Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. especial, 78-89
ISSN: 2215-8421

La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas[1]

Pedro Gómez
Universidad de Granada, Granada, España (argeifontes@gmail.com)
María C. Cañadas
Universidad de Granada, Granada, España (mconsu@ugr.es)

INTRODUCCIÓN

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por su sigla en inglés) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2005) está fomentando en diversos países una visión funcional de las matemáticas (Rico, 2006). De acuerdo con el enfoque funcional de las matemáticas escolares, "el conocimiento permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de cuestiones y problemas en diferentes contextos" (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 176). Países como España y Colombia (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006; Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) están promoviendo una formación matemática de los escolares que desarrolle sus capacidades para enunciar y abordar problemas expuestos en contextos no matemáticos y resolverlos con el uso de las herramientas matemáticas pertinentes.

El desarrollo de este tipo de capacidades en el aula requiere que los profesores propongan tareas que las estimulen y las pongan en juego. Por consiguiente, se espera que los profesores se apropien de esta visión funcional de las matemáticas y sean capaces de diseñar, analizar y seleccionar tareas que necesiten el uso de conceptos y procedimientos de las matemáticas escolares como herramientas para resolver los problemas que se presentan en diferentes contextos y situaciones. Esto implica que el profesor sea capaz —para un contenido y unos objetivos de aprendizaje dados— de identificar los contextos más apropiados en los que

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto MAD de la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia) con la colaboración del grupo FQM-193 del PAIDI (España) y el apoyo de la Gobernación de Cundinamarca, la Fundación Carolina, la Fundación Compartir, la Fundación SM y el Icetex (Colombia). La participación de María C. Cañadas de este documento ha sido apoyada por el proyecto del Plan Nacional de I+D+I, *Modelización y representaciones en educación matemática*, con referencia EDU2009-11337. La participación de Pedro Gómez tiene el apoyo del proyecto del Plan Nacional de I+D+I, *Competencias profesionales del maestro de primaria en el área de matemáticas en contextos de formación inicial*, con referencia EDU2009-10454.

ese contenido puede desempeñar un papel, a fin de responder a problemas relevantes para los escolares.

Por lo tanto, es necesario que los programas de formación de profesores de matemáticas promuevan el desarrollo de estas capacidades. En los programas de formación inicial y **permanente en los que los autores hemos participado,[2] hemos compartido el desarrollo de** ideas que apuntan en esa dirección. En particular, consideramos que la *fenomenología* es un "elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto" (Gómez, 2007, p. 50). La fenomenología puede constituirse en una herramienta eficaz y eficiente para establecer fenómenos y contextos en los que se puedan formular los problemas que se espera que los escolares aborden.

La fenomenología viene siendo una pieza central de algunos programas de formación de profesores en España. Aparece, por ejemplo, en el proyecto docente de Rico (1992); se ha incluido sistemáticamente en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que se basan en el modelo de los organizadores del currículo (Rico, 1997); y su formulación teórica ha sido desarrollada con detalle en el contexto español (Puig, 1997).

Gómez (2007, pp. 50-55) introdujo la idea de subestructura como pieza del análisis fenomenológico. Luis Rico y sus colaboradores han descrito con detalle la idea de contexto para analizar los temas de las matemáticas escolares (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008, pp. 11-14). En este documento recogemos estas ideas, reconociendo explícitamente su origen en el trabajo de Luis Rico y sus colaboradores, y buscamos describirlas desde la perspectiva de su uso en la formación de profesores de matemáticas, con motivo del trabajo que hemos venido haciendo en un plan de formación permanente de profesores de matemáticas.

Fenomenología, análisis fenomenológico y organización de fenómenos

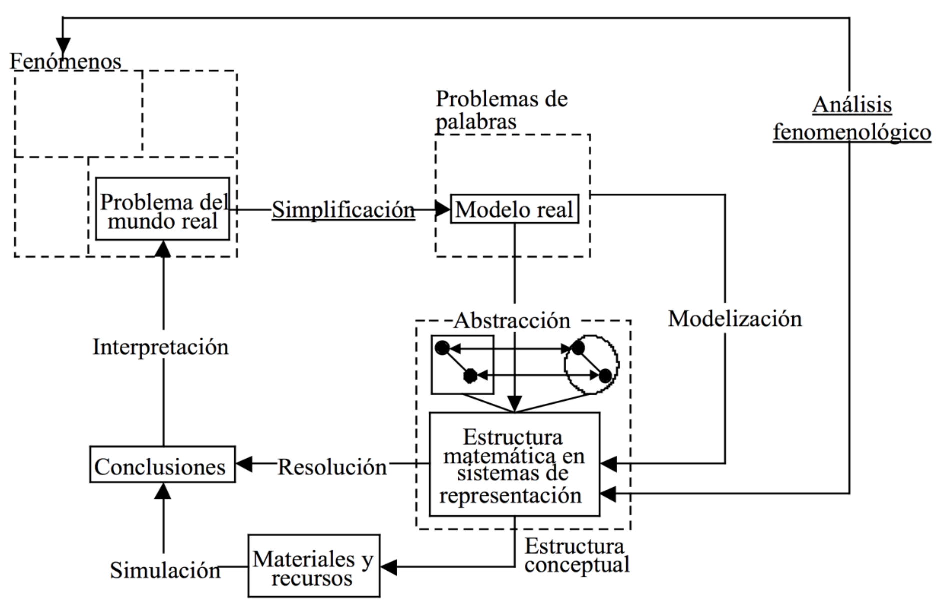
La fenomenología se entiende comúnmente como campo disciplinar de la filosofía y como movimiento en la historia de la filosofía. En su significado básico, es el estudio de los fenómenos. Su desarrollo a comienzos del siglo XX se debe, entre otros, a los trabajos de Husserl (Smith, 2003). En Educación Matemática, la noción de fenomenología adquirió una particular relevancia con motivo de los trabajos de Freudenthal (1973 y 1983). No obstante, y como lo señala Puig (1997, pp. 62-63), la relación entre las ideas de Freudenthal y la tradición filosófica correspondiente es débil. Puig (1997) utiliza la expresión *análisis fenomenológico*, en el contexto del análisis didáctico, de la siguiente manera: "El análisis fenomenológico de un

[2] Programas de "una empresa docente" (PFPD), asignatura de Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y del Máster Universitario de Profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad matemáticas) de la Universidad de Granada, Máster en Educación en la Universidad de los Andes (Bogotá).

concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos" (p. 63).

Por su parte, Segovia y Rico (2001, p. 89) distinguen entre fenomenología (una agrupación de fenómenos) y análisis fenomenológico (descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto) y resaltan que los conceptos organizan y también describen los fenómenos. Desde la perspectiva de la formación de profesores de matemáticas, consideramos que el problema se centra en dar un sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan, por parte de los escolares y a la hora de abordar una tarea, en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno), a fin de expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno y verificar esa solución o interpretación (Gómez, 2007, pp. 87-88).

En la figura 1 hemos identificado estos procedimientos, desde la perspectiva del escolar. Por otro lado, también hemos identificado (en subrayado) dos procedimientos que el profesor debe realizar para diseñar la tarea: 1) el análisis fenomenológico, como el procedimiento que le permite establecer la relación entre fenómenos (y los problemas que se refieren a ellos) y la estructura matemática, y 2) la simplificación del fenómeno o problema, es decir, la transformación que el profesor debe hacer del problema del mundo real a un texto del tipo que comúnmente se conoce como problema de palabras.



Fuente: Gómez (2007, p. 88)

Figura 1 Análisis fenomenológico, resolución de problemas y modelización

Presentamos a continuación, mediante dos ejemplos y la descripción del procedimiento correspondiente, las dos aproximaciones que se han venido desarrollando para abordar el análisis fenomenológico en la formación de profesores de matemáticas: a) la identificación de contextos y b) la identificación de subestructuras.

IDENTIFICACIÓN DE CONTEXTOS: EL CASO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Luis Rico y sus colaboradores han venido usando la idea de contexto como herramienta para abordar el análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares. En su ejemplo sobre los números naturales (Rico et ál., 2008) muestran cómo, al trabajar con los números naturales y pensar para qué se utiliza esta estructura matemática, es posible identificar una variedad de fenómenos asociados a ella. Contar lápices, expresar el número de pendientes, expresar el número de farolas, contar electrones, expresar el número de estudiantes, medir mi altura, contar camisetas, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, decir cuál es mi lugar en la cola de la carnicería, en qué posición llegué en la carrera de atletismo, expresar la solución de 3 + 5, mi documento de identidad, medir el área de mi habitación o el código de barras de un cartón de leche son algunos de los fenómenos.

Nuestra experiencia en formación de profesores muestra que la pregunta "¿para qué se utilizan estas nociones?" (p. 11) o "¿a qué problemas dan respuesta estas nociones" son fructíferas. No obstante, estos listados no indican de qué forma la estructura matemática en cuestión es un medio de organización de estos fenómenos. La idea de contexto propuesta por Rico y sus colaboradores resuelve esta cuestión. Los fenómenos se agrupan de acuerdo con sus características estructurales —"aquellas características del fenómeno (o de una situación o cuestión relacionada con el fenómeno) que son relevantes desde el punto de vista matemático" (Gómez, 2007, p. 54)— y esas agrupaciones configuran los contextos (Rico et ál., 2008, pp. 11-12, tabla 1).

Tabla 1. Fenómenos, problemas y contextos

Fenómenos	Problema al que responde	Contexto numérico
Contar lápices, contar electrones, contar camisetas	Contar	Contar
Expresar el número de pendientes, expresar el número de farolas, expresar el número de estudiantes	¿Cuántos hay?	Cardinal
Medir mi altura, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, medir el área de mi habitación	¿Cuánto mide?	Medida
Decir cuál es mi lugar en la cola de la carnicería, en qué posición llegué en la carrera de atletismo	¿Qué lugar ocupa?	Ordinal
Expresar la solución de una operación aritmética	¿Cuál es el resultado?	Operacional
Mi documento de identidad, el código de barras de un cartón de leche	¿Cuál es el código?	Simbólico

IDENTIFICACIÓN DE SUBESTRUCTURAS: EL CASO DE LA SIMETRÍA

La segunda forma en la que el profesor puede aproximarse al análisis fenomenológico de un tema consiste en la identificación de subestructuras. Motivados por el trabajo de los estudiantes María Teresa Arco, Juan José Ramírez, Ángel García y Manuel Jesús Nogales del Máster Universitario de Profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad matemáticas) de la Universidad de Granada, en su edición del 2010 (Arco, Ramírez, García y Nogales, 2010), sobre transformaciones en el plano, utilizamos el tema de la simetría para ejemplificar esta aproximación.

Uno de los aspectos del análisis conceptual de la simetría es la identificación de diferentes tipos de simetrías (*e. g.*, de traslación, de reflexión, de rotación y deslizantes). Cada tipo de simetría puede considerarse una subestructura. El profesor puede explorar si hay fenómenos asociados a cada una de estas subestructuras. Es decir, la subestructura motiva la búsqueda de fenómenos. En ese caso, las subestructuras organizan los fenómenos. Por ejemplo, para la simetría axial identificamos los terrenos de juego en los que participan dos equipos, como es el caso de los campos de fútbol —donde uno de los ejes de simetría es la línea de medio campo— (figura 2).

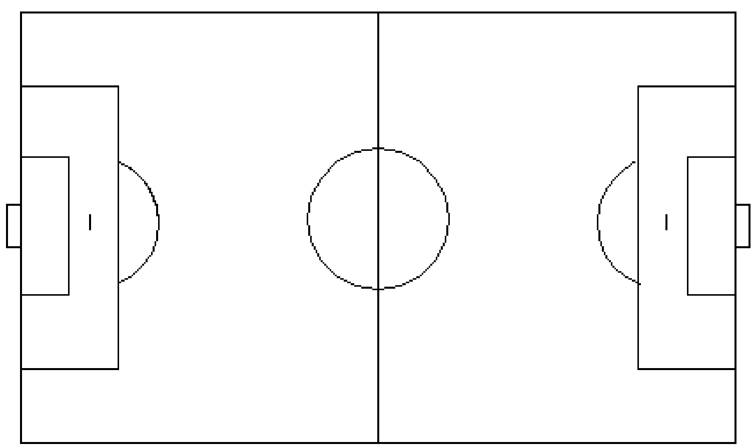
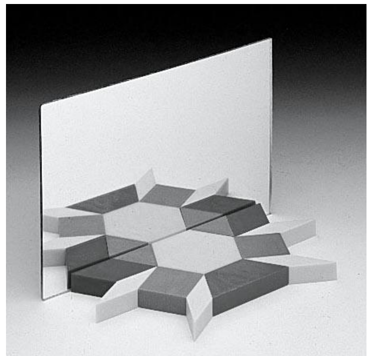


Figura 2 Campo de fútbol

El campo de fútbol es un ejemplo del grupo de fenómenos relativos a deportes o juegos en los que hay dos equipos o personas, en los que la delimitación del terreno debe ser tal que las condiciones sean las mismas para los dos contrincantes. En este sentido, la simetría axial es una característica estructural que comparte ese conjunto de juegos y deportes.

Los espejos son un ejemplo clásico de fenómenos asociados a la simetría axial. Todos estos fenómenos comparten una misma característica estructural consecuencia de propiedades de la reflexión de la luz (figura 3).



Fuente: Google images

Figura 3 Simetría en espejos

Un razonamiento similar a los ejemplos de los juegos o deportes y al de los espejos permite identificar otros grupos de fenómenos que comparten la simetría axial como característica estructural (e. g.., en la morfología de los organismos vivos, los condensadores eléctricos, estructuras de reparto de cargas, moléculas orgánicas y arquitectura).

Este mismo ejercicio se puede realizar con otros tipos de simetría: central (e. g., moléculas inorgánicas, cinturones de radiación), pentagonal (estrellas de mar, algunas flores, carambolo) o hexagonal (agua congelada).

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Los programas de formación de profesores de matemáticas pueden incluir dos aproximaciones para realizar el análisis fenomenológico:

- La identificación de contextos.
- La identificación de subestructuras.

IDENTIFICACIÓN DE CONTEXTOS

Siguiendo la propuesta de Luis Rico et ál. (2008) , consideramos que:

> Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para qué se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones. (p. 11)

Sugerimos entonces a los profesores en formación que aborden el análisis fenomenológico desde la perspectiva de los contextos, respondiendo dos preguntas:

- ¿Para qué se usa el tema matemático?
- ¿A qué problemas da respuesta el tema?

Esperamos que, al abordar estas preguntas, los profesores en formación puedan, por un lado, identificar fenómenos asociados al tema en cuestión, y, por el otro, establecer relaciones entre esos fenómenos. Por ejemplo, para el caso de los números naturales, los profesores en formación pueden identificar diferentes fenómenos: contar lápices, contar electrones, medir el largo de mi mesa de trabajo, medir el largo de una calle, etc. Es decir, las dos preguntas sugeridas promueven la generación de ideas acerca de los fenómenos que están relacionados con el tema. No obstante, un listado de fenómenos no es suficiente, dado que el propósito del análisis fenomenológico es organizar los fenómenos asociados con ese tema.

El siguiente paso dentro de la identificación de contextos es percibir que entre los fenómenos de la lista identificada existen relaciones. Por ejemplo, aunque contar lápices y medir el largo de una calle son dos fenómenos asociados a los números naturales, corresponden a "grupos" diferentes. Esperamos que los profesores en formación constaten que contar lápices y contar electrones pertenecen a un mismo grupo de fenómenos. Igualmente con los fenómenos medir mi altura o medir el área de mi habitación, que pertenecen a otro grupo. Extendemos la idea de contexto para referirnos a esos grupos de fenómenos. Usamos el término *contexto* de un tema de las matemáticas escolares para referirnos a la agrupación de todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural (Gómez, 2007, p. 55). Por lo tanto, diríamos que contar lápices y contar electrones comparten la característica estructural "contar", que es diferente de la característica estructural cardinal. Organizar los fenómenos asociados a un tema implica identificar lo que los relaciona y lo que los diferencia y agruparlos de acuerdo con esas semejanzas y diferencias para establecer los contextos correspondientes (tabla 1).

En resumen, con la aproximación de identificación de contextos esperamos que los profesores en formación identifiquen los fenómenos asociados a un tema y los organicen en contextos de acuerdo con las características estructurales que comparten entre sí en relación con el uso del tema en cuestión.

IDENTIFICACIÓN DE SUBESTRUCTURAS

El análisis fenomenológico de algunos temas, como los números naturales o las fracciones, se puede realizar de manera eficiente mediante la aproximación de la identificación de contextos. No obstante, en otros temas este análisis no es necesariamente fructífero. Por esa razón, les sugerimos a los profesores en formación una segunda aproximación al análisis fenomenológico. Esta aproximación consiste en considerar la estructura conceptual de su tema, identificar subestructuras de esa estructura conceptual y explorar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos. Utilizamos el término *subestructura* de una manera informal, en contraste con la noción matemática formal de *estructura matemática*.

Una subestructura puede ser una "porción" de la estructura conceptual que, a los ojos del profesor en formación, tenga identidad propia. En algunos casos, estas subestructuras surgen de clasificaciones por tipos. Por ejemplo, los principales tipos de simetrías o los tipos de funciones o ecuaciones. En otros casos, pueden surgir por la identificación de propiedades de los conceptos involucrados en el tema (e. g., propiedades del foco de la parábola o propiedades de las ternas pitagóricas).

En el ejemplo de la simetría presentado, los profesores en formación pueden identificar diferentes tipos de simetrías en la estructura conceptual y reflexionar sobre los fenómenos asociados a ellos (figura 4).

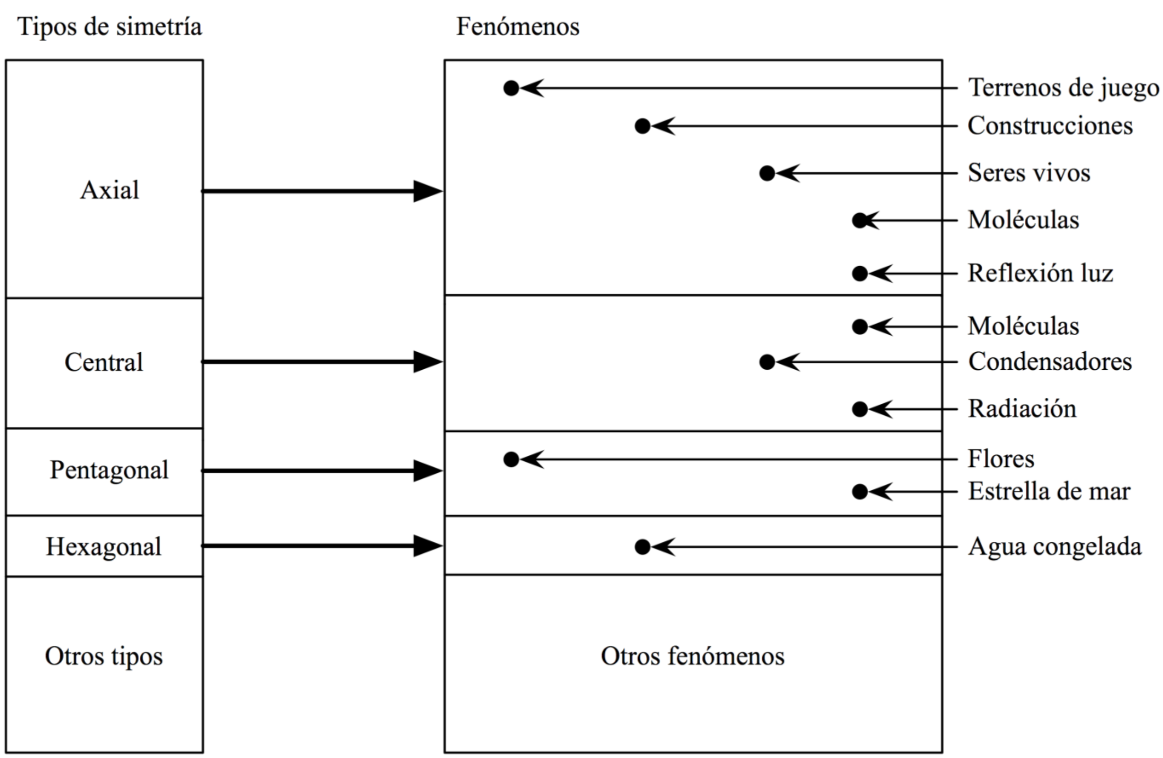


Figura 4 Subestructuras y fenómenos

En nuestra experiencia en formación de profesores de matemáticas hemos visto que la estrategia de identificación de subestructuras es eficiente: ayuda a desbloquear la reflexión sobre qué fenómenos están relacionados con el tema y de qué manera ese tema organiza esos fenómenos. La identificación de los fenómenos induce a los profesores en formación a reflexionar sobre las características de esos fenómenos que permiten agruparlos de acuerdo con las subestructuras correspondientes.

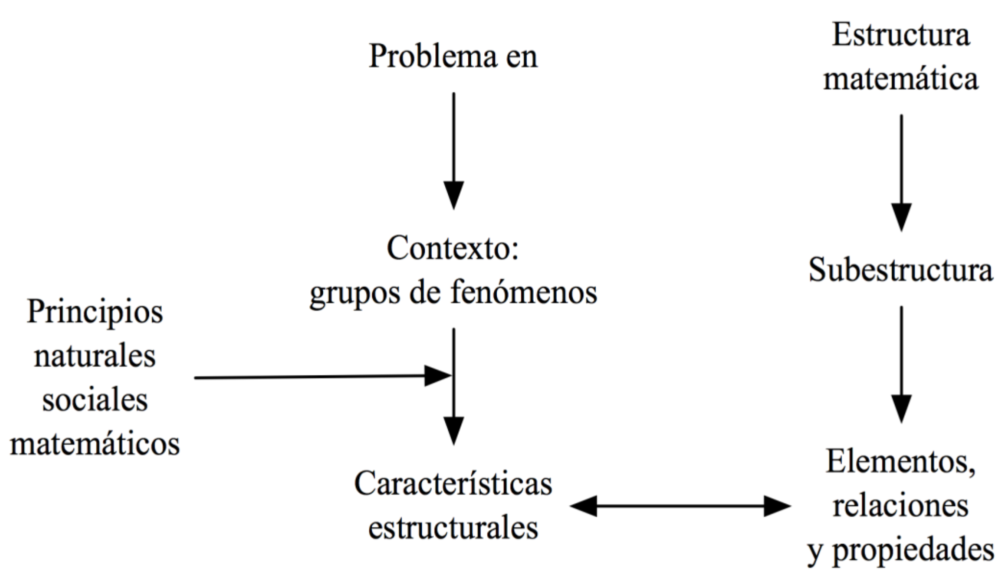
RELACIÓN DE LAS DOS APROXIMACIONES

Aunque presentamos las dos aproximaciones como complementarias, una vez que los profesores en formación han intentado usarlas en el análisis fenomenológico de su tema, es importante establecer su relación. Rico et ál. (2008) describen minuciosamente esta relación entre subestructuras y contextos para el caso de los números naturales (p. 13).

En el caso de la simetría, las subestructuras delimitan e identifican grupos de fenómenos. Estos grupos de fenómenos configuran contextos, puesto que las agrupaciones ponen de manifiesto formas en las que el tema se usa para resolver problemas. Las características estructurales que establecen esos contextos son precisamente las características de los diferentes tipos de simetrías (figura 4).

No obstante, en el caso de la simetría observamos que, dentro de un mismo contexto, hay grupos de fenómenos que pertenecen a ese contexto por razones diferentes. Tanto terrenos de juego como espejos pertenecen al contexto de la simetría axial. Los primeros porque cuando, en un juego, hay dos equipos, el terreno debe ser "simétrico" para los dos equipos (no debe ofrecer ventajas). Los segundos, por las propiedades de la reflexión de la luz.

En resumen, contextos y subestructuras están relacionados y configuran la base con la que un tema matemático organiza los fenómenos que se le pueden asociar. Los contextos se delimitan en virtud de principios naturales, sociales o matemáticos —situaciones equivalentes para los dos equipos, propiedades de la reflexión de la luz— y las subestructuras organizan los fenómenos en virtud de sus elementos, relaciones y propiedades (figura 5).



Fuente: Gómez (2007, p. 55).

Figura 5 Análisis fenomenológico

SITUACIONES

A la hora de diseñar y seleccionar tareas para la instrucción, los profesores en formación deben tener en cuenta los propósitos de estas. En algunos casos, por ejemplo, se puede buscar motivar a los escolares a través de tareas cercanas a ellos o a su entorno. En otros casos, se puede buscar proponer tareas que relacionen las matemáticas con otras áreas científicas. Para ello es relevante agrupar los fenómenos de acuerdo con otra clasificación: las situaciones. Por ejemplo, en el estudio PISA las situaciones se clasifican en personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005, pp. 41-42). La asignación de fenómenos a situaciones no es única. El profesor puede decidir, dependiendo de sus propósitos y de las tareas que pretenda proponer a los escolares, a qué tipo de situación pertenece un fenómeno dado. Por ejemplo, tiene la posibilidad de considerar las flores un fenómeno personal, al presentarlo en un contexto de motivación; y considerar la estrella de mar en una situación científica, al introducirlo dentro de una tarea interdisciplinar con el área de biología. La figura 6 muestra una clasificación en situaciones de los fenómenos de simetría que presentamos en la figura 4.

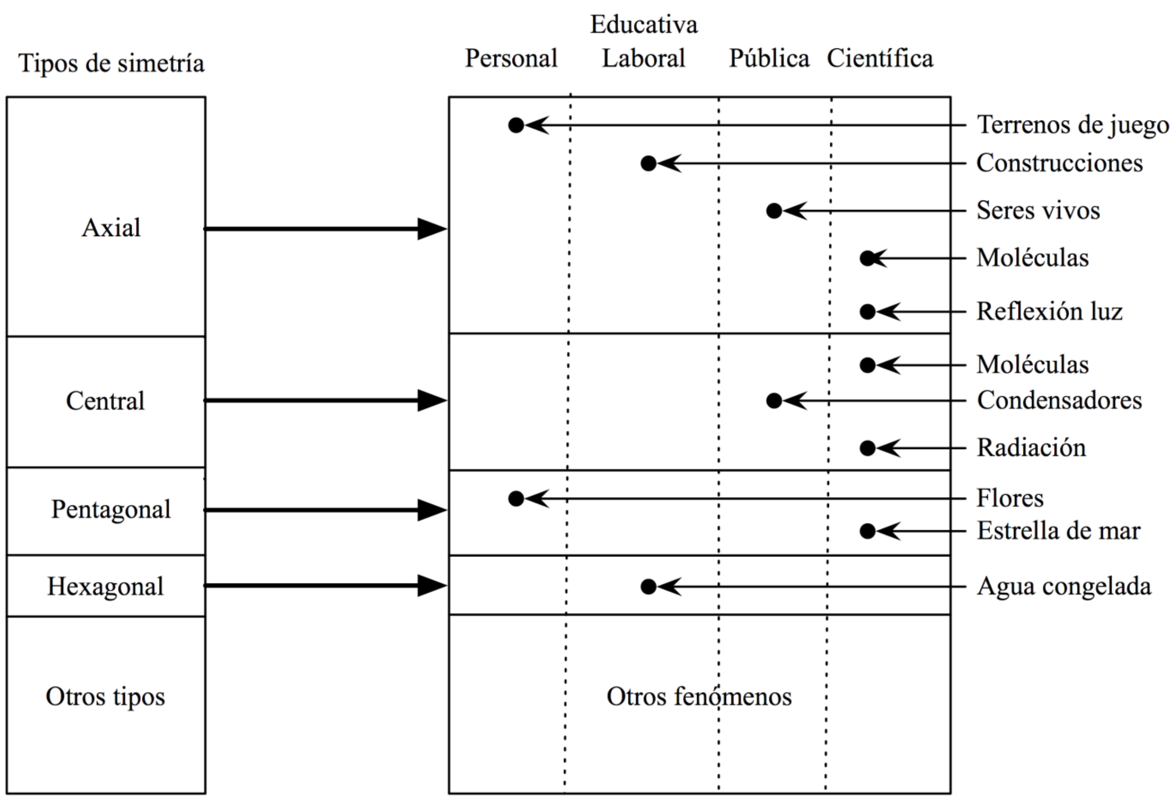


Figura 6 Situaciones

DISCUSIÓN

Las reflexiones anteriores sugieren la complejidad implicada en la enseñanza y el aprendizaje del análisis fenomenológico en los programas de formación de profesores de matemáticas. Mientras que los estudiantes de último año de matemáticas tienen pocas dificultades para organizar la estructura conceptual de un tema, y la idea de sistemas de representación resulta natural y productiva para los profesores en ejercicio, la fenomenología es una noción que genera dificultades en ambos casos.

Las nociones involucradas en el análisis fenomenológico —fenómeno, contexto, subestructura y característica estructural— y las relaciones que se pretende que los profesores establezcan entre esas nociones no son evidentes. Nuestra experiencia muestra que buscar presentar una definición formal de estas nociones y relaciones no genera necesariamente la capacidad de los profesores en formación para ponerlas en práctica en el análisis de un tema. Es claro que los ejemplos ayudan en este proceso. Pero no basta con dos o tres ejemplos.

La fenomenología, como el resto de los organizadores del currículo, se aprende en la práctica. Los profesores en formación logran aproximarse a estas nociones al intentar usarlas para el análisis de su tema y enfrentarse a dificultades. En un estudio sobre el desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas (Gómez, 2007, pp. 418-421), hemos constatado que algunas de esas dificultades se llegan a resolver en el trabajo en grupo. Para las otras, es necesario que el formador o el tutor guíen a los profesores en formación hacia su superación. Los profesores en formación logran consolidar esas nociones al analizar su tema, al ver cómo otros grupos de profesores han realizado el análisis fenomenológico de otros temas y al discutir entre ellos y con el formador acerca de las virtudes y deficiencias de las diferentes aproximaciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Pablo Flores, a José Luis Lupiáñez y a María José González, por sus comentarios a una versión previa de este documento.

REFERENCIAS

Arco, M. T.; Ramírez, J. J.; García, A. y Nogales, M. J. (2010). *Análisis fenomenológico de la simetría.* Trabajo realizado para el Máster Universitario de Profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas) de la Universidad de Granada. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE*, 5, 677-773.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), (2005). *Informe PISA 2003: aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. (coord.), Encarnación Castro, Enrique Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación- Horsori.

Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación-Horsori.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación* (extraordinario), 275-294.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza.

Rico, L.; Marín, A.; Lupiañez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: el caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Smith, D. W. (2003). Phenomenology. En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado el 5 de diciembre del 2004, de http://plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/phenomenology/.