PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN DE MAGNITUDES NO ALCANZABLES: ESTRATEGIAS Y ÉXITO EN LA RESOLUCIÓN

Lluís Albarracín y Núria Gorgorió

Llamamos problemas de Fermi a aquellos problemas que, siendo de difícil resolución, admiten una aproximación a su solución a base de romper el problema en partes más pequeñas y resolverlas por separado. En este artículo presentamos los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables (PEMNA) como un subconjunto de los problemas de Fermi. A partir de los datos recopilados en un estudio hecho con alumnos de 12 a 16 años, caracterizamos las distintas estrategias de resolución propuestas por estos y discutimos sobre la potencialidad de estas estrategias para resolver los problemas con éxito.

Términos clave: Estimación; Estrategias de resolución de problemas; Modelización; Problemas de Fermi

Unreachable Magnitude Estimation Problems: Strategies and Solving Success

Fermi problems are problems that, being difficult to solve, can be satisfactorily solved if they are broken down into smaller pieces that are solved separately. In this article, we present inconceivable magnitude estimation problems as a subset of Fermi problems. Based on data collected from a study carried out with 12 to 16 years old students, we describe the different strategies for solving the problems that were proposed by the students, and discuss the potential of these strategies to successfully solve the problems.

Keywords: Estimation; Fermi problems; Modeling; Solving problems strategies

La resolución de problemas es uno de los campos que ha recibido más atención en las últimas décadas dentro del ámbito de la Educación Matemática, pero no todos los avances realizados en la investigación han llegado a las aulas. En particular, la modelización matemática no está presente en los currículos de matemá-

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de magnitudes no alcanzables: estrategias y éxito en la resolución. *PNA, 7*(3), 103-115.

ticas en la educación secundaria obligatoria (12-16 años) en Cataluña (España). Por este motivo, desde la perspectiva del profesor, es natural plantearse cuál debe ser la forma con la que se podrían introducir actividades de modelización en las aulas.

En este artículo presentamos los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables (PEMNA) como una oportunidad para introducir la modelización en las aulas de educación secundaria. Estos problemas se centran en plantear al alumno una situación en la que es necesario estimar el valor de una magnitud real considerablemente grande, fuera de su alcance de conocimiento cotidiano. Podemos considerar que este tipo de problemas son un subconjunto de los problemas de Fermi y que aceptan distintos tipos de enfoques para abordar su resolución.

Dado que los PEMNA son problemas con un enunciado que los sitúa en un determinado contexto cotidiano, distinguir los elementos principales de los elementos menos relevantes es una tarea difícil para los alumnos. En este artículo discutimos las distintas estrategias que los alumnos proponen para resolver estos problemas.

CONTEXTO DE UN PROBLEMA Y MODELIZACIÓN

Según Van Den Heuvel-Panhuizen (2005), introducir un contexto real en los problemas puede aumentar su accesibilidad y sugerir estrategias a los alumnos. Los problemas relacionados con aspectos de la vida cotidiana posibilitan trabajar las matemáticas desde lo concreto a lo más abstracto. Chapman (2006) observa que gran parte de los profesores los presentan de una forma cerrada que no admite un análisis narrativo de las situaciones propuestas. Doerr (2006) explica este hecho, afirmando que la formación del profesorado condiciona esta postura y que sería necesario que tuvieran un esquema bien desarrollado de los distintos tipos de respuesta que los alumnos pueden dar.

Siguiendo a Winter (1994), la resolución de problemas en contexto real incluye la matematización de una situación no matemática, que implica la construcción de un modelo matemático que respete la situación real, el cálculo de la solución y la transferencia del resultado obtenido a partir del modelo en la situación real. El paso más difícil de este proceso es determinar un modelo apropiado para la situación real planteada, ya que requiere un buen conocimiento de ésta y de los conceptos matemáticos involucrados, así como un alto nivel de creatividad.

Si nos centramos en la modelización en el ámbito de la Educación Matemática, Lesh y Harel (2003) definen el concepto de modelo como sigue:

> *Los modelos son sistemas conceptuales que generalmente tienden a ser expresados utilizando una variedad de medios de representación que interactúan y que pueden involucrar símbolos escritos, lenguaje hablado,*

> *gráficos hechos en ordenador, diagramas o gráficos hechos en papel, o metáforas a través de la experiencia. Sus propósitos son construir, describir o explicar otro(s) sistema(s). Los modelos incluyen: (a) un sistema conceptual para describir o explicar la relevancia de los objetos matemáticos, relaciones, acciones, patrones, y regularidades que se atribuyen a la situación de resolución de problemas, y (b) procedimientos para generar construcciones, manipulaciones o predicciones útiles para lograr objetivos reconocidos claramente.*[1] (p. 159)

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Ferri, 2006), pero, en general, se acepta que es un proceso multicíclico. Siguiendo a Blum (2002), los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales:

- Simplificar el problema real a un modelo real.
- Matematizar el modelo real a un modelo matemático.
- Buscar una solución a partir del modelo matemático.
- Interpretar la solución del modelo matemático.
- Validar la solución en el contexto del problema real.

Según la literatura, hay dos diferencias principales entre los problemas tradicionales con enunciado literal y las actividades de modelización. En primer lugar, en la modelización es necesario relacionar los conceptos matemáticos y las operaciones con la realidad, produciendo significado para aquello que estudian, y describiendo simbólicamente una situación (Lesh y Zawojewski, 2007). La segunda diferencia se centra en la propia modelización, ya que los estudiantes tienen que generar modelos que sean realmente aplicables a una realidad dada y que las soluciones que de ellos derivan se puedan generalizar e interpretar (English, 2006).

Problemas de Fermi

Llamamos problemas de Fermi a una clase de problemas que, a pesar de ser de difícil resolución, aceptan una aproximación alternativa a su solución a base de romper el problema en partes más pequeñas y resolverlas por separado. Reciben su nombre del físico Enrico Fermi (1901-1954), quien acostumbraba proponerlos en sus clases. El problema de Fermi clásico que se pone como ejemplo es el de estimar el número de afinadores de piano que hay en Chicago, a partir de estimar datos como la población total de Chicago, la proporción de familias de Chicago que pueden tener piano o el tiempo necesario para afinar un piano (ver Efthimiou y Llewellyn, 2007, para los detalles concretos de la resolución de este problema planteada por Fermi).

Ärlebäck (2009) define los problemas de Fermi como "problemas abiertos no estándar que requieren a los estudiantes hacer suposiciones sobre la situación del

[1] Traducción de los editores.

problema y estimar cantidades relevantes antes de enfrentarse a su resolución, con frecuencia, simples operaciones"[2] (p. 331). Carlson (1997) describe el proceso de resolución de un problema de Fermi como "el método de obtener una rápida aproximación a un proceso matemático aparentemente difícil utilizando una serie de conjeturas formuladas con cierta base y operaciones relacionadas"[3] (p. 308). Este autor también afirma que tienen un claro potencial de motivación para los alumnos. Siguiendo la misma dirección, Efthimiou y Llewellyn (2007) caracterizan los problemas de Fermi afirmando que siempre parecen difusos en su formulación, dando poca información o pocos hechos relevantes sobre la forma de atacar el problema. Al mismo tiempo, a partir de un análisis más cuidadoso, estos problemas se pueden descomponer en problemas más sencillos que permitan llegar a la solución de la pregunta original. Estos autores argumentan que estos problemas fomentan el razonamiento crítico en los alumnos. Otros autores se han interesado directamente en aspectos concretos de la resolución de estos problemas. Por ejemplo, Peter-Koop (2004, 2009) propone problemas de Fermi sencillos a alumnos de educación primaria para, entre otros aspectos, investigar sobre las estrategias de resolución que utilizan. En sus conclusiones, expone que los alumnos resuelven problemas de Fermi de muchas formas distintas, que generan nuevo conocimiento matemático para ellos mismos y que el proceso de resolución que usan es multicíclico. Estas conclusiones son un punto de inicio que sugiere la necesidad de un mayor grado de profundidad en la investigación. A partir de la observación de la resolución de problemas de Fermi por parte de los estudiantes, Ärlebäck (2009) concluye que los procesos que describen estas actividades "son representados de forma rica y dinámica cuando los estudiantes se sienten atraídos por la resolución de problemas de Fermi realistas"[4] (p. 355). En este sentido, afirma que este tipo de problemas son una buena oportunidad para introducir a los alumnos en actividades de modelización matemática.

Presentación de los problemas de estimación de magnitudes no alcanzables

En nuestro trabajo nos centramos en problemas basados en magnitudes que no podemos estimar perceptivamente sin un proceso de aprendizaje; es decir, aquellas magnitudes que nos podemos plantear e imaginar, pero para las que difícilmente podemos interpretar su valor. Si pensamos en las magnitudes por las que tenemos un conocimiento concreto y a las que hemos dado significado (la medida de un bolígrafo, el tiempo que pasa en el transcurso de un partido de futbol o el número de personas que hay en una clase) podemos afirmar, metafóricamente,

[2] Traducción de los editores.
[3] Traducción de los editores.
[4] Traducción de los editores.

que son magnitudes cercanas y alcanzables. Algunos ejemplos de magnitudes no alcanzables en este sentido son la cantidad de escombros generados en los movimientos de tierra asociados a la construcción de un edificio, el número de coches que pasan por un punto determinado de una autopista en un día o el número de árboles que hay en un bosque.

A partir de estas ideas, definimos una magnitud no alcanzable como una magnitud (física o abstracta) que se encuentra fuera de nuestro alcance de interpretación y para la cual no hemos generado significado. Cabe destacar que, en función de esta definición, la concreción de las magnitudes que consideramos como no alcanzables dependerá de cada individuo. Esta concreción estará marcada para sus conocimientos, competencias o experiencias acumuladas.

En el momento en que nos planteamos determinar el valor asociado a una magnitud no alcanzable, su propia definición nos obliga a trabajar con valores aproximados. La forma natural de obtener valores para magnitudes no alcanzables es conseguir estimaciones razonadas. En el momento en que planteamos a los alumnos de educación secundaria obligatoria obtener una estimación del valor de una magnitud no alcanzable de su entorno les estamos planteando un problema, ya que ésta es una tarea escolar con un enunciado significativo para el que no tienen un método de resolución concreto.

A priori, este tipo de problemas tiene que permitir tratar situaciones reales o cercanas a la realidad de los alumnos. Se pueden ajustar a distintos niveles educativos, pueden ayudar a fomentar la discusión en el aula de matemáticas y se pueden utilizar para tratar temas relevantes para el desarrollo personal del alumno, potenciando el conocimiento de su entorno. Al mismo tiempo, como los métodos exactos no son viables para su resolución, permiten trabajar la estimación de magnitudes y la valoración de errores en las medidas. En el proceso de resolución de los problemas esperamos que los alumnos vean la necesidad de centrarse en las partes esenciales de la situación planteada. Así, esperamos que les permitan introducir modelos matemáticos para resolver estos problemas.

Nuestro estudio

Pólya (1945) estableció un modelo para la resolución de un problema dividido en cuatro fases: (a) comprensión del problema, (b) elaboración de un plan, (c) ejecución del plan y (d) mirada retrospectiva. El objetivo de nuestra investigación es estudiar el tipo de estrategias de resolución que proponen los alumnos en el caso de los PEMNA. Con la idea de centrar nuestro estudio en las dos primeras fases del modelo propuesto por Pólya, las instrucciones detalladas en los enunciados requieren explícitamente a los alumnos que se limiten a escribir una propuesta de resolución. En nuestro estudio se utilizaron seis PEMNA, que provenían de una lista inicial de 36, que fueron escogidos a partir de las respuestas de un grupo reducido de alumnos en una prueba piloto. Los problemas que utilizamos en nuestro estudio fueron los siguientes.

Problema A. ¿Cuántas entradas podríamos vender si llenáramos el patio del instituto para hacer un concierto?

Problema B. ¿Cuánta gente hay en una manifestación?

Problema C. ¿Cuántos mensajes SMS enviamos en un día entre todos los catalanes?

Problema D. ¿Cuántas gotas de agua se necesitan para llenar un cubo?

Problema E. ¿Cuántos vasos de agua llenan una piscina?

Problema F. ¿Cuántas monedas de euro caben una caja fuerte cúbica de un metro cúbico?

Cada uno de los problemas tenía un enunciado que lo situaba en un contexto real. Por ejemplo, para el problema A se utilizó el contexto del festival de fin de curso y la necesidad de prever el número de entradas para vender; y, para el problema D, se indicó que una gotera afectaba a los ordenadores de la sala de profesores. Todos los enunciados se refinaron en una prueba piloto realizada con un grupo reducido de alumnos de bachillerato (etapa post obligatoria, de 16 a 18 años) para comprobar que los alumnos no tuvieran problemas de comprensión de la situación planteada y se procedió a la recogida de datos. Una muestra del tipo de enunciados utilizado es el siguiente (propuesto para el problema B).

> *Cuando hay una manifestación es importante saber cuánta gente ha ido para valorar la fuerza que puede tener la propuesta. A veces, la policía, las autoridades y la organización no se ponen de acuerdo con las cifras. Si hubiera una manifestación, ¿cómo podríamos saber cuánta gente ha asistido?*
>
> *Describe los pasos que seguirías para calcular de forma aproximada esta cantidad con tus propios recursos. No es necesario que des un resultado, sólo que expliques cómo lo harías.*

Los problemas se pasaron en sesiones de una hora de clase en dos centros de educación secundaria, uno público y otro privado. Se pidió a los alumnos que hicieran una propuesta individual de los pasos que seguirían para resolver el problema. Como hemos observado, se les pidió que no efectuaran ningún cálculo y que se limitasen a la descripción del proceso que consideran adecuado para abordar el problema. Dado que los alumnos responden a uno de estos cuestionarios en un tiempo de entre 15 y 30 minutos, pudimos recoger propuestas de resolución para distintos problemas por parte de cada uno de los alumnos. De esta forma se consiguieron 538 propuestas entre los 216 alumnos de Educación Secundaria

Obligatoria (ESO) participantes en el estudio. La tabla 1 muestra la distribución de cuestionarios recogidos por curso y problema.

Tabla 1
Número de cuestionarios recogidos

Curso	A	B	C	D	E	F	Total
1º ESO	18	18	20	19	18	18	111
2º ESO	22	21	22	20	21	21	127
3º ESO	25	22	20	24	22	20	133
4º ESO	31	31	28	25	25	27	167
Total	96	92	90	88	86	86	538

Analizamos las respuestas de los alumnos usando el programa NVivo 8, que permite establecer distintas categorías de análisis y facilita la gestión de los datos, así como hacer un análisis relacional de los resultados. Como afirma Gibbs (2007), la codificación de los datos en categorías nos permite establecer un marco de referencia para interpretar los datos recogidos, que van a ser analizados desde distintas perspectivas.

En concreto, dirigimos nuestro análisis a: (a) ver si las propuestas de los alumnos iban encaminadas a resolver correctamente el problema planteado o si su propuesta se desviaba de la pregunta formulada; (b) analizar los distintos tipos de estrategia propuestos para resolver los problemas, con el objetivo de detectar intentos de modelización de las situaciones propuestas; y (c) estudiar si las propuestas de los alumnos, llevadas a la práctica, permitirían resolver los problemas propuestos.

Estrategias y éxito en la resolución

A continuación, presentamos y ejemplificamos los diferentes tipos de estrategias detectados en las propuestas de resolución de los alumnos participantes a los seis problemas del estudio y valoramos si la resolución presentada les llevaría a resolverlos de forma efectiva. El siguiente es un ejemplo de propuesta de resolución para el problema D, en el que se pide la estimación del número de gotas que llenan un cubo de agua.

> *Depende de lo que mida cada gota, de si caerá en el cubo salpicando gotitas o no, también depende de lo que mida el cubo. Hay que controlar que las gotas no se evaporen.*

Podemos observar que esta propuesta contiene una enumeración de datos que podrían ser de ayuda en la resolución del problema, pero no se concreta ningún plan o procedimiento para conseguir la estimación que se pide. Este es un ejemplo del tipo de propuestas que hemos incluido en la categoría de propuestas sin estrategia.

En nuestro análisis, hemos encontrado alumnos que hacen propuestas que se limitan a proponer un recuento exhaustivo, estrategia que no puede considerarse efectiva en la resolución de un PEMNA, por su propia naturaleza. La siguiente propuesta para el problema E es un ejemplo de esta forma de proceder para estimar el número de vasos de agua que llenan una piscina.

> *Cogería unos vasos y empiezo a llenarlos de agua de la piscina. Si me hacen falta más vasos voy cogiendo y así hasta vaciar la piscina. Cuando se haya acabado el agua cuento los vasos llenos y así sé cuantos vasos necesito.*

En este caso, el alumno propone vaciar la piscina utilizando vasos para contarlos posteriormente en un recuento exhaustivo. El ejemplo siguiente muestra una propuesta del mismo tipo de estrategia en el problema D, en la que un alumno propone contar una por una el número de gotas que caen en un cubo de agua.

> *En esta situación, lo que haría sería observar cuánto tiempo pasa hasta que se llena el cubo (contando las gotas), posteriormente apartaría todos los ordenadores para procurar que no se estropearan y pondría otro cubo.*

Algunas de las propuestas analizadas se basan en delegar a terceros las acciones para estimar las cantidades solicitadas, haciendo uso de una fuente externa. Un ejemplo para el problema E es el siguiente.

> *Preguntaría a las compañías de teléfono cuántos SMS se envían en un día y los sumaría todos.*

Un tipo de estrategia más elaborado es la reducción a un problema más pequeño utilizando un factor de proporción. Esta estrategia se basa en escoger un problema equivalente al propuesto pero de forma que sea alcanzable para el alumno para posteriormente utilizar un factor de proporción que permita utilizar los resultados obtenidos en el problema original. Una muestra de este tipo de estrategia es la siguiente propuesta para el problema D.

> *Calcularía la cantidad de agua que cabe en el cubo. Después, dividiría esta cantidad entre cien y calcularía el número de gotas necesarias para llenar una centésima parte del cubo. Después multiplicaría este número por cien.*

También hemos encontrado una única respuesta que propone responder el problema a partir de la comparación con una situación real conocida para utilizar una proporción con el problema planteado.

Hemos encontrado otros tipos de propuestas que contienen estrategias elaboradas que contienen elementos de modelización de la situación estudiada para resolver los problemas planteados. Estos problemas se centran en romper el problema principal en diversos sub-problemas para resolverlos por separado. A continuación, mostramos una propuesta al problema A para estimar el número de personas que caben en el patio del instituto como público en un concierto.

> *Primero marcaría una zona para el escenario, después pondría una fila de sillas hasta el límite que creyese oportuno, el siguiente paso sería hacer lo mismo pero a lo largo, porque el otro lo haría a lo ancho. Finalmente, se multiplica lo largo por lo ancho, ya que es un cuadrado o un rectángulo y el número que saliese serían las entradas vendidas.*

En esta propuesta el alumno plantea con éxito un modelo de distribución rectangular de las personas que asistirían al concierto. El alumno pretende estimar la cantidad de sillas que caben en el patio en sus dos dimensiones y aplicar la regla del producto. De esta forma reduce el problema inicial a dos problemas más sencillos. Una opción diferente, pero igualmente adecuada para resolver el mismo problema A, es la siguiente.

> *Empezaría por calcular el máximo de personas que caben en el patio. Para empezar tendríamos que saber cuántas personas aproximadamente caben en un metro cuadrado y a continuación cuántos metros cuadrados hay en el patio a partir de lo largo y ancho que es. Para acabar, multiplicar las personas por la cantidad de metros cuadrados que hay en el patio. Entonces, con el número que te sale ya sabes cuántas entradas se podrían vender.*

En este caso, el concepto matemático que propone el alumno para representar la situación y conseguir una estimación es la densidad de población. A partir de esta propuesta, se puede conseguir un resultado que consideremos adecuado. Otra propuesta distinta para resolver el mismo problema A es la siguiente.

> *Cogería a 10 alumnos y calcularía el espacio que ocupa cada uno. Después haría la media. Calcularía la superficie total del patio y restaría los metros que ocupara el escenario. El espacio restante, que sería el espacio disponible para poner gente, lo dividiría entre la media del espacio ocupado por cada alumno. Entonces, poniendo por ejemplo que caben 108 personas, vendería 100, ya que si no, no habría espacio ni para respirar.*

En este caso, podemos observar que el modelo utilizado es la iteración de una unidad. Este modelo se basa en establecer una unidad de referencia que se aplica sobre el conjunto a estimar, en este caso la superficie media que ocupa una persona.

Como podemos observar, las estrategias centradas en establecer sub-problemas se basan en una simplificación de la situación estudiada, con lo que contienen elementos de modelización. Algunos de los elementos detectados son conceptos como la densidad de población, la introducción de unidades de referencia o modelos de distribución.

Por otro lado, en el proceso de análisis establecimos tres categorías para organizar las propuestas, en función del nivel de éxito que se podría conseguir si un resolutor las siguiera con la intención de resolver el problema. Ubicamos aquellas propuestas que no permiten llegar a una estimación adecuada, o que no contienen un plan de acción concreto o éste presenta errores conceptuales en la categoría de no resuelve. Por dicotomía, debería existir otra categoría para las propuestas que permiten resolver el problema, pero dada la naturaleza de los PEMNA, recogimos dos tipos claramente diferenciados de propuestas que permitirían obtener un resultado válido.

Encontramos las propuestas que se basan en recuentos exhaustivos. Teniendo en cuenta que las magnitudes que tratamos son no alcanzables y se refieren a cantidades muy grandes, estas propuestas requieren una cantidad de tiempo o recursos exagerados, aunque el procedimiento propuesto sea correcto a priori. De esta forma, consideramos que estas propuestas pertenecen a la categoría de propuestas que se resolverían sobre el papel.

Establecimos una categoría para aquellas propuestas que presentan un plan de ejecución factible, que se puede llevar a la práctica y que es efectivo en el sentido que permitiría conseguir un valor adecuado para la estimación planteada en el problema. Estas propuestas las englobamos en una categoría llamada resolvería e incluyen mayoritariamente propuestas en las que se pueden observar elementos de modelización para representar la situación en la que se desarrolla el problema planteado.

A partir de este análisis, presentamos la tabla 2, que relaciona las estrategias propuestas por los alumnos y su nivel respecto al éxito en la resolución.

Tabla 2
Estrategias propuestas y éxito en la resolución

	Éxito en la resolución			
Estrategia	Resolvería	Resolvería sobre papel	No resolvería	Total
Sin estrategia	0 (0%)	0 (0%)	160 (100%)	160
Exhaustiva	0 (0%)	84 (87%)	12 (13%)	96
Fuente externa	0 (0%)	14 (70%)	6 (30%)	20
Reducción y proporción	13 (42%)	4 (13%)	14 (45%)	31
Romper en partes	109 (47%)	52 (23%)	69 (30%)	230
Situación real y proporción	1 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	1
Total	123	154	261	538

A partir de los resultados mostrados en la tabla, se puede observar que aquellas propuestas que no contienen ningún tipo de estrategia, las que utilizan una fuente externa o las estrategias exhaustivas no permitirían resolver los problemas con éxito y obtener estimaciones adecuadas. Por otra parte, la reducción a un problema más pequeño combinada con el uso de un factor de escala y la estrategia de romper el problema en partes más pequeñas para resolverlas por separado son las que permiten, con porcentajes superiores al 40%, conseguir propuestas que resolverían el problema.

CONCLUSIONES

En este estudio hemos introducido los PEMNA y hemos podido comprobar que pueden ser resueltos a partir de estimaciones parciales. Podemos concluir, siguiendo la definición de Ärlebäck (2009), que los PEMNA son un subconjunto de los denominados problemas de Fermi.

Si nos centramos en las estrategias detectadas en el análisis de datos, podemos observar que los alumnos elaboran un gran número de estrategias diferentes para resolver los problemas planteados con éxito. Por ello, consideramos que los PEMNA pueden ser útiles en las aulas para mostrar a los alumnos que existen diversas opciones para resolver problemas y que se puede llegar a soluciones equivalentes. De esta forma, se podría centrar la atención en el proceso de resolución y romper la tendencia a fijarse exclusivamente en los resultados. Utilizando los PEMNA, los profesores tendrían problemas abiertos que presentarían situaciones que se pueden discutir abiertamente, en las que existen diferentes aproximaciones posibles para su resolución (Chapman, 2006).

Por otra parte, debemos destacar que aquellas estrategias que permitirían a los alumnos resolver los problemas propuestos contienen elementos de modelización y nos hace pensar que los PEMNA podrían ser una herramienta útil para introducir los procesos de modelización en las aulas de educación secundaria obligatoria. Concretamente, consideramos que el trabajo en grupos y por proyectos podría permitir que todos los alumnos utilizaran las estrategias modelizadoras que proponen algunos de los alumnos encuestados. Al mismo tiempo, las estrategias exhaustivas pueden ser el motor que genere discusiones que motiven el uso de estrategias más elaboradas y muestren a los alumnos la necesidad de crear modelos que contengan los aspectos más relevantes que describen una situación.

REFERENCIAS

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331-364.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education—discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 149-171.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, *35*(5), 308-309.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211-230.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38*(3), 255-268.

Efthimiou, C. J. y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, *42*(3), 253-261.

English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 303-323.

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95.

Gibbs, G. (2007). *Analizing qualitative data*. Londres, Reino Unido: SAGE Publications.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2), 157-189.

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modelling. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, CN: Information Age Publishing.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: pupils' interactive modelling processes. En S. Ruwisch y A. Peter-Koop (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: towards 2010* (pp. 454-461). Sydney, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and understanding mathematical modelling through Fermi-problem. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131-146). New York, NY: Springer.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 2-10.

Winter, H. (1994). Modelle als konstrukte zwischen lebensweltlichen situationen und arithmetischen begriffen. *Grundschule*, *26*(3), 10-13.

Lluís Albarracín
Universitat Autònoma de Barcelona
lluis.albarracin@uab.cat

Núria Gorgorió
Universitat Autònoma de Barcelona
nuria.gorgorio@uab.cat

Recibido: septiembre de 2012. Aceptado: octubre de 2012
Handle: http://hdl.handle.net/10481/23476