

Közgazdasági Szemle, XLVI. évf., 1999. július–augusztus (600–628. o.)

ZALAI ERNŐ

A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén

A dolgozatban a Neumann-modell lehetséges elméleti és módszertani rokonságát elemezzük annak fényében, hogy mind a neoklasszikusok, mind a klasszikus hagyományokat felélesztő neoricardiánusok a magukénak vallják. Ennek során megvizsgáljuk a klasszikus és a neoklasszikus gazdaságfelfogás, az *ex post* és az *ex ante* szemléletű modellek közötti különbségeket, és azt a forradalmi jelentőségű módszertani változást, amely a sok szempontból joggal bírálható modern matematikai közgazdaságtan kialakulásához vezetett. Összevetjük Neumann modelljét az oszt-rák iskola árbeszámítási elméletével, a Walras–Cassel- és a Schlesinger–Wald-féle modellekkel, illetve a Ricardo, Marx, Dmitriev, Leontief nevekkel fémjelezhető klasszikus vonulat eredményeivel. Rámutatunk arra, hogy Neumann voltaképpen az „igazságos és értelmes gazdaság” ősi ideáját öntötte kora modern fizikájában honos matematikai modell formájába.*

„Teljesen tudatában vagyok mondanivalóm ... hiányosságainak, és előre is elnézést kérek. Emellett az itt kifejtésre kerülő nézeteket bizonyára nem osztja teljesen számos más matematikus (közgazdász – saját betűzésem, Z. E.) – amit adhatok, az egy ember nem túl jól rendszerezett benyomásai és értelmezései, – s csak nagyon keveset tudok segíteni annak megvilágításában, hogy mások hogyan vélekednek.”

Neumann János [1965] 12. o.

Egy 1958-as korfui tőkeelméleti konferencián Solow azt találta állítani Neumann János nevezetes modelljéről, hogy az a neoklasszikus növekedés- és tőkeelmélet egy sajátos esete. A két Cambridge (Egyesült Királyság és Egyesült Államok) között később kiéleződött viták és szakítás ismeretében nem csodálkozhatunk azon, hogy a szintén jelenlévő, polemikus hajlámáról közismert Káldor Miklós élesen tiltakozott a modell ilyen beállítása, pontosabban a Neumann-örökség kisajátítási kísérlete ellen. Határozottan leszögezte, hogy nincs semmi alapja annak, hogy valaki azt állítsa, hogy „a Neumann-modell nem más, mint Wicksell, Marshall vagy az egész neoklasszikus iskola egy új áruhában” (*Lutz–Hague* [1961] 296–297. o.).

Több ok is ösztönzött arra, hogy ezt a kérdést válasszam székfoglaló előadásom témájául. Mindenekelőtt a tisztelgés Neumann János személye előtt. Neumann, köztudottan, nem volt közgazdász, századunk megfoghatkozott számú polihistorainak az egyike volt, aki több tudományterüle-

* A dolgozat a szerző Neumann János: Klasszikus vagy neoklasszikus? címmel 1999. március 29-én megtartott akadémiai székfoglaló előadásának tanulmányváltozata. A szerző ez úton is köszöni Horváth Józsefnek, Móczár Józsefnek, Révész Tamásnak és Simonovits Andrásnak a dolgozat korábbi változatához fűzött hasznos észrevételeit. Ugyancsak köszönet illeti Bródy Andrászt, a Neumann-modellel való foglalkozáshoz, közvetlenül és közvetve, nyújtott inspirációért.

ten is kiemelkedőt alkotott. Egyetlen igazán közgazdaságinak tekinthető munkája az itt tárgyalt 1937-es dolgozata (modellje) volt. Ennek ellenére, ténykedésének közgazdasági jelentőségét még az a Samuelson is kénytelen volt elismerni, aki egyébként – finoman fogalmazva – igen visszafogott volt a Neumann-modell közgazdasági tartalmának a megítélésében: „betoppant egy rövid időre a területünkre, és azóta az már sohasem lesz a régi” (Samuelson [1989] 121. o.). Méltán lehetünk tehát büszkéek Neumann Jánosra, nemcsak mint kiemelkedő magyar tudósra, hanem mint „vendég-közgazdászra” is.

Neumann modellje nem értékelhető önmagában, s még kevésbé pusztán csak közgazdasági tartalma alapján. Az először 1932-ben Princetonban előadott (majd 1937-ban publikált) modell nemcsak számos korábbi fontos fejlemény szintézise és később napvilágot látott eredmény előrejelzése, de eltérő szemléletű (klasszikus–neoklasszikus, polgári–marxista) elméleti iskolák közös találkozási, illetve kritikus elágazási pontja is egyúttal. Dolgozatomban röviden érintem a szakmánkra oly jellemző schismák és dichotómiák kérdését is. Ebből a szempontból is jó „katalizátornak” mutatkozik Neumann János modellje és szellemi öröksége.

A matematika közgazdasági alkalmazása, alkalmazhatósága körül Cournot [1838–1929] úttörő munkája óta váltakozó heveséssel folyik a vita a közgazdászok, illetve a közgazdasági metodológiával foglalkozó szakemberek között. Neumann modellje – a maga nemében és idejében – egyike volt azoknak a modelleknek, amelyek a legtöbbszörösen, a legtisztábban és esztétikailag szempontokból is a legszebben testesítették meg azt a szemléletbeli és módszertani változást, amely a matematika közgazdaságtani alkalmazásában 1930 és 1950 között végbement. Ez annak az általános forradalmi változásnak a sajátos visszatükröződése, amely a tudományos modellek felfogásában a természettudományok és a matematika terén valamivel korábban már lezajlott – mind pozitív, mind negatív irányban – maradandóan befolyásolva a közgazdasági kutatások későbbi alakulását is.

Végül s nem utolsósorban, a Neumann-modell megjelenése időben egybeesik a „kvantitatív” közgazdaságtan mint önálló részdiszciplína kialakulásával. A matematikai közgazdaságtan és ökonometria (gazdaságmatematikai statisztika) mint – akkor még együtt szereplő – önálló kvantitatív közgazdaságtudományi irányzat kialakulásának kezdeteként ugyanis a harmincas évek elejét jelölhetjük meg (az *Econometric Society* megalakulása: 1930, lapjának, az *Econometricának* a megjelenése: 1933).

A gazdasági egyensúly ábrázolása a Neumann-modellben

Kiindulásként felidézzük a modell meglehetősen egyszerű és könnyen áttekinthető gazdaságképét. A matematikai nyelvezetet kevésbé ismerők számára hasznos lehet a „statisztikai” jellegű 1. és 2. táblázat megértése. Az egyik egy gazdaság adott időszakban megfigyelt termelését tartalmazza, termékenként és termelési folyamatokként elkülönítve (Q_{ij}). A másik az ugyanabban az időszakban a ráfordításokat veszi számításba, ugyanolyan bontásban (W_{ij}). A ráfordítások – Neumann feltételezése szerint – tartalmazzák az adott ágazatokban foglalkoztatott munkaerő létfenntartásához szükséges fogyasztást is. Neumann egy olyan feltételezett gazdaságot elemez, amelyben a termelés (és a termékek felhasználása) az egyik időszakról a másikra egyenletesen, éspedig λ ütemben – $(1 + \lambda)$ tényező arányában – változik (nö, stagnál vagy csökken). Ebben a feltételezett gazdaságban a kibocsátások mindig csak a vizsgált időszak legvégén jelennek meg (éves megtérülés), azaz csak a következő időszakban használhatók fel. Ennek megfelelően a termékmérlegek egyensúlya az (1) egyszerű formát ölti:

$$= (1 + \lambda) \times (W_{i1} + W_{i2} + \dots + W_{ij} + \dots + W_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Egy ilyen *kvázistacionárius* gazdaságban az egyszer kialakult *egyensúlyi árárányok* ($p_i, i = 1, 2, \dots, n$) változatlanok maradnak. Neumann az egyensúlyi árakat úgy definiálja, mint amelyek egységnyi értékű megtakarításra (tőkebefektetésre) azonos mértékű, π kamatot (megtérülést, profitot) biztosítanak. Az *árak egyensúlyát* így a (2) egyenletek definiálják:

$$p_1 \times Q_{1j} + p_2 \times Q_{2j} + \dots + p_i \times Q_{ij} + \dots + p_n \times Q_{nj} = \\ = (1 + \pi) \times (p_1 \times W_{1j} + p_2 \times W_{2j} + \dots + \\ + p_i \times W_{ij} + \dots + p_n \times W_{nj}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

1. táblázat
Kibocsátások

Termék	1. folyamat	2. folyamat	...	j . folyamat	...	m . folyamat	Egységárak
1. termék	Q_{11}	Q_{12}	...	Q_{1j}	...	Q_{1m}	p_1
2. termék	Q_{21}	Q_{22}	...	Q_{2j}	...	Q_{2m}	p_2
...
i . termék	Q_{i1}	Q_{i2}	...	Q_{ij}	...	Q_{im}	p_i
...
n . termék	Q_{n1}	Q_{n2}	...	Q_{nj}	...	Q_{nm}	p_n
Termelési szint	q_1	q_2	...	q_j	...	q_m	

2. táblázat
Ráfordítások

Termék	1. folyamat	2. folyamat	...	j . folyamat	...	m . folyamat	Egységárak
1. termék	W_{11}	W_{12}	...	W_{1j}	...	W_{1m}	p_1
2. termék	W_{21}	W_{22}	...	W_{2j}	...	W_{2m}	p_2
...
i . termék	W_{i1}	W_{i2}	...	W_{ij}	...	W_{im}	p_i
...
n . termék	W_{n1}	W_{n2}	...	W_{nj}	...	W_{nm}	p_n
Termelési szint	q_1	q_2	...	q_j	...	q_m	

Mátrixalgebrai „gyorsírási” jelölésekkel a fenti összefüggések igen tömören és érzékeltesen jeleníthetők meg:

$$\mathbf{Q1} = (1 + \lambda) \times \mathbf{W1}, \text{ illetve } \mathbf{pQ} = (1 + \pi) \times \mathbf{pW}.$$

A kibocsátási (\mathbf{K}) és ráfordítási *fajlagos együthetők* (\mathbf{D}) mátrixainak, valamint a *tevékenységi szintek* (\mathbf{q}) vektorának a bevezetésével, továbbá az árosszefüggésnek az abszolút adatok helyett a fajlagos kibocsátási és ráfordítási adatokra való átírásával pedig megteremthető a két összefüggés formai szimmetriája, nevezetesen *dualitása*:

$$\mathbf{Kq} = (1 + \lambda) \times \mathbf{Dq}, \quad (1a)$$

illetve

$$pK = (1 + \pi) \times pD. \quad (2a)$$

Az utóbbi felírásból, ami már „majdnem” a Neumann-modell, nyilvánvalóan látszik, hogy ha – mint közgazdasági alapon joggal várható – pKq pozitív, akkor $\lambda = \pi$, azaz a *növekedési ütem és a kamatláb (profitráta) megegyezik egymással*. Ez volt a Neumann-modell egyik olyan vonása, amely különösen érdekessé tette azt Schumpeter számára, mert alátámasztotta azt a sejtését, hogy egy hosszabb távon egyszerű újratermelést folytató (stagnáló) gazdaságban az egyensúlyi kamatláb csak nulla lehet. Ez az összefüggés azonban – mint erre később rámutatunk – azért és akkor teljesül, ha a létfenntartáshoz *szükséges fogyasztáson* felül nincs *luxusfogyasztás*, azaz minden többletet felhalmoznak. Egy tőkés gazdaság modelljében π nem egyszerűen a kamatláb, hanem a profitráta is, s ez pozitív lehet akkor is, ha az adott gazdaság egyszerű újratermelést folytat.

A felírt egyensúlyi feltételekben semmi olyan új közgazdasági tartalom nincs, ami már a klasszikus közgazdászoknál (sőt már korábban) meg nem jelent volna. Elegendő ennek kapcsán utalni Marx két osztályra felírt bővített újratermelési és termelési ár sémáira. Ezzel természetesen nem kívánjuk azt állítani, hogy a jelzett formai és tartalmi hasonlóság önmagában a Neumann-modell (közvetlen) klasszikus ihletését igazolhatná. A probléma, mint ezt rövidesen kifejtyük, ennél bonyolultabb, de előtte röviden ki kell térnünk egy fontos módszertani kérdésre.

Ex post versus ex ante modellfelfogás és a matematikai közgazdaságtan kialakulása

Ami módszertani szempontból új Neumannál, az az alkalmazott modellfilozófiai szemlélet, és részben ebből adódóan az elemzés további iránya és módszere. Neumann módszertani újítása mögött egy, a maga korában teljesen forradalmi, általános modellezés-filozófiai szemléletváltás húzódott meg.¹ Nevezetesen: szakítás a klasszikus fizikára jellemző *ex post* modellépítkezési megközelítéssel, amelyet a korai általános egyensúlyelmélet művelői – Ricardo, Marx, Walras, Cassel, de bizonyos értelemben még Hicks és Samuelson is – alkalmaztak. És ebben, mint látni fogjuk, Neumann szorosan követte a bécsi hagyományokat, ez jellemezte az általános egyensúly Walras–Cassel-féle modelljének Wald Ábrahám által adott egzisztencia bizonyítását is.

Ex post szemléletűnek nevezünk egy *reáltudományi modellt*² akkor, ha az abban szereplő összefüggések [lásd például az (1)–(2) egyenletrendszer] a modell változói (pontosabban az általuk képviselt jelenségek) között olyan vélt *törvényszerű* kapcsolatokat fejeznek ki, amelyeknek egy *megfigyelt* vagy potenciálisan megfigyelhető állapot (például egyensúly) esetén szükségszerűen fenn kell állniuk. Éspedig mindezt anélkül, hogy magában a modellben *magyarázatot* kapnánk arra, hogy milyen erők, milyen viselkedési szabályok, milyen *logikai szükségszerűség* idézi elő az adott *kitüntetett állapotot*, még kevésbé arra, hogy ezek a feltételezett mechanizmusok *egyáltalán létrehozhatják-e*, és milyen logikai (matematikai) szempontból *elégleges feltételek* mellett, a jelzett kitüntetett állapotot.

Ex ante szemléletűnek nevezünk ezzel szemben *egy modellt* akkor, ha annak változói és összefüggései egy *absztrakt objektumot*, egy „matematikai struktúrát” képviselnek, és annak logikailag egyáltalán lehetséges, illetve meghatározott tulajdonságoknak eleget tevő,

¹ Lásd, például Punzo [1989] és Weintraub [1985], Weintraub–Mirowski [1994] munkáit ennek a folyamatnak a részletes és érzékletes kifejtésére.

² A reáltudomány kifejezést Kornai [1980] értelmezésében használom. Reáltudományi modelleken voltképpen alkalmazásorientált, nem *metaelméleti* modelleket értek.

kitüntetett állapotait írják le. A *valós jelenségekre* való utalás az *ex ante* jellegű modellek megfogalmazása során teljességgel *szükségtelen*. A modell különböző lehetséges megoldásai magán az *absztrakt modellen belül* értelmezhetők, így a kitüntetett állapotok megvalósulásának logikai lehetőségét is a modell kiinduló, *elégséges* feltevéseinek kell biztosítaniuk.

Az *ex post* jellegű modellek alapvetően *leíró* jellegűek, többnyire *intuitív-induktív* megközelítésen nyugszanak. Az *ex post* jellegű modellek érvényességének (validitásának) az egyik *elengedhetetlen kritériuma* feltevéseinek, elemeinek *valósághűsége*. A bennük szereplő jelenségek (változók, paraméterek) mind megfigyelhető, mérhető *tapasztalati* kategóriák. E modellek másik fő kritériuma ugyanis a modellek gyakorlati alkalmazhatósága, azaz *identifikálhatóságuk, számszerűsíthetőségük és ellenőrizhető előrejelzésekre való alkalmasságuk*. Többnyire a modell gyakorlati alkalmazása során derül fény arra is, hogy az adott, számszerűsített specifikáció (*kalibrált modell*) valóban képes-e és milyen pontossággal a megfigyelt állapotot reprodukálni (a modell megoldásaként előállítani).

Az *ex ante* típusú modellek a leírás mellett *magyarázatot* is adnak az adott állapot kialakulásának feltételeire is. Az ilyen modell érvényességének ezért elsőrendű kritériuma a belső logikai konzisztencia, az „elméleti tisztaság”, amit az axiomatikus építkezés biztosít. Ehhez képest sorrendben hátrább kerül – gyakran el is marad – az empirikusan tesztelhető, gyakorlati előrejelzésekre való alkalmasságának ellenőrzése. Az *ex ante* típusú modellek megfogalmazása rendszerint a *hipotetikus-deduktív* megközelítés elvét követi. Az *ex ante* modellek a valóságos folyamatokat a funkcionális analógia szintjén írják le. A bennük szereplő jelenségek (változók, paraméterek) *a priori*, s nem *tapasztalati* kategóriák. Ebből fakadóan alapfeltevéseinek és összefüggéseinek empirikus tesztelhetősége, valósághűsége a modell érvényességének nem szükséges feltétele. Nem a kiinduló modell egésze azonosítandó a valós jelenségekkel, csak az abból levezetett, sajátos feltételek mellett kialakuló állapot (például az egyensúlyi állapot és annak jellemzői).

Az axiomatikus szemlélet térhódítása jelentősen átalakította a természettudományokat és az általuk felhasznált matematikát, és hatása fokozatosan kiterjedt a közgazdaságtan területére is, ahol mellesleg egybeesett a matematikai közgazdaságtan mint relatíve önálló részdiszciplína kialakulásával. A társadalomtudományok területén azonban az empirikus kísérletezés és tesztelés (*a Popper-Lakatos-féle verifikáció-falzifikáció*) lehetőségei korlátozottak. Elsősorban emiatt találkozhatunk meglehetősen végletes álláspontokkal az axiomatikus módszer s a tőle szinte elválaszthatatlan matematikai nyelvezet és módszerek hasznossága megítélésében a társadalomtudományok területén.

Az axiomatikus módszer elterjedése többek között azt eredményezte, hogy az *empirikus-intuitív felfedezés* szerepe háttérbe szorult a *hipotetikus-logikai tudásteremtéssel* szemben a tudományos ismeretek gyarapításában. „A semmiből egy új világot teremtettem!” – öntötte oly érzékletesen szavakba ezt az eufórikus érzést Bolyai János.³ Ez a változás mindazonáltal komoly veszélyeket is magában rejt, amire idősebb korában Neumann János is figyelmeztetett: „a legjobb matematikai ihletés a tapasztalatból ered, és hogy aligha lehet hinni a matematikai szigor abszolút, változatlan, minden emberi tapasztalattól elkülönült fogalmának létezésében. (...) Ha egy matematikai diszciplína messzire távolodik el tapasztalati forrásaitól (...) ez súlyos veszélyt rejt magában. Egyre inkább tiszta esztétizálássá válik, egyre tisztább *l'art pour l'art*á. (...) Tapasztalati forrásától nagy távolságban vagy sok absztrakt „behatás” után a matematikai tárgyat a degenerálódás fenyegeti. (...) Kezdetben a stílus rendszerint klasszikus; amikor a barokká válás jelei mutatkoznak, a vészjelzés adott.” (Neumann [1965] 21. és 27. o.)

³ Ha a matematikát a „valóságtól” teljesen elszakító „bourbaki” iskola magyar és nem francia lett volna, lehet, hogy ezt a Bolyai idézetet választotta volna mottójául.

Közgazdasági elméletörténeti szempontból érdekes megjegyezni, hogy a hilberti (axiomatikus, formalista) program egyik korai követője és üttörője a közgazdász-statisztikus Szluckij (Slutsky) volt. Az 1915-ben megjelent nevezetes cikkében például a következőket írja: „(...) ha a közgazdaságtudományt megbízható alapokra akarjuk helyezni, akkor azt teljesen függetlenítenünk kell pszichológiai feltevésektől és filozófiai hipotézisektől” (Szluckij [1915] 27. o.). Szluckij a „tisztá” közgazdaságtant a célszerű (ésszerű) emberi tevékenységekkel foglalkozó „*formális praxeológia*” egyik területének tekintette.

A praxeológia két világháború közötti neves művelői között találjuk egyébként az osztrák L. von Mises-t, illetve a lengyel Kotarbinskit és O. Langét is. Az utóbbi kapcsán érdemes emlékeztetni arra, hogy idősebb korában határozottan Szluckijjal ellentétes állást foglalt ebben a kérdésben. Éppen azon az alapon bírálta a neoklasszikus közgazdaságtant, hogy az a közgazdaságtant összekeveri annak *segéd tudományával*, a praxeológiával (lásd Lange [1964]). Langéné tehát a két tudományterület viszonya megfordul, és ő már – Neumannhoz hasonlóan – az axiomatikus, formalista megközelítés közgazdaságtudományi alkalmazásának korlátait hangsúlyozza.

A modern „kvantitatív” közgazdaságtan (amerikai) alakulásában – az *Econometric Society* megalakulása (1930) mellett – meghatározó szerepet játszott a vele nagyjából egy időben (1932-ben) megszervezett *Cowless Commission*.⁴ *Megalakulásakor* a kutatócsoport fő célkitűzése az *empirikus kutatások és azok módszertanának* kifejlesztése volt (a nagy világválság készítette a milliomos *Cowless* ilyen kutatások támogatására). Eleinte kifejezett idegenkedést lehetett tapasztalni az elvont közgazdasági és matematikai elméletekkel való foglalkozással szemben. Előre nem látott véletlen események azonban teljesen más irányba terelték az amerikai kvantitatív közgazdaságtani kutatások későbbi alakulását.

Az egyik fontos tényező az európai tudósok második világháború előtt, alatt és után bekövetkezett, hatalmas méreteket öltött Egyesült Államokba való emigrálása volt. A különböző hullámokban kivándorlók közül sokan egyenesen a *Cowless Commission* műhelyében vagy annak „környékén” kötöttek ki. Ennek az önmagában is jelentős tényezőnek a hatását erősítette az a tény, hogy – mint ismert – a második világháború idején igen intenzív együttműködés alakult ki a hadi laboratóriumokban közös problémákon dolgozó („operációkutató”) természettudományi és a közgazdasági területeken *alkalmazott matematikusok* között. Ez sok esetben folytatódott a háború után is, ami *egyrészt* felgyorsította a természettudományokban kifejlesztett modernebb matematikai módszerek megismerését és átvételét, *másrészt* ez utóbbiakkal foglalkozó matematikusok átváltását a közgazdaságtani, operációkutatói területekre. Mindkét fejlemény abba az irányba hatott, hogy a „kvantitatív mutánsok” az Egyesült Államokban viszonylag hamar elérték a „továbbélésükhöz és szaporodásukhoz szükséges *kritikus tömeget*”.

A közgazdaságtan, és nem az eleve empirikus orientációjú operációkutatás területén kikötött kutatók pedig, különösen az európaiak, magukkal hoztak egy új, az amerikai közgazdászok által még kevésbé ismert vagy alkalmazott szemléletet és módszertant is. Nevezetesen: a hilberti program, majd a később azt formailag tökélyre fejlesztő *Bourbaki*-iskolának a matematikai módszertanról, illetve magáról a matematikáról alkotott képét. Mindez fokozatosan átformálta a *Cowless Commission* körül foglalatostkodók közgazdaságtanról alkotott felfogását és módszertanát is: a *reáltudomány* felől a *tiszta, formális tudomány* irányába, módszertani szempontból pedig a klasszikus fizika matematikájától (a *lokális analízistől*) a modern *globális, konvex analízis* irányába.

A *Cowless Commission* Chicagóba költözése, 1943 után, Marschak és Koopmans igazgatósága alatt, a kutatási terv még mindig erőteljesen hangsúlyozta a kutatások gyakorlati (statisztikai, ökonometriai) irányultságát, de már megjelenik benne „a gazdasági mérések általános elméletének” és a „metodológiai” kérdések rendszeres tanulmányozásának a célja is (lásd *Weintraub* [1983]). Még Koopmans 1949-es *Activity analysis* konferenci-

⁴ A bizottság munkásságának első két évtizedéről *Christ* [1952] ad részletes beszámolót (idézi *Weintraub* [1983]).

áján is (lásd *Koopmans* [1951]) kiegyensúlyozottan szerepelnek egymás mellett a *reál tudományi kutatások különböző elemei*: az axiomatikus elméletalkotás, a matematikai tételek, a számítási algoritmusok és a gyakorlati alkalmazások. Ezt követően azonban a negyvenes évek végén és az ötvenes évek elején a kutatás erőteljesen eltolódik a nem konstruktív, absztrakt közgazdaságtani kutatás irányába.

Az általános egyensúly axiomatikus modelljének kiteljesítése, az egyensúly létezésének és hatékonyságának (*Arrow–Debreu* [1954], *McKenzie* [1954]), majd stabilitásának bizonyítása (*Arrow–Hurwicz* [1958], *Arrow–Block–Hurwicz* [1959], *Scarf* [1960]) megszilárdította a *neoklasszikus matematikai közgazdaságtan* „kemény magvát” (lásd erről bővebben *Weintraub* [1983]). Ez az irányzat azután – a „logikai szigor, az elegancia és az esztétikai szépség” jegyében – fokozatosan és kíméletlenül ki-, illetve háttérbe szorította az alternatív (a kevésbé szigorú, empirikus, történeti-társadalmi jellegű) megközelítéseket az Egyesült Államok vezető közgazdaságtani tanszékein. Mint *Mirowski* [1988] írja: „Azokat a kifogásokat, amelyeket a matematikával (közgazdasági alkalmazásával – *Z. E.*) szemben felvetettek, az 1940-es, 1950-es években elsősorban *ad hominem* támadásokkal nyomták el; akik fenntartásaikat hangoztatták, azokat pedig analitikai hozzá nem értéssel bélyegezték meg. (...) a dolog generációs problémává alakult ...” (61. o.).

A matematika közgazdaságtani alkalmazása mellett – mint ismeretes – két fő érvet szoktak felhozni: az egyik a matematika (axiomatika) logikai szigorra kényszerítő ereje, a másik pedig Galilei híres tézise, miszerint a természet könyvét a matematika nyelvén írták meg. Míg az első érv aligha cáfolható, addig a második a tudományfilozófia mai álláspontja szerint bizonyíthatatlan állítás. A világ ember általi megismerésének a természettudományokban jelentős felfedezésekhez vezető – de ott sem korlátlan hatókörű – tudományos módszer társadalomtudományi adaptálhatósága, alkalmazhatóságának hatóköre és haszna ma még nem egyértelműen eldönthető kérdés. Ezért ennek a megközelítésnek kialakult túlsúlya tehát nem feltétlenül csak kedvező jelenség.

A gazdasági egyensúly fogalmának és modelljeinek kifejldése

A klasszikus és a korai neoklasszikus közgazdászok – a klasszikus mechanika nyomán – az intuitív-induktív modellezési felfogást követték. A természeti törvények analógiáját a piac által szervezett ártermelés egyensúlyt (harmóniát) teremtő és hatékonyságra kényszerítő víziójában találták meg. Számukra az egyensúly létezése „empirikus evidencia”, másképpen fogalmazva: *ex post* modelljük kiinduló hipotézise volt.

A klasszikusok gazdaságelmélete ugyanakkor többszintű volt. A *makroszinten holisztikus leírást* adtak a legfőbb gazdasági jellemzők (árak, termelés, fogyasztás) törvényszerű összefüggéseiről. Ezt a makroszintű leírást az elemzéseik *mikroszintjén* különböző *magyarázó* okfejtésekkel egészítették ki, anélkül azonban, hogy ezeket a kauzális magyarázatokat szervesen beillesztették volna a makroszintű elméletükbe, vagy a makroállapot jellemzőit közvetlenül az utóbbiakból vezették volna le. A makroszintű elemzéseikben ehelyett csak a mikroökonómiai mechanizmusok várt, hosszú távú hatásai jelentek meg (mint például a profitráták, a munkabérek, a járadékráták kiegyenlítődése, az egyes gazdasági ágak arányos – nem feltétlenül egyenletes – fejlődése).

A korai általános egyensúlyelmélet e *kétszintűségét*, tehát a makroszintű holisztikus leírás és mikroszintű kauzális magyarázat *kettősségét* igyekezett kiküszöbölni a neoklasszikus általános egyensúlyelmélet. Ennek döntő lépéseként *Hicks* [1978] és *Samuelson* [1947] – a *marginalista* iskola hasznossági és termelési függvényeken nyugvó, optimalizáló modelljei alapján – beépítette *Walras* általános egyensúlyi keretébe a termelési és fo-

gyasztási döntéseket megmagyarázó mikroszintű elméleteket. Ugyanakkor Hicks és Samuelson még adós maradt az egyensúlyi állapot logikai lehetőségének (*egzisztencia*) egzakt bizonyításával, illetve annak igazolásával, hogy léteznek olyan algoritmusok, alkalmazkodási szabályok, amelyek a gazdasági rendszert az egyensúlyi állapot irányába mozgatják, illetve annak közelében tartják (*dinamikus stabilitás*).

Hicks és Samuelson tehát annyiban még átmenetet jelentettek a klasszikus *ex post* és a modern *ex ante* modellfelfogás között, hogy az általános egyensúlyt jellemző egyenletrendszerük pozitív megoldásának létezése még náluk is feltételezett, és nem bizonyítandó volt. Az egyensúly létezésének logikai lehetőségét még ők is csak a klasszikus *egyenlet-számlálás módszerével* támasztották alá, ami az *ex post* modellezési felfogás egyik sokat bírált eleme volt. Az egyensúly létezésének az absztrakt bizonyítása helyett Hicks és Samuelson a *komparatív statika* fizikában kifejlesztett, lokális analízisen alapuló módszertanát adaptálták a közgazdaságtanba. A feltételezett egyensúlyból kiindulva, azt elemezték, hogyan változna meg az egyensúlyi pozíció a külső adottságok kismértékű megváltozása következtében.

Ezen adaptáció során nem kerülhették meg azoknak a matematikai feltételeknek a megnevezését és elemzését, amelyeknek teljesülése a lokális analízis eredményes elvégzéséhez elengedhetetlen. Tisztában voltak tehát azzal, hogy modelljeik gyakorlati alkalmazása (*identifikációja*) során olyan *specifikációkat* (függvényformákat) kellene keresni, amelyek a fenti matematikai feltételeknek eleget tesznek, és úgy kellene „*kalibrálni*” a modelljüket, hogy a megfigyelt állapot – a paraméterek számszerűsítéséhez alapul vett, egyensúlyinak feltételezett színpont (*bench-mark*) – valóban kielégítse a modell feltételeit. Az 1970-es évek második felétől kezdve egyre szélesebb körben elterjedő *alkalmazott (számszerűsített) általános egyensúlyelméleti (CGE) modellezés* gyakorlatából jól ismertek ezek a modellspecifikációs és kalibrációs eljárások, beleértve azok lehetőségeit és korlátjait is (az irodalmi utalásokat lásd például *Zalai* [1998]-ban)]. S végül, a gyakorlati alkalmazás óhatatlanul felvetette volna a modell megoldhatóságának (az *egzisztencia*) és a megoldási halmaz számosságának (az *unicitás*) kérdését is.

Az 1940-es években azonban az általános egyensúlyelméleti (CGE-) modellek gyakorlati alkalmazásának az igénye és lehetősége még igencsak távolinak tűnt, ezért a további fejlődésük is más irányt követett. A hilberti axiomatikus elméletépítkezési program és a „bourbakizmus” matematikai közgazdaságtani térhódításának szelleme az általános egyensúlyelméleti modellek elméleti érvényességének („tudományos igazságának”) igazolását nem a gyakorlat, hanem logikai (matematikai) konzisztenciájuk bizonyításának irányában kereste. Ennek eredményeként születtek meg az általános egyensúlyelmélet jelzett modern (axiomatikus, *ex ante*) modelljei és az egyensúly létezési lehetőségének – a modellek logikai konzisztenciájának – a bizonyításai.⁵

Számos munkából, köztük Kornai János méltán világhírű *Anti-equilibrium*-éből (*Kornai* [1971]) ismert, hogy ennek az igen látványos fejlődésnek komoly ára volt. Nevezetesen az, hogy *a logikai konzisztencia, a matematikai elegancia és az esztétikum követelménye az empirikus relevancia fölé kerekedett*. Az egyensúly létezésének, illetve stabilitásának matematikai bizonyítása ugyanis csak – pszichológiai és empirikus alapokon – joggal bírálható és bírált *elégészes feltevések* elfogadásával vált lehetővé. Mindezek ellenére a modern neoklasszikus megközelítés világszerte fokozatosan a közgazdasági kutatások és oktatás meghatározó áramlatává vált. Ennek a folyamatnak olyan összetett tudományszociológiai és társadalomszociológiai okai vannak, amelyeknek akár csak megközelítően

⁵ *Weintraub* [1991] részletesen kifejti és illusztrálja, miként kaptak e folyamat során igen specifikus, meglehetősen leszűkített tartalmat az olyan fogalmak, mint az egyensúly, stabilitás, dinamika és a hozzájuk kapcsolódó elemzések.

teljes tárgyalása is túlfeszítené egy tanulmány szűkre szabott kereteit.⁶ A fontosabb okok közül is csak néhányra szeretnék utalni.

Az okok egyike az az ismert tény, hogy a társadalomtudományok területén eddig gyakorlatilag lehetetlennek bizonyult az egymással versenyző elméletek „objektív” – a természettudomány legtöbb területén jól alkalmazható kritériumok szerinti – összevetése és értékelése, ezért a köztük való választást inkább a *divat* és nem gyakorlati értékük irányítja. Egy másik – és talán fontosabb – okot a matematikai megközelítés tagadhatatlanul meglévő „*science appealjében*” kell keresni, amely különösen azon matematikus előképzettségű szakemberek számára volt és maradt csábító, akik – a fentebb jelzett forradalmi jellegű módszertani szemléletváltás idején és annak következtében – egyre nagyobb számban keresték és találták meg tudományos karrierjüket a közgazdaságtan területén. S végül, ami talán a legfontosabb, meglehetősen krónikus hiány mutatkozik hasonló vonzerejű – formalizált vagy verbális – alternatív elméleti megközelítésekben.

A Neumann-modell közgazdasági háttere

A fejlődési tendenciák e szükségképpen elnagyolt, egyesekben méltán hiányérzetet keltő áttekintése után térjünk most vissza a címben jelzett témánk, a Neumann-modell közgazdasági háttérének kérdésére. Ennek a kérdésnek az eldöntését igen megnehezíti, hogy a modell alapjául szolgáló egyensúlyi összefüggések olyannyira általánosak, hogy azok szinte bármilyen elméletnek a részei lehetnének. Hiányoznak ugyanis belőlük és mögüjük azok az összefüggések, amelyek megmagyaráznák: milyen erők, milyen viselkedési mechanizmusok idézhetnék egyáltalán elő egy adott gazdaság ilyen feltételekkel definiált egyensúlyi állapotát. Megfelelő interpretációval kiegészítve, a kapott modell nyugodtan ráilleszhető lenne egy kisárutermelő („népi kapitalista”), egy tőkés, de akár egy szocialista gazdaságra is.

Neumann dolgozata, valamint a kortársak (például az ifjabb Karl Menger, Káldor, Marschak, Morgenstern) visszaemlékezései is nagyon keveset fednek fel a lehetséges közgazdaság-elméleti háttér vagy inspiráció tekintetében. Matematikai modellje szűkszavú közgazdasági értelmezése közben Neumann kissé talányosan csak ennyit jegyzett meg: „Nyilvánvaló, hogy milyen fajta elméleti modellnek felelnek meg a fenti feltevések.” (Neumann [1937], magyar kiadás [1965] 162. o.) Hogy ez mennyire nem nyilvánvaló, azt csak a későbbi értelmezési kísérletek és viták mennyisége igazolja. A *bécsi Menger-körrel* tartott szoros kapcsolata, illetve németországi munkássága mindenestre azt valószínűsíti, hogy Neumann elsősorban a német nyelvű irodalomban *találhatta meg* modellje közgazdasági interpretációját, akár közvetlenül (olvasmányain keresztül), akár közvetve (tudományos szemináriumokon, dolgozatokon, magánbeszélgetéseken keresztül).

Nem véletlenül használtam a „megtalálta” kifejezést, mivel a matematikai forma eredetét illetően nincs semmi bizonytalanság. Neumann ugyanis ugyanazt a bilineáris formát és minimax (nyeregpon) megközelítést alkalmazta, mint amelyet a nevezetes, már 1928-ban publikált, a kétszemélyes zérus összegű játékok egyensúlyával foglalkozó dolgozatában sikerrel alkalmazott. Ebben a nyeregponi (az egyensúlyi) megoldás szükséges feltételeit, egy nevezetes termodinamikai összefüggést adaptálva, egy komplementaritási

⁶ A hetvenes, de különösen a nyolcvanas években rendkívüli mértékben megnőtt a közgazdaságtani metodológiával foglalkozó szerzők és publikációk száma. Egyedül 1984 és 1993 között közel 50 könyv jelent meg a témában (lásd *Backhouse* [1994a] áttekintő tanulmányát). A gazdag választékból *Rosenberg* [1976], [1992], *Blaug* [1980/1992], *Hausman* [1981], [1991], *Hutchison* [1992], *McCloskey* [1986] könyveire, valamint *Tool-Samuels* [1989], *Laviole* [1990] és *Backhouse* [1994b] tanulmánykötetekre, illetve *Nagy Aladár* [1997] művére hívom fel a figyelmet.

megkötésekkel kiegészített egyenlőtlenségrendszerrel adta meg. A matematikai forma tehát „adott” volt, s eredetét utólag is könnyen rekonstruálni lehetett.⁷

Neumann és a bécsi Menger-kör számára a módszertan valószínűleg fontosabb is volt, mint a közgazdasági interpretáció. Ezt jelzi a dolgozat címe is, amelyben az „egy gazdasági egyenletrendszer” mellett egyenrangúan jelenik meg „a Brower-féle fixponttétel egy általánosítása” utalás is. Ugyanerről tanúskodnak Neumann Jánosnak azok a fennmaradt megjegyzései is (lásd például *Morgenstern* [1976]), amelyekben visszatérően hangsúlyozta, hogy véleménye szerint a közgazdászoknak a klasszikus fizikából átvett matematikai eszköztárnál jóval korszerűbb és sokkal adekvátabb matematikai módszereket kellene felhasználniuk.

Káldor [1989] úgy emlékezett, hogy Neumann kérésére, aki rövid, összefoglaló jellegű közgazdasági munkák iránt érdeklődött nála egy budapesti találkozásuk alkalmából, Wicksell, Cassel és Böhm-Bawerk műveit ajánlotta figyelmébe. Ugyancsak Káldor visszaemlékezése szerint Neumann igen kritikusan nyilatkozott a marginalista megközelítésről, mert az „túl nagy hangsúlyt helyez a helyettesíthetőségre és túl keveset azokra az erőkre, amelyek kölcsönös feltételeket szabnak a növekedés számára” (viii. o.). Káldor visszaemlékezései szerint Neumann a walrasi egyensúly feltételeinek egyenletrendszerként való felírását is bírálta, mivel azok közgazdasági szempontból értelmetlen negatív árakat is adhatnak.⁸

A kortárs visszaemlékezők közül *Marschak* (lásd *Weintraub* [1983] 13. o.) egy berlini szemináriumát idézte fel, amelyet valamikor az 1920-as évek végén tartott Berlinben (*Szilárd Leó* szervezésében!). Ezen a szemináriumon Marschak, talán Walras és Cassel nyomán, az általános gazdasági egyensúly matematikai egyenletrendszerként való ábrázolásának lehetőségeiről beszélt. Neumann sorozatos közbeszólásaival rendre félbeszakította a szemináriumot, és emellett érvelt, hogy az egyenletek helyett egyenlőtlenséget kellene használni az egyensúly definíciójában. Közbeszólásai alapján utólag úgy tűnt, hogy akkoriban már nagyjából megfogalmazódhatott Neumann fejében a közgazdasági dualitás koncepciója. *Thompson* [1989] közlése szerint pedig *Morgenstern* azt gyanította, hogy Neumann esetleg *Leontief* [1928] dolgozatához juthatott hozzá valahol, s onnan meríthette a közgazdasági interpretációhoz az ötletet.

Akadnak tehát bizonyos homályos támpontok, de véleményem szerint a Neumann-modell közgazdasági értelmezése körül folyó vitában eddig felhozott bizonyítékok és érvek nem bizonyultak perdöntőnek. Tudva levő, hogy Neumann nem foglalkozott szisztematikusan a közgazdaságtannal, ezért nem tartom valószínűnek, hogy az ő matematikusi és geniუსi magasságából egyáltalán feltűnhettek volna neki azok az értelmezési nüánszok, amelyek megkülönböztetik és egymással szembeállítják a gazdasági rendszer eltérő szemléletű (például klasszikus és neoklasszikus) felfogásait. Adva volt számára egy matematikai modell és egy módszertani keret, amely már bevált egy játékelméleti probléma egyensúlyának elemzésében, s ehhez kereste meg a lehetséges és minimálisan szükséges közgazdasági interpretációt. (Ne feledjük el, hogy a hilberti program szellemében, amelynek az 1920-as években Neumann még az egyik kiemelkedő követője volt, a minél szélesebb körű interpretációs lehetőség csak növeli egy matematikai „metamodel” értékét.)

A legkevésbé ismert és ezért talán a legérdekesebbnek tűnő értelmezési lehetőségre *Kurz-Salvadori* [1995] hívta fel a figyelmet. Ez pedig a Neumann-modell egy szocialista típusú gazdaságra vonatkozó értelmezésének hipotézise. Sejtésük szerint lehet, hogy Neumann egy szocialista hajlamú Frobenius-tanítvány, a vele egy időben Berlinben dolgozó matematikus, *Remak* [1929] dolgozatán keresztül figyelt fel a gazdasági egyensúly általa követett matematikai ábrázolási lehetőségére. Remak munkája ugyanis meglehető-

⁷ A modell játékelmélettel való kapcsolatáról bővebben lásd *Kemeny-Morgenstern-Thompson* [1956], *Dore* [1989], különösen pedig a termodinamikai potenciál függvényvel való kapcsolatáról, Bródy András tanulmányait, mindenekelőtt *Bródy* [1986].

⁸ Ebben azonban Neumannnak nincs igaza, mivel negatív árak természetes módon kialakulhatnak, ha a felesleg nem megengedett, azaz a díjtalan lomtanítás feltétele nem áll fenn.

sen nagy feltűnést keltett a berlini matematikuskörökben, így Kurz és Salvadori felteszi, hogy Neumann is megismerhette azt.

Remak olyan elméletet vázolt fel, és illusztrált formális modellel is, amelyet – mint maga is jelzi – egyaránt értelmezni lehet egy kisárutermelő és egy szocialista gazdaság esetére (dolgozata tehát a Barone és Lange – lásd *Lange* [1936] – nevével fémjelzett irányzat egyik elfeledett terméke). Elméletének matematikai modelljét csak egy ikertermelés nélküli, *egyszerű újratermelést* folytató (stacioner) gazdaság esetére írta fel. Ha ezeket az egyszerűsítéseket Neumann modelljében elvégezzük [$\lambda = \pi = 0$ és $\mathbf{K} = \mathbf{E}$, lásd az (1a) és (2a) egyenleteket], akkor annak sajátos eseteként megkapjuk Remak modelljét. Ez a modell egyébként a század elején Németországba áttelepülő – *Dmitriev* [1898], [1904] eredményeit magával vivő – „oroszk iskola” (*Bortkiewicz* [1907], *Charasoff* [1910], *Leontief* [1928]) modelljeivel rokon, amely képviselői pedig elég egyértelműen Ricardo követői voltak. Kurz és Salvadori ily módon végül is kapcsolatot teremtett a klasszikus hagyományok és Remak, illetve rajta keresztül Neumann és az előbbiekközött, bár ezt ők nem mondták ki tételesen.

Remak modellje tehát – az alkalmazott feltevések következtében – Neumannénál egyszerűbb volt, és így más volt az elemzéséhez szükséges matematikai módszerek jellege is, tudományosmodell-szemlélete pedig kifejezetten elmaradott volt kora természettudományos műveltségű matematikusaihoz képest. Remak modelljének tehát nemcsak az ideológiai, hanem módszertani sajátosságai is hozzájárulhattak ahhoz, hogy Remak dolgozata – Kurz és Salvadori közlése szerint – meglehetősen elutasításra talált a berlini matematikuskörökben. Kurz és Salvadori mindenestre számos szövegrészlet összehasonlításából arra a következtetésre jut, hogy Neumann modellje „egyebek között, egy válasz” (*Kurz–Salvadori* [1995] 414. o.) is lehetett matematikus kollegája kritizált munkájára. Ha ez a sejtésük kissé légből kapottnak tűnik is, végső konklúziójukkal mindenképpen egyet lehet érteni: „*se non é vero, é ben trovato*” (ha nem igaz is, jól lett kitalálva).

Ha ezzel szemben azt fogadjuk el, hogy Neumann János egy tőkés gazdaság egyensúlyi állapotának feltételeiként értelmezte modelljét, akkor még mindig nyitva marad a közvetlen elméleti háttér kérdése. Mint ismeretes, Neumann dolgozata 1945-ös angol nyelvű kiadásának előkészítése során Káldor *Champernowne*-t kérte fel arra, hogy írjon egy értelmező esszét hozzá. Champernowne ebben egyértelműen a klasszikus (Ricardo, Marx) kínálati megközelítést jelölte meg a modell „nyilvánvaló” elméleti háttéréként. *Samuelson* [1989] ezzel szemben, miközben a maga nemében „briliánsnak” nevezi, kétségbe vonja a statisztikus Champernowne interpretációjának jogosságát, és vélt tévedéseit a közismerten antimarginalista és anti-neoklasszikus Káldor és *Sraffa* elfogult tanácsainak tulajdonítja.

Arrow pedig határozottan azt állítja, hogy „nagyon világosnak látszik, hogy (Neumann – *Z. E.*) Cassel művéből indult ki” (*Arrow* [1989] 17. o.). Lionello Punzo a matematikai közgazdaságtan történetének egyik neves művelője is úgy gondolja, hogy a bécsi Menger-kör (Schlesinger és Wald) környékén kell keresni Neumann modelljének a közvetlen közgazdasági és módszertani rokonságát (*Punzo* [1989]). Erre a bécsi kapcsolatra egy kicsit később még visszatérek. De előbb nézzük meg közelebbről a neoklasszikus rokonság kérdését!

A klasszikus–neoklasszikus dichotómia és a Neumann-modell

Samuelson hivatkozott tanulmányában, Champernowne klasszikus interpretációjának cáfolataként, részletesen levezeti a Neumann-modell leglényegesebb állításait egy általános neoklasszikus modellből (*Samuelson* [1989]). Samuelson ezzel nemcsak Solow korfui állítását próbálta meg igazolni, hanem egyszersmind fényt derített *Koopmans* [1974] egy

korábbi kijelentésének a hátterére is, amelyben Neumann modelljét „nem túl jó közgazdaságtanként” értékelt, miközben elismerően emlékezett meg Neumann dolgozatának a neoklasszikus módszertannal rokon „technikai” újdonságairól.

Samuelson azt sem titkolta, hogy saját személyének is tartozott ezzel az igazolással. Felidézi, hogy az 1940-es évek elején részt vett Neumann-nak a modelljéről a Harvardon tartott egyik előadásán. Neumann ott is hangsúlyozta az új matematikai eszközök alkalmazásának szükségességét, mire Samuelson közbeszólt, hogy ő úgy érzi, hogy mindaz, amiről ott szó volt, az ismert szélsőérték-számítási tételekkel is kezelhető lenne (amelyek közgazdaságtani adaptálásával éppen el volt foglalva). Neumann a közbeszólását egy gyors ríposzttal intézte el: „Fel merne tenni erre egy szivart, fiatalember?” Az 1989-es tanulmányában Samuelson erre hivatkozva jegyzi meg levezetése végén, hogy „Neumann szelleme tartozik neki egy szivarral.” (Ha egy egésszel nem is, egy félszivarral bizonyára.)

Miközben tehát a neoklasszikus iskola egyes kiemelkedő képviselői alig burkoltan „leszólják” a Neumann-modell közgazdaságtani jelentőségét, Roy Weintraub, a matematikai közgazdaságtan történetének egy másik avatott kutatója szerint „Neumann dolgozata (...) a matematikai közgazdaságtan kiemelkedően legfontosabb (*single most important*) cikke” (Weintraub [1983] 13. o.). Vajon miért vált Neumann látszólag roppant egyszerű modellje ennyire vízválasztóvá? Nyilván azért, mert akaratlanul is a korábban jelzett nagy horderejű tartalmi és módszertani átalakulások forrponjtábjába került. S ezeknek a változásoknak az egyik következménye éppen a klasszikus és a neoklasszikus iskola merev szembeállítására lett.

Nem könnyű néhány mondatban jellemezni a két iskola között megnyilvánuló markáns szemléletbeli különbségeket. Mielőtt azonban még erre kísérletet tennék, arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy a „klasszikus” jelző itt nem csak a nagyjából Mill-lel és Marx-szal lezáruló klasszikusnak nevezett közgazdászok munkáira, tehát egy már lezárt történeti szakaszra utal.⁹ Ezzel a jelzővel, itt és most, a *klasszikus hagyományokat követő mindenkori közgazdászokra* kívánok utalni. Ez a hagyomány ugyanis egyáltalán nem halt ki a neoklasszikusok színre lépésével, mi több, az elmúlt két évtizedben kifejezetten újraszületett. Pontosabb lenne tehát „régii és legújabb klasszikus” megközelítésről beszélni, ha Lucas le nem foglalta volna az új klasszikus kifejezést az alapvetően neoklasszikus indíttatású makroökonómiai elméletére. Jobb híján ezért *neoricardiánus* vagy esetenként – Samuelson nyomán – „*revideált klasszikus*” iskoláról fogunk beszélni.

Ezt az iskolát, *Harcourt* [1969] kiváló összefoglaló cikkének, illetve könyvének címét kölcsönözve, a „két Cambridge közötti vita” hozta létre. Ennek a nevezetes polémianak volt az egyik állomása az említett korfui konferencia is. A vita Joan Robinson egy 1953-as cikkével indult, és a hatvanas években kulminált. Ennek a vitának a heve kovácsolta egybe először Nagy-Britannia, majd fokozatosan a kontinens közgazdászainak egy számottevő csoportját, amelyik a hetvenes és nyolcvanas évekre markáns irányzattá szerveződött, és különböző elnevezések mögött (neokeynesiánus, neoricardiánus) lépett színre.

Ezt a „revideált klasszikus” iskolát – Lakatos Imre kifejezésével – egy jól körülhatárolható „kutatósi programnak” nevezhetjük (lásd például *Lakatos–Musgrave* [1970], *Lakatos* [1978]). Nem véletlenül – ha nem is egy az egyben – használom Lakatos szociológiai ihletésű terminológiáját. Ez ugyanis kiválóan alkalmas lenne arra, hogy leírjuk vele, hogyan szerveződött meg ez a hevesen anti-neoklasszikus iskola. Lakatosnak az egymással versenyző, sőt harcban álló kutatósi programok leírására kidolgozott terminológiájá-

⁹ Érdemes ennek kapcsán röviden utalni arra a számos szerzőre jellemző ideológiai pedantériára, amellyel Marxot kiveszik a klasszikus közgazdászok sorából („a klasszikusok és Marx”).

val jól ki lehetne fejezni azt a valódi ellenreformációs, „revizionista” (Samuelson) hangulatot, amely egységbe tömörítette Nyugat Európa közgazdászainak egy jelentős csoportját a túlsúlyos, egyre agresszívebbnek és arrogánsabbnak érzett, amerikai dominanciájú neoklasszikus táborral szemben. Mivel az ő neveik itthon még kevésbé ismertek, mint a neoklasszikus tábor kiemelkedő képviselőié, fontosnak tartok ide beiktatni egy rövid „névsorolvasást”: Steedman (Anglia), Garegnani, Salvadori, Passinetti (Olaszország), Kurz (Ausztria), Flaschel, Schefold (Németország), Bidard, Duménil, Lévy (Franciaország), és nem utolsósorban, a világpolgár, amerikai–angol–olasz Goodwin.¹⁰

A „revidéált klasszikus” irányzat az 1990-es évekre már valódi iskolává szerveződött. Kialakult a „kemény magja” (*hard core*) és a „védő övezete” (*protective belt*, hogy továbbra is Lakatos Imre terminológiáját használjam), a saját *eredettörténete*, „szentjei és apostolai” (főleg Ricardo, egy kevés Smith és Marx, Dmitriev, Bortkiewicz, Charasoff, Leontief, Neumann, Sraffa). Tekintélyes mennyiségű és minőségű publikáció dokumentálja kutatásait. Ezen iskola képviselőinek matematikai felkészültsége általában nem marad el a neoklasszikus irányzat művelőitől, de tudatosan visszafogottabbak az elvontabb, nem algoritmizálható matematikai eszközök alkalmazásában.

Nos, a régi és a legújabb klasszikus közgazdászok „víziójának” és gazdaságfelfogásának legfontosabb elemeit a következőkben foglalhatjuk össze:

- hangsúlyozzák az *árutermelés körkörös* természetét („árúk termelése árúk révén”, Sraffa [1975]);

- ezzel összefüggésben, az árak és termelés alakításában csak *másodlagos*, mintegy csak az általános tendenciát módosító szerepet tulajdonítanak a *természeti erőforrások* korlátosságának;

- az igazi, de fokozatosan feloldható korlátnak a felhalmozott „művi” erőforrások (*tőkejavak*) mennyiségét tekintik, azok időleges, relatív szűköségét;

- az egyes *termelési tényezők* „normális” (egyensúlyi) *árát* egymástól *eltérő* (aszimmetrikus) *módon* magyarázzák meg, szorosan összekapcsolva elosztáselméletükkel, amelyet
- az árutermelés körköröséből és a munkaerő reálbérének exogén (társadalmi) meghatározottságából fakadó *társadalmi többlet feletti osztozkodásként* értelmeznek;

- a hosszú távú, „mozgó” egyensúly (vonzási központ) kialakulásában elméletükben a *termelés* (kínálat, termelési költségek) szerepét tekintik a *meghatározónak*, a fogyasztói szükséglet és általában a hasznossági megfontolások szerepe ebben másodlagos;

- felfogásuk szerint a *kereslet* és a *kínálat* között jelentkező, váltakozó irányú és intenzitású „feszültség” csak a hosszú távú egyensúly körüli *rövid távú ingadozásokra* van jelentős hatással;

- ugyanígy, a mindenkori („induló”) *készletek*, a *technológiai választék* és a *helyettesítési lehetőségek* szerepét is *másodlagosnak* tekintik, amelyek hatása a konjunkturális ingadozásokban mutatkozik meg.

A „régiklasszikusok”, bőséges empirikus-történelmi utalásokkal illusztrálva, elméleteiket esszéjelleggel fejtették ki. A mennyiségi összefüggések náluk még csak illusztratív szerepben, többnyire számpéldákon keresztül jelentek meg. A „revidéált klasszikusok” ezzel szemben – mint már jeleztük, ha a neoklasszikusoknál visszafogottabban is, de – kiterjedten alkalmazzák a modern matematika által kínált modelleket és eszközöket a klasszikus elődök elméletének újrafogalmazásában és továbbfejlesztésében.

Ezzel szemben a *korai és modern neoklasszikus megközelítést* a következők jellemzik:

- a kínálattal szemben a *keresleti elem*, a költségekkel szemben a *hasznosság* és a *szűköség* szerepét hangsúlyozzák (lásd különösen az osztrák marginalistákat);

¹⁰ Lásd például Salvadori–Steedman [1990] és Kurz–Salvadori [1995] munkáinak részletes irodalmi utalásait. A csatolt irodalomjegyzék is tartalmaz néhány utalást a fenti szerzők munkáira.

– a *termelési tényezők* három nagy csoportjának (munka, tőke, természeti erőforrások) a termelésben betöltött szerepét *teljesen szimmetrikusan* kezelik, s e tényezők egyensúlyi árait a szűkösség, illetve a közvetett hasznosság elve alapján határozzák meg;

– előtérbe helyezik a javak *helyettesíthetőségének* és a kereslet, illetve kínálat folytonos és gyors *változásának* szerepét az árak alakulásában;

– a *technológiai* lehetőségeket, a fogyasztói *preferenciákat* és az induló *jószágkészleteket gazdaságon kívüli* adottságoknak tekintik;

– a gazdaságot az egyensúlyi állapot felé mozgató erőket – racionális gazdasági szereplőket (*homo oeconomicus*) feltételezve – az alternatív lehetőségek közötti *optimális választás* elve alapján vezetik le;

– elemzéseiket az általános egyensúly egységes és *egyszintű, zárt*, a társadalmi, történelmi és pszichológiai tényezőktől teljesen elvonatkoztató tiszta elméleti keretébe helyezik (az osztrák marginalistákat és Marshallt kivéve);

– kiterjedten és minden különösebb fenntartás nélkül alkalmazzák (ismét az osztrák marginalistákat és Marshallt kivéve) a más tudományágakban, különösen a fizikában kifejlesztett *matematikai eszközöket*, elméleti és módszertani *ideáljuknak* a természettudományokat tekintik.

Le kell szögeznünk, hogy Neumann modelljének legalább négy olyan lényeges vonása van, amely tagadhatatlanul közelebbi és közvetlenebb kapcsolatban van a klasszikus hagyományokkal, mint akár a „lausanne-i–brit koalíció” (a francia Walras, az angol Jevons, az olasz Pareto), akár az osztrák (Menger, Böhm-Bawerk, Wieser), akár a svéd (Wicksell, Cassel) neveivel fémjelzett neoklasszikus iskolával. Ezek pedig a következő vonások:

– az árutermelés *körkörös* jellegének hangsúlyozása;

– a munkaerőnek és a munkabérnek a *szükséges fogyasztáson* keresztüli megfogása (nem szűkösségi bér);

– a *tőkének* a meghatározott összetételű termelési eszközök formájában való *ábrázolása*, ami miatt a tőkének nincs önálló, az árártól független természetes mértéke;

– és az a tény, hogy Neumann explicite felteszi, hogy a gazdaság növekedési lehetőségeinek nem a *természeti erőforrások* (köztük a munkaerő) potenciális szűkössége szab korlátot.

Ezek közül a termelési tényezők kezelése kifejezetten ellentétes a neoklasszikus felfogással. Ugyanakkor modelljéből teljes mértékben hiányzik néhány fontos neoklasszikus „kemény maghoz” tartozó elem. Így például:

– teljesen passzív a keresleti tényezők szerepe (adott személyes és termelőfogyasztási szerkezet, csak a termelés szerkezetétől függő felhalmozási kereslet);

– ugyanígy: a kereslet és kínálat szerkezetét magyarázó folytonos helyettesíthetőség feltevése is csak marginális szerepben jelenik meg modelljében (a technológia definiálásában);

– még csak utalás sem található a hasznosság fogalmára;

– nincsenek a modellben a termelést potenciálisan korlátozó, gazdaságon kívülről származó készletek.

Míndezenek meglehetősen ingataggá teszik a neoklasszikus rokonság mellett érvelő álláspontokat. Még mindig nem világos azonban Neumann modellje klasszikusokkal való rokonságának az eredete. És erre a sokak által emlegetett Menger-körrel való kapcsolata sem derít fényt, amelyet rövidesen közelebről szemügyre veszünk, de előtte ismét egy rövid módszertani kitérőt teszünk.

Még egyszer a tiszta elmélet és az empirikus relevancia kérdéséről

A fenti elnagyolt és több egymástól megkülönböztethető áramlatot egybemósó jellemzéshez mindenképpen szükséges néhány kiegészítő megjegyzést tenni, éspedig mindenekelőtt a *tiszta elmélet és az empirikus relevancia*, illetve ezzel összefüggésben a *matematika közgazdaságtani szerepe* megítélésének tekintetében. Ezekben a kérdésekben ugyanis – a klasszikus–neoklasszikus vízválasztótól függetlenül – jelentős eltérések tapasztalhatók az egyes főirányzatok között.

Walras – mint fő művének címe is jelzi (*Elements d'Economie Politique Pure*) – a közgazdaságtant „tiszta” tudományként fogta fel, s kiterjedt levelezésével (saját eredményeinek elismertetésén túl) szívósan propagálta a matematika használatát és a tiszta tudomány ideáját. Felfogásában egyértelműen felismerhető annak a fordulatnak a hatása, amely a fizikában és a matematikában a 19. század második felében fokozatosan végbement, és ami a hipotetikus-axiomatikus-deduktív módszertani elvek előtérbe kerüléséhez vezetett.

Érdemes figyelmeztetni arra, hogy *nem Walras „találta fel” az általános egyensúlyelméletet*, még csak annak matematikai modelljét sem igazán. Cournot [1838–1929], aki a részpiaci egyensúly vizsgálatára elsőként vette igénybe a korabeli fizika matematikai apparátusát, maga is tisztában volt azzal, hogy az egyes piacok egyensúlya csak része az általános egyensúlynak. Ennek ellenére Cournot nem tartotta érdemesnek és időszerűnek egy általános egyensúlyt definiáló matematikai rendszer felírását (mi sem lett volna könnyebb számára), mert, mint írta, „... az egész rendszer figyelembevétele (...) meghaladná a matematikai elemzés és a gyakorlati számítási módszerek lehetőségeit (erejét), még akkor is, ha a (modell) minden konstans paraméteréhez számszerű értéket tudnánk rendelni” (Cournot [1838] 127. o., idézi Ekelund–Hébert [1997]).

Walras ezzel szemben vette magának a bátorságot, elszakadt az empiriától, és – a fizikában ez idő tájt elterjedő „tiszta tudomány”-felfogás szellemében – a közgazdaságtant absztrakt, deduktív, formalista elméletként kezelte. Ebben egyébként Walras komoly segítő társra talált az angol Jevons személyében, aki ugyanazt vallotta, mint ő.¹¹ Jevons igen modern és hibátlan módon fogalmazta meg ennek a felfogásnak a lényegét: „Bizonyos megfigyelt tények birtokában megfogalmazzuk az ezeket szabályozó törvényekre vonatkozó hipotézisünket, majd ebből a hipotézisből kiindulva deduktív módon megmagyarázzuk a várt eredményt, és azután a kérdéses tényekkel összekapcsolva elemezzük ezeket az eredményeket” (Jevons [1871] 87. o.).

Marshall ugyanakkor (akit Walras előszeretettel csak „a politikai gazdaságtan nagy fehér elefántjaként” emlegetett) korántsem volt meggyőződve a közgazdaságtan „matematizálásának” és az általános egyensúlyelméleti keret alkalmazásának hasznáról. Annak ellenére sem, hogy Marshall kiválóan képzett volt matematikában, és saját céljaira, „gyorsírásként” kiterjedten használta is azt.¹² Marshallnak az általános egyensúly modelljéről vallott felfogása Cournot-éhoz hasonló volt, és a matematikai formalizmus fölé helyezte az „*empirikus relevancia*” és a célba vett fogadó közeggel való *kommunikáció* követelményét. Azt tartotta, hogy a matematikai nyelvezetre való átállás a közgazdaságtanban azzal a veszéllyel jár, hogy „félrevezethet bennünket az intellektuális játékokkal, képzetes problémákkal való foglalkozás irányába” (Pigou [1925] 84. o. – idézi Ekelund–Hébert [1997]).

¹¹ Walras és Jevons közösen össze is állították és publikálták az általuk fellelt összes matematikai formalizmust alkalmazó közgazdasági mű listáját, amely közel 70 tételt tartalmazott.

¹² Ennek kapcsán érdemes utalni Weintraub [1991] fejtegetésére, aki Marshall hozzáállását a korabeli angol fizika és matematika konzervativizmusában, a kontinensen bekövetkezett fejlődéstől való elmaradásában jelöli meg.

Más helyütt a következőképpen fogalmazta meg a matematika használatával kapcsolatos álláspontját: „Egyre inkább az lett az érzésem, hogy egy jó matematikai tétel, amelyik egy közgazdasági hipotézist fogalmaz meg, aligha lehet jó közgazdaságtan; és egyre jobban tartottam magam a következő szabályokhoz. 1. A matematikát csak gyorsírásként használd, s ne a kutatás hajtóerejeként! 2. Csak addig használd, míg eredményre nem jutottál! 3. Fordítsd le angolra! 4. Majd illusztráld a valós életből vett fontos példákkal! 5. Vesd tűzbe a matematikai változatot! 6. Ha nem tudod megoldani sikeresen a 4. feladatot, akkor égesd el az angol változatot is! Ez utóbbit gyakran megtettem!” (Pigou [1925] 427. o. – idézi például Ekelund–Hébert [1997]).

Azért időztem el hosszabban Marshall álláspontjánál, mert egyrészt az angol közgazdászok egymást követő generációira roppant nagy hatással volt, ami szinte mind a mai napig tart. Másrészt pedig azért, mert véleménye merőben ellentétes Walras, Jevons és a modern amerikai főáramlat jeles képviselőinek az álláspontjával. A marshalli hagyományok erős angliai hatásának illusztrálására érdemes idézni Hickset, a „neoklasszikus Szentháromság” egyik tagját (Walras és Samuelson mellett). Hicks [1939–1978] korszakalkotó műve még a háború előtt eljutott az Egyesült Államokba, és ott hamar a matematikai közgazdaságtan iránt érdeklődők egyik alapművévé vált. Hicks első amerikai látogatása (1946) során szinte minden olyan jelentős közgazdással találkozott, aki az általános egyensúly terén kutatott. Látogatására és találkozásaira visszaemlékezve, Hicks a következőket írta: „... attól tartok csalódást okoztam számukra, és azóta is csalódást okozok nekik. Komoly eredményeket értek el; de azok nem tartoznak az én kutatási irányomhoz. Kevés szimpátiát éreztem az öncélú elméletieskedés iránt, ami olyannyira jellemzi az amerikai közgazdaságtani kutatások egyik irányzatát (...) és kevés bizalmam van az ökonometriában, amelyre oly nagy mértékben hagyatkoztak a valósággal való kapcsolattartás terén.” (Hicks [1984] 287. o., idézi Weintraub [1991]).

A közgazdasági metodológiával foglalkozó Rosenberg [1992] véleménye szerint (amiben egy jó adag túlzás is van, de azért nem teljesen megalapozatlan) Arrow, Debreu és követői a közgazdaságtant a valós gazdaságokkal foglalkozó *reálművelésből* részben a *politikai filozófia*, részben az *alkalmazott matematika* tudományágává alakították át. Rosenberg megállapítását azzal indokolja, hogy a neoklasszikus általános egyensúlyelmélet voltaképpen nem más, mint „annak a (a tudomány mai állása szerint bebizonyíthatatlan – Z. E.) állításnak a formalizált tanulmányozása, amely szerint a koordinálatlan önzés nem szándékolt következményei a szűkös erőforrásoknak, az emberi szükségletek kielégítése szempontjából vett, leghatékonyabb kihasználásához vezetnek” (Rosenberg [1992] 219. o.). De térjünk most vissza Neumann gyakori rövid bécsi látogatásaira és azok reá, pontosabban modellje közgazdasági interpretációra gyakorolt lehetséges hatásának kérdésére!

A bécsi kapcsolat

A bécsi kör érdeklődése az általános egyensúlyelméleti modellezés iránt az osztrák iskola teljes beszámítási (*Zurechnung, imputation*) elvének tanulmányozásából nőtt ki.¹³ Az osztrák iskola, az idősebb Menger [1871] nyomán, a *végző kibocsátás* (fogyasztási cikkek és tőkejavak) és a *termelési tényezők* (különböző fokon *magasabb rendű javak*) csoportjába sorolta az árukat a szükségletkielégítéshez való hozzájárulásuk közvetettsége (hierarchiája) alapján.¹⁴ Az osztrák iskola árelmélete szerint a végző kibocsátás (relatív) árait – $p =$

¹³ Lásd erről bővebben Punzo [1989] és Menger [1973], illetve az osztrák iskoláról Mátyás Antal [1992], 1996]. Ennek a résznek a megírásában jelentős mértékben támaszkodtam Punzo [1989] mélyreható elemzésére.

¹⁴ Vegyük észre, hogy az áruk ilyen funkcionális osztályozása nem átfedésmentes, mivel számos jószág egyaránt lehet végző kibocsátás és termelési tényező is, a felhasználás területétől függően! Erre a kritikus kérdésre később még visszatérünk.

(p_i) – a határhasznok arányai határozzák meg, és ezek, illetve a szűkös termelési tényezők ráfordítási arányai – $\mathbf{G} = (g_{ki})$ – ismeretében pedig „visszaszámíthatók” az utóbbiak ára – $\mathbf{r} = (r_k)$.

A fenti ármeghatározás egy

$$r_1 \times g_{1i} + r_2 \times g_{2i} + \dots + r_k \times g_{ki} + r_m \times g_{mi} = p_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

mátrixalgebrai jelölésekkel $\mathbf{rG} = \mathbf{p}$ alakú *egyenletrendszerként* írható fel. Pontosabban: egy feltételezett *azonosságként*, ha a meghatározást *ex post* modellként értelmezzük. Ez utóbbi különbségtételt és annak fontosságát nem érzékelték a (közgazdász) Meyer által szervezett egyik *bécsi kör* tagjai, akik ennek a meghatározásnak a matematikai természetét boncolgatták. A kör szemináriumait látogatta az a szintén magyar származású (bankár, műkedvelő közgazdász) *Schlesinger Károly* is, akinek a későbbi fejleményekben meghatározó szerepe lett. A Meyer-kör tagjai felismerték, hogy ez az ármeghatározási elv matematikai szempontból egyáltalán nem triviális problémát rejt magában. Mi biztosítja ugyanis azt, hogy a felírt egyenletrendszer *reguláris* lesz ($n = m$), vagyis hogy a szűkös termelési tényezők száma megegyezik a végtermékekével, és ha még pont annyi is lenne, mi garantálja, hogy a kapott egyenletrendszernek van nem negatív megoldása? (Vegyük észre, hogy már a probléma felvetése önmaga is egy *ex ante* modellszemléletet tükröz, miközben az osztrák iskola *ex post* jelleggel értelmezte a nevezett feltételt!)

Az árbeszámítás kérdése tehát az ármeghatározó egyenletrendszer regularitásának hiányaként és a megoldás potenciális közgazdasági értelmetlenségeként (egyes termelésitényezőárak potenciális negativitásaként) merült fel. Ennek a problémának az elemzése keltette fel a bécsiek érdeklődését Cassel általános egyensúlyelméleti modellje iránt.¹⁵ Cassel egy egyszerű újratermelést folytató gazdaság egyensúlyát¹⁶ olyan egyenletrendszerrel jellemezte, amely szükségképpen reguláris. Ő ugyanis az *árbeszámítási képletet kiegészítette a termelési tényezők* (feltételezett) *kereslet-kínálati egyenlőségével*. Cassel szintén az *ex post* modellezés szemléletét követte, és ezért eleve feltételezte, hogy modellje csak *szűkös termelési tényezőket* tartalmaz. Cassel modellje így a következő formát öltötte:

$$\mathbf{rG} = \mathbf{p}, \mathbf{Gy} = \mathbf{g}, \text{ ahol } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

A képletekben szereplő \mathbf{y} a végső fogyasztás, \mathbf{g} a termelési tényezők készleteinek vektora, $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ pedig egy nulladfokon homogén keresleti függvény.

A bécsi kör tagjai úgy gondolták, hogy „Cassel okos ötlete” (Punzo [1989]), a definíciós egyenletrendszer *reguláris* tétele, szolgáltatja az ár-beszámítási probléma megoldását. Igen ám, de a Cassel-modell adaptációja során *Schlesinger* [1935] egy látszólag ártalmatlan fogással „megfordította” a *keresleti függvényt*. Az osztrák iskola megközelítésének megfelelően, az $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ *közvetlen* keresleti függvények helyett úgynevezett *inverz* keresleti rendszert, $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ formulát alkalmazott. Ezért a Cassel–Schlesinger–Wald-modellben a termékek ára helyett azok végső fogyasztása lett a változó.

Ennek a látszólag ártalmatlan, formai módosításnak lényeges tartalmi és módszertani következményei lettek. Casselnél ugyanis a *tényezőárak* (\mathbf{r}) egyértelműen meghatározzák a *végtermékek árait* (\mathbf{p}), ez utóbbi árak a *végtermékek* (feltételezés szerint a kínálatallal megegyező) *keresletét* (\mathbf{y}), ez utóbbiak pedig a *termelési tényezők keresletét* (\mathbf{Gy}). Vagyis *Cassel modellje* egy $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}$ alakú, továbbra is reguláris egyenletrendszerre, a szűkös

¹⁵ Cassel [1918] modellje sok szempontból Walras elméletének leegyszerűsített változataként értelmezhető. Érdemes ugyanakkor felhívni a figyelmet arra, hogy Cassel egyáltalán nem utal Walrasra, s nem használja a hasznosság kategóriáját sem!

¹⁶ Cassel az egyensúly statikus egyenleteit egy hosszabb táv átlagában egyensúlyban levő gazdaság „időtlen matematikai szerkezeteként” értelmezi, szemben például Wicksell-lel, aki ugyanezeket egy stationer gazdaság egyensúlyi feltételeinek tekinti (lásd például *Ingrao-Israel* [1990]).

termelési tényezők piacára *redukálható*. Ennek az egyensúlyi állapotot leíró redukált egyenletrendszernek a regularitása – az egyenletszámlálás elve alapján – „igazolta” Cassel számára modellje logikai konzisztenciáját.¹⁷

A Walras–Cassel-modell Schlesinger-féle *strukturális formája* ezzel szemben már nem volt redukálható a fenti módon. Ebben a végtermékek árösszefüggése: $\mathbf{rG} = \mathbf{p}(\mathbf{y})$, valamint a termelési tényezők kereslet-kínálati összefüggése: $\mathbf{Gy} = \mathbf{g}$ már *együtt* alkotja a modell „*végső formáját*”. Ez ugyan szintén reguláris egyenletrendszer, de mégsem oldja meg a bécsi dilemmáját. Tekintsük ugyanis a $\mathbf{Gy} = \mathbf{g}$ *lehetséges erőforrás-elosztási feltételeket* kielégítő (nem negatív) \mathbf{y} *termelési* vektorokat! Helyettesítsük be rendre ezeket a keresleti függvénybe, s határozzuk meg a hozzájuk tartozó \mathbf{p} árvektorokat! Az $\mathbf{rG} = \mathbf{p}(\mathbf{y})$ egyenletrendszer, amelyet a tényezőárak meghatározására így kapunk, továbbra is vagy alul- vagy túldeterminált lesz, ugyanúgy, mint az eredeti árbeszámítási egyenletrendszer, ha a termékek és a termelési tényezők száma nem egyenlő. Vagyis „Cassel okos ötlete” nem segített Schlesingernek az árbeszámítási probléma megoldásában. Casselnél a kiinduló (strukturális) egyenletrendszer potenciális inkonzisztenciája egyes tényezőárak negativitásaként jelentkezett. Ugyanez az inkonzisztencia a Schlesinger-féle változatban az $\mathbf{rG} = \mathbf{p}(\mathbf{y})$ egyenletrendszer irregularitásaként jelent meg.

A negatív tényezőárak előfordulásának a lehetőségére egyébként mások is felhívták a figyelmet a Walras–Cassel modell kapcsán.¹⁸ *Schlesinger* [1935] – *Zeuthen* [1933] függetlenül – a probléma megoldására a matematikai programozás irodalmából ma már jól ismert *komplementeritási elvet* alkalmazta, nevezetesen, az egyenletek helyett egyenlőtlenségeket vezetett be, azzal a kiegészítéssel, hogy az olyan termelési tényezők ára, amelyeknek a korlátja az egyenlőtlenségrendszer megoldásában nem merül ki teljesen, szükségképpen nulla lesz:

$$\mathbf{rG} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{Gy} \leq \mathbf{g}, \text{ de } \mathbf{rGy} = \mathbf{rg}, \quad \text{ahol } \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{y}).$$

Az egyes változók nem negativitására vonatkozó megkötésekkel kiegészített fenti modell keretében bizonyította be *Wald* [1935] – Neumann után másodikként és tőle minden jel szerint függetlenül – az általános egyensúly létezésének lehetőségét.

Schlesinger és Wald ezzel a „kettős svéd csavarral” (Cassel kiegészítő feltételeinek átvételével és a keresleti függvényének megfordításával) Cassel *induktív-intuitív, ex post* jellegű modelljét – az axiomatikus, formalista hilberti program szellemében – egy *deduktív-hipotetikus, ex ante* szemléletű modellt alakították át. Erre valószínűleg fel sem figyeltek, mert számukra ez talán túlságosan is nyilvánvalóan adott volt a kor uralkodó szelleme által. A Neumann- és a Cassel–Schlesinger–Wald-féle modell ugyanakkor mind az *ex ante* szemlélet, mind a matematikai felírás tekintetében igen közel áll egymáshoz. Neumann ugyanis az *ex post* szemléletben felírt (1a) és (2a) modell helyett – ugyanezen a megfontolások alapján – a következő, szimmetrikus komplementeritási megkötéseket tartalmazó egyenlőtlenségrendszert vezette be:

$$\mathbf{Kq} \geq \alpha \times \mathbf{Dq}, \quad \mathbf{pK} \leq \alpha \times \mathbf{pD}, \text{ de } \mathbf{pKq} = \alpha \times \mathbf{pDq},$$

ahol \mathbf{p} és \mathbf{q} féligpozitív vektorok, a pozitív skalár, és az együtthatómátrixokra tett sajátos „irreducibilitási” megkötések miatt¹⁹ $\mathbf{pKq} > 0$, s ez teszi lehetővé, hogy eleve közös kamat- és növekedési tényezőt (α) szerepeltessünk.

¹⁷ Ha történetesen a kapott egyenletrendszernek nem létezne pozitív megoldása, ez Cassel esetében csak azt jelezné, hogy hiba csúszott a modell specifikációjába, hiszen akkor az nem az összes, vagy nem csak a szűkös termelési tényezőket tartalmazná.

¹⁸ Így, például *Wicksell* [1919], *Neisser* [1932], *Stackelberg* [1933] és *Zeuthen* [1933].

¹⁹ Az irreducibilitás Neumann-modellbeli fogalmára és lehetséges általánosításaira vonatkozóan lásd *Gale* [1960], *Móczár József* [1995], [1997a].

A két modell matematikai bizonyítása, valamint közgazdasági felépítése és tartalma azonban olyan mértékben eltér egymástól, hogy szinte teljes bizonyossággal kizárható a közös eredet lehetősége. Annak ellenére is, hogy ugyanazon szeminárium- és kiadványsorozatban láttak napvilágot.²⁰ Érdemes ennek kapcsán felhívni a figyelmet arra is, hogy Neumann és Wald nem is hivatkoznak egymásra. Annak ellenére sem, hogy a Neumann dolgozatát tartalmazó kiadványnak éppen Wald volt a szerkesztője! Mindez megint csak a két tanulmány egymástól független elkészítésére látszik utalni.

Emeljük ki röviden a Neumann- és a Walras–Cassel-, illetve Cassel–Schlesinger–Wald-féle modellek között mutatkozó lényeges különbségeket, amelyek alapján egyébként – matematikai közgazdaságtani szempontokat tekintve – egyértelműen Neumann modellje az érdekesebb, mivel számos későbbi fontos eredmény zseniális megsejtését rejtje magában:

- Neumann modellje kvázistacioner ugyan, de *több időszakos*, így lehetőség van a növekedési potenciál és a profitráta kapcsolatának elemzésére, a Cassel–Schlesinger–Wald-féle modell ezzel szemben *statikus*;

- a *Neumann-féle növekedési pálya* (termelési szerkezet) számos később felfedezett érdekes közgazdasági tulajdonsággal rendelkezik, lásd különösen az úgynevezett autópálya (*turnpike*) tételeket (vö. *DOSSO* [1958], *Morishima* [1961], *Radner* [1961], *Móczár* [1997b], a vele rokon *Sraffa-féle standard árut* és a marxi *transzformációs probléma* helyes megoldását eredményező súlyrendszert (vö. *Bródy* [1969], *Sraffa* [1975], *Zalai* [1988], [1989]);

- a Neumann-modellben a termelési szerkezet és az árak *matematikai dualitása* teljes, s ezzel előrevetítette a lineáris programozás dualitási tételeit, a Cassel–Schlesinger–Wald-féle modell ugyanakkor ebben a tekintetben aszimmetrikus;

- Neumann modelljében először jelenik meg a technológia leírásaként a *lineáris tevékenységelemzési modell*, amelyet majd csak 1950 körül fejtenek ki rendszeresen és alapoznak meg elméletileg (*Koopmans* [1951]), s ez lehetővé teszi az *ikertermelés* és a *technológiai választék* figyelembevételét, a Cassel–Schlesinger–Wald-féle technológia ez utóbbiakat nem engedi meg;

- Neumann elsőként ismerte fel és ábrázolta formálisan azt is, hogy a *hatékony* termelési *tevékenységek* kiválasztása és az *egyensúlyi* (hatékonysági) *árrendszerek* meghatározása egymást kölcsönösen feltételező probléma;

- a Neumann-modellben (a gyakorlatban kiterjedten használt input-output modellekhez hasonlóan) lehetőség van a *körkörös termelési kapcsolatok* ábrázolására, míg a Cassel–Schlesinger–Wald-féle modellben ezek nem jelennek meg;

- Neumann a modellje megoldásának létezését egy *fixponttétel*²¹ alapján bizonyította (Wald teljes indukción nyugvó hagyományosabb módszerekkel), ami ugyan modellje esetén nem lett volna szükséges (utólag túl erős eszköznnek bizonyult), viszont az általános egyensúly későbbi, neoklasszikus indítatású modelljei esetében már elengedhetlenné vált;

- Neumann – korábbi játékelméleti modelljének ártértelmezésével – kimutatta azt a matematikai azonosságot, amely fennáll a *gazdasági egyensúly és a játékelméleti probléma* megoldása között.²²

²⁰ A két tanulmány közös sorozatban való megjelenítésnek talán éppen az volt a fő indoka, hogy hasonló problémát, hasonló szemléletben közelítettek meg, amiről Neumann Mengertől, akivel szoros kapcsolatot tartott, értesülhetett.

²¹ Neumann a Brower-féle fixponttételt általánosította halmazértékű leképezések esetére. Eredményét később *Kakutani* [1941] – Neumannal konzultálva – általánosította, és a bizonyítását jelentősen egyszerűsítette. Kakutani tételének használata terjedt el, és vált standarddá a későbbiek során.

²² Kétszemélyes modelljét később *Nash* [1950] általánosította, amely nemcsak a későbbi játékelméleti kutatások egyik alaptételévé vált, de Arrow és Debreu ennek segítségével bizonyították nevezetes modelljükben az egyensúly egzisztenciáját (lásd például *Szép–Forgó* [1988], *Zalai* [1989]).

Összehasonlítás Cassel dinamikus modelljével

Mint ismert, Cassel is foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehetne a gazdasági egyensúly modelljébe az időtényezőt explicite beépíteni, azaz a statikus, „időtlen matematikai szerkezetet” az idődimenzióban kibontani. Ennek lehetőségeként – Neumannhoz hasonlóan, de formális leírás és elemzés nélkül – Cassel is egy több időszakos, arányosan bővülő gazdaság modelljét vázolta fel. Többen egyébként ezt a tényt is annak bizonyítékának próbálják tekinteni, hogy Neumann modelljéhez – közvetlenül vagy közvetve – mégiscsak Cassel adhatta az inspirációt. Ám ez a bizonyíték sem igazán meggyőző, mert Cassel Neumanntól teljesen eltérő szemléletben vezeti le és értelmezi az arányosan bővülő gazdaság feltételeit. Nézzük meg ezt közelebbről ezeket a kérdéseket!

Cassel feltevése szerint, mint láttuk, a termékeket közvetlenül az elsődleges erőforrásokból állítják elő, ezeket a fajlagos ráfordítási igényeket tartalmazzák a \mathbf{G} mátrixba foglalt együtthatók. (A Leontief-modellek szellemében a \mathbf{G} mátrix elemeit a teljes – közvetlen és közvetett – ráfordítási együtthatókként is lehetne értelmezni. Erre a kritikus lehetőségre később még visszatérünk.) Elfogadott feltevései következtében Casselnél a termelés szintjét, valamint annak időbeli növekedését kizárólag az elsődleges erőforrások (a termelési tényezők) mennyisége korlátozza. Ez utóbbiak növekedési ütemét Cassel *külső* (gazdaságon kívüli) *adottságként* kezeli, és felteszi, hogy egyes komponenseik, az egyik időszakraól a másikkra, azonos ütemben bővülnek ($\mathbf{g}_{t+1} = \alpha \times \mathbf{g}_t$).

Változatlan technológiát és arányokat, ebből következően változatlan végső fogyasztási szerkezetet feltételezve, a termelés és a fogyasztás ($\alpha \times \mathbf{y}$), illetve a termelőfelhasználás ($\alpha \times \mathbf{G}_t$) minden komponense ugyanabban a kívülről meghatározott ütemben növekedhet. Tekintsünk csak két egymást követő időszakot, és az egyszerűség kedvéért hagyjuk el az egyes időszakokra utaló indexeket. Az egyenletes növekedés következtében a termelési tényezők kereslet-kínálati egyenlőségének mindkét oldalát ugyanazzal a (pozitív) növekedési tényezővel kell beszorozni ($\alpha \times \mathbf{G}\mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{g}$), ezért – a statikusról a stacioner modellre való áttérés során – az egyensúly e feltétele a matematikai egyenértékűség szempontjából változatlan marad.

Cassel a dinamikát a szokásos „éves megtérülés” feltételezésével vezeti be, azaz a termelés és a termékek felhasználása között 1 időszakos *késleltetést* feltételez. Ennek megfelelően a költségek ($\mathbf{rG}\mathbf{y}$) felmerülése és a jövedelem ($\mathbf{p}\mathbf{y}$) realizálása között is 1 időszakos eltérés jelentkezik. Emiatt a jövedelmeknek a költségeken felül kamatot is tartalmazniuk kell. Így az árakat meghatározó összefüggés az $\beta \times \mathbf{rG} = \mathbf{p}$ alakot ölti, ahol β a kamattényező. (Ez lesz végső soron az egyetlen változás a statikus modell összefüggéseihez képest.) A jövedelem és a kiadás második időszakra feltételezett egyenlősége ($\mathbf{p}\mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{rG}\mathbf{y}$) miatt viszont a kamattényezőnek meg kell egyeznie az exogén növekedési tényezővel ($\beta = \alpha$). Mindezek következtében az egyensúly matematikai feltételei, az arányos növekedés esetében, pusztán az áregyenlet jobb oldalán egy konstans a tényezővel térnek el a statikus esetre levezetett feltételektől:

$$\alpha \times \mathbf{rG} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{g}, \quad \text{ahol } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

Egyáltalán nem kell tehát csodálkoznunk azon, hogy Cassel, akinek még nem állt rendelkezésére a mátrixalgebrai „gyorsírás” eszköze, nem bajlódott azzal, hogy újra felírja az egyenletrendszerrel ezzel a kis és magától értetődő változtatással. A levezetésből ugyanakkor nyilvánvalóvá válik, hogy Cassel egyenletes növekedési modellje – mind matematikai formája, mind közgazdasági tartalma tekintetében – valóban merőben eltér Neumannétól.

A legfontosabb koncepcionális különbségek a fenti két modell között:

– mindenekelőtt mindaz az eltérés, amit a statikus Cassel- (Schlesinger–Wald-) modell összevetése során már felfedtünk;

– Cassel modelljében az *implicit célfüggvény* a *végso fogyasztás maximalizálása*, ez okozza a termelési tényezők szűkösségét.²³ Neumannnál pedig az *arányos növekedési ütem* maximalizálása az implicit cél, nála tehát ez okozza az újratermelt termelési tényezők (tőkejavak és ezeken keresztül a termelésbe bevonható – nem a potenciálisan rendelkezésre álló! – munkaerő) szűkösségét;²⁴

– a fentiekkel összefüggésben, míg Casselnél a *termékek árai* – a formailag szimultán meghatározás ellenére (lásd a Schlesinger probléma elemzését!) – a keresleti függvényből levezetettnek, a *termelési tényezőké* pedig ezekből „*visszaszámítottnak*” tekinthetők, addig Neumannnál a termékek és termelési tényezők azonos típusú javak, s *relatív árakat* a (növekedés szempontjából) hatékony *eljárások minimális költségei* határozzák meg;²⁵

– Casselnél a *növekedési ütem* az elsődleges erőforrások növekedése határozza meg;

– Casselnél a *növekedési ütemet* az elsődleges erőforrások növekedése határozza meg, Neumannnál viszont az *árutermelő alrendszer belső „hatásfoka”*, az, hogy milyen *sajátfelhasználási hányad*²⁶ mellett képes a társadalom a termékeket újratermelni;

– Cassel modellje, szemben Neumannéval, semmit sem árul el a *megtakarítások és a beruházások* alakulásáról, illetve a termelési tényezők ezzel összefüggő növekedéséről (tehát a végso fogyasztásban – mint Walrasnál és az osztrák iskolánál – együtt jelenik meg mind a fogyasztási, mind a beruházási cikkek kereslete, anélkül hogy a beruházásokra, illetve a megtakarításokra vonatkozóan magyarázatot adnának!);

– Casselnél a *növekedési és a kamattényező* szükségszerűen *egyenlő*, *profit* pedig *nincs*, vagy – ha úgy tetszik – az osztrák tőkeelmélettel (Böhm-Bawerk) összhangban, a profit nem más, mint a befektetett (pénz)tőke kamata. A Neumann modelljében megjelenő kamatláb, általánosabb értelmezés esetén, a klasszikus profitrátaaként is értelmezhető.

Ez utóbbi megállapítást, illetve a *növekedési és a kamattényező* Neumannnál is jelentkező *egyezőségének* ezen régi és izgalmas közgazdasági hipotézisét (lásd *Schumpeter* [1954]) érdemes közelebbről is megvizsgálni. A Neumann-modell elemzéséből ugyanis ezekre a kérdésekre is választ kapunk. Neumann *explicit*e feltette, hogy a *szükséges fogyasztáson* felül minden jövedelmet megtakarítanak, és visszaforgatnak a termelésbe. A növekedési és a kamattényező egyenlősége nála egyenesen következik ebből (és a kibocsátott érték, **PKq** pozitívitását biztosító irreducibilitási megkötésből). Neumann ugyan kamatról beszél (és ebben valóban tetten érhető az osztrák és a svéd iskola hatása), de modellje lehetséges interpretációi megengedik, hogy a *kamat helyett* a klasszikus értelemben vett

²³ Cassel ugyan nem használja a hasznosság, hasznossági függvény fogalmát, de ez a modellje szempontjából nem is lényeges. A keresleti függvény nála egyébként is aggregált szinten értelmezett, tehát nem kell feltétlenül eleget tennie mindazoknak a matematikai tulajdonságoknak, amelyekkel egy jól viselkedő hasznossági függvény maximalizálásából levezethető neoklasszikus keresleti függvénynek rendelkeznie kell.

²⁴ Érdekes és érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy mivel a termelt tőkejavak szerkezete harmonizálható a felhasználási igényekével, s egyensúly esetén ez a harmonizálás a szűkös források esetén be is következik, ezért ez utóbbi javak relatív szűkösségi foka a Neumann-modellben azonos, megegyezik a kamattényezővel. A saját megtérülési ráták ezen egyenlősége annak a következménye, hogy – a végtelen időhorizontú intertemporális egyensúly neoklasszikus modelljével szemben (lásd *Malinvaud* [1953]) – Neumann nem vesz figyelembe induló készleteket. Ez a különbség egyébként, véleményem szerint, minden látszat ellenére Neumann javára szól!

²⁵ Erre a klasszikusokhoz közelálló értelmezésre a neocardianusok „*költségminimalizáló árrendszer*” fogalma adja meg a magyarázatot (lásd például *Kurz–Salvadori* [1995]).

²⁶ Ha nem lennének ikertermékek és technológiai választék, akkor a Neumann-modell növekedési tényezője a szokásos irreducibilitási feltevések mellett – az ebben az esetben négyzetes – **D** teljes körű ráfordítási mátrix domináns sajátértékének (a sajátfelhasználási hányad) reciproká lenne. E jól ismert jelenség alapján a Neumann-modell növekedési tényezőjét a szakirodalom a sajátértékek (a Perron–Frobenius-gyökök) általánosításának tekinti (lásd például *Punzo* [1980]).

profit fogalmát használjuk. A modell fenti feltevésének módosításával, vagyis a *luxus fogyasztás* bevezetésével ugyanis a *növekedési ütem* és a *profitráta elválík egymástól*. Profit keletkezhet akkor is, ha a gazdaság egyszerű újratermelést folytat (azaz a növekedési ütem nulla).

Ez utóbbi esetben a termelés költségeit meghatározó **D** ráfordítási mátrix mellett külön be kell vezetni a *fajlagos felhasználások* **F** mátrixát is (ahol $\mathbf{D} \leq \mathbf{F}$), s ennek megfelelően megváltoznak a modell alapegyenlőtlenségei is:

$$\mathbf{Kq} \geq \alpha \times \mathbf{Fq}, \quad \mathbf{pK} \leq \beta \times \mathbf{pD}, \quad \text{de } \mathbf{pKq} = \alpha \times \mathbf{pFq} = \beta \times \mathbf{pDq}.$$

A Neumann-modell ilyen általánosítása esetén természetesen megszűnik annak szép szimmetrikus dualitása, és nehezebbé válik a modell matematikai elemzése is. A Neumann-modell ilyen és ehhez hasonló aszimmetrikus kiterjesztései matematikai szempontból feltétlenül érdekes és izgalmas feladatot jelentenek. Ezt igazolják a neoricardiánusoknak a neoklasszikusok matematikai elemzéseivel vetekedő igazán impozáns eredményei is.²⁷ Magam azonban úgy vélem, hogy a Neumann-modell egyik legkritikusabb pontja a dinamika kezdetleges kezelése, az azonos periódushosszúságú és szinkronizált (egyidejűleg indított) termelési folyamatok feltételezése. Ennek feloldásával a modellt sokkal realiztikusabbá és alkalmasabbá lehetne tenni a megtérülési problematika és a gazdasági ciklusok elemzésére.²⁸

A termelés körkörössége: a klasszikus és a neoklasszikus elemzések kritikus elágazási pontja

A dinamizált Cassel-moddellel való összehasonlítás alapján tehát csak megerősíthetjük korábbi álláspontunkat, nevezetesen azt, hogy Cassel és Neumann modellje inkább *egymás komplementere*, semmint alternatív felírása. Ennek igazolása céljából érdemes eljátszani azzal a gondolattal, hogy mi lett volna, ha az 1900-as évek elején gyorsabban terjedtek volna a tudományos eredmények, jobb lett volna a velük kapcsolatos kommunikáció, és Cassel vagy valamelyik tanítványa ismerte volna *Dmitriev* [1905], *Charasoff* [1910], illetve *Perron* [1907] és *Frobenius* [1908–1909], [1912] úttörő munkáit, amelyek később – elsősorban *Leontief* [1928], [1941] állhatatosságának köszönhetően – a modern input-output modellek kialakulásához vezettek.

A hivatkozott eredmények ismeretében Cassel modelljét könnyen át lehet alakítani úgy, hogy abban a szűkös termelési tényezők között explicite és a természeti (külső) erőforrásoktól elkülönítetten megjelenjenek a felhalmozott tőkejavak, a „művi” (belső) erőforrások is. *Vezessük be a termék-ráfordítási együtthatók* négyzetes mátrixának jelölésére az $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mátrixot. Az éves megtérülés feltevést elfogadva, tegyük fel, hogy ugyanez lesz a *fajlagos tőkelekötési igények* mátrixa is. Legyen $\mathbf{a} = (a_i)$ a korábbi időszakok termeléséből *felhalmozott, tőkeként* funkcionáló *árúkészletek* vektora, $\mathbf{x} = (x_i)$ a *bruttó termelés*, $\mathbf{q} = (q_i)$ pedig a *tőkejavak egyensúlyi árainak* (mint termelési tényezők szűkösségi hozadékainak!) vektora! Cassel statikus modelljének a fenti elemekkel kibővített változatát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{pA} + \mathbf{qA} + \mathbf{rG} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{Gy} = \mathbf{g}, \quad \text{ahol } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

²⁷ Nemcsak követik Sraffa nyomán ezt az utat a neoricardiánusok (revideált klasszikusok). Bővebben lásd *Zalai* [1989], illetve a nem szimmetrikus Neumann-modellek kapcsán: *Łoś-Łoś* [1974], *Łoś-Łoś-Wieczorek* [1976].

²⁸ A megtérülési jelenség gazdasági ciklusok jellegére, válfajaira és természetére vonatkozóan lásd mindenekelőtt Bródy András tanulmányait (például *Bródy* [1995], [1997]) és 1969-es kiadású könyvét, amelyek számos eredeti hozzájárulással és továbbgondolásra érdemes sejtéssel gazdagították ezt a témát.

A változók (\mathbf{x} , \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r}) és az egyenletek száma ebben a modellben is megegyezik egymással. Igen ám, de az egyes *tőkejavak megtérülési rátáinak* (a q_i hozadéki árak és a p_i termékárak hányadosainak) – az egyensúly feltételezése következtében – *egyformának* kell lenniük. Fenn kell tehát állnia a $\mathbf{q} = \pi \times \mathbf{p}$ feltételnek, ahol π az *egyöntetű egyensúlyi megtérülési ráta*. A \mathbf{q} vektorváltozót a π skalárral, az ármeghatározó egyenletet pedig mindezek következtében a

$$\mathbf{p} = (1 + \pi) \times \mathbf{pA} + \mathbf{rG}$$

egyenlettel kell helyettesíteni. Ebből a meglepő, mások által még fel nem tárt összefüggésből, több fontos következmény is adódik.

Először is, a fentiek szerint módosított egyenletrendszer,

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}, \mathbf{Ax} = \mathbf{a}, \quad (1 + \pi) \times \mathbf{pA} + \mathbf{rG} = \mathbf{p}, \mathbf{Gy} = \mathbf{g}, \quad \text{ahol } \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{p}),$$

túldeterminált lesz (az egyenletek száma meghaladja a változókét). Ez nyilvánvalóan arra utal, hogy valami *baj van a hozadéki ármeghatározás konzisztenciájával*.

Másodszor, a *termelés körköröségének* figyelembevételére és a hosszú távú egyensúly feltételezése esetén a klasszikusok egyensúlyi *profitrátája szükségképpen megjelenik* az ármeghatározó összefüggésben.

Harmadszor, egy olyan $\mathbf{p} = (1 + \pi) \times \mathbf{pA} + \mathbf{rG}$ alakú összefüggéshez jutottunk, amely nem más, mint a klasszikusok (Ricardo, Torrens, Marx) által *termelési árak* nevezett árakat meghatározó, az övékénél valamivel általánosabb összefüggés.²⁹ Ennek sajátos eseteit Leontief, Bródy, Sraffa, Neumann és mások – egymástól eltérő további feltevések mellett – behatóan elemezték matematikai közgazdaságtani szempontból. A Perron–Frobenius-tételek segítségével – egyebek között – rámutattak arra is, hogy a *profitrátának természetes korlátot szab a sajátfelhasználási hányad*, az \mathbf{A} mátrix domináns sajátértéke, λ ($\pi \leq 1/\lambda - 1$).

Ennek az eddig rejtve maradó, de valamilyen más formában nyilván érzékelt konzisztenciaproblémának a megoldását a neoklasszikusok más irányban keresték. A hosszú távú egyensúlyi állapot (*long term position*) elemzése helyett figyelmüket az *időleges (temporary)* és az *időszakközi* (intertemporális) általános egyensúlyi elemzések felé fordították. Ezt az elejtett klasszikus fonalat vették fel, Sraffa nyomán, a többször idézett neoricardiánusok, illetve már előttük ezt az irányt követték a marxi ár- és újratermelési elmélet modern újrafogalmazásaival foglalkozó kutatók.

Konklúziók, záró megjegyzések

Lezárásképpen térjünk vissza a címben felvetett kérdéshez! Vajon klasszikus vagy neoklasszikus indíttatásúnak tekinthetjük Neumann János modelljét? Bár a figyelmes olvasó már sejtetheti az „is-is, sem-sem” válaszomat, nem szeretnék kétséget hagyni álláspontomat illetően.

Neumann modellje egy nagyon régi és a közgazdasági gondolkodásban igen mélyen

²⁹ Még általánosabban az ilyen típusú ármeghatározást a $\mathbf{pB} = (1 + \pi) \times (\mathbf{pA} + \mathbf{r}_1\mathbf{G}_1) + \mathbf{r}_2\mathbf{G}_2$ formában írhatjuk fel. Ez utóbbi felírásban kettéválasztottuk az elsődleges erőforrásokat. Az első csoportba tartozók költségét a tőkéseknek meg kell előlegezniük (például a munkaerő a klasszikusoknál vagy Neumann-nál), míg a másodikba soroltuk azokat, amelyek tulajdonosai csak utólag, a megtermelt termékek eladása után kapják meg az erőforrások ellenértékét (például a munkaerő Sraffánál, a földjáradék a klasszikusoknál). A másik különbséget az ikertermelés lehetősége (\mathbf{B} kibocsátási mátrix) adja, s egyszersmind az a feltevés, hogy a felírásban csak az egyensúlyban alkalmazott (hatékony) eljárásokat szerepeltetjük, *ex post*. Az \mathbf{A} és \mathbf{B} együtthatómátrixok így nem feltétlenül négyzetesek.

gyökerező ideának az absztrakt matematikai metaforája. Ez az idea pedig nem más, mint a tisztességes és értelmes módon működő árugazdaság ideálja. Ez az ideális gazdaság a racionális munkamegosztás elve alapján működik, az egyes gazdasági folyamatokat olyan, egymástól gazdaságilag elkülönült egyének és/vagy kollektívák működtetik, akik az áruikat a piacon cserélik ki egymással, és pedig olyan intézményrendszer és mechanizmusok keretei között, amelyek biztosítják az érdekek harmóniáját és a gazdaság hatékonyságát.

A tisztességes és értelmes gazdaság árainak (csereértékeinek) – hosszabb táv átlagában – olyannak kell lenniük, amelyek fedezik az elhasznált termelési eszközök pótlását, az áruk előállításában részt vevők „tisztos” megélhetését, továbbá a mindenkori utódjaik magasabb szintű életfeltételeit megteremtő felhalmozás alapját is. Mint könnyen ellenőrizhető, Neumann egyensúlyi árai pontosan megfelelnek ennek az elvnek: minden működtetett tevékenység esetén éppen biztosítják a pótlás és az arányos bővítés fedezetét.³⁰ A termelés természetes feltételeit illetően pedig, egy tisztességes és értelmes gazdaságban működő mechanizmusoknak biztosítaniuk kell, hogy az egyes anyagi javak termelése egymással összhangban, arányosan (ha nem is feltétlenül egyenletesen) és minél gyorsabb ütemben bővüljön.³¹ Neumann modellje tehát olyan mértékben klasszikus, neoklasszikus, marxista vagy másképpen szocialista, amilyen hangsúllyal ezen irányzatok követett vagy gyakran csak implicite sugallt értékrendjében ezek az ősi, humánus elvek megjelennek.

S hogy mi köze van Neumann modelljének a modern gazdaságok valóságához? Ez egy más fejezetre tartozó izgalmas kérdés. Mindenesetre, mint tudjuk, Neumann az 1920-as évek végén kezdte megfogalmazni absztrakt modelljét, akkor, amikor még minden biztonnal hitt a hilberti programban, a deduktív-hipotetikus teoretizálásnak az „igazsághoz” vezető missziójában. Későbbi munkássága és megnyilatkozásai viszont arra utalnak, hogy ez a hite és lelkesedése – nyilván Gödel nevezetes tételének belátása nyomán – jelentősen alábbhagyott. Erre utal az is, hogy tudatosan kereste az algoritmizálható, a gyakorlati feladatok megoldásához vezető problémákat.

Nem lehet véletlen, hogy sem ő, sem Wald nem folytatta az absztrakt gazdasági egyensúlyelmélet kutatását. Annak ellenére sem, hogy mindketten viszonylag korán emigráltak az Egyesült Államokba, és szoros kapcsolatba kerültek a „kvantitatív közgazdaságtani bölcsője” körül bábáskodó kutatókkal. Mint ismeretes, ebben a Cowless Commission műhelyében „felállított bölcsőben” születtek meg a neoklasszikus általános egyensúlyelmélet modern modelljei és egzisztenciabizonyításai. Mégpedig az ő módszertani újításait követve és azokat továbbfejlesztve. Lehet, hogy Neumann géniusza felismerte, hogy nem pazarolhatja el a Sorstól kapott kiemelkedő tehetségét olyan problémák kutatására, amely „barokkosodás és degenerálódás” felé tendál, elveszítve a „tapasztalati, empirikus forrását” (lásd korábbi idézetünket)? Nem tudjuk. Az emberiség azonban bizonyára csak nyert azzal, hogy így döntött.

Nem szeretném, ha bárki is azt gondolná, hogy ezzel kissé emelkedett zárógondolattal, meg a dolgozatomban itt-ott kicsengő elégedetlenségemmel saját szakmám és tevékenységem felett török pálcát. Nem, erről szó sincs! Csak a félig telt pohárról azt mondom, hogy az félig üres. Elégedetlenségemet egyébként sem a matematikai közgazdaságtan,

³⁰ Az árakat meghatározó első két elem dominált a *justum pretium*, az igazságos ár középkori fogalmában, amelynek gyökerei legalább Arisztotelész reciprocitási elvéig nyúlnak vissza. Ezek egészültek ki a polgárosodás, az akkumulációs spirál beindulásával párhuzamosan a harmadik (felhalmozási) elemmel.

³¹ „Tisztességes és értelmes” árak megnevezést Remak is használta az „egymásra rakott” áraitra (lásd *Kurz-Salvadori* [1995]). A korabeli válság idején Remak is osztotta sok kortársa azóta elveszett illúzióját, hogy egy szocialista rendszer tisztességesebben és értelmesebben szervezné meg a gazdaságot, mint kora kapitalista gazdasági rendszere. Ugyanezek az ideák visszhangoztak mellesleg a „terszserü arányos fejlődés” (Szabó [1964]), illetve a „munkaszerinti elosztás” (lásd például Falusné [1978]) „szocialista törvényekben” is.

hanem általában a közgazdaságtan fejlettségi szintje motiválja. Természetesen magam is tisztában vagyok azzal, hogy „minden tudomány így indult, és a közgazdaságtan mint tudomány csak néhány száz éves”, vizsgálatának tárgya pedig roppant bonyolult és összetett, s ezek miatt „még igen sok kutatásra van szükségünk, hogy kifejlesszük a lényeges koncepciókat – a valóban használható eszméket” (az idézeteket lásd Neumann [1965], 102. o.). Ebből a perspektívából nézve egy sokkal derűsebb képet is fel lehetne vázolni az elért eredményekről, de ezt másokra vagy más alkalomra hagyom.

Ami pedig a szűkebb szakmámat, magát a matematikai közgazdaságtant illeti, arról kinek-kinek megvan és meg is lehet a „saját bejárata” – vérmérsékletétől, pszichés beállítottságától, matematikai és/vagy közgazdasági tudásától, tapasztalataitól, ízlésétől és még ki tudja, mi minden mástól függő – véleménye. A tudományelmélettel és módszertannal hivatásosan foglalkozók is rengeteget nyilatkoztak, sok mindenki (meglehetősen széles sávban megoszló) véleményét összegyűjtötték már ebben a kérdésben. Aki akarja, ezek között szépen csiszolt mondatokban megtalálhatja azt, amelyik a saját véleményéhez a legközelebb áll. Én is számos idézetet gyűjtöttem már össze ezek közül. Dolgozatom befejezésekképpen Mark Blaug mondatait szeretném a fentiekkel kapcsán idézni: „Egy »elméletet« nem lehet elutasítani pusztán azért, mert még nem ellenőrizhető (...) feltéve, hogy fontos problémákra hívja fel a figyelmet (...) Vitathatatlan, hogy a közgazdászok gyakran becsapják magukat azzal, hogy – mint Leontief nevezi – »implicit teoretizálással« foglalkoznak, és közgazdasági ismeretekhez való lényegi hozzájárulásnak álcázva tautológiákat közölnek. De az ilyen gyakorlat orvoslásához a célok tisztázására, nem pedig radikális és minden bizonnyal korai műtétre van szükség.” (Blaug [1962] 606. o.)

Hivatkozások

- ARROW, K. [1989]: Von Neumann and the Existence Theorem for General Equilibrium. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin* (szerk.) [1989] 15–28. o.
- ARROW, K.–BLOCK, H.–HURWICZ, L. [1959]: On the Stability of the Competitive Equilibrium, II. *Econometrica*, 27, 265–290. o.
- ARROW, K.–DEBREU, G. [1954]: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, 22, 265–290. o.
- ARROW, K.–HURWICZ, L. [1958]: On the Stability of the Competitive Equilibrium, I. *Econometrica*, 26, 522–552. o.
- BACKHOUSE, R. E. [1994a]: Introduction: New Directions in Economic Methodology. Megjelent: *Backhouse* [1994b].
- BACKHOUSE, R. E. (szerk.) [1994b]: *New Directions in Economic Methodology*. Routledge, London.
- BARONE, E. [1908]: *The Ministry of Production in the Collectivist State*. Angol kiadás megjelent: *von Hayek, F. A.* (szerk.): *Collectivist Economic Planning*. Routledge, London, 1935.
- BLAUG, M. [1962]: *Economic Theory in Retrospective*. Irwin, Homewood, Ill.
- BLAUG, M. [1980/1992]: *The Methodology of Economics: How Economists Explain*. Cambridge University Press, Cambridge.
- BORTKIEWICZ, L. v. [1907]: Zur Berichtigung der grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im 3. Band des Kapital. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 34, 319–335. o.
- Angolul: On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the 'Third Volume of Capital'. Megjelent: *P. M. Sweezy* (szerk.): *Karl Marx and the Close of His System*. Kelley, New York, 1907, 199–221. o.
- BÖHM-BAWERK, E. v. [1889]: *Kapital und Kapitalzins. Zweite Abteilung: Positive Theorie des Kapitals*. Wagner, Innsbruck. A 4. kiadás angol fordítása: *Capital and Interest*. South Holland, Libertarian, Press, Illinois, 1959.
- BRÓDY ANDRÁS [1969]: *Érték és újratermelés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

- BRÓDY ANDRÁS [1980]: *Ciklus és szabályozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- BRÓDY ANDRÁS [1986]: *A fizikai gazdaságtanról*. Neumann egyensúlyi modelljének félszázados évfordulójára. *Sigma*, 19, 1–2. sz.
- BRÓDY ANDRÁS [1995]: *Növekedés, csőd és ciklusok*. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz.
- BRÓDY ANDRÁS [1997]: *A piac és az egyensúly*. Közgazdasági Szemle, 9. sz.
- CASSEL, G. [1918]: *Theoretische Sozialökonomie*. Leipzig: Deichert. Angolul megjelent: *The Theory of Social Economy*. Harcourt Brace, New York, 1932.
- CHAMPERNOWNE, D. G. [1945]: *A note on J. von Neumann's article*. *Review of Economic Studies* 13, 1, 10–18. o.
- CHARASOFF, G. v. [1910]: *Das System des Marxismus: Darstellung und Kritik*. H. Bondy, Berlin.
- CHRIST, C. [1952]: *Economic theory and measurement*. Cowles Commission, Chicago, IL.
- COURNOT, A. A. [1838]: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Angolul megjelent: *Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Macmillan, New York, 1929.
- DMITRIEV, V. K. [1898]: *Ekonomicszeszkije Ocserki I. Tyeorija cennosztyi D. Ricardo*, Moszkva. Angolul megjelent: *Essay on Ricardo's theory of value a Dmitriev [1974] kötetben*.
- DMITRIEV, V. K. [1974]: *Ekonomicszeszkije Ocserki: „Opit” organicszeszkovo szintyeza trudovoj tyeoriji cennosztyi i tyeoriji pregyelnoj poleznosztyi*, Moszkva. *Economic Essays on Value, Competition and Utility*. Az angol kiadás az eredeti orosz változat: (1904) fordítása. Szerk. *Nuti, D. M.* Cambridge University Press, Cambridge.
- DORE, M. [1989]: *The Legacy of von Neumann*. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin [1989] 89–99. o.*
- DORE, M.–CHAKRAVARTY, S.–GOODWIN, R. (szerk.) [1989]: *John von Neumann and Modern Economics*. Clarendon Press, Oxford.
- DOSSO (DORFMAN, R.–SAMUELSON, P. A.–SOLOW, R. M.) [1958]: *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill, New York–Toronto–London.
- DUMÉNIL, G.–LÉVY, D. [1984]: *The Unifying Formalism of Domination: Value, Price, Distribution and Growth in Joint Production*. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 44, 349–371. o.
- EKELUND, R. B.–HÉBERT, R. F. [1997]: *A History of Economic Theory and Methods*. 4th ed., McGraw Hill, Toronto–London.
- FALUSNÉ SZIKRA KATALIN [1978]: *A munkaszerinti elosztás és az áruviszonyok kapcsolatáról*. *Közgazdasági Szemle*, 7–8. sz.
- FROBENIUS, G. [1908–1909]: *Über Matrizen aus positiven Elementen I–II*. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- FROBENIUS, G. [1912]: *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen*. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- GALE, D. [1960]: *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, New York.
- HARCOURT, G. C. [1969]: *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*. *Journal of Economic Literature* 7, 369–405. o.
- HARCOURT, G. C. [1972]: *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*. Cambridge University Press, Cambridge.
- HAUSMAN, D. M. [1981]: *Capital, Profits and Prices: An Essay in the Philosophy of Economics*. Columbia University Press, New York.
- HAUSMAN, D. M. [1991]: *The Inexact and Separate Science of Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- HICKS, J. R. [1978]: *Érték és tőke*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. *Value and Capital*. Oxford University Press, 1939.
- HICKS, J. R. [1984]: *The formation of an Economist*. Megjelent: *Hicks, J. R.: The Economics of John Hicks*. Basil Blackwell, Oxford, 281–290. o.
- HICKS, J. R.–WEBER, W. [1973]: *Carl Menger and the Austrian School of Economics*. Clarendon Press, Oxford.
- HUTCHISON, T. W. [1992]: *Changing Aims in Economics*. Basil Blackwell, Oxford.
- INGRAO, B.–ISRAEL, G. [1990]: *The Invisible Hand: Economic Equilibrium in the History of Economic Science*. MIT Press, Cambridge.
- JEVONS, S. [1871]: *The theory of political economy*. Penguin books, London.

- KAKUTANI, S. [1941]: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8, 457–459. o.
- KÁLDOR MIKLÓS [1989]: Foreword. John von Neumann: A personal recollection. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin* [1989] vii–xi. o.
- KEMENY, J. G.–MORGENSTERN, O.–THOMPSON, G. L. [1956]: A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. *Econometrica*, 24, 115–35. o.
- KOOPMANS, T. C. (szerk.) [1951]: *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley and Sons, New York.
- KOOPMANS, T. C. [1974]: Contribution to General Discussion on Past and Future of the von Neumann Model. Megjelent: *Łoś–Łoś* [1974] 3–4. o.
- KORNAI JÁNOS [1971]: *Anti-equilibrium*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- KORNAI JÁNOS [1980]: *A hiány*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- KURZ, H.D.–SALVADORI, N. [1995]: *Theory of Production. A Long-Period Analysis*. Cambridge University Press, New York.
- LAKATOS IMRE [1978]: *Philosophical Papers*. Cambridge University Press, Cambridge.
- LAKATOS IMRE–MUSGRAVE, A. (szerk.) [1970]: *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge University Press, Cambridge.
- LANGE, O. [1936]: On the Economic Theory of Socialism. *Review of Economic Studies*, 4.
- LANGE, O. [1964]: *Politikai gazdaságtan I*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- LAVOIE, D. (szerk.) [1990]: *Economics and Hermeneutics*. Routledge, London.
- LEONTIEF, W. [1928]: Die Wirtschaft als Kreislauf. *Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik*, 60, 577–623. o.
- LEONTIEF, W. [1941]: *The Structure of the American Economy*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- ŁOŚ, J.–ŁOŚ, M. W. (szerk.) [1974]: *Mathematical Models in Economics*. North-Holland, Amsterdam–New York.
- ŁOŚ, J.–ŁOŚ, M. W.–WIECZOREK, A. (szerk.) [1976]: *Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics, 1975*. Springer, Berlin.
- LUTZ, F. A.–HAGUE, D. C. (szerk.) [1961]: *The Theory of Capital*. Macmillan, London.
- MALINVAUD, E. [1953]: Capital Accumulation and the Efficient Allocation of Resources. *Econometrica* 21, 233–268. o.
- MARSHALL, A. [1890]: *Principles of Economics*. Reprint: Macmillan, London, 1977.
- MÁTYÁS ANTAL [1992]: *A korai közgazdaságtan története*. Aula Kiadó, Budapest.
- MÁTYÁS ANTAL [1996]: *A modern közgazdaságtan története*. Aula Kiadó, Budapest.
- MCCLOSKEY, D. N. [1986]: *The Rhetoric of Economics*. University of Wisconsin Press, Madison.
- MCKENZIE, L. [1954]: On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. *Econometrica*, 22, 147–161. o.
- MENGER, C. [1871]: *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*. Angolul megjelent: *Principles of Economics*. New York University Press, New York–London, 1981.
- MENGER, K. [1973]: Austrian Marginalism and Mathematical Economics. Megjelent: *Hicks–Weber* (szerk.) [1973].
- MIROWSKI, P. [1988]: *Against Mechanism: Why Economics Needs Protection From Science*. Totawa, Rowman & Littlefield, New Jersey.
- MÓCZÁR JÓZSEF [1995]: Reducible von Neumann Models and Uniqueness. *Metroeconomica*, 46, 1–15. o.
- MÓCZÁR JÓZSEF [1997a]: Non-Uniqueness Through Duality in the von Neumann Growth Models. *Metroeconomica*, 48, 280–299. o.
- MÓCZÁR JÓZSEF [1997b]: Growth Paths in the Leontief-type Dynamic Reducible Models (With a Case Study for Japan in the 60's). *Japan and the World Economy*, 9, 17–36. o.
- MORGENSTERN, O. [1976]: Collaborating with von Neumann. *Journal of Economic Literature*, szeptember, 14(3), 805–816. o.
- MORGENSTERN, O.–THOMPSON, G. L. [1976]: *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies*. Lexington Books, Lexington.
- MORISHIMA, M. [1961]: Proof of a Turnpike Theorem: The 'No Joint Production' Case. *Review of Economic Studies* 28, február.

- NAGY ALADÁR [1997]: Az „értelmező közgazdaságtan” alapjai. Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc.
- NASH, J. [1950]: Equilibrium Points in N-Person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences, Egyesült Államok, 36, 48–9. o.
- NEISSER, H. [1932]: Lohnhöhe und Beschäftigungsrad im Marktgleichgewicht. Weltwirtschaftliches Archiv 36.
- NEUMANN JÁNOS [1928–1965]: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen, 100, 295–320. (Magyarul megjelent: A társasjátékok elméletéhez címmel *Neumann* [1965] 121–156. o.)
- NEUMANN JÁNOS [1937–1945–1965]: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 8, 73–83. (Angolul megjelent: A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies 13, 1–9. o., magyarul megjelent: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje címmel: *Neumann* [1965] 160–176. o.)
- NEUMANN JÁNOS [1947]: The Mathematician. Megjelent: *Heywood, R. B.* (szerk), The Works of Mind. Chicago: University of Chicago Press, 180–196. o. (Magyarul megjelent: A matematikus címmel *Neumann* [1965] 11–27. o.)
- NEUMANN JÁNOS [1956]: Looking ahead. (Magyarul megjelent: A legújabb tudományos fejlődés hatása a gazdaságra és a közgazdaságtanra címmel *Neumann* [1965] 100–102. o.)
- NEUMANN JÁNOS [1965] Válogatott előadások és tanulmányok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- NUTI, D. M. [1987]: Dmitriev, Vladimir Karpovich. The New Palgrave. A Dictionary of Economics. Szerk.: *Eatwell, J.–Milgate, M.–Newman, P.* Vol. 1. Macmillan, London, 907–910. o.
- PASINETTI, L. L. [1977]: Lectures on the Theory of Production. Macmillan, London.
- PASINETTI, L. L. [1981]: Structural Change and Economic Growth. Cambridge, University Press. Cambridge.
- PERRON, O. [1907]: Zur Theorie der Matrizen. Mathematische Annalen, 64, 248–63. o.
- PIGOU, A. C. [1925]: Memorials of Alfred Marshall. Macmillan, London.
- PUNZO, L. F. [1980]: Economic Applications of a generalized Perron-Frobenius problem. Economic Notes, IX.
- PUNZO, L. F. [1989]: Von Neumann and Karl Menger’s Mathematical Colloquium. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin* [1989] 29–65. o.
- PUNZO, L. F. [1991]: The School of Mathematical Formalism and the Viennese Circle of Mathematical Economists. Journal of the History of Economic Thought, 13, 1–18. o.
- RADNER, R. [1961]: Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem. Review of Economic Studies, 28, február.
- REMAK, R. [1929]: Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden? Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 131, 703–735. o.
- ROBINSON, J. V. [1953]: The Production Function and the Theory of Capital. Review of Economic Studies, 21, 81–106. o.
- ROBINSON, J. V. [1962]: Economic Philosophy. Penguin Books, Hammondswoth.
- ROSENBERG, A. [1976]: Microeconomic Laws: A Philosophical Analysis. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.
- ROSENBERG, A. [1992]: Economics-Mathematical Politics or Science of Diminishing Returns? University of Chicago Press, Chicago.
- SALVADORI, N.–STEEDMAN, I. (szerk.) [1990]: Joint Production of Commodities. Edward Elgar, Aldershot.
- SAMUELSON, P. A. [1947]: Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- SAMUELSON, P. A. [1989]: A Revisionist View of von Neumann’s Growth Model. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin* [1989] 100–122. o.
- SCARF, H. [1960]: Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium. International Economic Review, 1, 157–72. o.
- SCHEFOLD, B. [1989]: Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays. Unwin Hyman, London.
- SCHLESINGER, K. [1935]: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 6, 10–11. o.

- SCHUMPETER, J. [1954]: *A History of Economic Analysis*. Oxford University Press, New York.
- SLUTSKY, E. [1915]: *Sulle Teoria Del Bilancio Del Consumatore*, *Giornale Dogli Economisti*, 51. Angolul megjelent: *On the Theory of the Budget of the Consumer*. *Stigler, G. J.–Boulding, K.E.* (szerk.): *Readings in Price Theory*, Illinois, Homewood, 1952, 2. fejezet.
- SMOLINSKY, L. [1995]: *Slutsky and Metaeconomics*. Megjelent: *Koropecykj, I. S.* (szerk) *Selected Contributions of Ukrainian Scholars*.
- SRAFFA, P. [1975]: *Áruk termelése áruk révén*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- STACKELBERG, H. V. [1933]: *Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels*. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4, 456–72. o.
- STEEDMAN, I. (szerk.) [1988]: *Sraffian Economics*. Edward Elgar, Aldershot.
- STEEDMAN, I. [1977]: *Marx after Sraffa*. New Left Books, London.
- STEEDMAN, I. [1979]: *Trade Amongst Growing Economies*. Cambridge University Press, Cambridge.
- SZABÓ KÁLMÁN [1964]: *A szocialista termelés alapvonásai*. Kossuth Kiadó, Budapest.
- SZÉP JENŐ–FORGÓ FERENC [1988]: *Bevezetés a játékelméletbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- THOMPSON, G. L. [1989]: *John von Neumann's Contributions to Mathematical Programming Economics*. Megjelent: *Dore–Chakravarty–Goodwin* [1989] 221–237. o.
- TOOL, M. R.–SAMUELS, W. J. (szerk.) [1989]: *The Methodology of Economic Thought*. Második kiadás, Transaction Publishers, New Brunswick–Oxford.
- WALD ÁBRAHÁM [1935]: *Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen*. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 6, 12–18. o.
- WALD ÁBRAHÁM [1936]: *Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre (II. Mitteilung)*. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, 1–6. o.
- WALRAS, L. [1874, 1877]: *Elements d'Economie Politique Pure*. Angolul megjelent: *Elements of Pure Economics*. Allen & Unwin, London, 1954.
- WEINTRAUB, E. R. [1983]: *On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930–1954*. *Journal of Economic Literature*, 21, 1–39. o.
- WEINTRAUB, E. R. [1985]: *General Equilibrium Analysis: Studies in Appraisal*. Cambridge University Press, Cambridge.
- WEINTRAUB, E. R. [1991]: *Stabilizing Dynamics: Constructing Economic Knowledge*. Cambridge University Press, Cambridge.
- WEINTRAUB, E. R.–MIROWSKI, P. [1994]: *The Pure and the Applied: Bourbakism Comes to Mathematical Economics*. *Science in Context*, No. 2. 245–272. o.
- WICKSELL, K. [1893]: *Über Wert, Kapital und Rente*. Angolul megjelent: *Value, Capital and Rent*. George Allen & Unwin Ltd., London, 1954.
- WICKSELL, K. [1919]: *Proffessor Cassels ekonomiska system*. *Economisk Tidskrift*, 21, 195–226. o.
- WIESER, F. F. VON [1899]: *Der Natürliche Wert*. Angolul megjelent: *Natural Value*. Macmillan London, 1893.
- ZALAI ERNŐ [1988]: *Munkaérték és sajátérték*. Akadémia Kiadó, Budapest.
- ZALAI ERNŐ [1989]: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- ZALAI ERNŐ [1998]: *Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre*. *Közgazdasági Szemle*, 12. sz.
- ZEUTHEN, F. [1933]: *Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität*. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4, 1–24. o.