Metode Pengurangan Sampling dan Penggunaan Banyak Frekuensi Sampling untuk Analisa Transformasi Fourier Digital pada Aplikasi yang Berbasis Mikrokontroler

Eru Puspita
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS Keputih Sukolilo Surabaya 60111, Indonesia
email: eru@eepis-its.edu

Abstrak

Analisa Fourier adalah salah satu metode yang banyak digunakan untuk berbagai aplikasi. DFT dan FFT adalah model dan algoritma yang umumnya digunakan dalam sistem proses digital. Masalah yang sering muncul yang berkaitan dengan DFT atau FFT adalah waktu komputasi dan kapasitas memori. Jika perangkat pemroses yang digunakan adalah PC, hal ini tidak menjadi masalah. Namun tidak demikian jika menggunakan mikroprosesor atau mikrokontroler. Teknik yang digunakan di sini akan sangat mengurangi waktu komputasi dan kebutuhan memory yang akan sesuai untuk aplikasi yang berbasis mikrokontroler. Teknik yang digunakan adalah memecah spectrum frekuensi yang lebar dari sinyal masukan menjadi beberapa band yang lebih kecil dengan teknik menggunakan lebih dari satu frekuensi sampling. Dan mengurangi panjang sampling yang semula ratusan atau ribuan sampling menjadi hanya beberapa puluh sampling. Sebagai contoh hasil, pada pengujian kali ini digunakan pada aplikasi analisa spektrum sinyal audio dengan rentang 20 Hz sampai 20 kHz yang seharusnya menggunakan frekuensi sampling 40 kHz dengan panjang sampling 2000 sampling. Pada percobaan ini dapat dipecah dan dikurangi menjadi hanya 3 band masing-masing 20 sampling, total 60 sampling.

Kata Kunci : Fourier, DFT, FFT, Spektrum, Audio.

1. Pendahuluan

Penelitian ini didasarkan atas keinginan untuk membuat sistem berbasis mikroprosesor atau mikrokontroler agar dapat digunakan untuk pemrosesan sinyal digital, khususnya proses Transformasi Fourier.

Tidak dapat dipungkiri, jika Transformasi Fourier banyak digunakan dalam analisa sistem sinyal. Jika proses ini dilakukan menggunakan komputer PC, maka hal ini tidak menjadi masalah. Salah satu masalah yang paling banyak disoroti sekitar transformasi Fourier adalah waktu komputasi yang panjang. Hal ini pula yang membuat munculnya suatu metode cepat untuk menghitung Transformasi Fourier dengan FFT-nya.

Jika proses ini harus dibawa ke dalam sistem mikro, maka ada masalah baru yang harus diperhatikan, yaitu kebutuhan memory, baik untuk program atau data. FFT adalah algoritma cepat untuk menghitung DFT, namun memiliki kompleksitas dan ukuran yang besar dari program FFT itu sendiri. Umumnya, analisa sinyal dalam sistem embedded menggunakan sistem berbasis DSP. Namun DSP masih dianggap solusi yang mahal. Pilihan lainnya adalah menggunakan filter analog untuk memeriksa komponen frekuensi.

Pada penelitian ini dicoba untuk melakukan manipulasi pada teknik sampling sehingga memungkinkan untuk melakukan Analisa yang berbasis Transformasi Fourier menggunakan perangkat berbasis mikrokontroler.

1.1. Discrete Fourier Transform

Adalah implementasi proses Transformasi Fourier menggunakan sistem digital. Jika ada suatu sinyal digital x[n] dengan n adalah indeks sampling sepanjang N sampling, maka komponen frekuensi dari sinyal tersebut dapat dihitung menggunakan.

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad (1)$$

$$untuk \quad 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$$

X adalah amplitude sinyal sinusoida komponen frekuensi dari sinyal x[n] dengan nomor indeks k, dan k adalah nomor indeks frekuensi yang menyatakan nomor komponen frekuensi. Indeks k = 0 menyatakan komponen dc, k = 1 menyatakan komponen frekuensi fundamental (frekuensi minimal) dan k = N/2 merupakan sinyal dengan ½ frekuensi sampling. Sesuai dengan Teorema sampling dari Nyquist, bahwa frekuensi sinyal maksimal adalah lebih kecil dari ½ frekuensi sampling, maka indeks k = N/2 sebenarnya tidak dapat digunakan.

Nilai indeks k dibatasi hanya sampai N/2-1 dikarenakan nilai berikutnya adalah cerminan dari index sebelumnya, sehingga dianggap tidak perlu dilakukan komputasi.

Sebenarnya amplitude komponen frekuensi untuk index 1 dan seterusnya harus dikalikan lagi dengan 2, mengingat hasil yang sebenarnya dari persamaan sebelumnya adalah ½ dari amplitude yang sesungguhnya. Hal ini disebabkan untuk index 1 sampai dengan N/2-1 terpecah menjadi dua dalam bentuk cerminannya pada index N/2+1 sampai dengan N-1.

Perhitungan frekuensi sampling dan jumlah sampling dipengaruhi oleh frekuensi maksimal dan frekuensi minimal yang akan diamati. Yaitu,

$$f_s > 2 f_{\max} \tag{2}$$

Dan

$$N = \frac{f_s}{f_{\min}} \tag{3}$$

Dimana

f_s	: Frekuensi Sampling
f_{max}	: Frekuensi sinyal maks
f_{min}	: Frekuensi sinyal min
N	: Jumlah Sampling

Ketelitian frekuensi pengamatan akan sama dengan frekuensi minimal. Satu Satuan indeks frekuensi juga akan sama dengan ketelitian frekuensi atau frekuensi minimal.

2. Teknik Pengurangan Sampling

Teknik ini dimaksudkan untuk mengurangi jumlah sampling yang harus dihitung menggunakan DFT. Jika suatu sinyal disampling dengan frekuensi sampling f_s sejumlah N sampling, maka waktu total dari sinyal yang disampling untuk keperluan perhitungan adalah,

$$T = \frac{N}{f_s} \, detik \tag{4}$$

Contoh, dengan alasan untuk mengurangi jumlah sampling, maka hanya digunakan misalkan 20 sampling. Jika frekuensi sampling sebesar 40 kHz, maka panjang sinyal yang dianalisa adalah 500 us. Frekuensi maksimal adalah > 20 kHz dan frekuensi minimal adalah 2 kHz.

Sinyal sepanjang 500 us adalah sinyal yang sangat pendek untuk dianalisa secara lengkap. Misalkan sampling ini digunakan dalam sistem klasifikasi suara yang memerlukan waktu sekitar 0,25 detik sampai 1 detik, maka sampling sepanjang 500 us (20 sampling) sangat tidak memenuhi (sekitar 1/1000 informasi yang diproses).

Jika diinginkan untuk memenuhi waktu sepanjang sinyal (sekitar 0,25 sampai dengan 1 detik), maka diperlukan sekitar 10000 sampai 40000 sampling. Tentu saja hal ini tidak diinginkan. Jika panjang sampling tadi dapat dikurangi sebanyak mungkin (misalkan hanya menjadi beberapa puluh sampling), tetapi tanpa menghilangkan keseluruhan informasi yang ada, maka hal ini sangat mengurangi kebutuhan sampling yang sesuai untuk kebutuhan sistem yang kecil.

Hal ini akan identik dengan mengambil sinyal yang panjangnya mencapai ratusan mili detik sampai beberapa detik (puluhan ribu sampling) yang dapat diwakili oleh sampling yang panjangnya hanya beberapa puluh sampling.

Teknik Pengurangan sampling ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Ambil suatu sinyal x[n] yang memiliki panjang N sampling. Sinyal tersebut dapat dipotong (dibagi) menjadi dua dalam bentuk sinyal $x_1[n]$ dan $x_2[n]$, sehingga,

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad untuk \quad 0 \le n \le N-1 \tag{5}$$

Dimana,

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n] & , \quad untuk \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & , \quad untuk \quad \frac{N}{2} \le n \le N-1 \end{cases} \tag{6}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 0 & , \quad untuk \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1 \\ x[n] & , \quad untuk \quad \frac{N}{2} \le n \le N-1 \end{cases} \tag{7}$$

atau, untuk menyamakan posisi sinyal $x_1[n]$ dan $x_2[n]$, maka index n dapat digeser sejauh –N/2,

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n + \frac{N}{2}] & , \quad untuk \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & , \quad untuk \quad \frac{N}{2} \le n \le N-1 \end{cases} \tag{8}$$

Dengan membuang sinyal yang bernilai nol, maka nilai DFT dapat dituliskan sebagai,

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x_1[n] + x_2[n] \right) e^{-\frac{j 2\pi k n}{N/2}} \tag{9}$$

Ambil variable baru M, dimana

$$M = \frac{N}{2} \tag{10}$$

maka

$$X[k] = \frac{1}{2M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(x_1[n] + x_2[n] \right) e^{-\frac{j2\pi kn}{M}} \tag{11}$$

Atau

$$X[k] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{x_1[n] + x_2[n]}{2} \right) e^{-\frac{j2\pi kn}{M}} \tag{12}$$

Dengan mengganti x_1 dan x_2 menjadi x, didapatkan,

$$X[k] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{x[n] + x[n+M]}{2} \right) e^{-\frac{j2\pi kn}{M}} \tag{13}$$

Secara umum, jika ada sinyal asli dengan N sampling, dan ingin dikurangi menjadi S sampling, maka,

$$X[k] = \frac{1}{S} \sum_{n=0}^{S-1} z[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{S}}$$
$$untuk \quad 0 \le k \le \frac{S}{2} - 1 \tag{14}$$

Dimana,

$$z[n] = \frac{S}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{S}-1} x[n + iS], \quad untuk \quad 0 \le n \le S - 1 \tag{15}$$

Dengan N adalah kelipatan dari S, atau N/S adalah bilangan bulat.

2.1. Teknik Banyak Frekuensi Sampling

Jika komponen frekuensi dari suatu sinyal yang akan diamati memiliki jangkauan yang sangat lebar, maka hal ini menyebabkan jumlah sampling yang harus diamati haruslah besar.

Hal ini dapat diselesaikan dengan memecah spectrum frekuensi menjadi beberapa bagian (band). Misalkan frekuensi 20 Hz sampai dengan 20 kHz dapat dipecah menjadi 20 Hz sampai dengan 200 Hz, 200 Hz sampai dengan 2 kHz, dan 2 kHz sampai dengan 20 kHz.

Cara ini menyebabkan ketelitian titik frekuensi pengamatan menjadi berbeda untuk masing-masing band. Sebagai contoh, jika frekuensi pengamatan 20 Hz sampai dengan 20 kHz, maka memerlukan sekitar frekuensi sampling,

$$f_s > 2 \quad x \quad 20kHz \tag{16}$$

Atau,

$$f_s > 40kHz$$

Ambil saja, f_s = 40 kHz. Sehingga panjang sampling, N,

$$N = \frac{40kHz}{20Hz} = 2000 \tag{17}$$

Ketelitian pengamatan akan sebesar 20 Hz untuk semua jangkauan dari 20 Hz sampai dengan 20 kHz. Sehingga seluruh komponen frekuensi akan menjadi,

$$Frek = \{0,20,40,60,80,...,19960,19980,20000\}$$

Untuk daerah frekuensi dari 0 sampai dengan beberapa ratus Hz, ketelitian 20 Hz dianggap cukup. Untuk daerah frekuensi beberapa ratus sampai beberapa ribu Hz, ketelitian 20 Hz, sebenarnya dapat dianggap terlalu teliti. Mungkin sebaiknya 200 Hz dianggap cukup. Untuk daerah beberapa ribu sampai dengan beberapa puluh ribu Hz, mungkin ketelitian 20 Hz, terlalu teliti sekali, nilai yang sesuai mungkin sekitar 2 kHz. Nilai ketelitian ini, berdasarkan titik frekuensi pengamatan. Semakin besar frekuensi pengamatan, ketelitiannya dapat semakin kasar.

Fakta di atas yang mendasari, tidak perlu semua daerah frekuensi pengamatan memiliki ketelitian yang sama. Dengan menerapkan teknik beberapa frekuensi sampling, maka daerah frekuensi yang lebar dapat dibagi menjadi daerah yang lebih kecil.

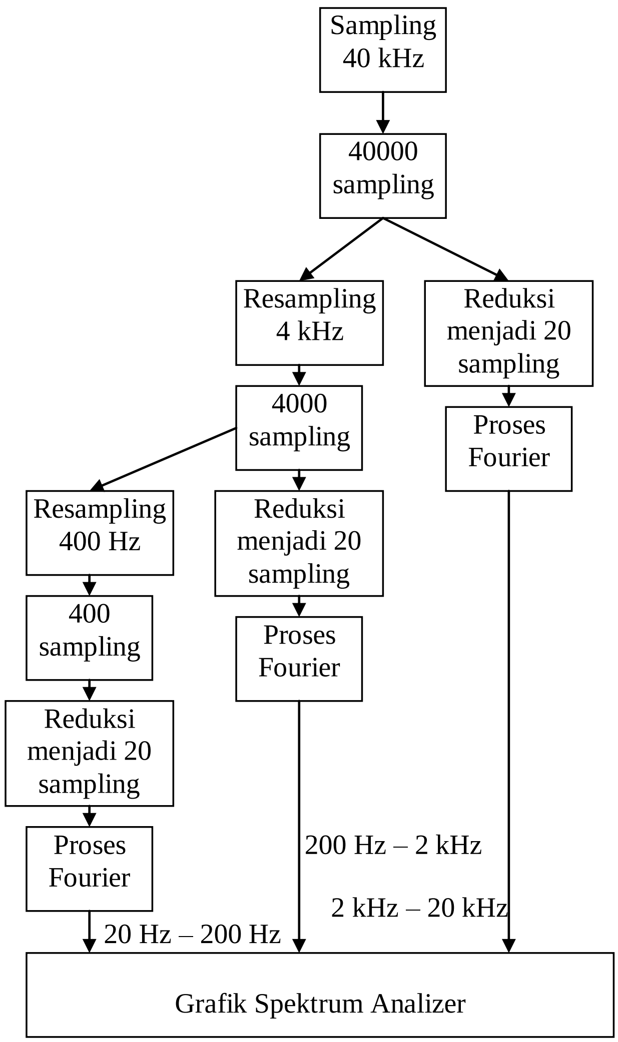
Jika frekuensi 20 Hz sampai dengan 20 kHz dibagi menjadi tiga daerah yang lebih kecil seperti pada uraian sebelumnya, maka frekuensi sampling tiap band dapat dihitung, sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} f_{s1} &> 2 \quad x \quad 20kHz, ambil \ f_{s1} = 40kHz \\ f_{s2} &> 2 \quad x \quad 2kHz, ambil \ f_{s2} = 4kHz \\ f_{s3} &> 2 \quad x \quad 200Hz, ambil \ f_{s3} = 400Hz \end{aligned} \tag{18}$$

Panjang sampling untuk masing-masing band ukurannya sama, yaitu sebesar,

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = N_3 &= \frac{f_{s1}}{2kHz} = \frac{f_{s2}}{200Hz} = \frac{f_{s3}}{20Hz} \\ N_1 = N_2 = N_3 &= 20 \end{aligned} \tag{19}$$

Dari sini dapat dilihat, untuk pengamatan frekuensi 20 Hz sampai dengan 20 kHz hanya memerlukan 3 x 20 sampling, jauh lebih kecil dari panjang sampling yang seharusnya 2000 sampling.



Gambar 1. Diagram Blok Spectrum Analyzer

2.2. Contoh Aplikasi

Untuk memudahkan uraian sebelumnya, di sini digunakan uji coba alat untuk mengamati spectrum frekuensi audio yang memiliki jangkauan frekuensi 20 Hz sampai dengan 20 kHz.

Alat ini diperlukan untuk membantu dalam melakukan analisa mutu dari sistem audio yang nantinya akan diperbaiki menggunakan audio equalizer.

Komponen frekuensi dari spectrum analyzer seperti pada uraian sebelumnya adalah,

$$F_1 = \{0,20,40,60,80,100,120,140,160,180\}$$
$$F_2 = \{200,400,600,800,1k,1.2k,1.4k,1.6k,1.8k\}$$
$$F_3 = \{2k,4k,6k,8k,10k,12k,14k,16k,18k,20k\}$$

3. Pengujian

Pengujian dilakukan dengan tujuan melihat respon frekuensi dari teknik pengurangan sampling dan teknik banyak frekuensi sampling. Pengujian dilakukan dengan memberikan sinyal masukan yang memiliki frekuensi sampling 40 kHz sepanjang 40000 sampling (1 detik).

Pengujian pertama adalah dengan memberikan sinyal masukan berupa sinyal impulse, dimana keluaran dari suatu sistem akan sama dengan respon impulse dari sistem tersebut.

$$y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \tag{20}$$

Sinyal impulse dibangun dari sinyal sepanjang 40000 sampling dan nilainya hanya ada pada n=0 sebesar 40000 satuan, sehingga,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{21}$$

Atau

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\frac{1}{f_s} \tag{22}$$

Dimana

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & , untuk\ t = 0 \\ 0 & , untuk\ lainnya \end{cases} \tag{23}$$

atau

$$\delta[n] = \begin{cases} f_s & , untuk\ n = 0 \\ 0 & , untuk\ lainnya \end{cases} \tag{24}$$

Tabel 1. Pengujian dengan fungsi Impulse

Frek (Hz)	Amp (Satuan)
0	1
20	2
40	2
60	2
80	2
100	2
120	2
140	2
160	2
180	2
200	2
400	2
600	2
800	2
1000	2
1200	2
1400	2
1600	2

1800	2
2000	2
4000	2
6000	2
8000	2
10000	2
12000	2
14000	2
16000	2
18000	2
20000	2

Pengujian berikutnya adalah dengan memberikan sinyal gelombang sinus dengan amplitude 1 satuan dan frekuensi mulai dari 20 Hz sampai dengan 20 kHz, menggunakan persamaan,

$$x(t) = A\sin(2\pi ft + \theta) \quad (25)$$

Atau

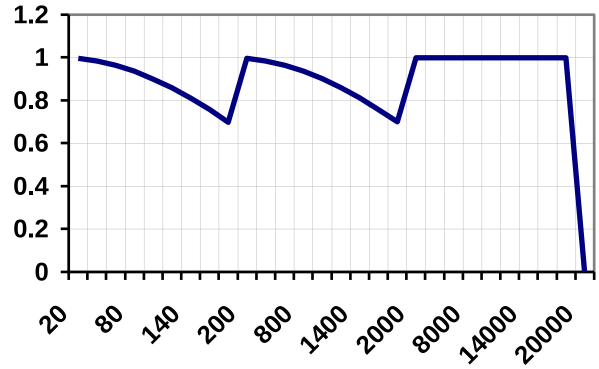
$$x[n] = A\sin(\frac{2\pi fn}{f_s} + \theta) \quad (26)$$

Dimana,

A : Amplitudo
f : Frekuensi sinyal
f_s : Frekuensi sampling
θ : Sudut fasa

Tabel 2. Pengujian dengan gelombang Sinus

Frek (Hz)	Amp (Satuan)
20	0.9958934
40	0.9836335
60	0.9634014
80	0.9354956
100	0.9003258
120	0.8584062
140	0.8103482
160	0.7568467
180	0.6986699
200	0.9959344
400	0.9837927
600	0.9637545
800	0.9361033
1000	0.901243
1200	0.8596657
1400	0.8119671
1600	0.7588218
1800	0.7009793
2000	0.9999903
4000	0.9999922
6000	0.9999903
8000	0.9999922
10000	1
12000	0.9999922
14000	0.9999903
16000	0.9999922
18000	0.9999903
20000	0



Gambar 2. Respon frekuensi hasil pengujian

4. Kesimpulan

- Asalkan pengamatan komponen frekuensi tidak memerlukan detil yang merata sepanjang spektrum frekuensi, maka teknik penggunaan banyak frekuensi sampling dapat membantu mengurangi panjang sampling yang harus diproses.
- Jika detil komponen frekuensi tidak diperlukan, maka teknik pengurangan jumlah sampling dapat digunakan untuk pengamatan sinyal yang panjang hanya dengan sedikit jumlah sampling.
- Penggunaan teknik banyak frekuensi sampling menyebabkan respon frekuensi sedikit teredam pada ujung-ujung tiap pembagian band frekuensi. Hal ini disebabkan oleh efek filter sinyal tiap band.

5. Referensi

[1] DeFatta, David J., Joseph G. Lucas dan Willian S. Hodgkiss, “Digital Signal Processing: A System Design Approach”, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1988.
[2] Gabel, Robert A. dan Richard A. Roberts, “Signals and Linear Systems”, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1978.
[3] Kreyzig, Erwin, “Advanced Engineering Mathematics”, ”, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1993
[4] Kwakernaak, Huibert dan Raphael Sivan, “Modern Signals and Systems”, Prentice-Hall International Editions, New Jersey, 1991.