APRENDER A ENSEÑAR GEOMETRÍA EN PRIMARIA

UNA EXPERIENCIA EN FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

LORENZO J. BLANCO NIETO
JANETH A. CÁRDENAS
ROSA GÓMEZ DEL AMO
ANA CABALLERO CARRASCO

APRENDER A ENSEÑAR GEOMETRÍA EN PRIMARIA

UNA EXPERIENCIA EN FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Departamento de
Didáctica de las Ciencias Experimentales y
de las Matemáticas

Badajoz
2011

© Lorenzo J. Blanco Nieto

Edita: Grupo DEPROFE

Impreso en España - *Printed in Spain*
ISBN: 84-921973-8-2
Depósito Legal: BA-319-2011

Impresión:
Indugrafic Artes Gráficas S. L.
Tel. 924 24-07-00. Badajoz

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN

Es nuestra intención, con la publicación que tienes entre tus manos, presentar una propuesta metodológica basada en una experiencia desarrollada durante algunos años en un aula de formación inicial de maestros. Por ello, la estructura de la primera parte sigue el desarrollo de las actividades del aula, con observaciones sobre el proceso de interacción profesor-estudiantes para Maestros (EM) y entre los estudiantes, así como reflexiones que surgen en el aula, que tienen su fundamento en experiencias anteriores o en aportaciones de diferentes autores. Por ello, además, el lenguaje utilizado es coloquial y reflejo del trabajo desarrollado en el aula.

Trabajando sobre "la clasificación de los cuadriláteros" e iniciando "la simetría axial" queremos mostrar una secuencia metodológica que podría ser desarrollada de forma similar en el aula de Primaria. De esta manera, seguimos las recomendaciones que nos sugieren un cierto paralelismo entre la enseñanza recibida por los estudiantes para maestros (EM) y la que posteriormente queremos que desarrollen en los centros de enseñanza obligatoria, que se complementan con reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje (E/A) de la Geometría escolar y que serán, posteriormente, fundamentadas en aportaciones teóricas. Ello posibilitará la generación de un metaconocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas y que los EM doten de significado a las actividades que desarrollan. Además, mostramos los diferentes aspectos que hay que considerar en la construcción de los dos contenidos señalados.

Finalmente, y dado que el contexto es un aula de formación inicial, mostramos las dificultades que los estudiantes para maestro tienen cuando afrontan la tarea y algunas aportaciones de autores que han trabajado sobre la E/A de la Geometría escolar.

2. EXPERIENCIA SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

2.1. INICIAMOS LAS ACTIVIDADES

Iniciamos la sesión situando a los alumnos en el trabajo que vamos a desarrollar orientándoles sobre las actividades a proponer y los objetivos que pretendemos. Las actividades de la fase de iniciación nos permitirán conocer, entre otras cuestiones, el nivel de los estudiantes.

Además, ya desde el inicio le señalamos referencias teóricas y algunos materiales que formarán parte de la fundamentación de nuestro trabajo en una fase posterior. Así, les indicamos que, en este inicio, seguimos las recomendaciones de la primera fase de Aprendizaje de Van Hiele que aparecen reflejadas en Crowley (1987) y Jaime y Gutiérrez (1996).

> *Prof.*[1]*: Vamos a experimentar una forma diferente de trabajar con la geometría, y con ello estableceremos pautas metodológicas para su enseñanza en el nivel de Primaria. El objetivo de este trabajo es que comprendáis todo el proceso metodológico y para ello vamos a tratar el estudio de la clasificación de los cuadriláteros, centrándonos en los conceptos y la clasificación de las formas que aparecen en él.*

Podríamos iniciar la sesión dando las definiciones de cuadrilátero, paralelogramo, rectángulo, y el resto de figuras de cuatro lados, como es usual en muchos libros de texto. O explicando algunas de las propiedades de los cuadriláteros que van a ser fundamentales para poder establecer y comprender su clasificación.

En el trabajo que vamos a realizar, las propiedades surgirán del análisis de las tareas que desarrollemos. En algunas ocasiones espontáneamente y en otras a partir de la interacción entre los alumnos. Pero siempre deberán ser inducidas, implícita o explícitamente, por el profesor y, las definiciones aparecerán al final de una manera natural, como fruto del trabajo realizado. De esta manera, cambiamos la metodología y la secuencia que se sigue al enseñar este tema, sobre lo que ha sido tradicional en la enseñanza de las Matemáticas, y lo que reflejan los libros de texto.

Vamos a trabajar la geometría de manera diferente, y por extensión, vamos a adoptar, una manera distinta de estudiar las Matemáticas.

---

[1] Aparecerán en cursiva los textos de las intervenciones del profesor y de los estudiantes

Prof.: Lo que nos interesa en este trabajo es el proceso metodológico, por lo que, estableceremos constantemente varias pautas metodológicas y referencias teóricas que las fundamentan. Estas pautas no son nuevas, aparecen en el Currículum de Primaria y en la bibliografía, por lo que deben ser pautas obligadas para los Maestros. Lo que vamos a mostrar, es una forma diferente de trabajar la Geometría en Primaria con el deseo que cuando seáis maestros la adoptéis.

Consecuentemente, este trabajo tiene tres referentes: el procedimiento metodológico seguido, las reflexiones que se realizan y los conceptos matemáticos que se tratan.

Actividad 1. *Composición de figuras a partir de la división de un cuadrado en triángulos iguales.*

Vamos a trabajar a partir de un material sencillo que vamos a elaborar nosotros.

Prof.: Dibujad un cuadrado en un folio que tenga siete u ocho centímetros de lado. Si tenéis papel cuadriculado que tenga unos 12 cuadrados de lado.

Observación[2]*:* Al pasar mirando el trabajo de los estudiantes, observamos que algunos hacen los cuadrados demasiado pequeños y otros demasiado grandes por lo que es necesario insistir en las medidas aconsejables e indicadas en la propuesta de actividad. Además, es usual observar que algunos estudiantes hacen una figura a mano alzada que no representa, exactamente un cuadrado, por lo que hay que insistir en utilizar algún recurso que permita dibujar un cuadrado con todas sus características. Podemos utilizar papel cuadriculado o milimetrado y/o regla y escuadra.

Prof.: "Dibujadle las dos diagonales".

Prof.: "También, podríamos haber propuesto dividir el cuadrado en 4 triángulos iguales a partir de sus diagonales"

Reflexión: Es conveniente que el profesor muestre la actividad en un retroproyector o en una presentación.

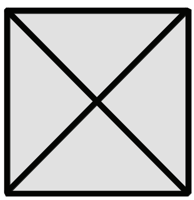


Figura 1. Cuadrado con sus diagonales.

---

2 A lo largo del texto introduciremos observaciones y reflexiones. Las observaciones que son comentarios sobre el comportamiento de los estudiantes para Maestro (EM), y que, en general, son similares a los comportamientos de los alumnos de enseñanza obligatoria. Y *Reflexiones* que hace referencia aspectos de la enseñanza/aprendizaje (E/A) de la Matemáticas, en general, y de la E/A de la Geometría, en particular.

A partir de la figura resultante (Figura 1) podemos preguntar.

Prof.: ¿Qué clase de triángulos son?

La primera respuesta que surge de los algunos estudiantes es que son triángulos equiláteros. Ante esta respuesta, formulamos la pregunta.

Prof.: ¿Son triángulos equiláteros?

En este momento, aparecen respuestas minoritarias indicando que son triángulos isósceles, ya que no tienen todos sus lados iguales. A partir de aquí, la mayoría de la clase asume que no son triángulos equiláteros y reconocen su error.

Esta situación da lugar a una primera reflexión sobre las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Prof.: ¿Por qué considerabais que era un triángulo equilátero?

Prof.: La respuesta que habéis dado no viene de analizar la figura, de haber comprobado que sus tres lados medían igual. Lo fundamental ha sido su posición (figura 2) y eso es lo que os ha llevado a un error. Esto es algo que sucede mucho en las matemáticas, la imagen que tenemos de los conceptos en nuestra mente es la que nos impulsa a dar una respuesta. Si queremos responder correctamente no podemos fijarnos solo en su imagen, ya que ésta es parcial, tenemos que fijarnos en sus propiedades. Vosotros tenéis que fomentar en los niños, la capacidad de fijarse ante todo en las propiedades que determinan el concepto y que se visualizan en la imagen. Y esto puede lograrse a través de la reflexión que ellos establezcan en el trabajo que vosotros les propongáis.

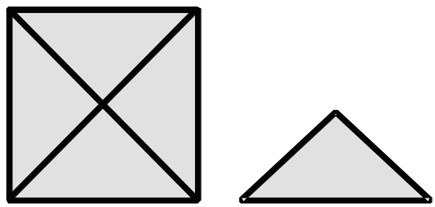


Figura 2. Triángulo que se obtiene de las diagonales del cuadrado.

Ahora podemos repetir la pregunta.

Prof.: ¿Qué clase de triángulos son los que se muestran en la figura 2?

Estudiantes: Isósceles porque tienen dos lados iguales y uno desigual.

Prof.: ¿Cómo son los lados?

Estudiantes: Dos iguales y uno desigual

Prof.: ¿Y los ángulos?

Estudiantes: Dos agudos y uno recto.

Observación: En este momento hay estudiantes que no ven el ángulo recto, e incluso se oye decir a un estudiante que *"el triángulo está mal colocado"*. Indicaremos a los estudiantes que giren la figura 2, de tal modo que quede como se ve en la figura 3, que permite visualizar mejor el ángulo recto de los triángulos rectángulo. También podemos indicar que recorten los cuatro triángulos para manejarlos individualmente.

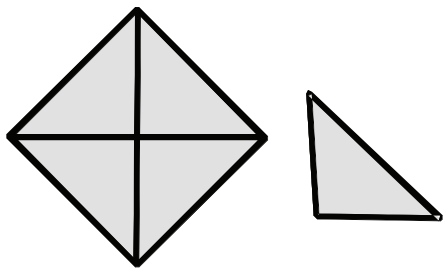


Figura 3. Posición en la que se visualiza mejor el ángulo de 90° en las figuras.

Prof.: Manipular, recortar las figuras nos permite visualizar, trabajar y analizar de distintas maneras la figura que estemos trabajando. Cuando éstas aparecen en un libro de texto, sólo lo vemos de una manera y difícilmente se experimenta con ellas. En este caso, podríamos comprobar con la esquina de un folio que los ángulos son rectos.

Si tenemos el triángulo recortado lo manipularemos mejor que si nos limitamos al dibujo. Una de las formas con las que se descubren los errores es a través de la manipulación. Por ello, debemos tener recursos sencillos. Recordad "debemos enseñar las cosas más útiles de la manera más sencilla".

Con los cuatro triángulos equiláteros e iguales que hemos recortado, vamos a trabajar para introducir los cuadriláteros y su clasificación. ¿Ha sido difícil de conseguir este material? Es sencillo y barato, no importa si es bonito, sino que sea útil para trabajar los conceptos de matemáticas que queremos introducir.

2.2. CREAMOS FIGURAS Y CONSTRUIMOS LOS CUADRILÁTEROS

Vamos a trabajar en un primer nivel que podrá relacionarse posteriormente con el Principio Dinámico[3] de Dienes (Dienes, 1970; Aizpún, 1971 y Blanco, 1991) o con el primer nivel de Van Hiele (Alsina y otros, 1987; Jaime 1990; Jaime, 1994; Gutiérrez, 1996; Sanz, 2001), autores que estudiaremos posteriormente.

Actividad 2. *Composición de figuras usando dos triángulos.*

> *Prof.: Componer figuras utilizando dos de los triángulos recortados. "¡Imaginación al poder!", como se decía en la revolución de Mayo del 68. Vamos a proponer figuras diferentes utilizando sólo dos triángulos equiláteros iguales.*

Observamos que los estudiantes, inicialmente, realizan sus figuras componiendo, cuadriláteros (Figura 4).

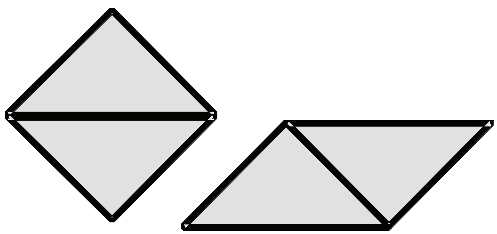


Figura 4. Cuadriláteros compuestos con dos triángulos.

Pero también hay otros que dibujan otras figuras que identifican con mariposas, barcos, montañas o pinos (Figura 5).

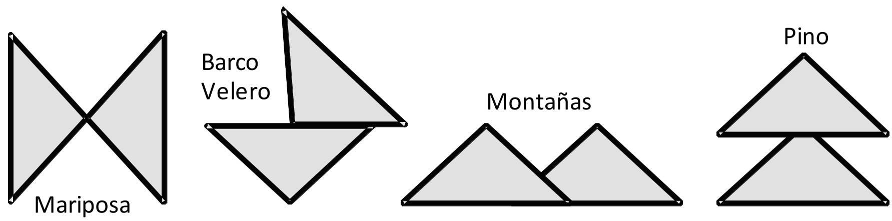


Figura 5. Formas comunes obtenidas con dos triángulos.

---

3 Principio dinámico. Se propondrán juegos preliminares, estructurados y de práctica, que les sirvan a los niños de experiencias para que puedan formar conceptos matemáticos. Estos juegos deben ser practicados con un material concreto para introducir gradualmente a los niños en la investigación matemática.

También aparecen otras figuras usuales en sus actividades lúdicas como el comecocos (Figura 6)

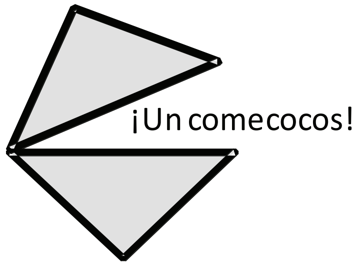


Figura 6. Figura construida por los EM

A partir de este momento dejan escapar la imaginación y realizan, además, figuras en las que los triángulos se solapan (Figura 7). Los EM van pasando al estrado y construyen las figuras, que pueden visualizar el resto de los estudiantes, con dos de los cuatro triángulos recortados al efecto.

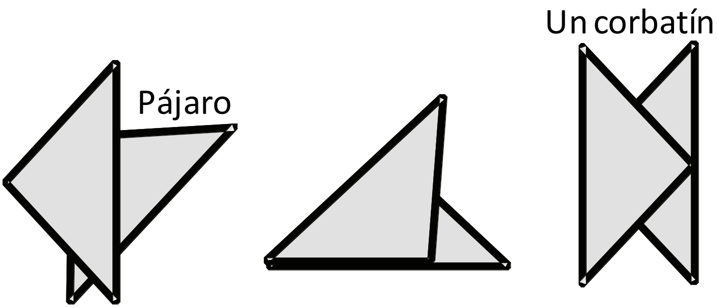


Figura 7. Formas comunes al traslapar dos triángulos.

Para terminar la actividad se pide a los estudiantes dibujar la silueta de las figuras que han construido (Figura 8).

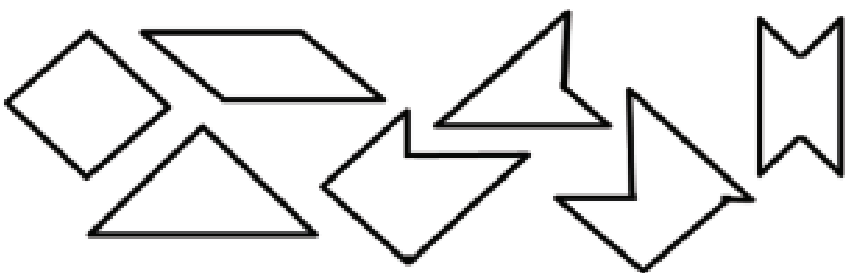


Figura 8. Siluetas de las formas obtenidas en la composición de figuras usando dos triángulos.

Actividad 3. *Composición de figuras usando tres triángulos.*

Prof.: Utilizando tres triángulos recortados componed figuras

Repetimos la actividad con un triángulo más.

Observación: Los estudiantes atados, inconscientemente, a normas y a su experiencia en clase de matemáticas suelen preguntar: "¿hay alguna restricción?".

En este momento es bueno recordarles que los niños tienen la mente más abierta que los adultos y ellos no se ponen restricciones.

Como consecuencia de la actividad 3, los estudiantes elaboran figuras que se muestran en el retroproyector o se dibujan en la pizarra (Figura 9).

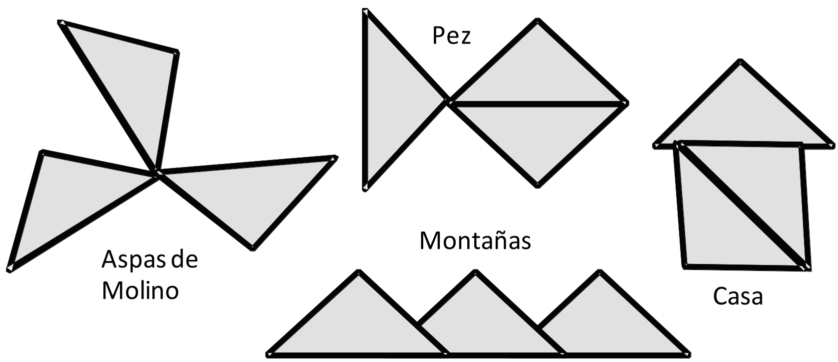


Figura 9. Formas comunes obtenidas con tres triángulos.

Y, observamos que entre estas figuras también aparecen diferentes cuadriláteros (Figura 10).

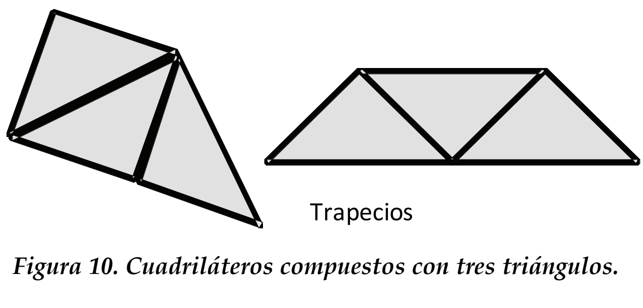


Figura 10. Cuadriláteros compuestos con tres triángulos.

Reflexión: Es aconsejable que cuando se realice esta actividad en el nivel de primaria se acompañe de cartulinas de colores, permitiendo hacer un mural para el aula.

Entre las figuras construidas seleccionamos algunas que muestran, implícitamente otras figuras (Figura 11).

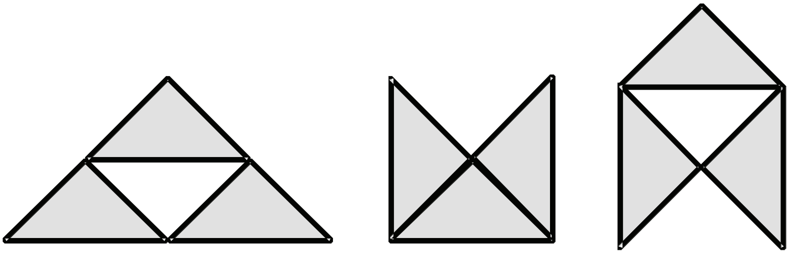


Figura 11. Construcciones que muestran figuras no explícitas.

Así, a partir de las construcciones mostradas en la figura 11, podemos preguntar:

Prof.: ¿Cuántos triángulos observamos en cada uno de los casos?

Los estudiantes debaten sobre los triángulos que observan. Así, parece claro que hay cuatro triángulos iguales en la primera figura. En las otras dos se plantea un debate acerca del número de triángulos que podríamos visualizar.

También resultan otras figuras, que dan lugar a nuevas construcciones (Figura 12).

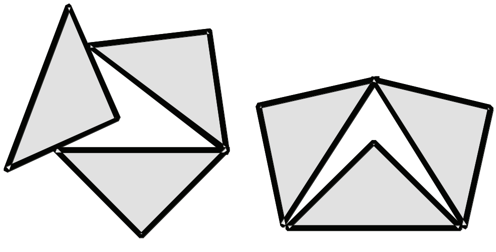


Figura 12. Cuadriláteros implícitos.

Terminamos esta actividad dibujando la silueta de las figuras dibujadas, entre las que podemos observar que aparecen también diferentes cuadriláteros (Figura 13).

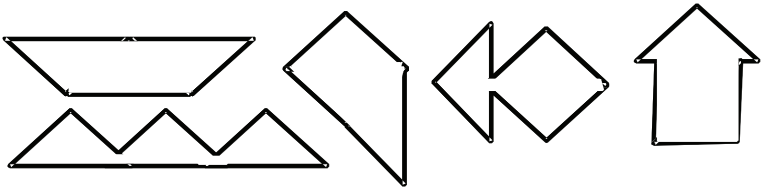


Figura 13. Algunas siluetas de las formas obtenidas en la composición de figuras con tres triángulos.

Actividad 4. *Composición de figuras usando cuatro triángulos.*

Prof.: Con cuatro triángulos, haced figuras diferentes, siguiendo la línea de las actividades anteriores, y luego dibujad su silueta.

El resultado de la actividad muestra cada vez más la imaginación y creatividad de los estudiantes (Figura 14).

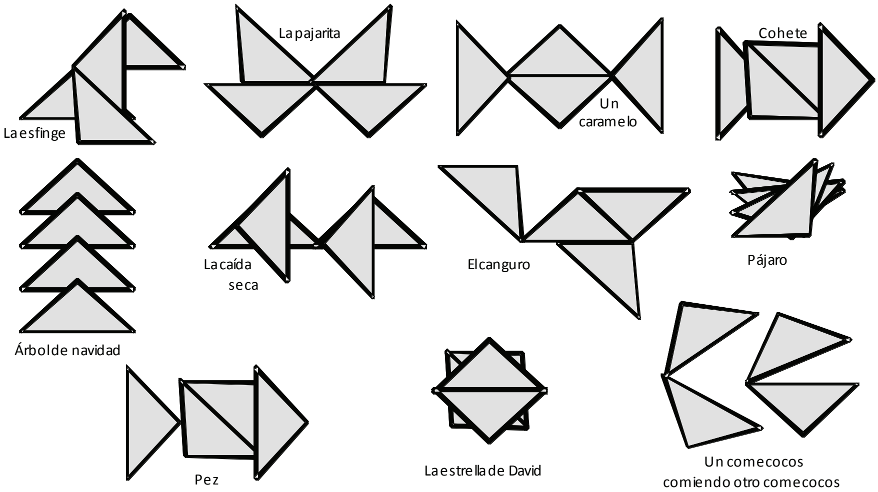


Figura 14. Formas comunes obtenidas con cuatro triángulos.

Y al mismo tiempo, construyen diferentes cuadriláteros (Figura 15) que nos permitirán pasar a una segunda fase de su estudio.

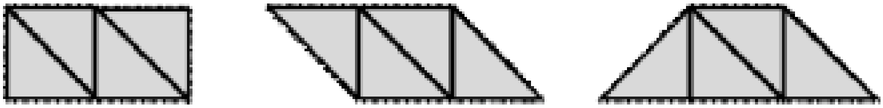


Figura 15. Cuadriláteros compuestos con cuatro triángulos.

Actividad 5. *Composición de cuadriláteros con 2, 3 o 4 triángulos.*

Una vez que hemos trabajado y construido diferentes figuras vamos a centrar nuestra atención sobre los cuadriláteros a partir del trabajo realizado anteriormente.

Así, proponemos la siguiente actividad:

> *Prof.: Construid figuras de cuatro lados (cuadriláteros), con dos, tres o cuatro triángulos y dibujad su silueta sobre un mismo papel.*

Observación: En este momento los estudiantes empiezan directamente a dibujar, siendo por ello necesario recordarles la secuencia de construir y dibujar la silueta y, la importancia de que se sean disciplinados en el proceso y en el uso de los recursos para que el resultado sea el que se desea. No se trata de dibujar, sino de construir y dibujar a partir de lo construido.

Como resultado de la actividad se construyen diferentes figuras, como las que se muestran en la figura 16.

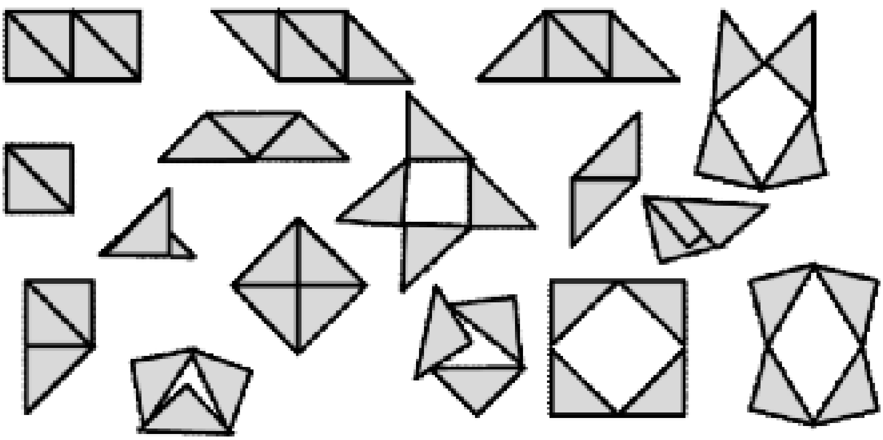


Figura 16. Figuras construidas con dos, tres y cuatro triángulos.

Y, cuyas siluetas se reflejan en la figura 17.

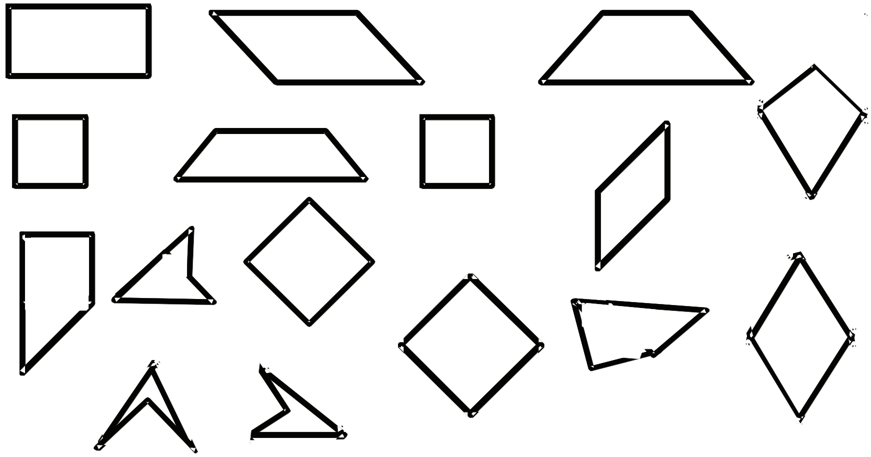


Figura 17. Silueta de los cuadriláteros obtenidos con dos, tres y cuatro triángulos.

Observación: En este momento tenemos que hacer énfasis en valorar la importancia de la composición y descomposición de figuras dentro de la Geometría y, en particular, en la resolución de problemas de áreas. Si somos capaces de imaginarnos las figuras, como un todo compuesto por partes, tendremos más facilidades para resolver los problemas de geometría, ya que el análisis de los enunciados requiere visualizar lo explícito, pero también lo implícito. Por ello, siempre hay que ir más allá de la definición.

Podemos observar que en las hojas están construidos y dibujados todos los cuadriláteros. Ello significa que los alumnos en primaria, pueden construirlos y dibujarlos, sin que previamente los hayamos definido o estudiado sus propiedades.

En el aula de primaria, con cartulina y bien hechos, podemos recortarlos y colgarlos en la clase para que los niños los visualicen, siendo éste el primer paso de la enseñanza de la geometría. Podremos construir un mural con todos los cuadriláteros que hayan construido los alumnos.

2.3. VISUALIZAMOS Y ANALIZAMOS LAS PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

¿Qué viene después de haber construido todos los cuadriláteros? ¿Cuál es el siguiente paso si ya podemos visualizar la imagen de todos ellos? Disponer de una representación de los cuadriláteros nos va a permitir estudiar sus propiedades. Es decir, reconocer que tienen ángulos, lados y saber cuáles son las características de éstos. Analizar la relación que pueda establecerse entre sus propiedades y entre los diferentes cuadriláteros. Cuando introduzcamos algunas referencias de autores observaremos que este paso se corresponde con el segundo nivel de los propuestos por Van Hiele.

Los estudiantes pueden identificar las figuras porque son ellos quienes las han construido, y a partir de ahí explicitar sus propiedades y llegar a establecer las semejanzas y diferencias de los cuadriláteros.

Actividad 6. *Visualización e identificación de cuadriláteros.*

En esta actividad, los estudiantes van a identificar diferentes figuras, a partir de características que se les van indicando. Ello nos permitirá detallar cuáles figuras comparten una misma característica entre sí, cuáles no y cuáles de ellas se destacan por tener más de una característica. Es decir, los estudiantes podrán reconocer cuáles son las semejanzas y diferencias entre los cuadriláteros. Pero para ello, es imprescindible que las figuras estén bien hechas.

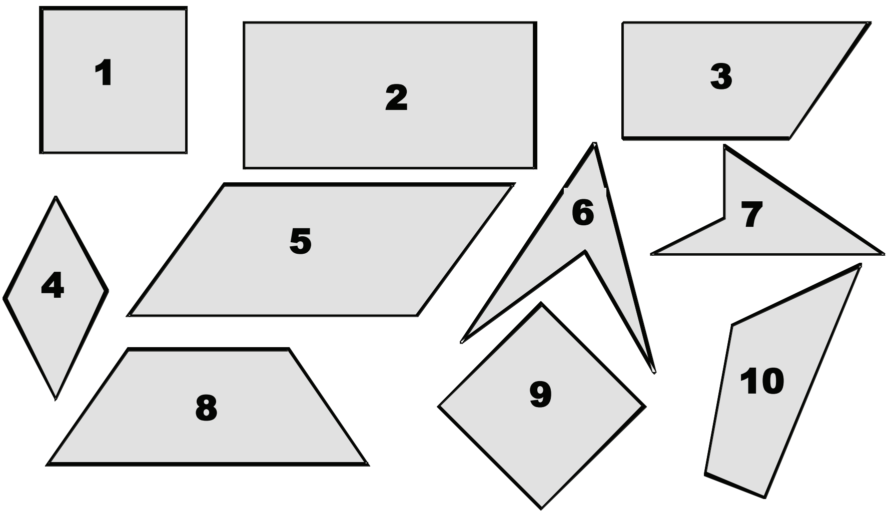


Figura 18. Colección de cuadriláteros.

De todas las figuras que hemos dibujado con anterioridad, seleccionamos una muestra que nos va permitir trabajar en este nivel (Figura 18).

Observación: En el curso 2010 – 11 les pedimos a 40 Estudiantes para Maestro que, a partir de las propiedades que se observan, busquen las semejanzas y diferencias entre los cuadriláteros de la figura 18. Es muy significativo que hablaran del número de lados, de la igualdad o no de los lados y de los ángulos. Pero ninguno de los 40 consultados hizo referencia al paralelismo de los lados. Tampoco aparecieron referencias a la convexidad o no de las figuras. Esto obedece a que los EM tienen asumido que las propiedades de las figuras se refieren a los lados y ángulos pero no a otras como puedan ser paralelismo, superficie o semejanzas.

Prof.: Todas las figuras representadas tienen cuatro lados, pero hay dos que presentan algunas características particulares. Probablemente, si os hubiese dicho que dibujarais las figuras de cuatro lados, no las hubierais dibujado. Pero mirad que en esta actividad hemos podido obtener otras figuras que son raras o poco usuales.

Prof.: ¿Cuáles son esas dos figuras que pueden resultar raras o poco usuales?

Los Estudiantes identifican las figuras 6 y 7 (Figura 19) como poco usuales y señalan que antes no las habían estudiado o, al menos, no lo recuerdan.

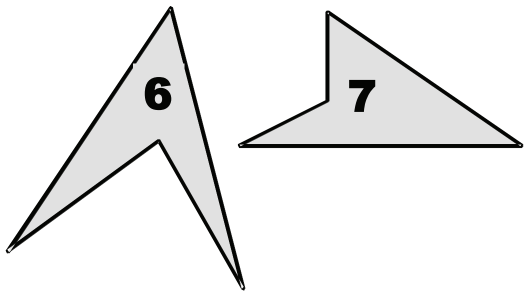


Figura 19. Cuadriláteros no convexos

Prof.: ¿Qué diferencias observáis entre los cuadriláteros 6 y 7 con el resto? ¿Cómo podríamos caracterizar este tipo de cuadriláteros? ¿Podríais dibujar un hexágono que fuera similar a los dos cuadriláteros?

Observación: Los Estudiantes intuyen y visualizan la diferencia pero tienen dificultad para verbalizarla. Ello se pone de manifiesto porque son capaces de dibujar un hexágono no convexo (Figura 20). Señalan que tienen un 'vértice' para dentro o indican alguna propiedad que conviene matizar, como que sólo tienen una diagonal. En un momento donde aparece la dificultad del significado de los términos 'cóncavo' y 'convexo', que siempre es señalado por algún estudiante.

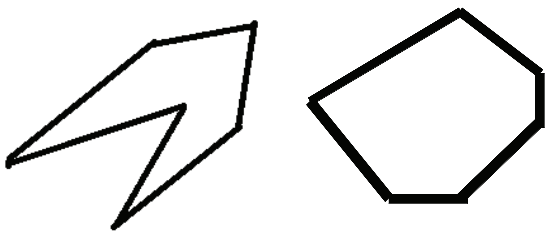


Figura 20. Hexágono no convexo y hexágono convexo.

Reflexión. En el primer nivel hemos construido los cuadriláteros. En este nivel estamos construyendo el concepto de cuadrilátero. Hay que diferenciar esos dos niveles. El constructivismo no refiere a la construcción física de un objeto, se refiere a la construcción formal del concepto.

Reflexión. Tras esta actividad ya podemos indicar que hay cuadriláteros y polígonos similares al 6 y al 7 y otros al resto. Ello indica que es posible trabajar con ideas que se intuyen sin necesidad de dar definiciones. Por ejemplo, los cuadriláteros 6 y 7 tienen un ángulo o un pico "metido para dentro", esto los hace especiales y tendrán que ocupar un conjunto diferente, sin necesidad de hablar de ángulos convexos y polígonos convexos y no convexos. Es decir, antes de conceptualizar se visualiza, se intuye.

Vamos ahora a trabajar con el resto de los cuadriláteros. Y vamos a analizar sus semejanzas y diferencias a partir de determinadas preguntas.

Prof.: ¿Cuáles tienen los cuatro lados iguales?

Los Estudiantes identifican sin dificultad los cuadriláteros 1, 4 y 9.

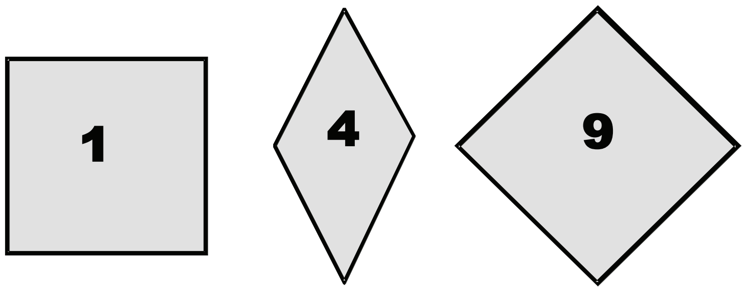


Figura 21. Cuadriláteros con los cuatro lados "iguales".

Prof.: ¿Qué semejanzas y/o diferencias hay entre 1, 4 y 9?

Estudiantes: El 1 y el 9 tienen los ángulos iguales, o el 1 y el 9 tienen los ángulos rectos.

Estudiantes: El 1 y el 9 tienen los ángulos rectos.

Estudiantes: En el 4 los ángulos no son iguales

Prof.: ¿Hay algún otro cuadrilátero que tenga todos los lados iguales?

Estudiantes: No.

Continuamos el análisis de los cuadriláteros a partir de otra propiedad.

Prof.: ¿Hay alguno que tenga tres lados iguales?

Estudiantes: El 1, 4 y el 9.

Prof.: Luego si tienen tres lados iguales, entonces el otro también tiene que ser igual.

Estudiantes: Si.

Prof.: ¿Esto se da siempre?

Estudiantes: Si.

Prof.: Pues analicemos el siguiente cuadrilátero (Figura 22)

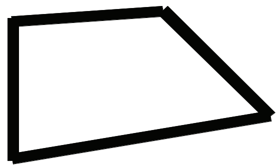


Figura 22. Cuadrilátero con tres lados iguales.

Vamos a trabajar con los cuadriláteros que tienen dos lados iguales.

Prof.: Identificar los cuadriláteros que tienen dos lados iguales

Estudiantes: El número 8

Observación: Los estudiantes identifican la pregunta con 'Identificar los cuadriláteros que sólo tienen dos lados iguales'.

Prof.: El cuadrado 1, ¿tiene dos lados iguales? Y, el 5, ¿tiene dos lados iguales?

Estudiantes: Si, tiene dos lados iguales.

Estudiantes: tienen lados iguales dos a dos

Prof.: Luego, tiene dos lados iguales. Lo que pasa es que los otros dos también son iguales, entonces hay que diferenciar entre los cuadriláteros que sólo tienen dos lados iguales y los que tienen dos lados iguales y los otros dos, también.

Prof.: Tenéis que observar que también los cuadriláteros 6 y 7 tienen los lados iguales dos a dos.

Reflexión. Mirad como cambia el significado a partir de una palabra. Decir "figuras que tienen dos lados iguales", es diferente a decir "figuras que sólo tienen dos lados iguales". Esto también pasa en otras situaciones. Si preguntamos: "¿Tienes dos caramelos?" Es diferente a preguntar "¿Tienes solo dos caramelos?" Hay que tener cuidado. La palabra "solo" influye en la definición y la imagen que se llega a tener del objeto, en eso radica la importancia del lenguaje.

Pasemos a otra propiedad de los cuadriláteros.

Prof.: ¿Qué semejanzas y/o diferencias observáis entre el 3 y el 8?

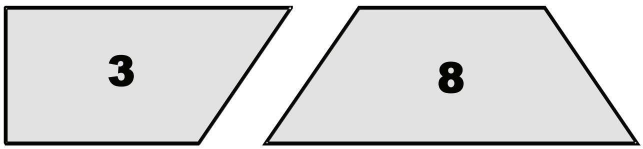


Figura 23. Cuadriláteros con solo dos lados paralelos.

Estudiante: Que tienen dos lados paralelos.

Prof.: ¿Hay algún otro que tenga dos lados paralelos?

Estudiantes: El 2, 5,. . . pero son paralelos 2 a 2.

Prof.: Entonces decimos que "Solo tienen dos lados paralelos". Ahora, ¿Cuál es la semejanza entre el 3 y el 8? Es una situación similar a lo que habíamos visto para los lados.

Estudiantes: Que sólo tienen dos lados paralelos.

Prof.: Pero, también preguntaba por las diferencias.

Estudiante: Que uno tiene un ángulo recto.

Prof.: ¿Sólo un ángulo recto?

Estudiante.: No, dos ángulos rectos.

Estudiante: Que uno tiene dos lados iguales y el otro no.

Prof.: Luego, podemos observar que entre las figuras que tienen sólo dos lados paralelos, hay figuras que tienen dos lados iguales y otras que tienen dos ángulos rectos.

Seguimos analizando las figuras.

Prof.: ¿Qué semejanzas y/o diferencias hay entre 1, 2 y 9? (Figura 24)

Prof.: ¿Qué semejanzas hay entre 1, 2 y 9?

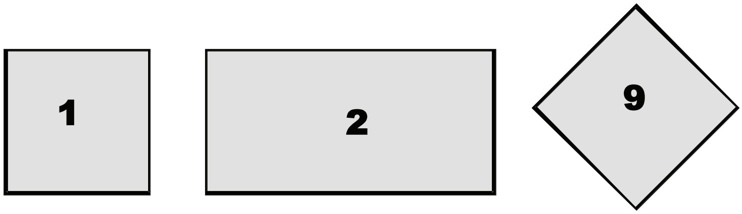


Figura 24. Cuadriláteros con todos los ángulos de 90°.

Estudiante: Que los ángulos son todos iguales y sus lados son paralelos 2 a 2.

Estudiante: Y sus lados son paralelos 2 a 2.

Prof.: Todos sus ángulos miden 90°

Prof.: Otra manera de decirlo es que todos sus ángulos miden 90°.

Prof.: ¿Algún otro tiene los 4 ángulos iguales?

Estudiante: No.

Prof.: Entonces, tener los ángulos iguales es una propiedad que cumplen estos cuadriláteros. Entre estos hay algunos que tienen todos los lados iguales, y otros que los tienen iguales dos a dos, aún no siendo todos iguales.

Seguimos profundizando con el paralelismo de los lados.

Prof.: ¿Algún otro cuadrilátero tiene los lados paralelos dos a dos?

Estudiantes: Si

Prof.: ¿Cuáles?

Estudiantes.: El 5 y 9

Prof.: Luego, tenemos un conjunto de cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos (Figura 25).

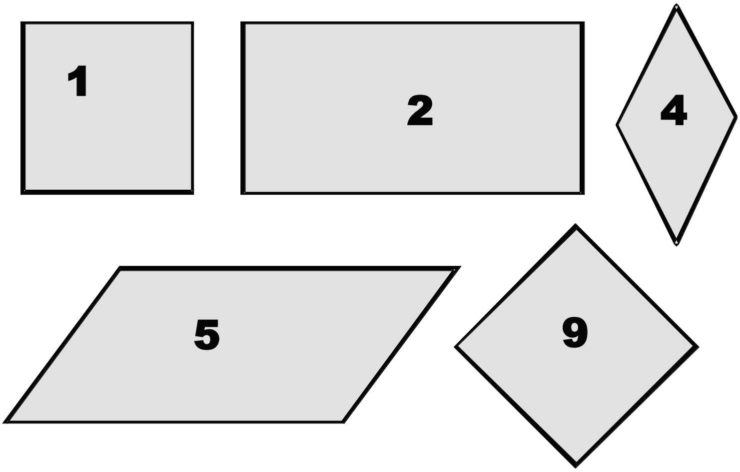


Figura 25. Cuadriláteros paralelos dos a dos.

Prof.: Todavía queda un cuadrilátero en el grupo inicial. ¿Cuál es?

Estudiantes: El diez (Figura 26)

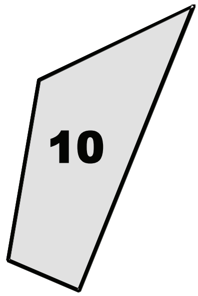


Figura 26. Cuadrilátero con ningún lado paralelo.

Prof. ¿Qué características tiene este cuadrilátero?

Estudiante.: Que no tiene lados paralelos.

Estudiante.: Que no tiene lados iguales.

Estudiante.: Que no tiene ángulos rectos.

Observación: Cuando los alumnos responden libremente suelen dar respuestas que aparentemente no tendrían valor ('no tiene ángulos rectos'), pero ello es interesante porque muestra su participación y recuerdan propiedades matemáticas que, a su vez, sirven como referencia en la construcción del conocimiento matemático.

Prof.: Podríamos dibujar un cuadrilátero que no tuviera lados paralelos, pero tuviera lados iguales.

Estudiante.: No.

Prof.: Antes de contestar hay que intentarlo.

Observación: No es fácil que los Estudiantes encuentren un cuadrilátero de estas características, pero existe entre los que se construyeron en el primer nivel (figura 13) y la dibujada en la figura 22.

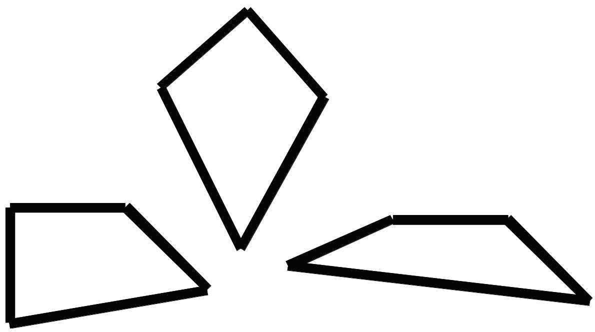


Figura 27. Cuadriláteros con lados iguales y no paralelos.

Reflexión: Estos cuadriláteros que no tienen lados paralelos no suelen aparecer en los libros de texto, sin embargo, estos son más comunes que los otros.

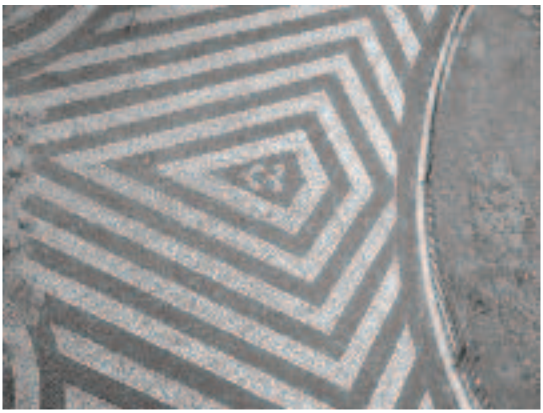


Figura 28. Plaza de Cervantes (Badajoz)

Recordando lo que hemos trabajado, podemos señalar que hemos visto cuadriláteros con:

- Lados iguales
- Lados iguales dos a dos
- Sólo dos lados iguales
- Con tres lados iguales y el otro desigual
- Dos lados paralelos
- Sólo dos lados paralelos
- Con ningún lado paralelo
- Con lados paralelos dos a dos
- Con ángulos iguales
- Con todos los ángulos iguales
- Con cuatro ángulos rectos
- Con sólo dos ángulos rectos

2.4. CONSOLIDAMOS EL ESTUDIO DE LOS CUADRILÁTEROS

Una vez que hemos trabajado con las propiedades, vamos a realizar actividades para consolidar lo estudiado y poder, posteriormente, formalizar los conceptos. Para ello, vamos a utilizar otro recurso didáctico llamado "la trama cuadrada". En nuestro caso, vamos a trabajar con la trama cuadrada en configuraciones de 4 por 4 (Figura 29).

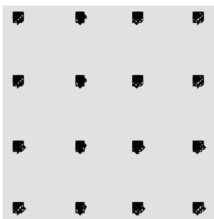


Figura 29. Trama cuadrada.

Mientras los estudiantes dibujan la trama, utilizando un papel cuadriculado o milimetrado, el profesor pasa observando las tramas que hacen sus estudiantes e informa que hay tramas triangulares o circulares y que es reflejo en el papel de un material didáctico llamado Geoplano (Smith, 1990; Domínguez, 1991; Arrieta, Álvarez y González, 1997).

Observación: Podríamos darles a los estudiantes una hoja fotocopiada con las configuraciones (Figura 30) pero, estimamos conveniente que, al menos, en la primera ocasión la construyan ellos mismos.

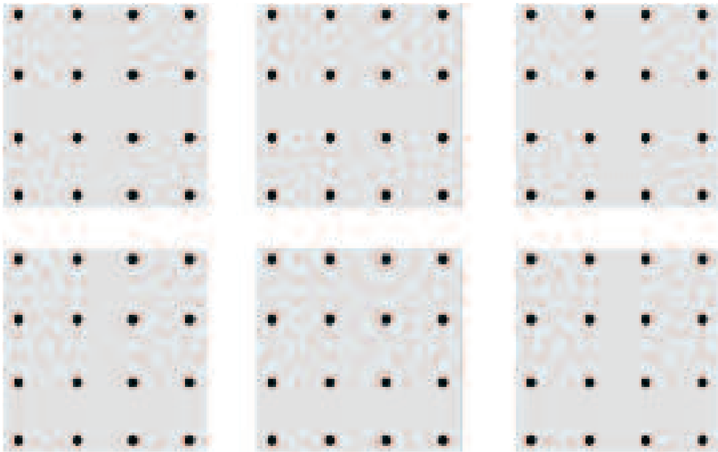


Figura 30. Configuración de seis tramas cuadradas.

Reflexión: El papel cuadriculado permite reconocer la distancia, el paralelismo y si los ángulos son mayores o menores de 90 grados. Es más fácil dibujar en una hoja cuadriculada que es similar a la trama utilizada, que en un folio en blanco. A este respecto, tenemos que señalar que los EM tienen dificultades claras para manejar la escuadra y la regla.

Realizadas "las tramas cuadradas" por cada estudiante, el profesor indica que en ellas se van a dibujar los cuadriláteros, teniendo presente que "los vértices de los cuadriláteros tienen que estar sobre los puntos de la trama cuadrada". En la figura 31 mostramos dos figuras, la primera dibujada correctamente, mientras la segunda no es correcta.

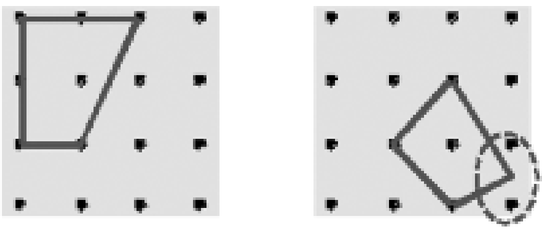


Figura 31. Uso correcto e inapropiado de la trama cuadrada.

Teniendo en cuenta esta indicación vamos a dibujar todos los cuadriláteros trabajados anteriormente, considerando además, las propiedades que ya hemos analizado.

Prof.: Dibujad los cuadriláteros que tienen los cuatro lados iguales.

Los estudiantes dibujan los seis cuadriláteros posibles, apoyándose unos en otros (Figura 32). El cuadrilátero 6 aparece más difícilmente.

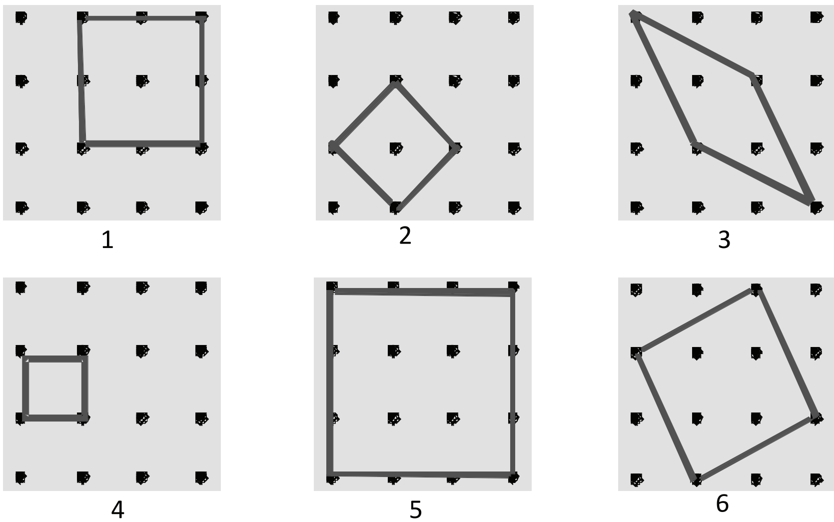


Figura 32. Cuadriláteros con los cuatro lados iguales y lados paralelos dos a dos.

En estos momentos se oye a un estudiante señalar:

Estudiante: Pero, si 1 y 4 son iguales.

Lo que provoca un debate acerca del significado de igualdad de figuras.

Prof.: ¿Son iguales los cuadriláteros 1 y 4?

Estudiantes.: Uno es más grande que otro.

Prof.: Luego, tienen la misma forma pero el tamaño es diferente. Podíamos retomar la *definición clásica de que dos figuras son iguales si superpuestas coinciden.*

Prof.: Hemos dibujado un conjunto de cuadriláteros que tienen cuatro lados iguales. Posteriormente, les daremos nombre.

Vamos a trabajar con los ángulos

Prof.: Ahora, dibujad los cuadriláteros con cuatro ángulos iguales o cuatro ángulos rectos.

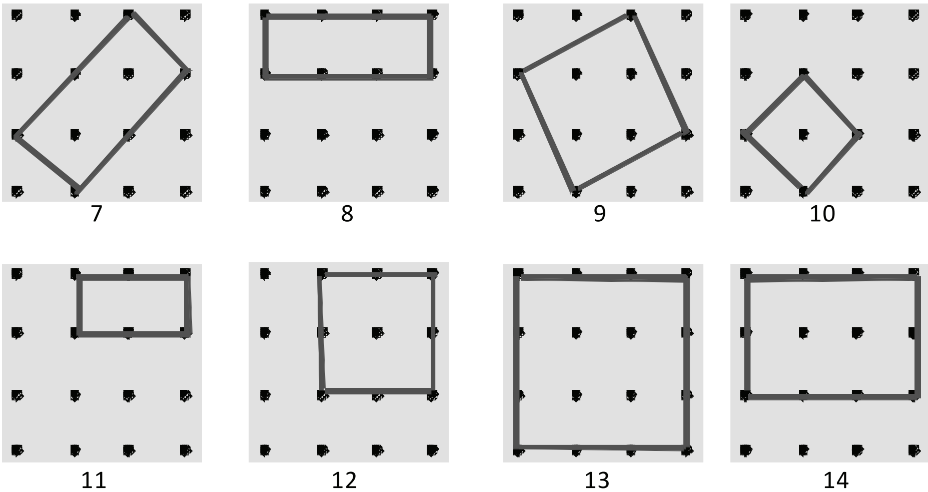


Figura 33. Cuadriláteros con los cuatro ángulos iguales.

Prof.: ¿Sabéis cuáles son los que tienen 4 lados y 4 ángulos iguales?

Señalando los diferentes cuadriláteros que aparecen en las figuras 32 y 33 vamos preguntando si cumple con las dos condiciones señaladas. A los estudiantes no les resulta difícil identificar aquellos que tienen todos los lados y ángulos iguales.

Prof.: Si os fijáis, ya sabemos construir cualquier figura con cuatro lados. Ahora a cada grupo de figuras les vamos a poner un nombre diferente. Por ejemplo: cuadriláteros con todos los lados iguales los llamaremos "Rombo". Sin importar, su posición o medida de sus ángulos.

Prof.: ¿Podríais identificar las figuras que tienen cuatro lados iguales? Es decir, ¿sabríais identificar los 'rombos'?

Observación: En este momento algunos estudiantes muestran su perplejidad porque están identificando como 'rombos', algunos 'cuadrados'. Es en ese instante que debemos insistir en la diferencia entre propiedades del concepto y la imagen que nos hacemos de él (Blanco y Contreras, 2002). Además, reflexionar cómo en algunas ocasiones esta imagen sólo se corresponde con algunos ejemplos particulares del concepto.

> *Prof.: Fijaos que hemos invertido el proceso, a partir de las propiedades damos un nombre común. Y, posteriormente, establecemos la definición.*

Reflexión: El trabajo realizado muestra que el proceso de enseñanza de las matemáticas puede realizarse a partir de la actividad práctica, manipulativa o no, que refleja una situación problema enunciada al inicio de la sesión. Hemos desarrollado un proceso que parte de la manipulación de conceptos conocidos, del análisis de las propiedades que van surgiendo como consecuencia de la actividad y, al final, vendrá la formalización que en nuestro caso corresponde a las definiciones y clasificación de los cuadriláteros.

> *Prof.: Ahora, ¿Cuáles son rombos?*

Aquí se pueden ver los rombos en todas las formas posibles, posiciones, tamaños, etc. En los libros de texto siempre aparece el mismo ejemplo y se llega a identificar el concepto solo con la imagen que trasmite ese ejemplo.

> *Prof.: Los cuadriláteros que tienen cuatro lados iguales se llaman 'Rombos'. Y, esto es así, independientemente de las otras propiedades.*
>
> *Prof.: Podemos seguir dando otros nombres. Así, los que tienen los cuatro ángulos rectos se llaman rectángulos ¿Cuáles son?*

A partir de los cuadriláteros de las figuras 32 y 33, los estudiantes señalan los que tienen cuatro ángulos rectos o tienen todos los ángulos iguales. Hacemos la observación de la dificultad de reconocer esta propiedad en el cuadrilátero 6 de la figura 32, ó el 9 de la figura 33.

> *Prof.: Los que tienen 4 lados iguales y 4 ángulos iguales se llaman cuadrados. ¿Decidme cuáles de ellos lo son?*

Una vez trabajado los lados y ángulos de los cuadriláteros, pasamos a trabajar con la propiedad del paralelismo. Esta propiedad nos va a permitir realizar la clasificación de los cuadriláteros.

Prof.: Identificad los cuadriláteros que tengan lados paralelos dos a dos.

Estudiante: Todos los anteriores excepto el 3 (Figura 32).

Observación: Entre los mismos estudiantes se contradicen si la figura 3 cuenta con dicha característica o no, sin embargo los que dudan de ello se retractan y confirman que esta figura si tiene sus lados paralelos dos a dos.

Prof.: ¿Es posible dibujar algunos más que tengan lados paralelos dos a dos?

Estudiantes: Si.

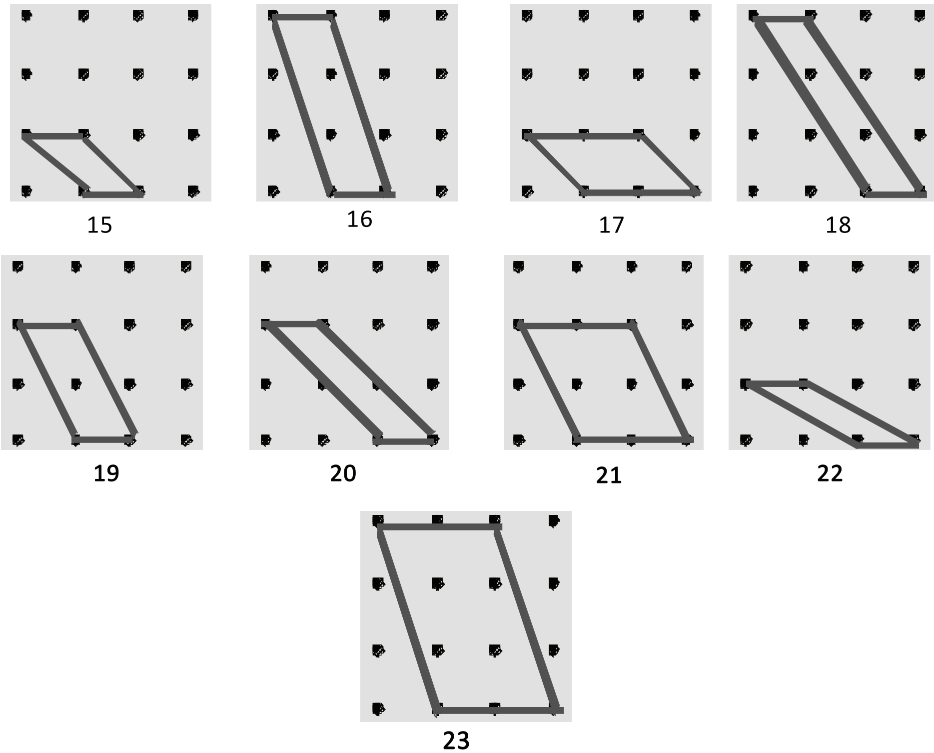


Figura 34. Cuadriláteros con lados paralelos dos a dos.

Prof.: Vamos a dar nombre a los cuadriláteros que tienen lados paralelos dos a dos. Los cuadriláteros que tienen lados paralelos 2 a 2 se llaman 'Paralelogramos'.

Prof.: Hemos dibujado algunos cuadrilateros nuevos. Las figuras de la 15 a la 23 tienen lados y ángulos contiguos desiguales. Se llaman 'Romboides'. Serían, cuadriláteros, paralelogramos y romboides.

Continuamos con las tramas y dibujando cuadriláteros.

Prof.: Dibujad cuadriláteros con sólo dos lados paralelos

Los estudiantes dibujan sin dificultad algunos cuadriláteros diferentes que cumplen con la condición exigida.

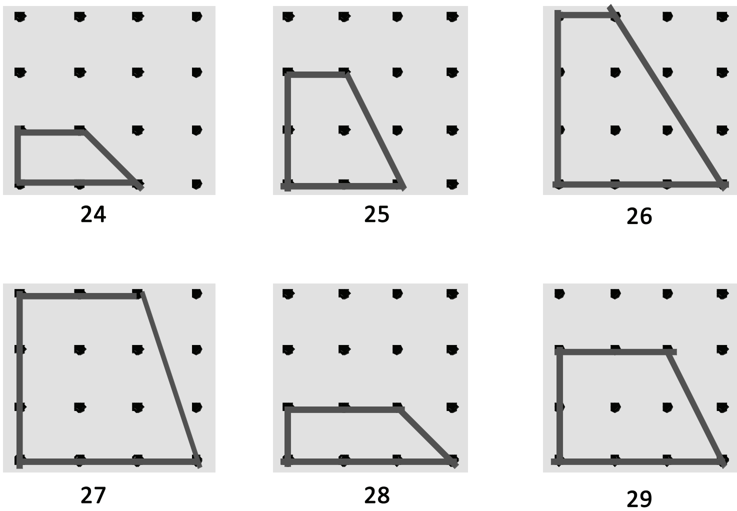


Figura 35. Primeros trapecios que dibujan los EM

Prof.: "¡Fijaros!, habéis dibujado cuadriláteros con sólo dos lados paralelos que tienen dos ángulos rectos, y no cuadriláteros con dos lados paralelos y dos ángulos iguales. Si os dais cuenta, tenéis un pensamiento horizontal".

Cuando hacemos estas observaciones los estudiantes empiezan a dibujar otras figuras que tienen sólo dos lados paralelos (Figura 36). Con la colaboración del gran grupo y el uso del retroproyector terminamos dibujando otras de las formas posibles.

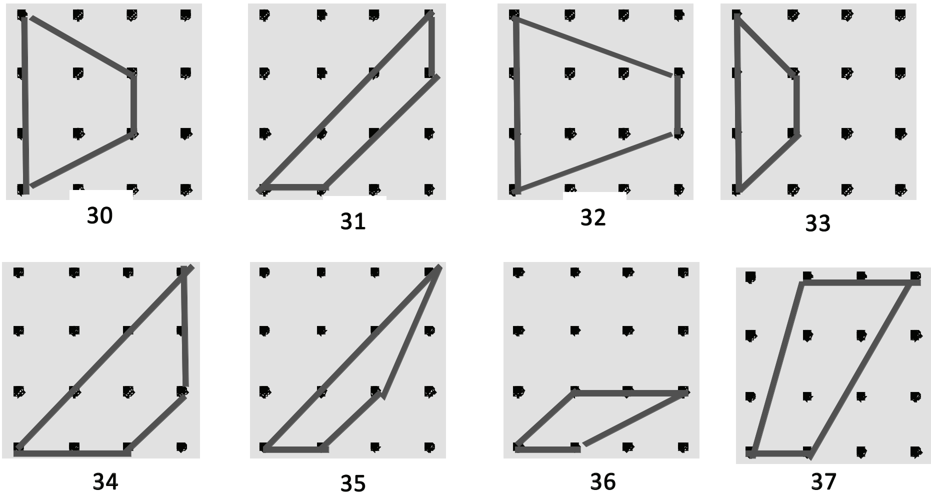


Figura 36. Cuadriláteros con solo dos lados paralelos.

Observación: Los estudiantes tienen dificultad para trabajar con líneas oblicuas ya que en las actividades escolares es generalizado trabajar, principalmente, con líneas horizontales o verticales.

Prof.: Hemos visto cuadriláteros con dos lados paralelos, son los que habéis dibujado anteriormente. Ahora toca ponerles nombre: se llaman 'Trapecios'. De todos esos trapecios hay unos que tienen dos ángulos rectos, esos los identificáis y se llaman trapecios rectos; los que tienen los lados no paralelos iguales se llaman trapecios isósceles. Y los que no tienen ningún ángulo recto, ni lados iguales, son trapecios, simplemente trapecios.

Prof.: Fijaros que no soy yo el que le ha dado la definición, sino a través de su descubrimiento por la manipulación y observación de características, yo solo le doy nombre a una serie de figuras que vosotros ya habéis construido.

Prof.: Ya tenemos varios nombres de cuadriláteros. Nos faltan los cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo. Dibujadlos:

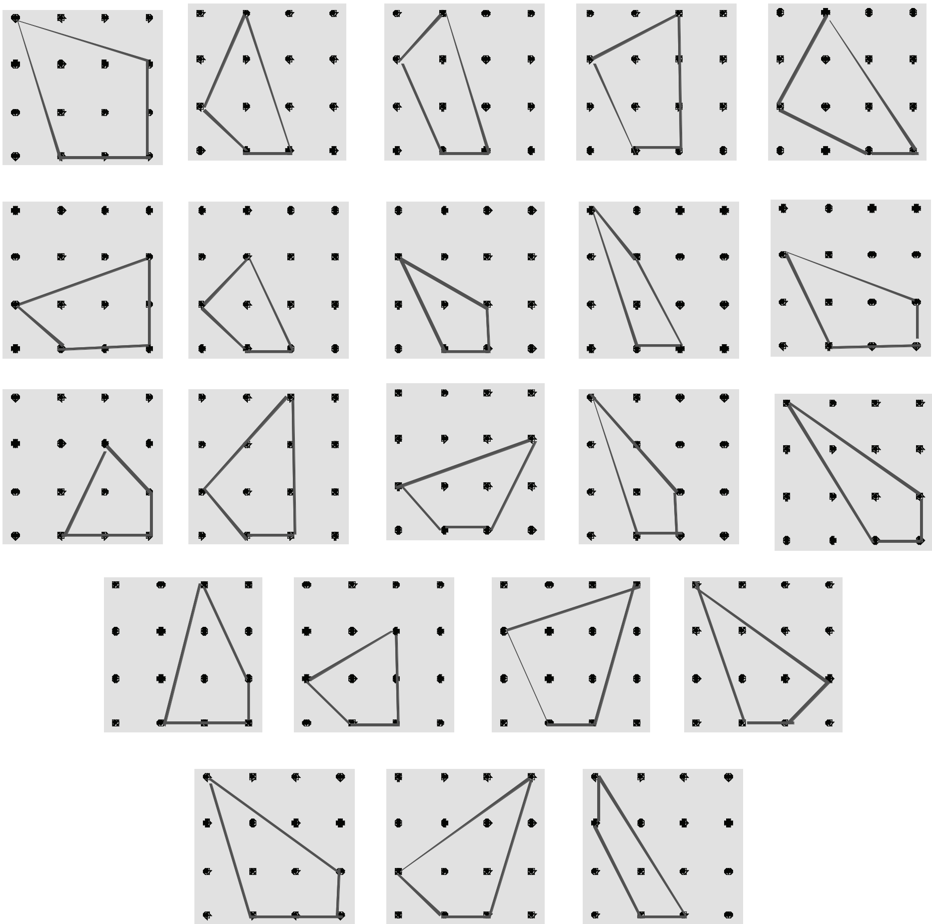


Figura 37. Cuadriláteros sin lados paralelos.

Prof.: Nos da igual el valor de los ángulos y si tienen los lados iguales o no. La característica fundamental es que no tengan lados paralelos.

Prof.: A estos cuadriláteros, que ya sabéis cuales son porque los habéis identificado y dibujado, los llamamos 'Trapezoides'.

Prof.: Los trapezoides no son un caso particular o típico de los trapecios. ¿En qué se parecen? En que tienen cuatro lados y son cuadriláteros. Los trapezoides no están dentro de los trapecios. Sin embargo, es un error muy frecuente que incluyáis los trapezoides dentro del conjunto de los trapecios.

Observación: a pesar del trabajo realizado hay un número muy importante de estudiantes que siguen definiendo los trapezoides como cuadriláteros que no tienen lados iguales.

Prof.: Este recurso, "la trama cuadrada" es muy simple pero muy bueno para estudiar los cuadriláteros porque ahí pueden reproducirse todas las propiedades de los cuadriláteros. "Analizamos semejanzas y diferencias entre los cuadriláteros teniendo en cuenta la forma, los lados y los ángulos". Es un recurso muy simple, pero muy bueno para trabajar con los cuadriláteros ya que se pueden visualizar todas las propiedades fácilmente.

Observación: Recordamos la conveniencia de hacer un mural recortando con cartulina de colores los cuadriláteros, donde los acompañemos con los nombres respectivos, en el nivel de Primaria.

2.5. FORMALIZAMOS Y EVALUAMOS LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS TRABAJADOS

Una vez que los alumnos son capaces de identificar y describir las propiedades y nombres de los cuadriláteros, podríamos pasar a la clasificación de los cuadriláteros, a partir de sus propiedades. Si además, tenemos el mural con los cuadriláteros que han dibujado los niños, podremos formalizar los conceptos a partir de los resultados obtenidos en las actividades trabajadas.

Es decir, lo que el profesor formaliza es lo que se ha venido construyendo con anterioridad y los alumnos son capaces de visualizar y describir. Esto sería lo que los alumnos memorizarían, pero les será familiar porque lo han trabajado anteriormente. Es decir, es algo que ha salido de ellos de manera natural durante el transcurso de las clases en el trabajo que hemos venido realizando.

Reflexión: El profesor debe presentar una síntesis de lo que los alumnos han trabajado y aprendido para ayudarlos a revisar, integrar y diferenciar los conceptos, propiedades, procedimientos, etc. Es importante que las actividades que se propongan no impliquen nuevos conceptos, sino sólo la organización de los que se han adquirido[4].

En nuestro caso vamos a establecer la clasificación de los cuadriláteros a partir de las actividades realizadas.

Prof.: 1ª Distinción: convexos y no convexos, que son los que tienen el pico hacia dentro y los que no.

Los primeros son las figuras que más se estudian en las escuelas, sin embargo de ellas solo se relacionan algunas imágenes con su respectivo concepto. Las segundas,

[4] Esto es lo que se describe en la fase 5 de Van-Hiele, del que se habla en el capítulo 4.

son las que tienen por lo menos "un pico metido". Son muy comunes en el entorno próximo, sin embargo estas figuras no se trabajan normalmente en las escuelas.

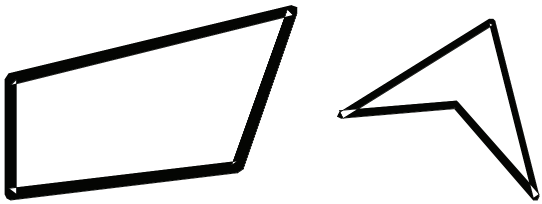


Figura 38

Observación: Los conceptos de convexo y cóncavo son difíciles debido a la contradicción de su uso y de algunas referencias contradictorias en textos específicos. Podemos encontrar varias definiciones, aunque, en este caso se diferencia claramente el cuadrilátero que es convexo y el que no, ya que es muy 'visible' la característica que los diferencia. Cualquier cuadrilátero se clasifica en convexo y no convexo. Es una clasificación excluyente, es decir, un cuadrilátero está en uno o en otro grupo. Veremos otras clasificaciones que no son excluyentes.

> *Prof.: Vamos a hacer una segunda distinción, pero sólo se realiza entre los cuadriláteros convexos. Nos referimos a una propiedad fundamental, pero no única, como es el paralelismo. Así, hemos estudiado cuadriláteros con lados paralelos dos a dos, que los llamamos 'paralelogramos'. Cuadriláteros con solo dos lados paralelos, que llamamos 'trapecios'. Y, cuadriláteros sin ningún lado paralelo, que denominamos 'trapezoides'.*

Empezaríamos con los Paralelogramos a partir del mural realizado o de las figuras de las actividades anteriores.

> *Prof.: Recordad lo que ya tenemos. Hay algunos paralelogramos que tienen los 4 lados iguales: rombo*

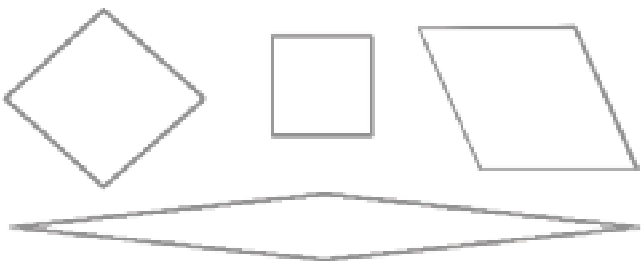


Figura 39. Cuadriláteros, convexo, paralelogramos y rombos

Observación: En este momento aparece entre algunos estudiantes la duda ya que el cuadrado aparece incluido en este grupo.

Prof.: Recordad lo que ya tenemos. Hay algunos paralelogramos que tienen los 4 ángulos iguales: rectángulo

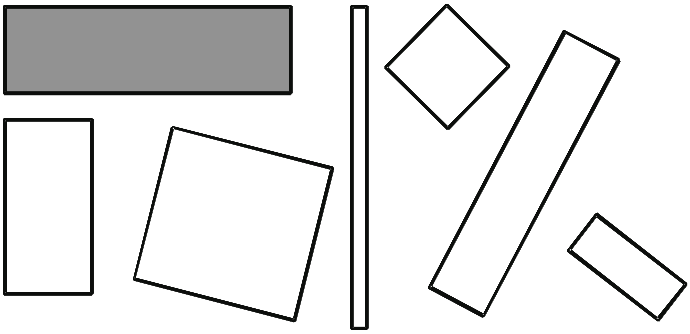


Figura 40. Cuadriláteros, convexo, paralelogramos y rectángulos

Observación: En este momento, nuevamente, surge entre algunos estudiantes la duda respecto al cuadrado ya que aparece incluido en este grupo y en el anterior.

Como cada vez que se menciona la palabra rectángulo se representa como el rectángulo sombreado en la figura 40, nos olvidamos que las otras formas también existen. Puede tener otras propiedades, pero lo que lo define como tal es tener los cuatro ángulos iguales.

Prof.: Entre los paralelogramos dibujados en las dos figuras anteriores (39 y 40) hay algunos que se repiten. Y ello es porque tienen los lados iguales y los ángulos iguales. Estos son los cuadrados.

Prof.: Y nos queda un paralelogramo característico, que no tiene ni los cuatro lados ni los cuatro ángulos iguales.

Figura 41. Cuadrilátero, convexo, paralelogramo y romboide.

Prof.: A estos paralelogramos los llamamos romboides

Observación: Cuando se pide a los estudiantes que dibujen un paralelogramo, normalmente dibujan la figura 41, olvidando que el rectángulo, cuadrado y rombo también son ejemplos de paralelogramos.

Mostramos a continuación una clasificación de los paralelogramos que no es excluyente.

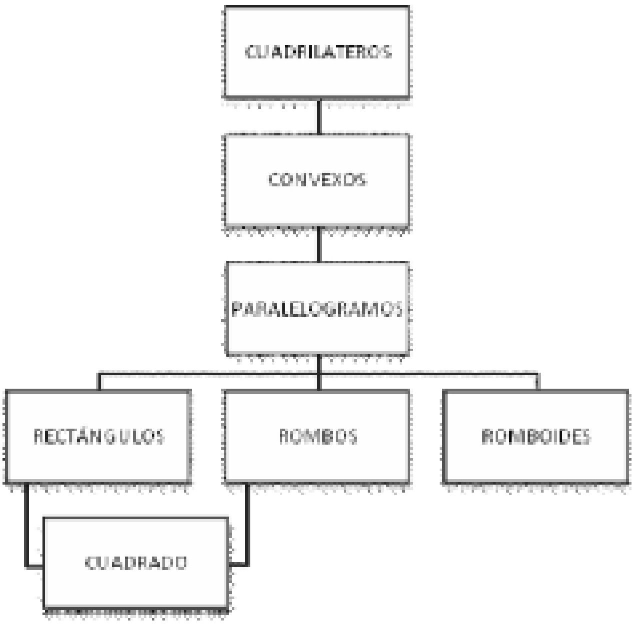


Figura 42. Cuadro general de los cuadrados

Prof.: 3ª Distinción: entre los cuadriláteros convexos hay algunos con sólo dos lados paralelos, que llamábamos trapecios.

Prof.: Y entre ellos vamos a diferenciar:

Con lados iguales no paralelos: trapecio isósceles

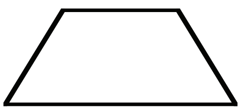


Figura 43. Cuadrilátero, convexo, trapecio isósceles.

Con dos ángulos rectos: trapecio recto

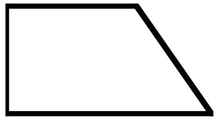


Figura 44. Cuadrilátero, convexo, trapecio recto.

Reflexión: En estos momentos nos encontramos en un proceso de abstracción, debido a que estamos haciendo la clasificación de los cuadriláteros a partir de la experiencia desarrollada en clase sin utilizar ningún material adicional, aunque se usa el mural o las figuras que ya se han elaborado con anterioridad para recordar las figuras que cumplen con las propiedades matemáticas que se mencionan. Es decir, estamos estudiando propiedades matemáticas y formalizando todo lo anterior. Esto es muy importante, y se debe interiorizar. Es una síntesis aclaratoria de todo lo visto hasta ahora.

Prof.: Y por extensión existen otros trapecios, que no son ni isósceles y ni rectos. A éstos se les denomina simplemente, trapecios.

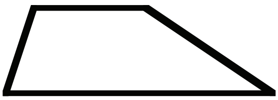


Figura 45 Cuadrilátero, convexo, trapecio.

Prof.: 4ª Distinción: entre los cuadriláteros convexos hay algunos que no tienen lados paralelos, y que llamamos trapezoides. Ya habíamos señalado que no tiene nada que ver con la igualdad de los ángulos o lados. Su caracterización, es que no tenga ningún lado paralelo.

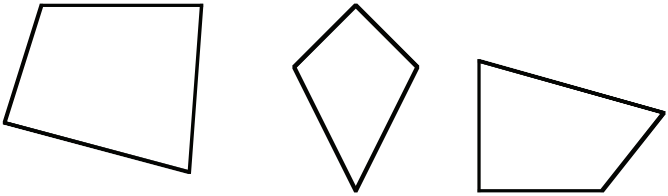


Figura 46. Cuadrilátero, convexo, trapezoide

En la figura 46 podemos observar trapezoides que no tienen ningún lado igual, y otros que tienen algunos lados iguales.

Actividad 7. *Evaluación de lo aprendido*

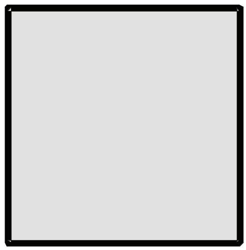


Figura 47. ¿Qué nombres recibe esta figura?

Prof.: ¿Qué nombre podríais asociar a la figura anterior?

Prof.: De los siguientes vocablos, ¿cuáles podríamos asociar a la figura anterior? Polígono, cuadrilátero, convexo, paralelogramo, rombo, rectángulo o cuadrado.

Prof.: ¿Cuál es la relación que existe entre un cuadrado y un rectángulo?

Al responder esta última pregunta pueden aparecer expresiones como: "Todos los cuadrados son rectángulos, pero no todos los rectángulos son cuadrados", lo cual no es fácil para los alumnos de primaria y Estudiantes para Maestro. De igual manera, tampoco lo es afirmar que "todos los cuadrados son rombos" y "que los rectángulos no tienen por qué ser cuadrados". Las relaciones de inclusión no son fáciles de trabajar y de verbalizar.

Otras expresiones como "existen rombos que no son cuadrados" o "existen rectángulos que no son cuadrados", también son difíciles para los alumnos/estudiantes.

Son diferentes formulaciones de lo mismo, pero algunas se entienden mejor que otras. Esto es debido a la estructura gramatical.

Prof.: El día que entendáis estas cosas y las digáis sin dificultad, podréis decir que habéis comprendido el concepto y la clasificación de los cuadriláteros.

Para finalizar, vamos a presentar un esquema (figura 49) que sintetiza la clasificación de los cuadriláteros.

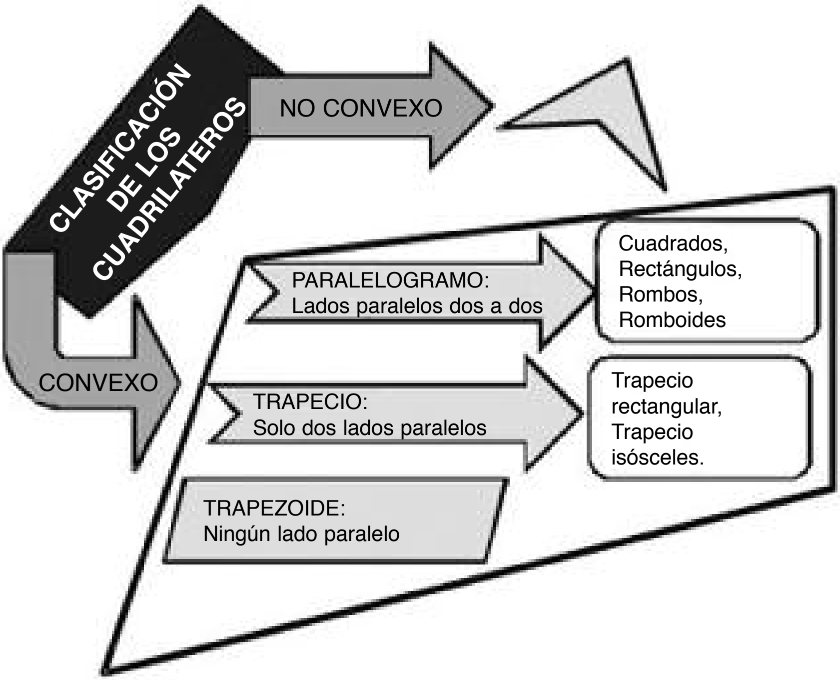


Figura 48. Clasificación de los cuadriláteros.

2.6. SINTETIZAMOS EL PROCESO METODOLÓGICO DESARROLLADO

La síntesis del trabajo que hemos desarrollado la vamos a esquematizar en los siguientes puntos:

1. Hemos desarrollado un proceso metodológico diferente al usual. Dibujar y construir sin definir. Posteriormente, las mismas propiedades que usamos en la construcción de las figuras nos han permitido hacer una clasificación de las figuras.

2. Partir de una actividad manipulativa. Los niños en Primaria necesitan manipular, hacer, verbalizar, etc. Para ello es necesario pensar en el material apropiado para desarrollar este tipo de actividades, el cual se debe caracterizar por:

i. Ser un material accesible, fácil de conseguir. En esta experiencia se usa papel recortado, trama cuadrada o el geoplano en su lugar. Estos materiales están al alcance de cualquier alumno y profesor para su uso.

ii. Útil para el concepto. Van a representar las propiedades de los conceptos que vamos a trabajar y permiten visualizarlas. Por ejemplo, en las tramas cuadradas somos capaces de dibujar todos los cuadriláteros, de identificar sus propiedades y de establecer relaciones entre ellos.

3. Las actividades deben ser sencillas, a partir de conceptos y procesos conocidos.

4. Se realiza un trabajo colaborativo, donde los alumnos utilizan el retroproyector, dibujan, discuten y se comunican entre ellos. A medida que alguno dibujaba alguna figura, los demás se animaban a hacer otra.

5. La clase ha participado y el profesor no ha tenido que hacer ninguna actividad, su trabajo es dar las indicaciones precisas y guiar el desarrollo de la clase. Todas las actividades las realizan los estudiantes.

6. Este proceso permite visualizar de manera global los objetos matemáticos. Una vez se visualizan las figuras, se siguen estudiando sus propiedades, analizándo sus lados, puntos, etc.

7. Para el análisis de las propiedades es necesario que éstas hayan estado implícitas en las actividades, pero que se observen sin dificultad. Después de ello, se explicitan de forma aislada, se analizan las semejanzas y diferencias para permitir las clasificaciones posteriores.

8. El papel del profesor es de guía. Va proponiendo actividades, explicitando el conocimiento espontáneo que surja y secuenciando la construcción de los conceptos.

9. Siempre se usan los criterios basados en las propiedades estudiadas y se van considerando además, las relaciones de clasificación e inclusión, que no son fáciles de entender.

10. Se establecen las definiciones al final. Éstas son el resultado de la actividad de observar, manipular y del análisis que se realizó a partir de sus propiedades. Definir es asignarles simplemente un nombre.

11. Se invierte el proceso metodológico. El profesor interviene de forma clara en el proceso de formalización. El profesor debe tener la capacidad de síntesis, a partir de los criterios y las propiedades estudiadas. No se menciona nada nuevo, simplemente se organiza la información.

12. A continuación, la evaluación de conceptos, procesos y actitudes, no solo la definición, ésta nos la aprendemos de memoria. Evaluar su relación con las matemáticas, si les toman aprecio o no, …

3. INTRODUCCIÓN A LA SIMETRÍA AXIAL

En este apartado queremos trabajar la simetría axial para mostrar, siguiendo la línea metodológica anterior, que es posible introducir los conceptos geométricos partiendo de actividades sencillas y manipulativas. Además, esta forma de trabajar la geometría hace que surjan conceptos y procesos erróneos que los EMs tienen, transformando estos momentos en situaciones de aprendizaje. Cuando se sigue una metodología transmisiva, estos errores no se hacen explícitos y permanecen en sus mentes. El proceso metodológico que seguiremos está inspirado en las propuestas curriculares y en las aportaciones ya mencionadas con anterioridad, y que se recogen en la bibliografía final.

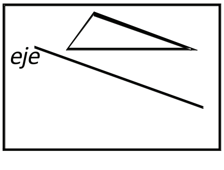
Como hemos reiterado en apartados anteriores, nuestro interés está en que captéis el proceso metodológico seguido, y que es similar al que deberias seguir en las aulas de primaria en un futuro profesional.

Actividad 8. *Introducción a la Simetría Axial.*

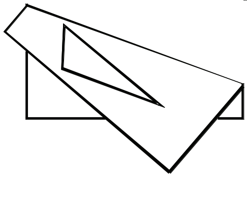
Vamos a partir de un folio en blanco en el que vamos a dibujar, calcar figuras, líneas y puntos y medir distancias entre líneas y/o puntos.

Prof.: Vais a coger un folio blanco. Vamos a trabajar la simetría respecto a un eje visualizando sus efectos y reconociendo sus propiedades. Este ejercicio es muy sencillo y requiere poco tiempo. Seguid las instrucciones.

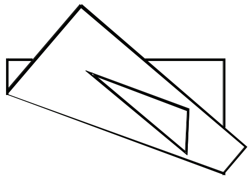
- *Dibujad una recta y una figura cualquiera. A la recta la vamos a llamar eje.*



- *Doblad la hoja por el eje de tal modo que se vea la figura.*



• *Calcad la figura al otro lado.*



• *Desdoblad la hoja.*

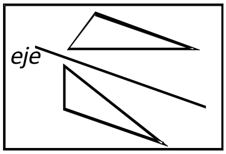
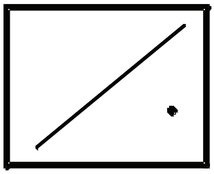


Figura 49. Elaboración de una figura simétrica

• *¿Qué observáis?*

Prof.: Vais a coger un folio blanco y seguid las instrucciones

• *Dibujad una recta y un punto. A la recta la vamos a llamar eje.*



• *Doblad la hoja por el eje de tal modo que se vea el punto.*
• *Calcad el punto al otro lado.*

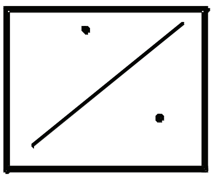


Figura 50. Puntos simétricos

• *Desdoblad la hoja.*

Prof.: Si observamos el dibujo podremos visualizar las propiedades de la simetría axial. Vamos a fijarnos en los primeros puntos señalados

- *Medid la distancia entre los dos puntos. Y, anotarla.*
- *Medid la distancia entre el eje y uno de los puntos. Y, anotarla.*
- *Dibujad el segmento que une los dos puntos y medirlo.*

Figura 51. Equidistancia en la simetría.

Prof.: ¿Qué relación hay entre las dos medidas?

Estudiante: La distancia entre los dos puntos es el doble de la medida que hay del eje a cualquiera de los puntos.

Prof.: ¿Cómo son los ángulos que forman el eje y el segmento?

Estudiante: Son ángulos rectos

Prof.: Y, ¿cómo son las rectas entre sí?

Estudiante: Perpendiculares

Prof.: Pues ahora escribid estos resultados que habéis obtenido. Es decir, la distancia entre un punto y su simétrico es el doble de la distancia de un punto al eje. Y, las líneas dibujadas son perpendiculares.

En este momento empezamos a denominar, a utilizar la palabra punto simétrico de manera natural. Explicamos que en el aula de primaria podemos introducir ciertos términos siempre que estén claramente delimitados y sea perfectamente identificable su representación. Nunca hubo necesidad de explicarle a un niño que es el recreo o qué es un coche.

Prof.: Dibujad otro punto y repetid el mismo proceso. Comprobad si el resultado es el mismo que habéis escrito.

Estudiante: El resultado es siempre el mismo

Prof.: ¿Cómo son las rectas que unen dos puntos simétricos?

Estudiante: Paralelas

Prof.: Observamos que este paralelismo se da siempre, al unir los dos puntos que resultan al calcar el original. Es decir, al unir dos puntos simétricos.

Reflexión: La actividad que hemos desarrollado nos ha permitido trabajar, generar, visualizar y verbalizar las dos propiedades básicas de la simetría axial, como son que "el segmento que une dos puntos simétricos es perpendicular al eje de simetría" y "los dos puntos simétricos equidistan del eje". La propiedad del paralelismo es una propiedad derivada como otras que visualizaremos en actividades posteriores. Es decir, a partir de una actividad manipulativa hemos descubierto las dos propiedades que nos permitirán establecer una definición.

Prof.: Esas dos propiedades que habéis escrito es lo que básicamente tenéis que conocer de la simetría axial.

Vamos a repetir la actividad con papel cuadriculado que permite dibujar trazos horizontales y verticales sin dificultad y medir distancias fácilmente. Pero, como observaremos, presenta algunas dificultades específicas que son muy interesantes.

Prof.: Vais a coger un folio cuadriculado y vamos a repetir la actividad anterior.

- *Igual que en el caso anterior, dibujad una línea vertical, que llamaremos eje, y un punto.*
- *Dibujad un punto.*
- *Doblad la hoja por la mitad.*
- *Calcad el punto.*
- *Desdoblad la hoja y unid los dos puntos.*

Prof.: Vamos a repetir la acción con otro punto.

- *Dibujad un punto.*
- *Dibujad su punto simétrico, sin doblar la hoja.*

Prof.: Puesto que ya sabemos las dos propiedades de la simetría axial, podríamos haber trazado una línea perpendicular desde A al eje y medir la distancia a ambos lados del eje.

Prof.: ¿Lo habéis hecho bien? ¿Cómo comprobáis que los dos puntos son simétricos?

Estudiante: Doblando la hoja y viendo que coinciden.

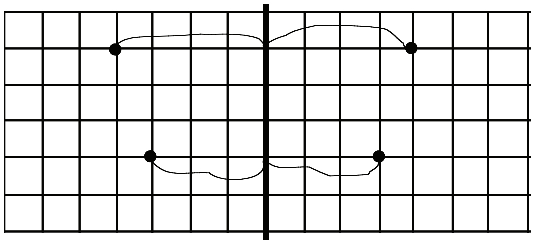


Figura 52 Actividad para mostrar la simetría axial

Prof. Que vosotros tengáis capacidad para discernir si lo que habéis hecho está bien o no, sin depender del profesor, es muy importante para el aprendizaje. Es lo que se conoce como "locus interno"[5]*.*

A partir de este momento, introduciremos algunas actividades con figuras que iremos complicando cada vez más, y que nos servirán para hacer observaciones sobre las ideas que podamos obtener del análisis de ciertos ejemplos.

Prof.: Sobre el papel cuadriculado vais a dibujar un triángulo. Dibujad los puntos simétricos de cada uno de los vértices. Luego unid los puntos simétricos y observar la figura que os queda.

Prof.: Comprobad que está bien dibujada.

[5] Cuando se considera que alcanzar un objetivo, por ejemplo aprobar matemáticas, depende del propio esfuerzo, entonces hablamos de *locus de control interno.* Pero si consideramos que conseguir el objetivo depende del azar o de la suerte o de otras personas, es decir, de elementos ajenos a uno mismo, entonces hablamos de *locus de control externo.*

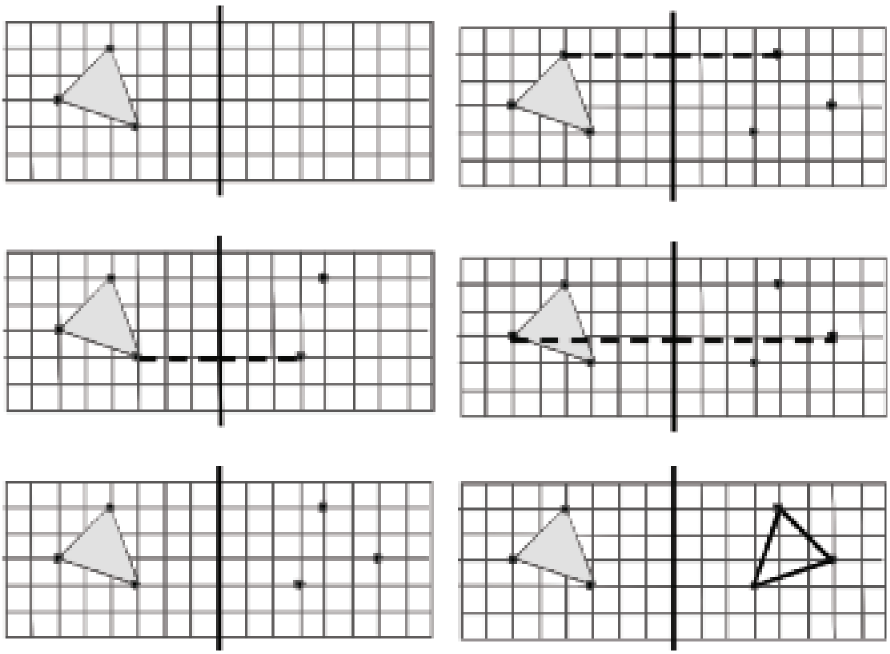


Figura 53. Secuencia seguida para dibujar el simétrico de un triángulo.

Prof.: Vamos a dibujar una figura un poco más complicada (Figura 54).

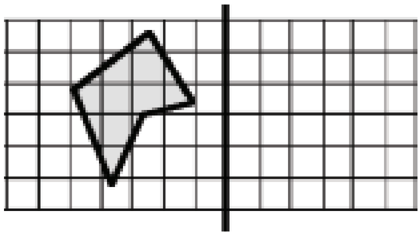


Figura 54. Figura no convexa.

Para esta actividad podemos entregar un folio cuadriculado, en el cual esté dibujado un polígono y una recta vertical que sirva como eje de simetría y se les propone dibujar la figura simétrica. Se les recuerda que deben aplicar las dos propiedades básicas de la simetría.

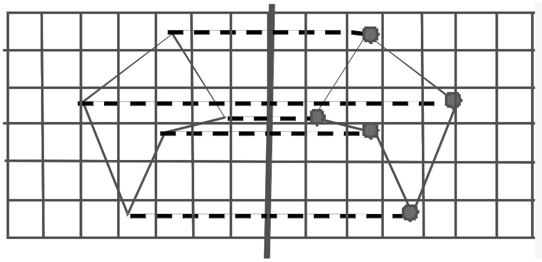


Figura 55. Figura no convexa y su simétrico.

Los estudiantes no suelen tener dificultad para dibujar la simetría axial y aplicar las dos propiedades consideradas, perpendicularidad y equidistancia. Y es lo que nos permite pasar a la siguiente actividad, que muestra una situación muy interesante para trabajar en el aula de centros de formación inicial de maestros[6].

Prof.: Vamos a proponer esta misma figura con algún cambio en el eje (Figura 56)

Para ello entregamos la actividad fotocopiada y les pedimos que hagan la figura simétrica empleando sus propiedades y sin calcar.

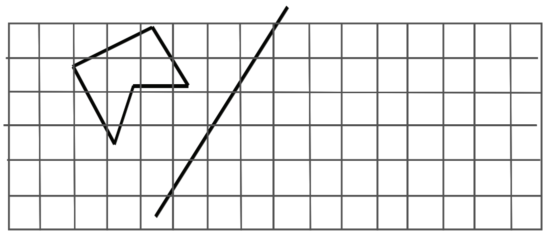


Figura 56. Polígono no convexo con eje de simetría inclinado

El resultado de esta actividad es muy interesante y nos va a permitir hablar de algunos aspectos básicos en la enseñanza de las matemáticas, como son la imagen del concepto, su representación y los ejemplos utilizados. Y establecer diferencias entre la definición y el esquema conceptual de un concepto matemático (Blanco y Contreras, 2002).

Algunos estudiantes, que habían realizado bien la actividad anterior, tardan más tiempo, con un resultado sorprendente (Figura 57).

[6] Situaciones similares de encuentran en los trabajos de D. Ball, Blanco (error inglés) y Blanco y Contreras (2002) sobre el teorema de Pict en números.

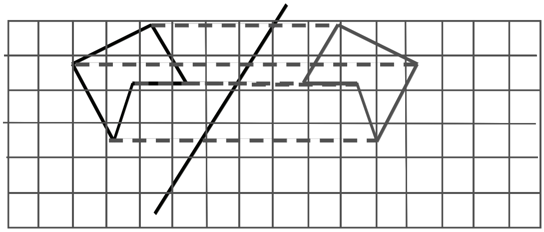


Figura 57. Típico error al trazar una figura simétrica con el eje de simetría dibujado.

Prof.: ¿Habéis comprobado como en el caso anterior que al doblar por el eje de simetría coincidan las figuras?

En este momento algunos estudiantes empiezan a percibir que su dibujo no es correcto. Otros dudan al ver algunas respuestas correctas de estudiantes, aunque no reconocen dónde está su error.

Estudiantes.: Está bien. Está mal.

Prof.: ¿Cuál es la causa para que un grupo importante hayáis hecho bien la primera actividad y mal la segunda? Y, lo que es más importante, ¿cuál es la causa para que hasta que no habéis doblado la hoja no os hayáis dado cuenta de vuestro error?

Hay un grupo muy importante de estudiantes que, habiendo realizado bien todas las actividades anteriores, en este momento, cometen el error indicado en la figura 58. Hay que resaltar que, ya en la primera actividad, el eje dibujado era inclinado, por lo que en estas sesiones de trabajo ya habían realizado alguna actividad con un eje de simetría inclinado y visualizado el resultado.

Reflexión: Con los alumnos de primaria y secundaria se trabaja mucho sobre el plano, usando rectas verticales u horizontales. Y en pocas ocasiones se trabaja con rectas oblicuas. Es evidente que en este caso han trabajado a partir de la horizontalidad de las líneas y han desconsiderado la perpendicularidad respecto del eje de simetría. Es decir, no han considerado las dos propiedades básicas que habíamos trabajado.

Ello nos permite analizar, además, que la actividad está mal resuelta porque no cumple con ninguna de las propiedades estudiadas.

Observación: La realización de esta actividad muestra que los estudiantes para maestros tienen muchas dificultades para trazar rectas perpendiculares de cualquier tipo de líneas y, con mayor intensidad, si éstas están inclinadas. Por ello hay que insistir en esta tarea.

Prof.: Ahora hacedlo bien. Trazad rectas perpendiculares al eje y obtendréis la misma figura.

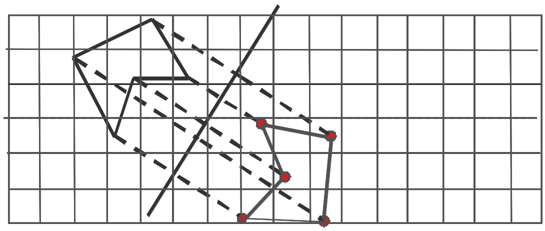


Figura 58. Polígono no convexo y su simétrico.

Vamos a insistir en una situación muy sencilla para volver a mostrar la importancia de los ejemplos. Anteriormente, concluíamos con la necesidad de poner actividades de simetría axial donde los ejes fueran horizontales, verticales e inclinados para evitar situaciones como la de la figura 57.

En este momento, es importante incidir en estas situaciones con folios en blanco[7].

Reflexión: La necesidad de enfrentar a los alumnos ante diferentes situaciones posibles es puesta de manifiesto en el Principio de Variabilidad Perceptiva de Dienes (Dienes, 1970; Aizpún, 1971 y Blanco, 1991)[8].

Vamos a plantear una situación sencilla para hablar de las rectas y su reflejo en la simetría axial.

Prof.: Reproducid en un folio la figura 59, y hallad los segmentos simétricos de los dibujados. Si os fijáis, tenemos todo tipo de rectas, lo que nos permitirá analizar su posición respecto al eje de simetría.

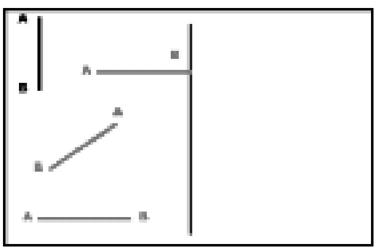


Figura 59. Segmentos.

---

[7] Trabajar con folios en blanco nos permite observar las dificultades que los estudiantes para maestro tienen para dibujar rectas perpendiculares y paralelas.

[8] *Principio de Variabilidad perceptiva.* Tanto para que puedan manifestarse las diferencias individuales en la formación de los conceptos, como para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de abstracción, la misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas como sea posible.

Estudiante: Las que son paralelas al eje, siguen siendo paralelas, y así.

Prof.: Efectivamente, la recta simétrica de una recta paralela al eje de simetría es paralela al eje de simetría. ¿La simétrica de una recta perpendicular es a su vez perpendicular al eje? ¿Y si fuera inclinada?

Prof.: Vamos a hacer esta actividad transformando los segmentos en flechas. ¿Qué podéis decir de estas flechas y sus simétricas?

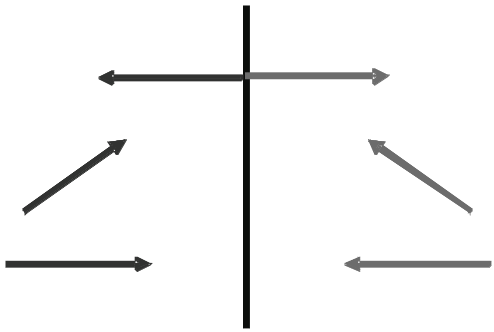


Figura 60. Segmentos transformados en flechas y sus simétricos.

Estudiante: Lo mismo que antes.

Prof.: ¿Qué sucede con el sentido de las flechas?

Estudiantes.: Que siempre cambia.

Prof.: Entonces, ¿qué podemos concluir?

Estudiantes.: Que la simetría cambia el sentido de las flechas.

Prof.: Completemos la actividad anterior y pongamos otra flecha más. Una flecha paralela al eje de simetría.

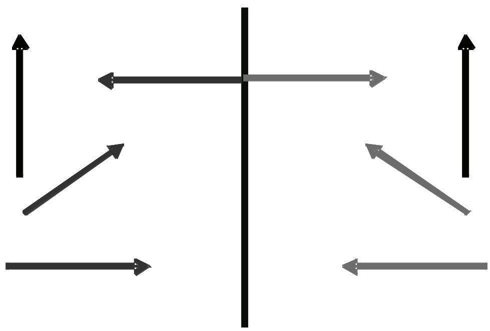


Figura 61. Flechas y sus simétricos, junto a una flecha paralela al eje.

Prof.: ¿Qué sucede ahora?

Estudiantes.: Que no cambia el sentido.

Prof.: Es cierta la conclusión anterior?

Estudiantes.: No, no,...

Prof.: Por ello, es muy importante la selección de los ejemplos y que los ejemplos que pongamos representen todas las situaciones posibles. Ello evitará que puedan sacarse conclusiones incorrectas.

Prof.: Las propiedades fundamentales son perpendicularidad y equidistancia. Las otras se derivan de estas dos y se pueden demostrar, pero en primaria se observa y se verbaliza, pero no se demuestra. Evaluemos, estas dos propiedades. ¿De las siguientes figuras cuales son simétricas y cuáles no y porqué?

Los estudiantes no suelen tener dificultad para identificar las figuras que son simétricas y las que no lo son, justificando su respuesta a partir de las dos propiedades básicas.

Figura 62. Ejercicio para identificar figuras simétricas.

4. FUNDAMENTACIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO: EL MODELO DE VAN HIELE

El Modelo de Van Hiele (Crowley, 1987; Alsina, Burgués y Fortuny, 1987; Jaime y Gutiérrez, 1990 y 1996; Sanz, 2001) desarrolla cinco niveles diferenciados que permiten la construcción del conocimiento geométrico. En nuestro caso, nos vamos a centrar en los tres primeros, que son referencia en la geometría escolar.

El aprendizaje es comparado a un proceso inductivo. Así, en un nivel podremos abordar algunas cuestiones correspondientes a ese nivel, pero plantear actividades de un nivel superior no tendría sentido, ya que los aprendices no tendrían capacidad para su comprensión y desarrollo. Es decir, hay un proceso de maduración y crecimiento en la construcción del conocimiento geométrico.

Este modelo presenta cinco propiedades que son definidas en Crowley (1987) y Sanz, (2001): **secuencial, progresivo, intrínseco y extrínseco, lingüístico y desajuste**.

Secuencial. Una persona debe recorrer los niveles en orden. Para tener éxito en un nivel, el estudiante tiene que haber adquirido las estrategias de los niveles precedentes.

Progresivo. El progreso de un nivel a otro depende más del contenido y métodos de instrucción que de la edad.

Intrínseco y extrínseco (explícito/implícito). Los objetos inherentes (o implícitos) en un nivel pasan a ser objetos de estudio explícitos en el nivel siguiente.

Lingüístico. Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre símbolos.

Desajuste. Si el profesor, los materiales empleados, el contenido, el vocabulario, etc., están en un nivel superior al del estudiante, éste no será capaz de comprender lo que se le presente y no progresará (Sanz, 2001, p. 120).

En Corberán y otros (1994) y Jaime y Gutiérrez (1996) se presenta una descripción resumida de las principales características generales de los 5 niveles de razonamiento que mostramos en cada nivel. Además, en Sanz (2001, pp. 121-127) se acompañan de actividades, algunas de las cuales recogemos en este documento al referir los tres primeros niveles de Van Hiele. Recordemos que estos tres primeros niveles deben ser considerados en la enseñanza primaria y secundaria, y por lo tanto, son la referencia del trabajo desarrollado en apartados anteriores y deben ser referencia teórica en los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas.

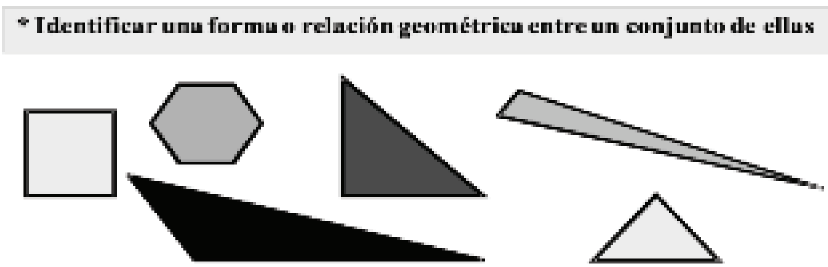
NIVEL 1. RECONOCIMIENTO O VISUALIZACIÓN:

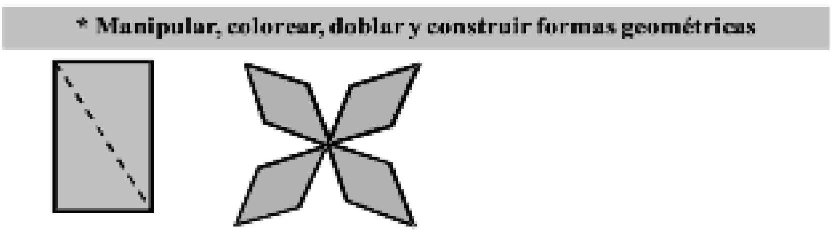
Los alumnos perciben las figuras como un todo global, en su conjunto, pudiendo incluir en sus descripciones atributos irrelevantes, generalmente sobre la forma, tamaño o posición de las figuras o sus elementos destacados. Se reconocen por sus formas visibles y no se reconocen las partes y componentes de las figuras y no se explicitan las propiedades determinantes de las figuras.

Pueden, sin embargo, producir una copia de cada figura particular en un geoplano o en papel o reconocerla. Pueden nombrarla, identificarla o compararla basándose sólo en su apariencia.

Por ejemplo, sobre las propiedades que distinguen un rombo de un rectángulo, podrán hablarnos de “el rectángulo es más largo”, “el rombo es más picudo”, etc. Es decir, se limitan a la descripción del aspecto físico de las figuras, sin entrar en otras relaciones de semejanzas y diferencias que puedan existir entre ellas. O distinguen entre un rectángulo y un romboide.

Un ejemplo de actividades a desarrollar en este nivel:





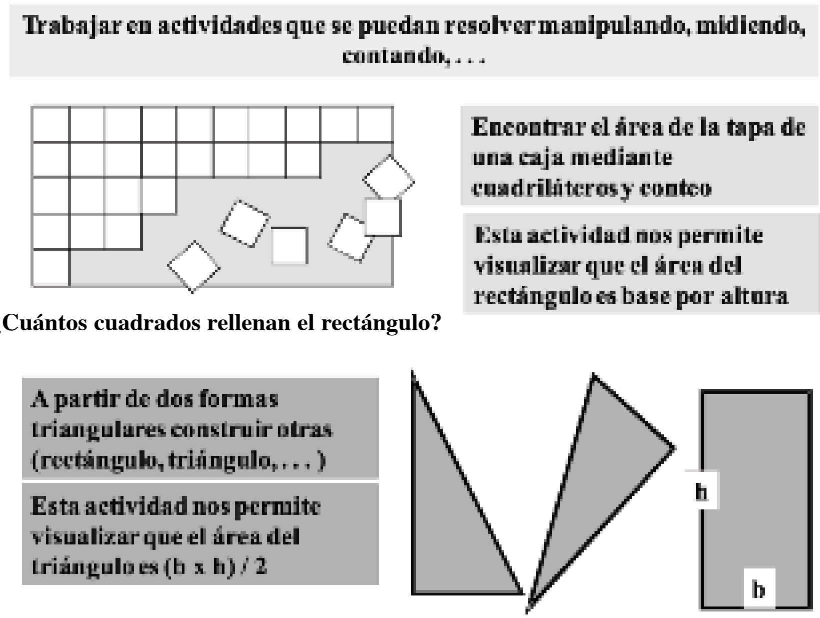


Figura 63. Actividades recomendadas para desarrollarse en el nivel 1 de Van Hiele.

Por lo tanto, las actividades propias de este nivel son las de manipular, colorear y construir formas geométricas; identificar una forma o relación geométrica entre un conjunto de figuras. Es decir, actividades que se puedan resolver manipulando, midiendo, contando… Esto es lo que nos va permitir profundizar más adelante.

La descripción del primer nivel hecha por Jaime y Gutiérrez (1996) es:

a) Percepción global de las figuras: en las descripciones se incluyen atributos irrelevantes, generalmente referidos a la forma, tamaño o posición de figuras específicas o sus elementos destacados.

b) Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase, en particular si sus formas son bastante diferentes.

c) Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, o caracterizar figuras.

d) Aprendizaje de un vocabulario matemático básico para hablar de las figuras, describirlas, etc., acompañado de otros términos de uso común que sustituyen a los matemáticos.

e) No se suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas (p. 88).

NIVEL 2. ANÁLISIS:

Los individuos pueden analizar las partes o elementos y propiedades particulares de las figuras. Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente mediante una serie de actividades, como la observación, medición, corte o doblaje. Ninguna propiedad implica cualquier otra porque cada una se percibe de manera aislada y sin relacionar. Estas propiedades emergentes se utilizan para conceptualizar clases de figuras.

Por ejemplo: "los rectángulos tienen las diagonales iguales", pero no explicitan relaciones entre distintas familias de figuras. Un rombo o un rectángulo no se perciben explícitamente como un paralelogramo.

Los estudiantes tienen otra visión de las figuras, ya que son conscientes que están formadas por elementos y que tienen ciertas propiedades diferenciadoras. Las propiedades que se detectan sirven para realizar clasificaciones o relaciones de inclusión. Es el primer nivel en el que descubren y generalizan ciertas propiedades que no conocían.

> *Prof.: Ahora, ¿qué tipo de actividades podemos proponer para analizar las propiedades?*
>
> *Prof.: Midiendo, contando, analizando sus ángulos…, recordemos que las propiedades se establecen experimentalmente mediante la observación, manipulación, medición… y eso ya se ha iniciado en el anterior nivel. Por ejemplo: podemos llegar a determinar que los rectángulos tienen las diagonales iguales, y lo podemos comprobar midiendo, manipulando, observando. Sin embargo, no con referencia al Teorema de Pitágoras, que se estudiará en un nivel superior.*
>
> *Prof.: En este nivel, ninguna propiedad implica cualquier otra porque cada una se percibe de manera aislada y sin relacionar. Por ejemplo, en los cuadriláteros podemos ver la igualdad de sus lados o ángulos, su paralelismo; pero no se llega a establecer la relación entre estas propiedades.*

El poder establecer relaciones entre las propiedades, implica hacer uso del pensamiento deductivo, cosa que los niños en este nivel, aún no tienen; también se hace uso del pensamiento reversible, otra cosa que se les escapa a la mente de los alumnos de primaria. Es un tema complejo, hay muchos conceptos que inciden y no se pueden visualizar fácilmente, por eso se hace necesario trabajar a partir de cosas sencillas, donde se visualicen las propiedades de una en una.

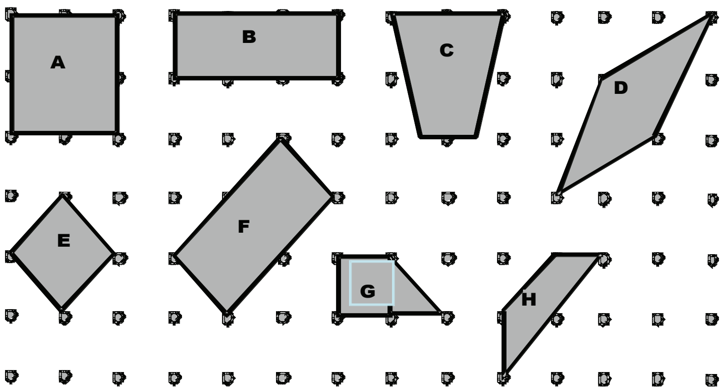
A partir de aquí los estudiantes dejan de ver de forma global y se fijan en los elementos y características que las componen. Son conscientes de que las figuras están formadas por elementos y que en ellas hay propiedades diferenciadoras, pero a pesar de ello, no explicitan relaciones entre familias de figuras, pues la perciben de forma separada. Por ejemplo, un rombo o un rectángulo no se perciben explícitamente como un paralelogramo.

Estas propiedades son las que nos van a permitir, en el siguiente nivel, realizar deducciones, dar significado a expresiones matemáticas o conceptualizar las clases de figuras. Lo que se trabaja implícitamente en éste nivel, se hace explícito en el siguiente.

Una actividad para este segundo nivel puede ser, en el mural realizado con los dibujos de los niños, buscar cuadriláteros con ángulos iguales, con lados paralelos….

Buscar los cuadriláteros con cuatro ángulos iguales

Buscar los cuadriláteros con sólo dos lados paralelos



Analizar diferentes propiedades de los cuadriláteros

(ángulos, lados, paralelismo, diagonales, ...)

Figura 64. Actividades recomendadas para el segundo nivel de Van Hiele.

Los niños si trabajan las propiedades empezarán a establecer relaciones.

La descripción del segundo nivel según Jaime y Gutiérrez (1996):

a) Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.

b) La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias.

c) No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de relaciones entre propiedades.

d) La deducción de propiedades se hace mediante experimentación. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.

e) La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos (p. 89).

NIVEL 3. DE CLASIFICACIÓN O DE DEDUCCIÓN INFORMAL U ORDEN:

En este nivel se puede usar cierto razonamiento lógico informal para deducir las propiedades de las figuras. Las relaciones entre las propiedades de la figura y las relaciones entre figuras llegan a ser el principal objetivo de estudio.

Se determinan las figuras por sus propiedades: "cada cuadrado es un rectángulo", pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones. Se comprenden implicaciones lógicas específicas, por ejemplo se puede asumir que en el caso de los cuadriláteros la igualdad de ángulos opuestos implique el paralelismo de los lados.

Se pueden comprender las primeras definiciones que describen las interrelaciones de las figuras con sus partes constituyentes. Utilizar resultados empíricos junto con técnicas deductivas. Seguir la demostración formal, pero el estudiante no ve cómo se podría cambiar el orden lógico o cómo construir una demostración partiendo de premisas diferentes o no familiares (Crowley, 1987).

A pesar de que el niño no tiene aún pensamiento deductivo, puede establecer relaciones, a veces acertadas y otras no. Si queremos establecer relaciones entre las propiedades es necesario haber trabajado antes con ellas.

Las actividades de este nivel deben proceder de manipulaciones para llegar a establecer relaciones empíricas, basadas en la experiencia, con un cierto razonamiento lógico informal para deducir las propiedades. Se comprenden las definiciones y se investigan las relaciones lógicas específicas (inclusiones o implicaciones): por ejemplo, cada cuadrado es un rectángulo. Esto lo podemos ver, manipularlo para medirle los lados, los ángulos y, a partir de ello, hacer deducciones.

Sin embargo, en este nivel y en las actividades propuestas, hay que tener cuidado en la generalización de casos particulares, pues no siempre se puede generalizar, y donde es necesario partir de lo lógico informal a lo formal. Todo esto se realiza a partir de la experiencia, de la representación. Si partimos de la definición, es más complicado ya que el lenguaje con el que se expresa en muchas ocasiones no es familiar para los estudiantes, y las propiedades que se expresan son difíciles para su comprensión.

Los alumnos pueden ser capaces de observar que todos los cuadrados son rectángulos, o que no todos los rectángulos son cuadrados. Pueden observarlo, pero verbalizarlo no es fácil para ellos por cuestiones de lenguaje y relacionas lógicas. Pueden tenerlo en mente, pero escribirlo es más complicado, porque se tienen que adaptar a la estructura. Si se quiere llegar a escribir correctamente una proposición compuesta, se requiere haber pasado por todo el proceso ya descrito.

En este nivel se emplean relaciones de inclusión, clasificación, ordenación,…, para ello, se sugieren actividades que requieran de material manipulativo o diagramas que impliquen presentar argumentos informales. A continuación, indicamos algunas actividades al respecto.

Probar que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los otros dos interiores.

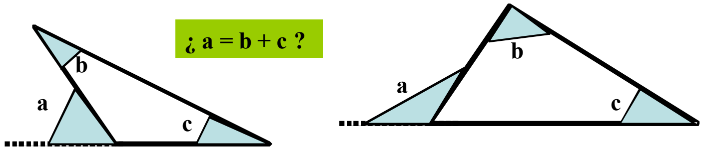


Figura 65. Actividad a desarrollar en el nivel tres de Van Hiele.

Prof.: Para ello, podemos recortar el triángulo, recortar los ángulos b y c y sobreponerlos encima de a. O recortamos los tres ángulos y los superponemos.

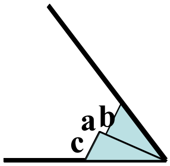


Figura 66. Solución de la actividad propuesta en la figura 65.

Probar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°

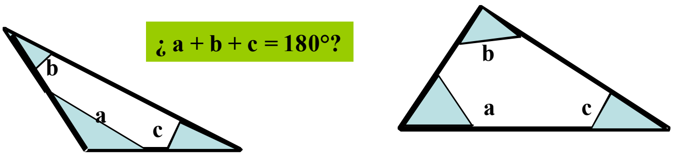


Figura 67. Actividad a desarrollar en el nivel tres de Van Hiele.

Prof.: Para ello podemos recortar los tres ángulos y ponerlos uno seguido de otro.

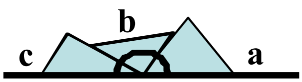


Figura 68. Solución de la actividad propuesta en la figura 67.

La descripción del tercer nivel, según Jaime y Gutiérrez (1996):

> *a)* Capacidad para relacionar propiedades de una figura entre sí, o con las de otras figuras.
>
> *b)* Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y familias de figuras.
>
> *c)* La demostración de una propiedad se basa en la justificación general de su veracidad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
>
> *d)* Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de los pasos de una demostración explicada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptada a otra situación análoga.
>
> *e)* Incapacidad para realizar demostraciones formales completas. No se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura (p. 89).

Acompañando a los niveles, los Van Hiele establecieron cinco fases de aprendizaje que conviene tener presente ya que el método y la organización de la instrucción, así como los contenidos y el material utilizado, son áreas importantes de interés pedagógico (Crowley, 1987).

Fase 1: Discernimiento o Información.

> *a)* En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor tiene la oportunidad de identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo.
>
> *b)* Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que va a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc. (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 90).

Esto es, se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo, permitiendo la familiarización con el material propuesto. Ello nos permitirá evaluar los conocimientos previos de los estudiantes en relación al tema, y a los alumnos conocer cómo van a trabajar y el sentido de su actividad (Crowley, 1987).

Fase 2: Orientación dirigida.

El profesor propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar. Estas actividades deberán permitir que los estudiantes descubran y aprendan las propiedades de los conceptos implicados. Consecuentemente, las actividades propuestas deberán ser tareas cortas y diseñadas para obtener respuestas específicas que les lleven directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender.

La ejecución y la reflexión propuesta, guiada por el profesor, servirán de motor para propiciar el avance en los niveles de conocimiento.

Fase 3: Explicitación.

> *a)* Los estudiantes expresan de palabra o por escrito los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ellas con sus compañeros y el profesor, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que se corresponde al tema objeto de estudio (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 91).

Consecuentemente, el tipo de trabajo es de discusión y comentarios sobre las actividades anteriores, sobre los elementos y propiedades que se hayan utilizado y observado.

El papel del profesor será ayudar a los estudiantes a que usen un lenguaje preciso y apropiado para describir sus experiencias y comunicar sus conocimientos, lo que ayuda a afianzar los nuevos conocimientos. Durante esta fase el estudiante estructurará el sistema de relaciones exploradas.

Esta fase debe entenderse "como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades de las diferentes fases de aprendizaje" (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 91)

Fase 4: Orientación libre.

Los estudiantes aplican sus conocimientos y lenguaje de forma significativa a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparable. Serán tareas abiertas más complejas que puedan presentarse de diferentes formas.

> *a)* En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, generalmente, más complejos.
>
> *b)* Los problemas que se planteen en esta fase no deben ser una simple aplicación directa de una definición o un algoritmo conocidos, sino que contendrán nuevas relaciones o propiedades. Estos problemas serán más abiertos que los de las fases anteriores, preferiblemente con varias vías de resolución y con una o varias soluciones aprendizaje (Jaime y Gutiérrez, 1996, p. 91).

Fase 5: Integración.

Los objetos y las relaciones son unificados e interiorizados en su sistema mental de conocimientos, adquiriendo así una visión general. Las actividades de esta fase deben favorecer este objetivo, al mismo tiempo permitir a los profesores evaluar sobre lo conseguido.

El profesor debe presentar una síntesis de lo que los estudiantes han trabajado y aprendido, para ayudar a los estudiantes a revisar, integrar y diferenciar los conceptos, propiedades, procedimientos, etc. Es importante que las actividades que se propongan no impliquen nuevos conceptos, sino sólo la organización de los que haya adquirido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aizpún, A. (1971) *Teoría y didáctica de la Matemática actual*. Barcelona: Vicnes-Vives.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1987) *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Arrieta, J., Alvarez, J.L. y González, A.E. (1997). El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con Geoplanos. *Suma, 25,* 71-86

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25,* 23-30.

Barrantes, M. (1998). *La Geometría y la Formación del Profesorado en Primaria y Secundaria.* Cáceres: Universidad de Extremadura.

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27 (1), 57-71.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la Geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22 (2)*, 241-250.

Blanco, L.J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de Profesores de EGB y estudiantes para Profesores*. Badajoz: Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.

Blanco, L.J. (1996). Aprender a enseñar Geometría y razonamiento pedagógico. *Epsilon, 34,* 47-58.

Blanco, L.J. (2001). Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consultado el 24 de mayo de 2001. Disponible en http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

Blanco, L. J. y Márquez, L. (1987). En torno al teorema de Pict: Una experiencia de enseñanza de la Geometría. *Números, 16*, 41-53.

Blanco, L.J. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (Coords.), *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Cáceres: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (Coords.) (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Cáceres.

Corberán, R.M., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J.B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Modelo Van Hiele.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. En M.M. Lindquist y A.P. Shulte (editores) *Learning and Teaching Geometry, K-12. Yearbook-1987.* Reston: NCTM

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens-Vives.

Domínguez, M: (1991). El uso del Geoplano en el aula de matemáticas. *Sigma. Revista de Matemáticas, 9,* 31-40

Jaime y Gutiérrez (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En Llinares y Sánchez (coords). *Teoría y práctica en Educación matemática*. Sevilla: Alfar. Sevilla.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis. Signatura

Jaime, A. (1994): La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. *Revista UNO. Didáctica de las matematicas, 1,* 85-96.

Sanz, I. (2001). *Matemáticas y su Didáctica II. Geometría y medida.* Guipúzcoa: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Smith, L. R. (1990). Areas and perimeters of Geoboard Polygons. *Matematics Teacher, 83 (5)* 392-398