában van egy hatodik tényező is, amely az opció futamideje alatt a részvényre szóló osztalék, de ezzel nem foglalkozunk. Tekintsük az opció árának a várható értékkel felírt formuláját

$$C(S_0, \sigma, X, T, r) = e^{-rT} E \left[\left(S_0 e^W - X \right)^+ \right].$$

A W valószínűségi változó normális eloszlású $(r - \frac{\sigma^2}{2})T$ várható értékkel és $\sigma^2 T$ varianciával. Ez a W valószínűségi változó kifejezhető a Z standard normális eloszlású valószínűségi változóval az alábbiak szerint

$$W = rT - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}Z.$$

Ezt a $N(0, 1)$ eloszlású Z valószínűségi változót használva az opció árát az alábbiak szerint írhatjuk

$$\begin{aligned} C(S_0, \sigma, X, T, r) &= e^{-rT} E \left[\left(S_0 e^W - X \right)^+ \right] \\ &= E \left[\left(S_0 e^{W-rT} - X e^{-rT} \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

$$C(S_0, \sigma, X, T, r) = E \left[\left(S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}Z} - X e^{-rT} \right)^+ \right].$$

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy az öt tényező hogyan befolyásolja az opció árát. A vizsgálatainkban mindig feltételezzük, hogy csak egy tényező változik. A hatások sok esetben intuitíve is meghatározhatók, de a fenti formula segítségével matematikailag is igazolhatók.

1. Az induló részvényárfolyam (S_0) hatása

Az induló részvényár növekedése nyilván növelőleg fog hatni a vételi opció értékére. Nagyobb induló részvényárfolyam esetén sokkal valószínűbb, hogy lejáratkor az árfolyam a kötési árfolyam fölött lesz, ezért opciónkat érdemes lesz lehívni.

2. A részvényárfolyam volatilitásának (σ) hatása

A részvény volatilitása azt mutatja, hogy mekkora a részvényárfolyam bizonytalansága. Minél nagyobb egy részvény volatilitása, árfolyama annál nagyobb kilengéseket tesz, így annál valószínűbb, hogy a részvény árfolyama az opció lejárat idejéig a kötési árfolyam fölé megy. A volatilitás növekedése ezért a vételi opció értékét növeli.

3. Az opció kötési árfolyamának (X) hatása

A kötési árfolyam növekedése csökkentőleg hat a vételi opció értékére. Nagyobb kötési árfolyamnál kisebb a valószínűsége, hogy lejáratkor a részvényárfolyam a kötési árfolyam felett lesz, ezért vételi opciónk értéke alacsonyabb.

4. Az opció lejáratú idejének (T) hatása

A lejáratig számított idő növekedése kétféleképpen hat az opció értékére.

Egyrészt a lejáratú idő növekedése a vételi opció értékét növeli, mivel a kötési árfolyam jelenértéke csökken.

Másrészt szintén nő az opció értéke. Mivel a részvényárfolyam az idő folyamán ingadozik, egy egyéves lejáratú opció esetén valószínűbb, hogy a részvényárfolyam a kötési árfolyam fölött lesz, mint fél év alatt.

Mindkét hatás növelőleg hat a vételi opció értékére.

5. A kockázatmenteskamatláb (r) hatása

A képletet formálisan tekintve azonnal adódik, hogy a kamatláb növekedése a vételi opció értékét növeli. Annak ellenére, hogy a képletből ez az eredmény közvetlenül látszik, intuitíve viszont kevésbé egyértelmű. Intuitíve, magasabb kamatláb esetén a részvény árfolyama várhatóan magasabb lesz, így valószínűbb, hogy a vételi opció értéke növekszik.

Összefoglalva megállapítható, hogy a vételi opció árára egyedül a kötési árfolyam hat csökkentőleg, a többi tényező növelőleg hat.

Az eladási opció árára vonatkozóan is végezhetünk ilyen hatásvizsgálatot. A vételi és az eladási opció ára közötti kapcsolatot a Put-Call paritás adja meg, így azt használjuk a vizsgálatainknál, azaz

$$P(S_0, \sigma, X, T, r) = C(S_0, \sigma, X, T, r) + Xe^{-rT} - S_0.$$

4. fejezet

Felhasznált irodalom

1. Sheldon M. Ross: An Introduction to Mathematical Finance, Options and other Topics, Cambridge University Press, 1999
2. John C. Hull: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek, Panem-Prentice-Hall, Budapest, 1999
3. David G. Luenberger: Investment Science, Oxford University Press, New York, 1998