

# CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: ASPECTOS ESTRUCTURALES Y DEFINICIONES PERSONALES

## THE CONCEPT OF FINITE LIMIT OF A FUNCTION AT ONE POINT: STRUCTURAL ASPECTS AND PERSONAL DEFINITIONS

**Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F.**

*Universidad de Granada*

### Resumen

*El objeto de este trabajo consiste en describir e interpretar las definiciones personales acerca del concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados de investigaciones previas. Estos aspectos estructurales son: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, algoritmos y destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de esos aspectos estructurales, analizamos las definiciones personales aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Entre los resultados destacamos la riqueza de estas definiciones por razón del carácter no alcanzable y no rebasable del límite, y por su consideración dual como objeto o proceso.*

### Abstract

*The purpose of this work consists of describe and interpret the personal definitions related to the concept of finite limit of a function at one point in terms of structural aspects, compiled and synthesized from prior research. These aspects are: the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, algorithms and practical skills for its calculation, its reachability and its possibility of being exceeded. On the base of these structural aspects, we analyze the personal definitions provided by a group of non-compulsory secondary education students on the concept of finite limit of a function at one point. Among results we point out the richness of meaning from these definitions, either by the not reachable and not exceedable character of the limit, and the dual consideration of the limit as an object or process.*

**Palabras clave:** *Límite de una función en un punto; límite finito; concepciones personales; aspectos estructurales del concepto de límite; dualidad objeto/proceso.*

**Key words:** *Limit of a function at one point; finite limit; personal conceptions; structural aspects of the concept of limit; object/process duality.*

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén: SEIEM

El inicio de esta investigación surge de la preocupación por la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de una función, que parte de una aproximación al tema mediante el diseño de una unidad didáctica sobre este tópico (Fernández-Plaza, 2010). Este trabajo se llevó a cabo siguiendo el procedimiento del análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997). Posteriormente se realizó otro trabajo centrado en la exploración de los significados y concepciones personales que un grupo de estudiantes de bachillerato proporcionaron acerca del concepto de límite finito de una función en un punto (Fernández-Plaza, 2011).

Es objeto general de este informe avanzar y profundizar en la interpretación de las concepciones personales de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto.

Las características estructurales que subyacen en las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite están documentadas por diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) y el carácter inalcanzable y/o irrebalsable del valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingedorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los estudiantes y las características citadas, ofrece la oportunidad de revisar, discutir y actualizar las interpretaciones hechas por los autores citados.

El objetivo de este trabajo consiste en describir e interpretar cómo las características estructurales mencionadas forman parte de las definiciones personales de los estudiantes, derivadas de los usos particulares del lenguaje.

### **Antecedentes y marco teórico**

La riqueza y diversidad de procesos de paso al límite y de sus clasificaciones, forma parte de la tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952). Los procesos de paso al límite tienen fundamentación métrica, o bien una topológica más general. De entre ellos, el currículo para el primer curso de Bachillerato especifica procesos discretos, como la tendencia de sucesiones de números reales, y procesos continuos, como la tendencia al límite, continuidad, la derivación e integración de funciones reales de variable real (MEC, 2007).

Tall (1980) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se “contamina” con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Un ejemplo de esto lo encontramos en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero (1997) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el periodo es 9:

“Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto (p. 177)”

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican así la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez (1999, 2000) enfatiza la necesaria distinción entre los términos “tender” y

“aproximarse” que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

### Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual asociada a un concepto dado, no necesariamente evocada o activada por una definición<sup>1</sup>. En la práctica por *concepción personal*, entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Empleamos el término *definiciones personales* en un sentido análogo al del término *definición conceptual* de Tall y Vinner.

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Contribuyen a describir e interpretar las concepciones personales declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite.

A partir de los trabajos sobre el modelo cognitivo *imagen conceptual/ definición conceptual* (Tall y Vinner, 1981), establecemos unas premisas para estudiar las definiciones personales aportadas por los estudiantes para el concepto de límite finito de una función en un punto.

- Las definiciones recogidas tratan de sintetizar, resaltar aspectos relevantes o ampliar algunas concepciones particulares de los escolares provocadas por la instrucción previa y otras cuestiones.
- El análisis aislado de estas definiciones no proporciona indicadores suficientes para describir dichas concepciones, dado que no logran abarcar toda la imagen conceptual subyacente, sobre todo cuando “reproducen” la definición dada por el profesor o el libro de texto.
- La consideración de las dos premisas anteriores requiere de una selección y descripción de los aspectos estructurales subyacentes, de manera que sirvan para interpretar toda la gama de matices que aparecen en las definiciones planteadas.

Para lograr el objetivo de este trabajo valoramos la pertinencia de los aspectos estructurales para describir e interpretar las definiciones personales declaradas por un grupo de estudiantes de bachillerato.

### Método

Se trata de un estudio descriptivo basado en el método de encuesta con un reactivo abierto, cuyo diseño resumimos a continuación.

---

<sup>1</sup> Se llama *imagen conceptual* de un concepto al conjunto de representaciones mentales del concepto y de las propiedades que el sujeto asigna a tales representaciones, en definitiva, la estructura cognitiva global asociada a tal concepto (Tall y Vinner, 1981). Nuestra noción de *concepción personal* extiende la noción empleada por estos autores de *definición conceptual*, como la explicación que el sujeto proporciona de la imagen conceptual evocada por una definición de referencia, tanto de manera rutinaria, como por reconstrucción subjetiva.

## Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes españoles de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, todos del mismo grupo académico. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica se utilizaron el libro de texto *Matemáticas I* de la editorial SM y los apuntes propios del profesor.

## Instrumento y aplicación

El instrumento utilizado es un cuestionario que se puede consultar en Fernández-Plaza (2011) del cual seleccionamos una pregunta abierta con el siguiente enunciado:

*“Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto”.*

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010/2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas.

## Resultados

En primer lugar, realizamos un volcado de las definiciones personales de los 36 sujetos. Para la interpretación fundada de éstas buscamos qué aspectos estructurales las discriminan, sin destacar errores o aciertos. Conforme a las premisas explicitadas en los antecedentes y marco teórico, detallamos las categorías de análisis.

### Selección y caracterización de los aspectos estructurales.

Cada uno de los aspectos teóricos y sus variantes se identifica mediante un código que aparece entre paréntesis. Por limitaciones de extensión, los ejemplos se muestran en la tabla 1, sirviendo los códigos para identificar las variantes de los aspectos considerados.

- *Aspecto estructural Objeto/Proceso*. Este aspecto trata las consideraciones generales de los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual (Cottrill et al., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980). Dentro de este aspecto estructural consideramos distintas variantes que pueden darse de manera simultánea:
  - *Tipo de objeto/proceso (OP)*: Se establecen distintas referencias para el “objeto límite” (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación).
  - *Vinculación entre límite e imagen (LI)*: Cuando el escolar asigna al límite un valor de imagen se observa una *Identificación* (de manera general), una *Conexión* (en casos particulares) o bien una *Independencia* entre dicho límite y el valor imagen de la función (Blázquez y Ortega, 1998).
  - *Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc.)*: Los escolares sólo se refieren a la variable  $x$  (Blázquez y Ortega, 1998).

- *Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)*: Empleo de términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico.
- *Aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo*. Este aspecto está relacionado con los modos que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales mediante técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite. Entre esas técnicas destacamos las siguientes:
  - *Evaluación en el punto (Sustitución directa) (Eval.)*: No necesariamente implica la vinculación entre límite e imagen.
  - *Tabla de valores (TVal)*: Los escolares expresan acciones similares a “dar valores a x”.
  - *Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)*: Los escolares expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado.
- *Aspectos estructurales Alcanzabilidad y Rebasabilidad (Alcanz. y Reb.)*. La posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones. (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).
- *Reproducción de la definición de referencia (Ref)*. También hay que tener en cuenta aquellas definiciones que reproducen la dada bien por el profesor o por el libro de texto y no tienen otros elementos característicos.

### **Caracterización de las definiciones personales**

Los criterios empleados para la clasificación de las definiciones personales son:

- a) Localización de aspectos estructurales subyacentes y sus relaciones, así en el ejemplo “Es el conjunto de puntos...” de la tabla 1 hay presentes dos aspectos relacionados: *un tipo de objeto* (Conjunto de puntos del plano) y *referencia a un sistema de representación distinto al numérico y simbólico* (la referencia puntos del plano alude implícitamente a un sistema de representación gráfico-geométrico). Estos dos aspectos estructurales dan nombre a la familia I (OP-SR).
- b) Discriminación de definiciones dentro de una misma familia mediante aspectos estructurales no compartidos. El ejemplo “Es el lugar del plano...” pertenece a la familia I (OP-SR), pero añade dos matices, *el carácter no alcanzable y el no rebasable del límite*, determinando una subfamilia I.1 (No alcanz.-No Reb.).
- c) Agrupación de familias por aspectos estructurales comunes, en el ejemplo, la variante estructural OP define un grupo que incluye las familias I, II.

Obtenemos así 11 familias de definiciones organizadas en 7 grupos, con sus correspondientes subfamilias, que se resumen en la tabla 1. Dado el pequeño tamaño de la muestra, prescindimos del análisis estadístico descriptivo, fijándonos únicamente en la existencia de representantes para las familias consideradas. Por cuestiones de espacio, sólo mostramos las definiciones más completas.

Tabla 1

*Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos*

Familias de definiciones (Aspectos estructurales comunes)	Subfamilias de definiciones (Aspectos estructurales diferenciadores)
I. OP – SR <i>“Es el conjunto de puntos del plano a los que se aproxima una función cuando <math>x</math> tiende a un número...”</i>	I.1. No Alcanz – No Reb. <i>“Es el lugar del plano en el cual la función <math>f(x)</math> no llega a tocar o pasar...”</i>
II. OP – Desc.	II.1. Alcanz. <i>“...todos aquellos valores que puede adquirir la incógnita <math>x</math> hasta llegar al punto dado”</i>
	II.2. No Alcanz. <i>“...todos aquellos números que se acercan a dicho punto pero sin llegar a alcanzarlo”</i>
III. Desc. <i>“Es el número al que se va aproximando <math>x</math>”</i>	
IV. Indentidad LI	IV.1. No Alcanz. <i>“Sería el valor que toma una función, al acercarse a un valor, pero nunca lo alcanza”</i>
V. Conexión LI - Eval. <i>“... es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la <math>x</math> por un número dado”</i>	
VI. Independencia LI – CLDC <i>“... No hace falta que el límite tenga imagen. El límite por la derecha y por la izquierda tiene que ser el mismo número”</i>	
VII. SR–TVal. <i>“...es un número situado en una gráfica al cual se pretende acercarse mediante valores de <math>x</math>”</i>	
VIII. SR–No Alcanz. <i>“...es aquel que no permite que la función se represente gráficamente”</i>	
IX. No Alcanz.	IX.1. No reb. <i>“... es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximar pero nunca tocar o pasar...”</i>
	IX.2. CLDC-Tval. <i>“...En estos casos se haría una tabla de valores para ver qué números son los que se acercan por la</i>

Tabla 1

*Familias de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos*

Familias de definiciones (Aspectos estructurales comunes)	Subfamilias de definiciones (Aspectos estructurales diferenciadores) <i>izquierda y por la derecha</i>
X. No reb.	X.1. Alcanz. <i>“...es el número límite al cual puede llegar la función”</i>
XI. Ref. <i>“... es el número al que se aproxima <math>f(x)</math> cuando <math>x</math> se acerca a ese punto”</i>	

La descripción general de cada familia y subfamilia se hace en términos de los aspectos estructurales que la determinan (remítase el lector al apartado “Afinamiento de los aspectos estructurales teóricos”).

### Discusión y conclusiones

Resumimos el alcance de las definiciones personales de los estudiantes en cuanto a las características estructurales se refiere:

1. *Atribuciones personales de objeto al límite (límite de la variable  $x$  (Blázquez y Ortega, 1998), recta, lugar del plano, conjunto infinito de puntos, etc.)* → Familias I, II y III.
2. *Atribuciones personales de proceso al límite (aproximación)* (Tall, 1980). → Familia II.
3. *Alcanzabilidad y Rebasabilidad como atribuciones personales al objeto en relación al proceso* (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). → Subfamilias de I, II, IV, IX y X; Familias IX y X.
4. *Relación de identidad, conexión o independencia entre los objetos límite e imagen.* (Blázquez y Ortega, 1998; Sierra, González y López, 2000). → Familias IV, V y VI
5. *Destrezas prácticas de cálculo (tabla de valores y evaluación) y condiciones de lateralidad y doble convergencia.* → Familias V, VI y VII.
6. *Proceso de definir con apoyo en el sistema de representación gráfico.* → Familias I, VII y VIII.
7. *Reproducción de la definición de referencia.* Un 25% de las definiciones son de este tipo; creemos pues que el sesgo debido a la instrucción previa no es relevante.

Extraemos las siguientes conclusiones útiles para dar continuidad al trabajo o implicaciones para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite:

- Los aspectos estructurales Alcanzabilidad y Rebasabilidad subyacen en la mayoría de las familias de definiciones obtenidas, enfatizando la importancia que los escolares le dan como propiedades del concepto de límite. Formulamos la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes sobre estas propiedades. La planificación y diseño de una propuesta didáctica debería incluir medidas de detección y tratamiento de estos aspectos.
- Son relevantes los “modos de ver” un mismo concepto sutilmente distintos al modo intuitivo de introducirse en el aula. El registro gráfico constituye un apoyo alternativo para construirlos.
- Conjeturamos que la identificación o conexión del límite con la imagen se debe a una comprensión insuficiente de la evaluación como destreza práctica de cálculo del límite, es decir, a la generalización de su uso practicado en un contexto continuo a otros que carecen de esa propiedad.
- Conjeturamos que la identificación del límite como límite de la variable  $x$ , fruto de la descoordinación de los procesos en dominio y rango de la función, se debe a la resistencia a aceptar la no existencia de límite en contextos determinados, contrastada por Blázquez y Ortega (1998) en el caso particular de funciones con límites laterales finitos y distintos.

De este modo se alcanza el objetivo al mostrar la pertinencia de los aspectos considerados para organizar las definiciones personales e interpretarlas según ideas claves o familias de definiciones basadas en los aspectos estructurales convenientemente afinados.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática” (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Pensamiento Numérico y Algebraico. Didáctica de la matemática) del 3<sup>er</sup> Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

### Referencias

- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.
- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999 (pp. 167-184) Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 12(1), 145-168.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. and Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. and McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.
- Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Trabajo final del Máster de Secundaria. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por Estudiantes de Bachillerato respecto al Concepto de Límite Finito de una Función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Tesis doctoral*. Granada: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J.L (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- MEC (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE*, 266, 45381-45477
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones*. Madrid: el Autor.
- Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: Una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 71-75.
- Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In Karplus, R. (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 170-176, Berkeley.
- Tall, D.O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.