

## ESTUDIO SOBRE LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES CONTINUAS: LONGITUD Y SUPERFICIE

Jesús J. Castillo<sup>1</sup>, Isidoro Segovia<sup>2</sup>, Enrique Castro<sup>2</sup> y Marta Molina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IES “Algazul” Roquetas de Mar, <sup>2</sup>Universidad de Granada

### Resumen

*En un estudio previo sobre estimación de cantidades continuas (Castillo, 2006), en el caso de las magnitudes longitud, superficie, capacidad y masa se detectaron importantes deficiencias en la capacidad estimativa de los alumnos de secundaria. Estos nos han conducido a realizar una investigación de diseño dirigida a analizar cómo un grupo de alumnos de 3º de E.S.O. desarrolla su capacidad de estimación de las magnitudes longitud y superficie, a lo largo de un proceso de enseñanza en el que atendemos a las diferentes componentes de la estimación. En esta comunicación describimos la estructura de dicho estudio y presentamos los primeros resultados.*

*Palabras clave: Cantidades continuas, estimación, experimento de enseñanza, investigación de diseño, longitud, superficie*

### Abstract

*In a previous study on estimation of continuous quantities (Castillo, 2006), there were significant shortcomings in secondary school students' estimation capacity in the case of the magnitudes length, area, capacity and mass. These results have led us to develop a design research study aiming to analyze how a group of students of the 3<sup>er</sup> level of E.S.O. develops their estimation ability of the magnitudes length and area throughout a learning process in which we attend to the different components of estimation. Here we describe the structure of the study and present the first results.*

*Keywords: Continuous quantities, design research, estimation, length, surface, teaching experiment*

### Introducción: origen y planteamiento

El estudio que venimos realizando está referido a la Estimación en Medida, es decir al “juicio de valor del resultado (de una operación numérica o) de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales del que lo emite” (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989, p.18). En concreto nos centramos en la estimación de la medida de cantidades de magnitudes continuas. Este trabajo se enmarca por tanto dentro de un área en la que está implicada una gran variedad de conceptos y destrezas referidos a dos grandes ámbitos: la medida y la estimación. Así mismo, tenemos en cuenta los procesos de estimación en cálculo, puesto que en muchos procesos de estimación en medida se utilizan destrezas propias de la estimación en cálculo. Por este motivo los trabajos de Sowder y Wheeler (1989) sobre las componentes de la estimación en cálculo, Reys y Bestgen (1982) sobre estrategias en cálculo, y De Castro (2001), son elementos constituyentes del marco teórico del estudio.

Esta investigación supone una continuación al previo Trabajo de Investigación Tutelada (T.I.T.), que lleva por título “Estimación de cantidades continuas: Longitud, Superficie, Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Capacidad y Masa” (Castillo, 2006). El estudio tuvo su origen en unas prácticas que realizaban los estudiantes de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, en las que se les pedía que estimaran diversas cantidades de las magnitudes continuas Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. En estas prácticas se detectó que muchos de los estudiantes daban como respuesta a algunas cuestiones de estimación lo que cabría calificarse de “disparate”, en el sentido de que el error absoluto cometido era incluso superior al 100%. Así mismo se observó que los alumnos subestimaban cuando se les proponían tareas de estimación relativas a longitud y superficie; y por el contrario, sobreestimaban cuando se trataba de tareas de capacidad y masa.

Estos resultados motivaron el estudio que aquí presentamos en el que tratamos de profundizar en las causas que provocan que los alumnos incurran en un error tan elevado (superior al 100% en muchos casos), partiendo de investigaciones previas que han identificado algunos factores de los que depende la capacidad estimativa, tanto internos al individuo—pues tiene una componente sensorial (Callís, 2002) y requiere la interiorización de determinadas destrezas (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989)—, como externos al individuo—que dependen del objeto a medir, unidades a utilizar, etc. (Del Olmo, Moreno y Gil, 1999). Pues bien, para investigar los factores que hacen que la capacidad estimativa mejore, y las dificultades que surgen al enfrentarse a tareas de estimación de cantidades continuas, llevamos a cabo un experimento de enseñanza con un grupo multicultural de alumnos de 3º curso de ESO.

### **Componentes de la estimación en medida**

A partir de la consulta de los estudios sobre medida de Hildreth (1983), Chamorro (1988), Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) y Castillo (2006), entre otros, los cuales identifican habilidades, estrategias y procesos que intervienen en la estimación en la medida, hemos identificado un conjunto de ítems que intervienen en la creación de conocimiento relativo a la estimación en medida. A estos ítems los denominamos “Componentes de la Estimación en Medida” y son los siguientes:

- C1. Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.
- C2. Percibir lo que va a ser medido o estimado.
- C3. Comprender el concepto de unidad de medida.
- C4. Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.
- C5. Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.
- C6. Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.
- C7. Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
- C8. Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones.
- C9. Verificar la adecuación de la estimación.

Dentro de la octava componente enumerada se distinguen una serie de procesos o estrategias descritas en Castillo (2006) que recogemos a continuación:

- Iterando un referente presente.
- Iterando un referente ausente.
- Acotando.

- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual. Referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente. Referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente. Referente ausente.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes iguales.
- Descomponiendo/Recomponiendo en una parte más su complementario.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes diferentes.
- Técnicas indirectas: empleo de fórmulas.
- Reajuste.

### **Objetivos y metodología**

El estudio que aquí se describe persigue los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Analizar cómo construyen los alumnos, en la etapa de la educación obligatoria, los significados de la estimación de cantidades continuas.
2. Detectar qué dificultades experimentan en la realización de tareas de estimación de cantidades continuas.
3. Explorar cómo influyen en la Capacidad Estimativa de los alumnos la utilización de diversas representaciones.
4. Analizar cómo evoluciona la Capacidad Estimativa de los alumnos con la práctica.

Para alcanzar dichos objetivos realizamos un experimento de enseñanza que se enmarca dentro del paradigma metodológico denominado Investigación de Diseño. En palabras de Molina, Castro, Molina y Castro (2011) el objetivo de este tipo de estudios es “*analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación*” (p.76). Se trata pues de un estudio exploratorio y descriptivo. Se pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre.

Los experimentos de enseñanza que se realizan dentro de este paradigma constituyen intensas investigaciones de prácticas educativas, provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares novedades, cuidadosamente secuenciadas, que estudian cómo algún campo conceptual o conjunto de habilidades e ideas son aprendidas mediante la interacción de los alumnos, bajo la guía del docente (Molina et al., 2011).

En nuestro caso trabajamos durante ocho sesiones de trabajo realizadas en un periodo de siete meses durante el curso académico 2007/2008, con un total de 33 alumnos de 3º de ESO. El grupo de sujetos participantes poseía unas características peculiares debido al proceso de formación del propio grupo y al tipo de alumnado. Los estudiantes cursaban estudios en el IES “Algazul” de Roquetas de Mar, centro que desarrolla un Programa de Compensación Educativa, que consiste en la existencia de Grupos Flexibles en algunas materias, como es la que nos ocupa. Los grupos flexibles son una forma de organizar al alumnado de cada curso en varios subgrupos teniendo en cuenta el nivel de competencia curricular del alumno (ritmo de aprendizaje y nivel de conocimientos previos). El carácter flexible de estas agrupaciones, que se organizan en la misma banda horaria, permite que se vayan integrando los alumnos paulatinamente en el grupo que sigue el currículo normal, una vez que han cubierto las carencias y lagunas de aprendizaje detectadas.

El grupo de 33 alumnos estaba formado por 12 alumnos y 21 alumnas, de una gran variedad de nacionalidades. En concreto, el grupo estaba formado por alumnos de 8 nacionalidades distintas, de las cuales destacan dos, por ser más numerosas: la española y la rumana (ver figura 1).



Figura 1. Distribución del alumnado por nacionalidades.

Las ocho sesiones de trabajo en el aula consistieron en sesiones de trabajo con todo el grupo, con diferentes tipos de agrupamiento para atender a los diferentes ritmos de aprendizaje que tenían lugar en el aula, y varias entrevistas individuales que se realizaron al finalizar las ocho sesiones a aquellos estudiantes que habían puesto de manifiesto más dificultades en las tareas propuestas. En la tabla 1 detallamos la forma de agrupamiento considerada en cada sesión y los objetivos de cada una de las fichas de trabajo que guiaron el trabajo realizado en las mismas.

Sesión	Fichas	Agrupamiento	Objetivos
1ª	Evaluación Inicial	Individualmente	Evaluar las diferentes componentes de la estimación de cantidades de Longitud y Superficie.
2ª	1	Pequeño Grupo y Gran Grupo	Identificar y/o diferenciar las magnitudes Longitud y Superficie.
	2	Pequeño	Identificar diferentes cantidades de Longitud y

Sesión	Fichas	Agrupamiento	Objetivos
		Grupo	de Superficie en representaciones de figuras planas y de cuerpos geométricos.
	3	Pequeño Grupo	Asimilar y familiarizarse con las unidades de medida de Longitud.
	4	Pequeño Grupo	Asimilar y familiarizarse con las unidades de medida de Superficie.
3ª	5	Individual	Interiorizar referentes para las unidades de medida de Longitud: mm, cm, dm, m y dam. Interiorizar referentes para las unidades de medida de Superficie: mm <sup>2</sup> , cm <sup>2</sup> , dm <sup>2</sup> , m <sup>2</sup> y dam <sup>2</sup> . Adecuar la unidad de medida a utilizar con el objeto a medir.
4ª	6	Pequeño Grupo	Detectar los errores cometidos y los subsanen, ya sea individualmente o con ayuda de los compañeros.
5ª	7	Individualmente	Reforzar el aprendizaje de las unidades de medida de Longitud y que asimilen nuevos referentes. Reforzar el aprendizaje de las unidades de medida de Superficie y que asimilen nuevos referentes.
6ª	8	Individualmente	Comprobar la capacidad estimativa de los alumnos. Comprobar si adecuan las unidades de medida con la medida a estimar.
	9	Individualmente	Asimilar como proceso o estrategia de estimación la comparación de cantidades de medida.
7ª	10	Individualmente	Que los alumnos comprueben la utilidad de los conceptos tratados en sesiones anteriores. Evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.
8ª	Evaluación Final	Individualmente	Evaluar las diferentes componentes de la estimación de cantidades de Longitud y Superficie. Comparar la evolución de la capacidad estimativa de los alumnos.

Tabla 1. Características de las sesiones

Para la construcción de cada una de las sesiones tuvo lugar un proceso que consistió en las siguientes fases:

- i) Análisis de los resultados obtenidos en la sesión anterior, prestando especial atención a los errores en los que los alumnos habían incurrido.
- ii) Revisión bibliográfica de teorías existentes y/o modos de construir los conceptos, procesos o estrategias en las que los alumnos tenían deficiencias.
- iii) Construcción o diseño de la nueva sesión considerando: instrumentos a utilizar, agrupamientos, modo de recoger los datos, etc.

Las Componentes de la Estimación en Medida señaladas en un apartado previo fueron utilizadas para diseñar cada una de las sesiones, de modo que el aprendizaje se produjera de forma secuencial incidiendo en aquellos aspectos que los alumnos no dominaban.

Nos centramos aquí en detallar la primera y última sesión en las cuales centraremos el apartado de resultados. Ambas sesiones consistieron en rellenar una ficha de evaluación, a modo individual, las cuales eran idénticas. Dichas fichas estaban divididas en dos bloques en los que se les pedía a los alumnos que respondieran de forma razonada a las preguntas sobre estimación de cantidades de longitud y de superficie que se muestran en la tabla 2.

Numeración	Pregunta
Bloque I: Estimación de cantidades de longitud	
I.1	¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
I.2	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.
I.3	¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?
I.4	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m
I.5	¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?
I.6	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.
I.7	¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?
Bloque II: Estimación de cantidades de superficie	
II.1	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
II.2	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm <sup>2</sup>
II.3	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?
II.4	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m <sup>2</sup> .
II.5	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?
II.6	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm <sup>2</sup> .
II.7	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de una de las celdillas del panel de abeja que observas en la foto?

Tabla 2. Preguntas incluidas en la Evaluación Inicial y Final

### Primeros resultados

Un primer análisis cuantitativo comparativo entre las respuestas de los estudiantes, dadas en las evaluaciones inicial y final, realizadas en las sesiones 1 y 8, respectivamente, nos lleva a comparar el porcentaje medio de error cometido en aquellas actividades en las que se les pedía a los alumnos que realizaran estimaciones. Como se muestra en la tabla 3, en cada una de las actividades en los que se les pedía a los alumnos que realizaran estimaciones de cantidades de longitud, se produjo, de forma global, una mejora ya que disminuyó el porcentaje medio de error de las estimaciones realizadas.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
I.1.	22,5 %	14,84 %
I.3.	48,5 %	21,15 %
I.5.	34,1 %	22,38 %
I.7.	23,1 %	15,4 %

Tabla 3. Porcentaje medio de Error en estimaciones de longitudes en las evaluaciones inicial y final<sup>1</sup>

En el caso de la estimación de cantidades de superficie, destacamos el alto porcentaje de alumnos que cometen error (Ver tabla 4).

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
II.1.	46,15 %	19,23 %
II.3.	65,38 %	26,92 %
II.5.	65,38 %	26,92 %
II.7.	50 %	19,23 %

Tabla 4. Porcentaje medio de alumnos que cometen error en la estimación de superficies en las evaluaciones inicial y final<sup>2</sup>

Si consideramos sólo aquellos alumnos que realizaron una estimación de cantidades de superficie, aunque fuera expresándolo como producto de longitudes, los porcentajes medios de error son excesivamente elevados, superando ampliamente el 100%, como puede observarse en la Tabla 5. El resto de alumnos no considerados en esta tabla no respondieron o dieron una respuesta que sugiere falta de comprensión de la magnitud superficie.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
II.1.	63,54 %	28,92 %
II.3.	174 %	69,09 %
II.5.	179 %	105,9 %
II.7.	3097,34 %	155,76 %

Tabla 5. Porcentaje medio de error cometido en las estimaciones de superficies en las evaluaciones inicial y final<sup>3</sup>

Para el caso de la estimación de superficies también se observa un descenso en el porcentaje medio de error. El hecho de que, tanto para el caso de la estimación de cantidades de longitud como para el caso de las cantidades de superficie, haya disminuido el porcentaje medio de error, nos dice que el diseño instruccional fue efectivo en este sentido.

Continuamos avanzando en el análisis de los datos para poder detallar cómo se fue produciendo esta evolución en la capacidad estimativa de los estudiantes y qué tipo de dificultades surgieron en dicho proceso.

<sup>1</sup> Para el cálculo del Porcentaje medio de error sólo se han tenido en cuenta aquellos alumnos que contestaban la pregunta.

<sup>2</sup> Porcentaje medio de alumnos que o bien no contestaban, o no realizaban una estimación de cantidades de superficie, o utilizaban una fórmula errónea.

<sup>3</sup> Para aquellos alumnos que expresaron las cantidades de superficie como producto de cantidades de longitud, se realizó dicha multiplicación para poder medir el porcentaje de error correspondiente.

## Referencias

- Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. En D. Nelson y R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics Yearbook 38* (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.
- Bright, G. W. (1979). Measuring experienced teachers' linear estimation skills at two levels of abstraction. *School Science and Mathematics*, 79, 161-164.
- Bright, G.W. (2003). Estimation: Teaching notes. En G. W. Bright y D. Clements (Eds.), *Classroom activities for learning and teaching measurement* (pp. 27-31). Reston, V.A.: NCTM.
- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Castillo, J. J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa*. Granada: Universidad de Granada.
- Chamorro, C. y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Clayton, J. G. (1988). Estimation. *Mathematics Teaching*, 125, 18-19.
- Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27(1), 87-102.
- De Castro, C. (2001). *Influencia del Tipo de Número en la Estimación en Cálculo*. Granada: Universidad de Granada.
- Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, 30(5), 50-54.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Olmo, M.A., Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Madrid: Síntesis.
- Pareja, J. L. (2001). *Estimación de cantidades discretas por alumnos de magisterio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Reys, R. y Bestgen, B. (1982). Processes used by good computational estimations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 183-201.
- Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- Sowder, J. T., y Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 130-146.