

**5, 6 e 7 DE JUNHO DE 2013**

Centro Universitário Franciscano | Santa Maria - Rio Grande do Sul

## **MIRADAS Y ACTUACIONES SOBRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE**

Jhony Alexander Villa-Ochoa  
Universidad de Antioquia  
[javo@une.net.co](mailto:javo@une.net.co)

### **RESUMEN**

En este documento me propongo retomar cuatro tipos de situaciones que en la literatura sobre modelación matemática se presentan como maneras de implementar este proceso en el aula de clase. Seguidamente presento una discusión sobre los aspectos bajo los cuales estas diferentes miradas pueden ser favorables y también en cuales presentan limitaciones. Finalmente propongo algunos desafíos para el uso no estereotipado de algunas de estas situaciones.

Palabras clave

Modelación matemática, perspectivas, aula de clase

### **1. PERSPECTIVAS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DEBATE INTERNACIONAL**

En los últimos años ha habido un creciente interés en los trabajos relacionados con aplicaciones y modelación matemática en Educación Matemática; de esa forma ha llegado a consolidarse como un productivo dominio de investigación al interior de esta disciplina científica (BLUM, et al. 2007). La diversidad de trabajos en este campo muestran que no existe una comprensión homogénea sobre los modelos y la modelación matemática, asimismo como sus implicaciones en el aula de clase (KAISER y SRIRAMAM, 2006). En su artículo, Kaiser et al. (2007) presentan una clasificación de los trabajos atendiendo a criterios de tipo epistemológico y relativos a otras perspectivas al interior de la Educación Matemática, entre ellas, estos investigadores destacan la *Realística*, *Educativa*, *Contextual*, *Sociocrítica*, *eliciting* (elicitación), *epistemológica* y una metaperspectiva denominada *cognitiva*. Cada una de estas perspectivas impone énfasis y matices a la modelación matemática escolar como objeto de investigación al interior de la disciplina.

Por su lado, Doerr y Pratt (2008) presentan otra organización de las investigaciones en modelación atendiendo a dos criterios, uno epistemológico y otro psicológico. Dentro del epistemológico estos investigadores diferencian aquellos que conciben a la modelación como aspectos separados del mundo a ser modelado, de quienes observan la modelación como un proceso cíclico e iterativo. Dentro de las perspectivas psicológicas las investigaciones se direccionan hacia temas relacionados con la naturaleza de las actividades de los aprendices cuando se comprometen con tareas de modelación.

De otro modo, la modelación matemática, observada desde las posibilidades que tiene al interior del aula de clase, puede concebirse de distintas maneras, entre ellas: como una estrategia de los seres humanos para la explicación y producción del conocimiento, y también para el aprendizaje (D'AMBROSIO, 2009); como una herramienta didáctica (BIEMBENGUT y HEIN, 2004), como una competencia y una herramienta para desarrollar competencias matemáticas (ZÖTTL, UFER, Y REISS, 2011), como un herramienta para posicionarse de manera crítica frente a las demandas sociales y democráticas (ARAÚJO, 2007; SKOVSMOSE, 1994), entre otros.

Si bien el principal énfasis en las anteriores perspectivas radica en los aspectos que se ponen de relieve a través de la investigación, también es cierto que cada una de ellas tiene implicaciones directas o indirectas sobre las diferentes maneras de actuar al interior del aula de matemáticas. Así por ejemplo, con respecto al énfasis que se puede otorgar a la identificación y delimitación de los contextos, tópicos, o fenómenos que se desean modelar, también se pueden reconocer, al menos, dos tendencias, las cuales dependen del papel activo que ejerza el profesor o los estudiantes en tal elección. El primero de ellos pone el papel protagónico en los estudiantes, quienes de acuerdo con sus necesidades e intereses identifican los contextos, fenómenos o situaciones sobre los cuales se realiza el proceso de modelación; una muestra de estos trabajos puede encontrarse en Aravena, Caamaño, y Giménez (2008), Borba, Meneghetti, y Hermini, (1997) o Borba y Villarreal (2005). En una segunda aproximación, el papel protagónico está en el profesor, quien de acuerdo con su conocimientos, los contenidos temáticos y su realidad institucional, elige tales contextos o fenómenos; sobre este énfasis pueden encontrarse trabajos que se enfocan en el estudio de un fenómeno amplio y complejo (VILLA-OCHOA, 2007; VILLA-OCHOA y JARAMILLO, 2011; BIEMBENGUT y HEIN, 2004). En este mismo sentido, se reconoce en la literatura otras aproximaciones, entre ellas los denominados problemas de relatos, enunciados verbales o problemas de palabras (*word problems*) los cuales han sido objeto de críticas, cuestionamientos y modificación; en esta aproximación se encuentran en Bonotto (2007, 2009); Verschaffel, Van Dooren, Greer, y Mukhopadhyay (2010), Gerofsky (2010), Murata y Kattubadi (2012).

A continuación me propongo presentar algunas situaciones que, con frecuencia, pueden observarse en la literatura y que están asociadas a la modelación matemática; así mismo, me propongo generar algunos elementos que pueden redundar en futuras discusiones sobre las implicaciones en el aula de clase.

## **2. ALGUNAS SITUACIONES RELACIONADAS CON LA MODELACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR**

En este apartado describiré algunas situaciones que, pueden sustentarse desde algunas perspectivas de la modelación matemática en la literatura internacional y que, incluso, yo mismo llegué a considerar como modelación en diferentes estadios de mi desarrollo académico como investigador.

### *a. La empresa JAVO.Ltda... Modelando situaciones idealizadas*

Esta situación la retomo de Posada y Villa-Ochoa (2006, pp. 160-161) en la cual los autores la proponen con la intención de que los estudiantes logren identificar las características más importantes de la función cuadrática, entre ellas resaltan: su crecimiento, decrecimiento, punto máximos/mínimos, rapidez del cambio (concavidad), entre otros. Según los autores, la situación se diseña en dos momentos, el primero de ellos busca que el estudiante identifique las relaciones funcionales entre las diferentes magnitudes que intervienen en la situación. Para promover este reconocimiento se formulan preguntas que sugieren a los estudiantes la realización de cálculos de los valores de una magnitud en relación con las otras. Además, la situación se plantea para posibilitar en el estudiante una aproximación a descripción esta relación funcional haciendo uso del lenguaje natural.

En el segundo momento los autores proponen que los estudiantes identifiquen algunas características de la forma como cambian las variables puesto que la situación se los exige. De esta forma, a través de su análisis se podrá anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los viajeros y para la empresa de viajes, con base en las condiciones generales del problema.

El enunciado de esta situación se presenta en los siguientes términos:

En la empresa de viajes JAVO.Ltda se tiene que el valor de un paquete turístico a cualquier destino nacional por persona es de \$350,000. Sin embargo para cualquier grupo se hace un descuento de \$2,000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir si viaja una pareja se hace un descuento de \$4,000 a cada uno de ellos. De igual manera si es un grupo de 5 personas se hace un descuento de \$10,000 (5 veces \$2,000) a cada uno de los viajeros.

*b. Cultivo de pollos y su costo mínimo... Una modelación matemática dirigida*

Esta situación es sugerida por Biembengut y Hein (2004) como una manera de proponer algunas maneras en las cuales los profesores podrían orientar procesos de modelación matemática. Los autores sugieren que la enseñanza en el aula de clase podría estar orientada por las siguientes acciones:

1) Exposición del tema, 2) Delimitación del problema, 3) Formulación del problema, 4) Desarrollo del contenido programático, 5) Presentación de ejemplos análogos, 6) Formulación de un modelo y resolución del mismo a partir del modelo, y 7) Interpretación de la solución y validación del modelo.

El problema que se plantea para orientar el desarrollo de la modelación consiste en “optimizar” los costos en un contexto avícola. En su artículo, los investigadores sugieren aspectos para la obtención de la información, la producción del modelo (algebraicos y gráficos) y los contenidos de la *programación Lineal* que se harían presente para atender a la pregunta por el precio mínimo.

*c. Familias, empresas y consumos. Enunciados verbales o Word problems*

En la literatura con frecuencia se presentan los enunciados verbales o también denominados problemas de palabras (*Word problems*) como una manera de desarrollar modelación matemática en el aula de clase. A manera de ejemplo, y como una fuente para la discusión, presento algunos de ejemplos de estos enunciados:

- \* Una familia de cuatro (4) *personas* ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa? (Colombia, 1998)
- \* ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de  $n$  lados? (Colombia, 1998)
- \* ¿Cuál sería la posición de un móvil que tiene velocidad constante de 4 km/h y comienza a 2 km del punto de referencia?
- \* La empresa TIGO remitió un mensaje de texto con la siguiente promoción: “Hoy habla 15 minutos a Tigo hasta las 11:59 PM Por solo \$1200. Envía TIGO al 2555” [información tomada del operador el 15 de marzo de 2013]. ¿Qué tendrías en cuenta para recomendar a un usuario comprar o no ese paquete promocional?

Estos enunciados se pueden presentar en distintos niveles educativos y con distintas intencionalidades. El uso de ellos como una manera de desarrollar modelación en el aula de clase ha generado reacciones en favor y en contra de su implementación, algunos de los cuales retomaré en el tercer apartado de este documento.

*d. El cultivo de café. Algunas relaciones entre matemáticas y cultura*

En este aspecto quiero retomar a Berrío (2012) quien desarrolló un estudio con un conjunto de estudiantes de una institución educativa rural. Los estudiantes, con el apoyo del profesor, se comprometieron con buscar evidencias de cómo las matemáticas se relacionan con su contexto; a partir de esta motivación observaron en el cultivo de café una manera de atender a este propósito.

En un primer momento, los estudiantes se involucraron en la discusión sobre la influencia que podría tener la inclinación de un terreno (montañoso) en la cantidad de árboles que se pueden sembrar. Las discusiones de los estudiantes dieron cuenta de que existía en ellos ciertas apreciaciones sobre las áreas en las cuales se consideraba que a “mayor área corresponde mayor cantidad de árboles” (independiente de la inclinación). El trabajo de experimentación, consulta bibliográfica, discusión con otros estudiantes y confrontación con el profesor y personal técnico expertos en temas agrícolas, los estudiantes consiguieron desarrollar otras ideas frente la cantidad de árboles en un terreno, en dependencia de su área y su pendiente. Algunas ideas de la geometría euclidiana fueron “movilizadas” y otras características de las proyecciones ortogonales emergieron en el estudio.

En un segundo momento, los estudiantes (re)construyeron algunos de los modelos usados para las siembras de café en los terrenos montañosos. De otro modo, usaron apoyo de un software dinámico para estudiar las características de los métodos de siembra del café, y a través de áreas sombreadas de formas circulares, establecieron algunas conjeturas y propuestas para optimizar la siembra.

### **3. TÓPICOS INICIALES PARA LA DISCUSIÓN**

Desde la investigación parece haber un consenso en demandar mayores maneras de implementar la modelación matemática que atienda a las diferentes realidades del contexto escolar en el cual se sitúa y, por tanto, la modelación puede adquirir diferentes “rostros”, énfasis, y formas de acción en el aula de clase.

En el caso particular de este documento, planteo cuatro maneras que en la literatura se discuten como modelación matemática. Las situaciones *idealizadas* y *los enunciados verbales*, parecen considerarse como modelación matemática sustentada en algunas perspectivas que tienen fundamentos en las matemáticas *realistas*; para ello, la noción de realidad adoptaba debe incluir contextos simplificados, idealizados o, incluso, imaginados; pues uno de los principales fines de este tipo de situaciones atiende a posibilitar *actividades cognitivas* en los estudiantes, así como el reconocimiento y matematización de las cantidades implicadas en la situación. La mirada de la modelación centrada en las acciones cognitivas que se fundamentan en el “acto” de construir una representación matemática, suele presentarse con alguna frecuencia en algunos investigadores de nuestra disciplina; así por ejemplo, en Colombia (2006, p. 53) se señala que “*La matematización o modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente*”; y como ejemplo, se pueden observar las actividades presentadas en Contreras y Martínez-Cruz (2009) en las cuales la modelación se inscribe en las acciones implicadas en la construcción de una representación que “da cuenta” de los aspectos descritos en la situación.

Centrar los procesos de modelación en enunciados idealizados, imaginados o verbales se muestra proclive para ajustarse a los requerimientos impuestos en contextos escolares en los cuales el currículo se muestra rígido y priorizado por contenidos, de esa manera, la modelación puede poner de relieve aspectos conceptuales de los tópicos implicados en la situación esquivando la “complejidad” que se presenta en una situación que emerge de las necesidades de los estudiantes como la mencionada en Berrío (2012). A pesar de mostrarse favorable frente a algunos condicionamientos impuestos por algunos contextos escolares, también es cierto que este tipo de

situaciones han sido cuestionadas por investigadores como Gerofsky (2010), Bonotto (2007), Villa-Ochoa y Jaramillo (2011) entre otros. Los principales argumentos que se pueden presentar para este tipo de situaciones radican en el carácter simplificado de las expresiones que esconden otros aspectos que se implican en la modelación matemática como aquellos que tienen que ver con la participación de los estudiantes frente a toma de decisiones sobre los tópicos a modelar, las simplificaciones e idealizaciones a las que pueden verse sometidos los fenómenos a estudiar; así mismo, la “perdida de sentido” en la que se puede ver implicados los estudiantes frente a esos problemas idealizados (VERSCHAFFEL, et al. 2010).

Aunque por su naturaleza simplificada, los enunciados verbales presentan diversas limitaciones frente a la capacidad para relacionar aspectos del contexto en el cual se desempeñan los estudiantes, también es cierto algunas variantes de situaciones que emergen del contexto se pueden utilizar para aproximarse a la modelación matemática desde este tipo de enunciados. Así, el enunciado que se ubica en el consumo de minutos promocionales en la empresa de telefonía móvil posee características que lo diferencian de los otros enunciados descritos en el mismo apartado, pues pueden “extraerse” de la “cotidianidad” sin perder las características anteriormente presentadas para este tipo de enunciados. En otras palabras, en los enunciados verbales bajo estas características (Word problems) puede observarse que se integran en las matemáticas escolares como artefactos culturales (BONOTTO, 2007).

De otro modo, la situación planteada por Biembengut y Hein (2004) puede observarse como una modelación dirigida. Si bien la pregunta que comanda la actividad exige a los participantes la experimentación con datos “reales” buscados en fuentes, también es cierto que el papel protagónico es desempeñado por el profesor quien previamente ha hecho algunas simplificaciones de la situación, con el ánimo de poder orientar su desarrollo con fines de enseñar algunos tópicos específicos matemáticos. Este tipo de situaciones parecen ser especialmente útiles frente a contextos escolares en los que prima el desarrollo de contenidos; sin embargo, pueden limitar la creatividad de los estudiantes para detectar ciertos aspectos que intervienen en la situación u otras situaciones y del que podrían derivarse otras acciones matemáticas en torno al mismo contexto. Como los autores mismos lo señalan, existen múltiples factores en el aula de clase que limitan un desarrollo más amplio de la modelación matemática (cantidades amplias de estudiantes, currículos rígidos, exiguos tiempos, etc.). Sin embargo, como una manera de emanciparse de ese tipo de condicionamientos impuestos por las realidades escolares, aparecen los proyectos de modelación (i.e. BORBA Y VILLARREAL, 2005; ARAVENA, et al, 2007; BERRIO, 2012) en los cuales colocan en juego su capacidad para explorar, indagar y (re)conocer el mundo que lo circunda. En uno de los ejemplos mencionado en este documento, Berrío (2012) observa cómo los estudiantes al comprometerse con el estudio de los fenómenos, no solo interpretan y (re)construyen modelos matemáticos, sino que también (re)constituyen sus consideraciones frente al fenómeno mismo, convirtiéndose en un factor prominente hacia la “dinamización” de algunos aspectos de la “micro-cultura”.

Sin la pretensión de ser exhaustivo, en este documento presento insumos para abrir el debate frente a los diferentes “rostros” de la modelación matemática en el aula de clase. Para ello, este documento se propone como una provocación para profundizar en los múltiples aspectos que pueden esgrimirse para defenderse o rebatirse el uso de estas maneras de modelación. De otro modo, conocer las posibilidades y limitaciones de cada una de las maneras en que la modelación puede integrarse a las aulas escolares puede ser de utilidad para que el profesor de matemáticas pueda tener diferentes modos de actuación en su aula de clase, asimismo, le da la posibilidad de tomar conciencia de la multiplicidad de caminos sin que tenga que “encasillarse” en estereotipos de acción

frente a la modelación. Vale la pena resaltar que la modelación matemática que ofrezca libertad a estudiantes y a los profesores para reconocer en los contextos socioculturales situaciones en las cuales el conocimiento matemático se convierta un motor para “leer el mundo” exige a los profesores la capacidad para emanciparse de rutinas que parece legitimarse en prototipos educativos instruccionales. Sin embargo, dado que dicho proceso de emancipación no es automático, otras formas de acción puede irse desarrollando y modificando de manera reflexiva.

Sea cual sea la aproximación que se adopte de la modelación matemática, lo cierto es que cada vez más se pone de relieve la necesidad de relacionar las matemáticas escolares con otros contextos, fenómenos o situaciones de la cotidianidad, la sociedad o la cultura; en parte, porque es por medio del estudio de estos contextos como se aportan elementos para alcanzar los diferentes fines que se le han atribuido a la Educación Matemática, en particular, aquellos que tienen que ver con la difusión de valores democráticos y de integración social, la realización y ejercicio de la crítica y el esfuerzo por la acción comunicativa son también elementos clave a tener en cuenta en la planificación y desarrollo de las matemáticas escolares (RICO, 1997).

#### Agradecimientos

Aunque no sean responsables por los elementos acá expuestos, quiero agradecer a Wbeimar Cifuentes y Yadira Mesa por la lectura y críticas realizadas a la primera versión de este documento.

#### BIBLIOGRAFÍA

ARAVENA, M.; CAAMAÑO, C.; GIMÉNEZ, J. Modelos matemáticos a través de proyectos. **Revista Latinoamericana De Investigacion En Matematica Educativa-Relime**, v. 11, n. 1, p. 49-92, 2008. ISSN 1665-2436.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; RAÚJO, J. L. (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. p. 17-32.

ARAÚJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009. ISSN 1982-5153.

BERRÍO, M. **Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café**. (Trabajo de Maestría no publicado). Medellín. Universidad Nacional de Colombia, 2012

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. **Educación Matemática**, v. 16, n. 2, p. 105-125, 2004.

BLUM, W.; BORROMEO-FERRI, R. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BLUM, W., GALBRAITH, P., HENN, H., & NISS, M. (Eds). **Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14<sup>th</sup> ICMI Study** New York: Springer, 2007. 521 ISBN 978-0-387-29820-7.

BONOTTO, C. How to replace word problem with activities of realistic mathematical modelling. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P., *et al* (Ed.). **Modelling and application in Mathematics Educations. The 14th ICMI Study**. New York: Springer, 2007. p.185-192.

\_\_\_\_\_. Working towards teaching realistic mathematical modelling and problem posing in Italian classrooms.

In: VERSCHAFFEL, L.; GREER, B., *et al* (Ed.). **Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations**. Rotterdam: Sense Publishers, 2009. p.297–314.

BORBA, M.; MENEGHETTI, R.; HERMINI, H. Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinariedade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. **Educação Matemática da SBEM-SP**, v. 17, n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M.; VILLARREAL, M. **Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking**. New York: Springer, 2005.

COLOMBIA, MEN. **Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas**. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.

\_\_\_\_\_. **Estándares Básicos de Competencias**. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

CONTRERAS, J. N.; MARTINEZ-CRUZ, A. Representing, Modeling, and Solving Problems in Interactive Geometry Environments. In: RUBENSTEIN, R. (Ed.). **Understanding Geometry for a Changing World**: NCTM, 2009. p.233-352.

D' AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 89-98, 2009.

DOERR, H. M.; PRATT, D. The learning of mathematics and mathematical modeling. In: KATHLEEN HEID, M. e BLUM, G. W. (Ed.). **Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses**. USA: Information Age Publishing, 2008. p.259-285.

KAISER, G. *et al*. Report from the working group modelling and applications-Differentiating perspectives and delineating commonalties. In: PITTA-PANTAZI, D. e PHILIPPOU, G., Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education, 2007, University of Cyprus. p.2035-2041.

KAISER, G.; SRIRAMAM, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

MURATA, A.; KATTUBADI, S. Grade 3 students' mathematization through modeling: situation models and solutions models with multi-digit subtraction problem solving. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, n. 1, p. 15-28, 2012.

POSADA, F. A.; VILLA-OCHOA, J. *El razonamiento algebraico y la modelación matemática*. In: POSADA, F. A. e OBANDO, G. (Ed.). **Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico** Medellín: Gobernación de Antioquia, v.2, 2006. p.127-163.

RICO, L. Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática. **Suma**, n. 24, p. 5-19, 1997.

SKOVSMOSE, O. Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994

VILLA-OCHOA, J. A.; LÓPEZ, C. M. J. Sense of Reality Through Mathematical Modelling Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W., *et al* (Ed.): Springer Netherlands, v.1, 2011. p.701-711. (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling). ISBN 978-94-007-0910-2.



Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática

ZÖTTL, L.; UFER, S.; REISS, K. Assessing Modelling Competencies Using a Multidimensional IRT-Approach. In: KAISER, G.;BLUM, W., *et al* (Ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling- ICTMA 14**. New York: Springer, 2011. p.427-437.

**5, 6 e 7 DE JUNHO DE 2013**

Centro Universitário Franciscano | Santa Maria - Rio Grande do Sul