

# UN EJEMPLO DE USO DEL ANÁLISIS SECUENCIAL EN LA INVESTIGACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA<sup>1</sup>

Antonio Codina Sánchez

Universidad de Almería, España

María C. Cañadas Santiago

Universidad de Granada. España

Enrique Castro Martínez

Universidad de Granada, España

## Resumen

En este trabajo presentamos las posibilidades del análisis secuencial y la técnica de coordenadas polares para describir y analizar el proceso de resolución, por parejas, de un problema de optimización mediado por una *i*-actividad. Iniciamos el trabajo con algunos antecedentes teóricos y la descripción de las técnicas del análisis secuencial y de coordenadas polares. Finalmente ejemplificamos y describimos el potencial de estas técnicas.

**Palabras clave:** Análisis secuencial, Técnica de coordenadas polares, Resolución de problemas.

## Abstract

We describe the possibilities of sequential analysis and the coordinates polar's technique to describe and analyze de resolution process, in pairs, of an optimization problem mediated by a *i*-activity. We first present the general theoretical background and the description of the sequential analysis techniques and the polar coordinates. Finally, we exemplify and describe the potential of these techniques.

**Keywords:** Sequential analysis, Coordinates polar's technique, Problem solving.

---

<sup>1</sup> Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto del plan nacional de i+D+I con referencia EDU2009-11337, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

## Introducción

La resolución de problemas matemáticos como campo de investigación educativa ha sido y es abordada desde diversas ópticas y enfoques (Castro, 2008) destacando como una de las principales y tradicionales corrientes de investigación en Educación Matemática (Kilpatrick, 1992). Algunas de las investigaciones han puesto su atención en las etapas o fases<sup>2</sup> durante la resolución de problemas (Artz y Armour-Thomas, 1990, 1992; Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Pólya, 1945, Schoenfeld, 1985) pero en sus análisis no se llegan a establecer con nitidez las relaciones que existen entre ellas.

En un intento para establecer y describir dichas relaciones, presentamos una aproximación basada en la metodología observacional (Anguera, 1990, 1993) y las posibilidades del Análisis Secuencial de la conducta (Bakeman y Gottman, 1989) y la técnica de coordenadas polares (Anguera y Losada, 1999) para *describir y analizar el proceso de resolución, por parejas, de un problema de optimización mediado por una i-actividad*<sup>3</sup>.

En este trabajo mostramos, por un lado, cómo se obtienen diversos estadísticos básicos que caracterizan el proceso de resolución general; medidas del trabajo en paralelo, de continuidad y de traslación en el desempeño; grafos de transiciones y cómo, cuántas y en qué orden se producen. Y por otro lado, a través de las coordenadas polares, presentamos las relaciones entre los episodios en resolución de problemas y el carácter excitatorio o inhibitorio entre ellos, tanto en la perspectiva prospectiva como en la retrospectiva. Finalmente, el análisis de los resultados nos lleva a concluir que estas técnicas tienen un gran potencial en el campo de la investigación en resolución de problemas.

## Marco conceptual y antecedentes

La resolución de problemas en Educación Matemática es multidisciplinar y multifocal, considerándose una actividad matemática y también un objeto educativo relevante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Ambas perspectivas, que no pueden

---

<sup>2</sup> En este trabajo, aunque se parte de la idea tradicional de fases o etapas en la resolución de problemas, adoptamos la noción de episodio: “periodo de tiempo durante el cual un individuo o grupo de resolutores están ocupados con una determinada tarea ... o persiguen una meta común” (Schoenfeld, 1985, p. 292) como unidad de observación en nuestra descripción del proceso de resolución de problemas.

<sup>3</sup> Se define i-actividad como “actividades en formato Web cuyo objetivo es facilitar el desarrollo de la propia actividad y el consiguiente aprendizaje a través de la interactividad del ordenador con el estudiante” (Codina, Cañadas y Castro, 2011, p. 159). En Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2010) se encuentra una descripción detallada de la i-actividad.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

entenderse la una sin la otra, han propiciado el desarrollo de dos grandes líneas de investigación educativa: (a) la que se preocupa por enseñar a resolver problemas y (b) la que está orientada a estudiar cómo pensamos cuando resolvemos problemas (Castro, 2008). Este trabajo se enmarca dentro de la segunda orientación.

Numerosos autores han intentado caracterizar cómo los humanos resolvemos problemas siendo el trabajo de Pólya (1945) uno de los más influyentes (Castro, 2008; Codina, 2000). Pólya, en su libro *How to Solve it*, pretende proporcionar al estudiante herramientas para la resolución de problemas matemáticos, principalmente estrategias heurísticas, a la vez que ofrecer una guía al docente acerca de cómo ayudar al estudiante en ese aprendizaje. Este autor propone un modelo del proceso de resolución de problemas en cuatro etapas: (a) comprender el problema, (b) concebir un plan, (c) ejecutar el plan y (d) examinar la solución.

Schoenfeld (1985), bajo la influencia del trabajo de Pólya, idea un protocolo de observación para analizar y describir el proceso de resolución basado en la toma de decisiones de los estudiantes a nivel de ejecución y de control del proceso. Este modelo considera la noción de *episodio* como unidad de observación, donde un episodio es un “periodo de tiempo durante el cual un individuo o grupo de resolutores están ocupados con una determinada tarea... o persiguen una meta común” (Schoenfeld, 1985, p. 292). El modelo de Schoenfeld se compone de seis episodios: (a) lectura, (b) análisis, (c) exploración, (d) planificación, (e) implementación y (f) verificación. Este autor organiza la información en una sucesión de episodios ordenada en el tiempo y describe el proceso de resolución a través de un análisis cualitativo de las producciones verbales y escritas de los sujetos (ver Figura 1).

Artz y Armour-Thomas (1990, 1992) caracterizan y codifican por separado los procesos cognitivos y metacognitivos durante la resolución de problemas a partir del trabajo de Schoenfeld. Artz y Armour-Thomas definen un nuevo modelo con ocho episodios: (a) lectura, (b) exploración, (c) comprensión, (d) análisis, (e) planificación, (f) implementación, (g) verificación y (h) observación y escucha. Al igual que Schoenfeld, utilizaron una técnica secuencial temporal para el registro y análisis de los episodios (Figura 2). Utilizando una técnica similar a las descritas, Goos, Galbraith y Renshaw (2002) analizan los procesos de autocontrol y autorregulación de parejas de resolutores (Figura 3).

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

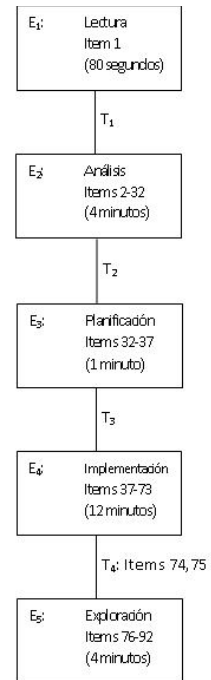
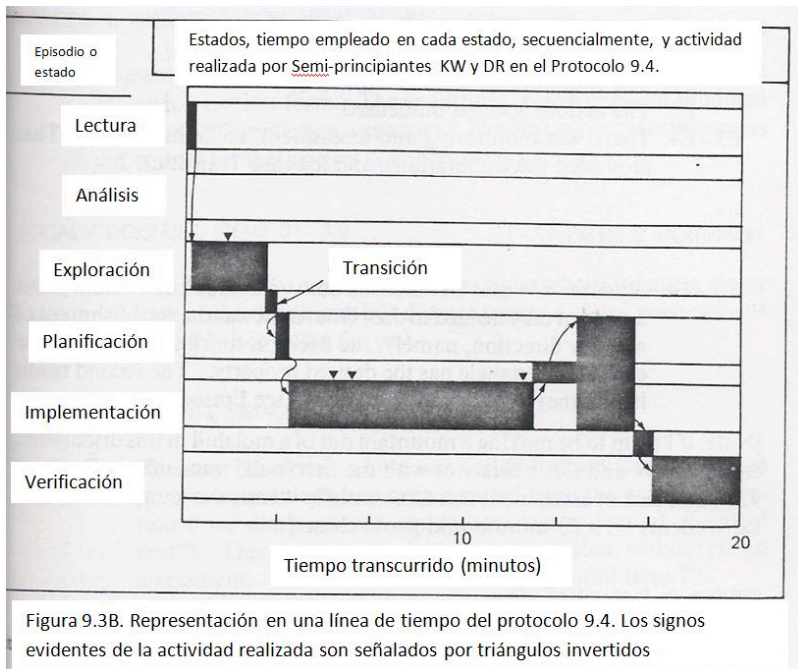
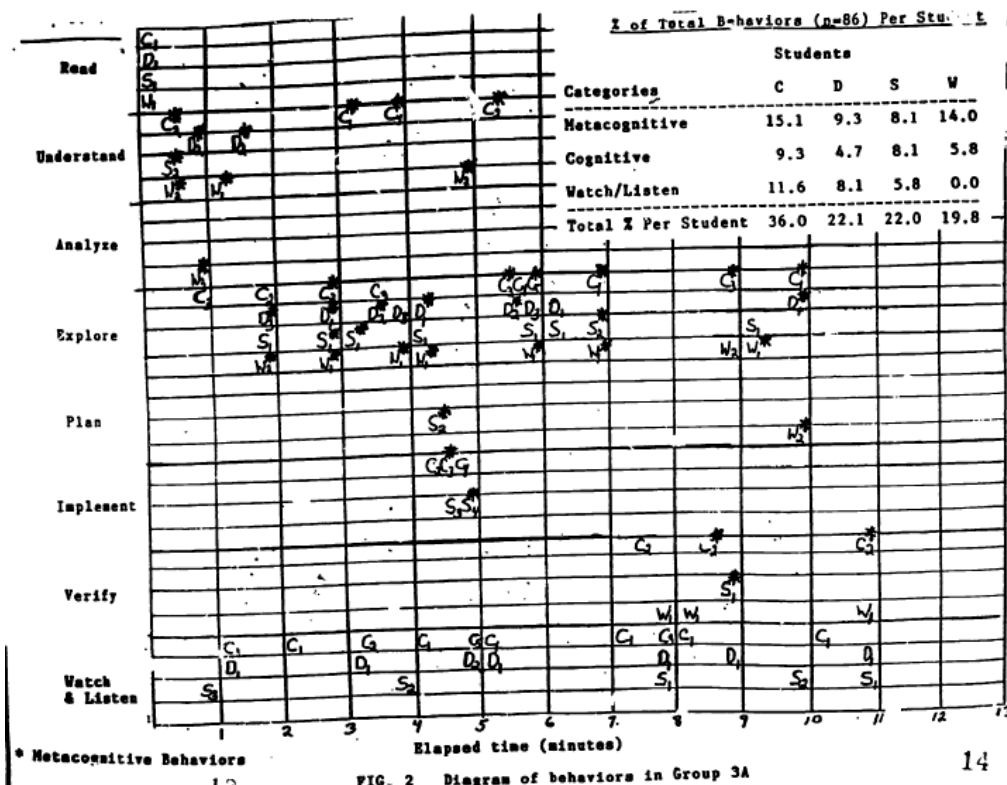


Figura 9.2A. Un análisis del Protocolo 9.3

Nota: Texto originariamente en inglés. Traducción propia.

Figura 1. Organización secuencial de Schoenfeld (1985, p. 303 y p. 295)



Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

Figura 2. Parrilla de observación de Artz y Armour-Thomas (1990, p. 12)

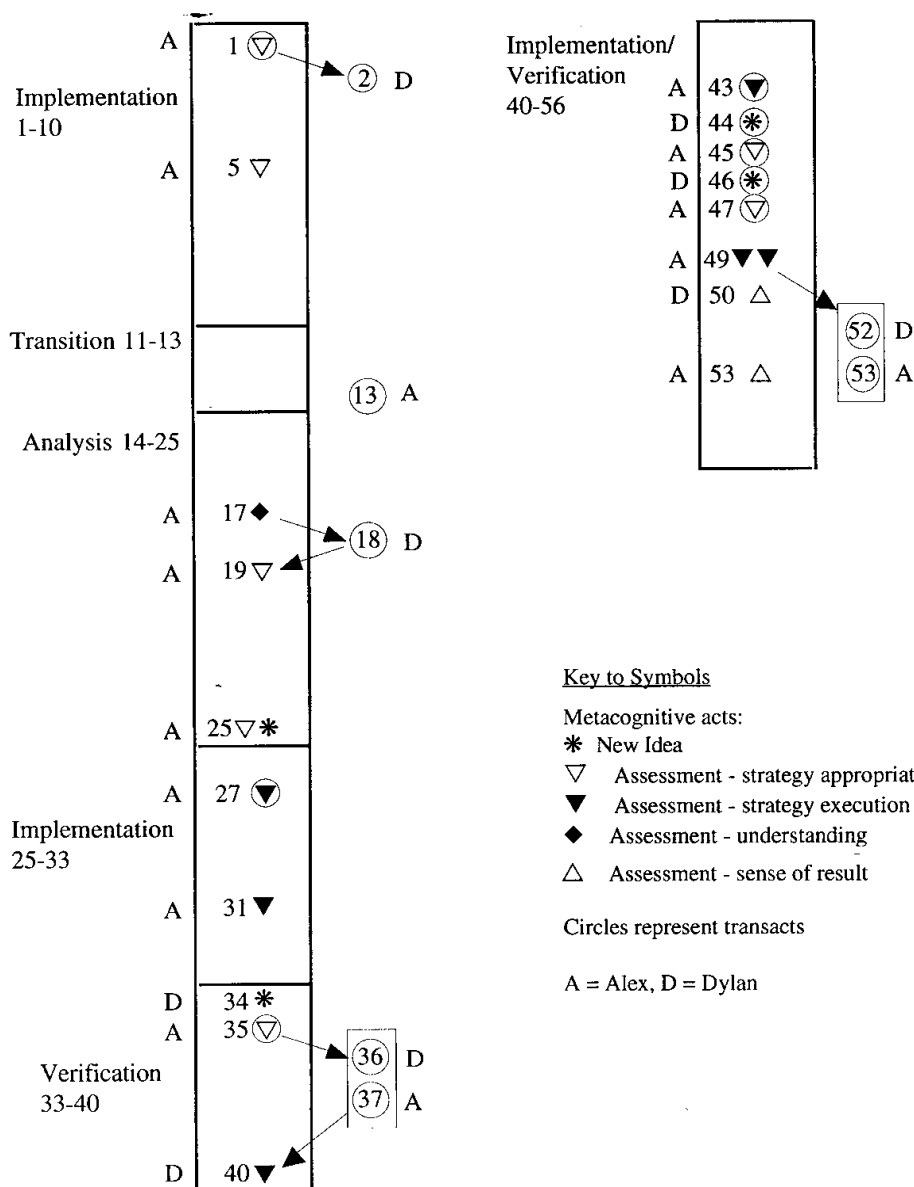


Figura 3. Protocolo de análisis de Goos, Galbraith y Renshaw (2002, p. 214)

En los ejemplos propuestos, el proceso de resolución es entendido como un flujo de conductas en el tiempo, observables a través de la utilización de los episodios como unidad de registro. Aunque estas investigaciones han aportado un significativo avance en la comprensión del proceso de resolución de problemas, las relaciones que se establecen entre los distintos

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

episodios durante la resolución es una cuestión abierta. Desde una metodología observacional, la técnica del análisis secuencial de la conducta, entendida como “un conjunto de técnicas cuya finalidad es poner de manifiesto las relaciones, asociaciones, o dependencias secuenciales entre unidades de conducta” (Quera, 1993, p.349), provee nuevas herramientas donde el foco de atención se sitúa en las relaciones, asociaciones o dependencias entre los distintos episodios durante la resolución de problemas. Una revisión bibliográfica permite concluir que el análisis secuencial tiene tradicionalmente su campo de aplicación en Psicología (Anguera, 1990, 1993; Bakeman y Gottman, 1989) y en las Actividades Físicas y Deportivas (Gorospe y Anguera, 2000). En cambio, no tenemos constancia de investigaciones con este enfoque en Educación Matemática<sup>4</sup>, de ahí que lo consideremos un nuevo camino a explorar.

Un requisito previo en la metodología observacional, y para cualquier análisis secuencial, es disponer de un sistema taxonómico que caracterice la conducta a observar. Las posibilidades de análisis son mayores si el sistema es además exhaustivo y mutuamente excluyente.

La técnica de coordenadas polares permite conocer las relaciones entre los episodios a través de la elaboración de un mapa de relaciones con el que poder objetivar en qué medida cada una de los episodios repercute en los otros y si esta influencia es inhibidora o activadora.

Anguera (1997) y Gorospe y Anguera (2000) proponen una modificación de técnica en coordenadas polares, llamada de retrospectividad genuina, a partir de la propuesta inicial de coordenadas polares de Sackett (1980).

Esta modificación (Figura 4) consiste en fijar un episodio ( $E$ ) y, en la perspectiva prospectiva, se tienen en cuenta las puntuaciones  $z$ , el número de retardos o lag<sup>5</sup> considerados, tomando  $E$  como episodio criterio y las demás ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ) como apareo. Sin embargo, en la perspectiva retrospectiva, se considera el episodio  $E$  como apareo. Una vez obtenidas las puntuaciones  $z$ , se obtienen los valores del estadístico  $Z_{sum} = \frac{\sum z}{\sqrt{n}}$ , siendo  $z$  los valores independientes

obtenidos en los respectivos retardos y  $n$  el número de retardos. Según Sackett (1980), el

---

<sup>4</sup> No se han obtenido resultados positivos en ERIC probando con diversas palabras clave relacionadas con la metodología observacional y la técnica de análisis secuencial de la conducta. Búsqueda realizada el 29 de junio de 2011 en <http://www.eric.ed.gov>

<sup>5</sup> Un retardo o lag es la transición entre las ocurrencias de dos categorías, en nuestro caso, los episodios. Los retardos se contabilizan desde ocurrencias de una conducta criterio o focal hasta las ocurrencias de las conductas apareadas u objetivo.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

parámetro  $Z_{sum}$  es un potente reductor de datos con una elevada capacidad informativa de las relaciones entre conductas. La variante de la retrospectividad genuina considera suficiente calcular los retardos positivos, de +1 a +5 en la perspectiva prospectiva mientras que en la perspectiva retrospectiva se considera de -1 a -5.

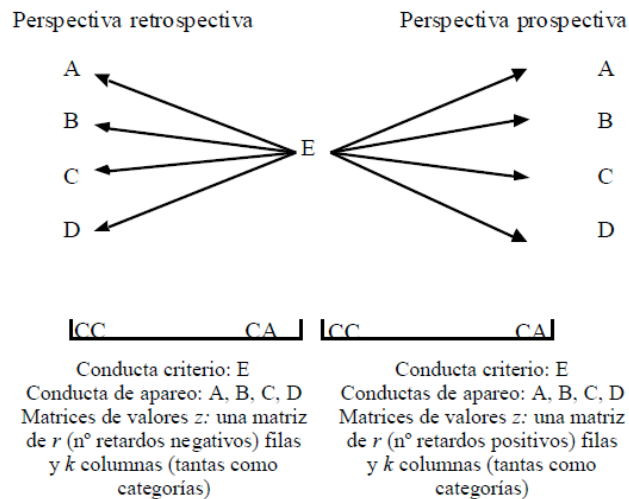
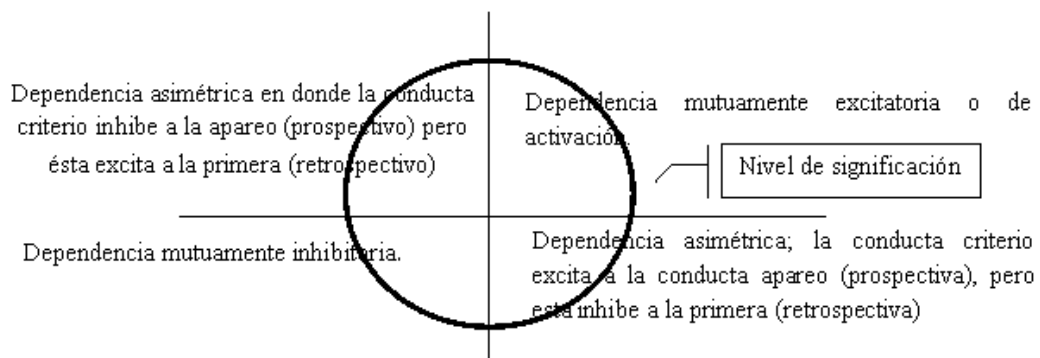


Figura 4. Coordenadas polares retrospectividad genuina (Gorospe y Anguera, 2000, p. 279)

Llamando  $Z_{sumX}$  al sumatorio de los residuos ajustados del retardo 1 al 5 dividido entre la raíz del número de retardos (perspectiva prospectiva) y  $Z_{sumY}$  al sumatorio de los residuos ajustados del retardo -1 al -5 dividido entre la raíz del número de retardos (perspectiva retrospectiva), el par  $(Z_{sumX}, Z_{sumY})$  permite definir vectores con los que construir un mapa conductual de inhibición y excitación. Si los módulos de los vectores generados son superiores a 1.96, las relaciones se consideran significativas. El ángulo respecto del origen proporciona la naturaleza de la relación (inhibición o excitación). La interpretación se sintetiza en la Figura 5.



Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

---

Figura 5. Interpretación de relaciones en la técnica de coordenadas polares

### **Objetivo de investigación**

El objetivo de nuestra investigación es caracterizar el proceso de resolución por parejas de resolutores cuando se encuentra ante una i-actividad que involucra la optimización. En este trabajo utilizamos el análisis secuencial como una metodología innovadora en Educación Matemática para analizar la información.

### **Método**

En este apartado describimos el sistema taxonómico definido necesario para poder aplicar la técnica del análisis secuencial, y una breve descripción de cómo se realizó la recogida de información, cómo se registró y qué herramientas se utilizaron para su análisis.

#### *Sistema taxonómico*

Siendo conscientes de que no existe una única caracterización (Codina, 2000), definimos nuestro sistema taxonómico considerando los siguientes episodios<sup>6</sup>:

Episodio 1. *Lectura*. El sujeto realiza la lectura del enunciado e interioriza las condiciones y objetivo del problema.

Episodio 2. *Análisis*. El sujeto intenta comprender el problema, seleccionar perspectivas, reformular o introducir nuevos enfoques cuando no existe una aparente forma de proceder. En este episodio el sujeto suele considerar conocimiento específico relevante para la resolución.

Episodio 3: *Exploración*. El sujeto suele utilizar las estrategias e idealmente no tiene un procedimiento estructurado de acción, busca información relevante para incorporar a una secuencia análisis-plan-ejecución. Durante este episodio, el sujeto ejerce mayor control a través de evaluaciones locales de su progreso.

Episodio 4. *Planificación*. El sujeto selecciona los pasos y las estrategias que potencialmente pueden conducir a la resolución del problema.

Episodio 5. *Implementación*. El sujeto ejecuta las acciones estructuradas en la planificación.

Episodio 6. *Verificación*. Este episodio recoge la evaluación local y global de la resolución del problema. Este episodio puede ser transversal a las anteriores.

---

<sup>6</sup> En Codina, Cañadas y Castro (2011) se realiza una descripción detallada de la construcción del sistema taxonómico.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.



Episodio 7. *Observación y Escucha*. El sujeto parece estar atendiendo y observando el trabajo del compañero.

A los que tenemos que añadir para conseguir la mutua exclusión y la exhaustividad:

Episodio 8. *Diálogo con el profesor*. El sujeto establece algún tipo de diálogo con el docente.

Episodio 9. *Impass*. El sujeto realiza un descanso durante la resolución del problema.

El sistema taxonómico definido permite aplicar un conjunto de técnicas analíticas de la metodología observacional: (a) técnicas que relacionan medidas globales (frecuencias, duraciones, tasas, prevalencias, probabilidades simples de ocurrencias, etc) y (b) técnicas que investigan relaciones entre los episodios (frecuencias de transición, coocurrencias, o la técnica de coordenadas polares) (Anguera, 1997; Gorospe y Anguera, 2000; Sackett, 1980). En este trabajo adoptaremos la modificación de retrospectividad genuina de Anguera (1997) y Gorospe y Anguera (2000).

Las medidas globales relativas a los episodios son:

*Freq*: frecuencia, tomando cada ocurrencia como una unidad.

*Relf*: frecuencia relativa =  $\text{freq}/(\text{Total freq})$

*Rate*: razón =  $\text{freq}/\text{Total Tiempo} (\#Units)$

*Dura*: duración total de todas las ocurrencias (en segundos)

*Reld*: duración relativa =  $\text{dura}/\text{Total tiempo} (\#Units)$

*Prob*: probabilidad incondicional o simple =  $(\text{rate}*\text{dura})/\text{freq}$

*avgD*: duración media

*minD*: duración mínima

*maxD*: duración máxima

*avgG*: duración media desde el final del episodio hasta el siguiente inicio

*minG*: duración mínima desde el final del episodio hasta el siguiente inicio

*maxG*: duración máxima desde el final del episodio hasta el siguiente inicio

*avgO*: duración media desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio

*minO*: duración mínima desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio

*maxO*: duración máxima desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio

*avgL*: duración media desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio

*minL*: duración mínima desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio

*maxL*: duración máxima desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio

### *Recogida, registro y análisis de la información*

En este trabajo presentamos la información recogida sobre una pareja de estudiantes universitarios que trataron de resolver el siguiente enunciado a través de una i-actividad:

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

Los puntos  $A$  y  $F$  son los vértices de una habitación con las siguientes dimensiones.  $AB=4m$ .  $BC=3m$  y  $BE=2m$ . Una mosca “sin alas” está sobre el punto  $A$  situado en el lado  $BA$ . ¿Qué camino debe seguir la mosca para recorrer la menor distancia si desea llegar al punto  $F$ ?

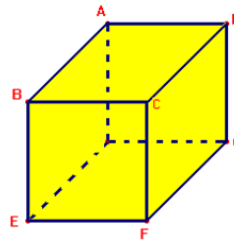


Figura 6. Enunciado del problema de optimización

Grabamos en vídeo la sesión en la que los estudiantes trabajaron. La recogida de información la llevamos a cabo a través del empleo de la técnica de incidentes críticos (De Katele y Roegiers, 1995, p. 24) que permite identificar y registrar el episodio así como el tiempo de inicio y finalización, medido en segundos, para cada uno de los sujetos. Obtenemos así un flujo de episodios para cada sujeto del tipo III (Anguera, 1990. Tomando como unidad de observación la pareja de resolutores, los datos se transforman en tipo IV pues son temporalmente exhaustivas para cada sujeto, pero en conjunto, la serie se compone de coocurrencias de unidades más la duración de las mismas.

La técnica de registro se basa en el sistema taxonómico presentado: *Lectura* (Lec), *Análisis* (Ana), *Exploración* (Exp), *Planificación* (Pla), *Implementación* (Imp), *Verificación* (Ver), *Diálogo con el profesor* (Dlg) e *Impass* (Ips).

El material técnico utilizado en la codificación, registro y posterior análisis ha sido: dos cámaras de video, un cañón proyector, un portátil de trabajo con la i-actividad para los sujetos y un ordenador para el tratamiento de la información con diverso software (Excel para realizar diversas transformaciones de datos; Subtitle Workshop para la transcripción de audio, Studio 9.0 y VirtualDub para el tratamiento de los videos; Atlas-TI 5.0 para la codificación y el programa de análisis secuencial GSEQ 5.1.07 de Bakeman y Quera (2011).

## Resultados

Presentamos algunas tablas y gráficos así como breves ejemplos del análisis de la información que pueden extraerse del análisis secuencia para la descripción del proceso de resolución. Intercambiaremos convenientemente como sujetos de observación a la pareja 3 (P3) y los sujetos A5 y A6.

### *Medidas globales*

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

La Tabla 1 muestra las medidas globales para P3 con datos referidos a eventos con tiempo de inicio y finalización en segundos. A modo de ejemplo, los datos de la Tabla 1 revelan que los sujetos dedican un 28% del tiempo a escucharse y a observarse, doblando en cantidad de tiempo al empleado en los episodios de lectura, análisis, exploración y verificación. Implementación sólo ocupa un 4% y planificación es casi residual (1%).

Información similar puede obtenerse tomando como sujeto de observación a A5 y A6.

Tabla 1

*Medidas generales P3*

	freq	relf	rate	dura	reld	prob	avgD	minD	maxD
Lec	45	0,2	0,01	460	0,14	0,14	10,22	1	84
Ana	30	0,1	0,01	406	0,12	0,12	13,53	3	32
Exp	35	0,1	0,01	472	0,14	0,14	13,49	1	82
Pla	3	0	0	42	0,01	0,01	14	12	16
Imp	7	0	0	123	0,04	0,04	17,57	1	44
Ver	32	0,1	0,01	323	0,1	0,1	10,09	1	39
Obs	71	0,3	0,02	907	0,28	0,28	12,78	2	83
Ips	4	0	0	25	0,01	0,01	6,25	4	11
Dlg	34	0,1	0,01	506	0,16	0,16	14,88	4	43
Total	261	1	0,08	3264	1	1			

Nota: Unidad = segundos

Tabla 1 (Continuación)

*Medidas generales P3*

	avgG	minG	maxG	avgO	minO	maxO	avgL	minL	maxL
Lec	62,42	5	508	72,8	8	511	15	15	15
Ana	53,43	1	264	66,1	8	277	99	99	99
Exp	62,7	2	215	76,1	7	250	267	265	268
Pla	19,5	4	35	32,5	16	49	934	934	934
Imp	111,8	39	176	129	62	184	948	948	948
Ver	76,57	2	533	87,2	5	554	279	279	279
Obs	27,97	1	135	40,9	3	148	156	123	189
Ips	81	28	134	89,5	34	145	792	702	881
Dlg	86,19	5	232	99,3	13	247	0	0	0
Total									

Nota: Unidad = segundos

*Medidas de relaciones locales*

¿Cuánto tiempo están trabajando en paralelo?, ¿cómo se producen las transiciones entre episodios?, es decir, ¿cómo se producen la continuidad y las traslaciones en el desempeño?  
 Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

¿cuántas son y en qué orden? son preguntas a las que se puede responder a través de la información que se obtiene de la realización de tablas de contingencia, en distintos retardos o lag y considerando adecuadamente los episodios criterios y apareos, así como de la matriz de probabilidades simples correspondiente. Por ejemplo, la cantidad de tiempo de trabajo en paralelo y de coocurrencias de los sujetos se obtiene a través de una tabla de contingencia de retardo 0 con episodios criterio todos los de uno de los sujetos y episodios apareo, todos los del compañero. El estudio de las transiciones se lleva a cabo a través de la matriz de probabilidades de cada sujeto y del correspondiente grafo de transición que nos informa, a través de mapas conceptuales, de las transiciones más probables entre episodios (Figura 7). Estos datos se complementan con las frecuencias de las secuencias diádicas y triádicas de los episodios (Tablas 2 y 3)

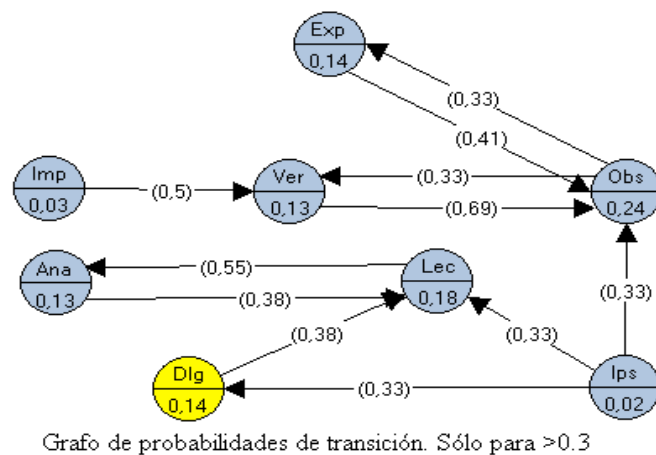


Figura 7. Grafo de transiciones

Tabla 2  
*Secuencias diádicas de A5*

		frecuencia
Lec	Ana	12
Ana	Lec	6
Ana	Dlg	6
Exp	Lec	5
Exp	Obs	7
Ver	Obs	11
Obs	Exp	10
Obs	Ver	10
Dlg	Lec	6

Nota: sólamente mayores que 5

Tabla 3  
*Secuencias triádicas de A5*

			frecuencia
Lec	Ana	Lec	5
Lec	Ana	Dlg	4
Ana	Lec	Ana	5
Exp	Obs	Exp	5
Ver	Obs	Ver	7
Obs	Exp	Obs	4

Nota: Sólamente mayores que 4

Por ejemplo, las secuencias diádicas más frecuentes son del tipo *Episodio 1->Episodio 2 y viceversa* [Lec->Ana (12, prob=0.55) y Ana->Lec (6, prob=0.38); Exp->Obs (7, prob=0.41) y Obs->Exp (10, prob=0.33); Ver->Obs (11, prob=0.69) y Obs->Ver (10, prob=0.33)]. Esta información permite estudiar y complementar el estudio de cadenas de secuencias excitatorias e inhibitorias. Para ello, se compara la probabilidad condicionada con la incondicionada en sucesivos retardos procediendo como sigue: Se parte del retardo +1, se compara la probabilidad condicionada de un determinado episodio criterio (comienzo de la cadena) con la probabilidad incondicional de los demás. Si esta es mayor, el episodio comparado se convierte en la siguiente iteración (retardo +2) en el episodio criterio. Se sigue iterando hasta que:

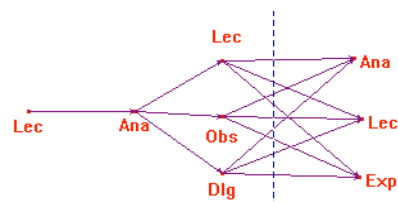
- no tenemos más patrones o tenemos al menos dos retardos consecutivos vacíos.
- cuando en varios retardos consecutivos se producen bifurcaciones, dobles, triples, etc., se considera sólo el primero de ellos (max-lag) y finaliza el patrón.

Por ejemplo, para el sujeto A5, tomando como criterio Lec (Tabla 4).

Tabla 4

Secuencia excitatoria de A5 para Lec

	Lec	Ana	Exp	Imp	Ver	Obs	Ips	Dlg
	Probabilidad independiente							
	0,18	0,13	0,14	0,03	0,13	0,24	0,02	0,14
Lec								
lag1	0	0,55	0,18	0	0,09	0,09	0,05	0,05
lag2	0,27	0	0,05	0	0	0,36	0	0,32
lag3	0,24	0,24	0,24	0	0,1	0,1	0,05	0,05
lag4	0,19	0,19	0,05	0	0,05	0,29	0	0,24



Obtenemos los siguientes patrones (Lec-Ana-Lec); (Lec-Ana-Obs); (Lec-Ana-Dlg)\* y (Lec-Ana)\*, donde \* indica que la relación es significativa (>1.96) en el correspondiente retardo.

Por otro lado, considerando las parejas de sujetos, decimos que hay *continuidad en el desempeño* cuando uno de los sujetos observa y su siguiente episodio codificado es en el que se encontraba el sujeto observado, mientras que decimos que hay *traslación de desempeño* cuando al menos uno de los sujetos intercambia el episodio codificado por el del compañero en dos episodios consecutivos (Tabla 5).

Tabla 5  
Situaciones de continuidad y traslación de desempeño

	Sujeto A Sujeto B		Sujeto A Sujeto B	
	Situación inicial		Situación siguiente	
Continuidad desempeño sujeto A	Obs	X	X	Y
Continuidad desempeño sujeto B	X	Obs	Y	X
Traslación desempeño sujeto A	X	Y	Y	Z
Traslación desempeño sujeto B	X	Y	Z	X
Traslación mutua	X	Y	Y	X

Nota: X, Y y Z representan un episodio

Para analizar la continuidad y traslación en el desempeño, se recodifican los códigos definiendo episodios duales, por ejemplo, ObsLec, ObsAna,..., o [LecObs, AnaObs, ...], donde *ObsY* representa A5 en *Obs* y A6 en *Y*, y *XObs* representa A5 en *X* y A6 en *Obs*. Con estos nuevos códigos se elabora una tabla de contingencia con retardo prospectivo +1 y se obtienen las frecuencias de ocurrencias que nos permitirán describir el trabajo colaborativo llevado a cabo.

#### *Coordenadas Polares*

Mostraremos un ejemplo de los valores numéricos de los cálculos para episodio criterio Ver (Tabla 6) así como los gráficos de vectores para episodio criterio Lec y Ver (Figura 8).

Según se observa en la Figura 8, la relación excitatoria entre lectura y análisis es coherente con una dinámica estándar de los procesos de resolución de problemas. Después de un proceso de lectura del enunciado, los resolutores suelen analizar la información, volviendo a la lectura en caso necesario y para una mejor comprensión del problema poniendo en juego conductas metacognitivas. Por otro lado, el hecho de que por encima de las probabilidades que otorga el azar, lectura tenga una relación significativa con diálogo para la pareja 3, pero no así para los sujetos indica que éste episodio incide sobre la conducta colaborativa de la pareja. Nótese que al entablarse un diálogo entre un sujeto y el investigador, éste es escuchado y puede o no ser utilizado por el otro componente.

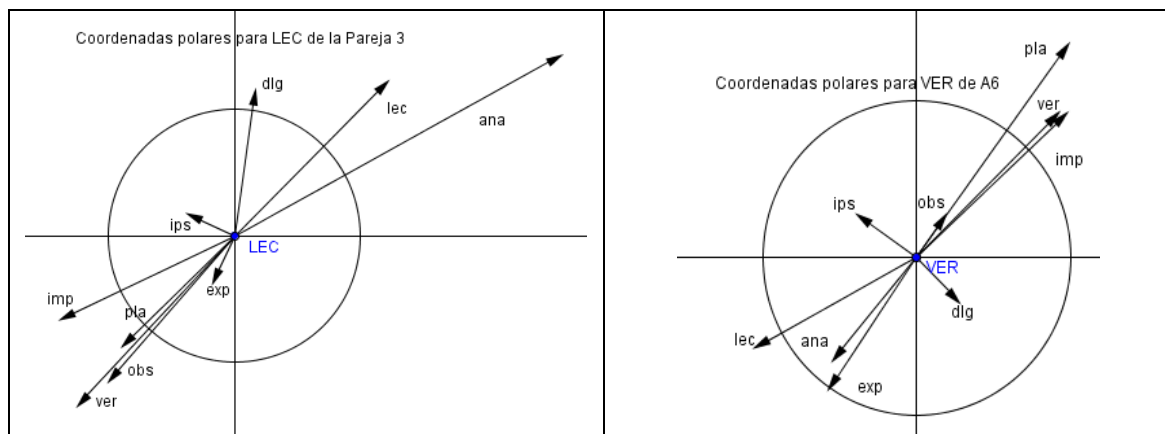
En cuanto a las relaciones excitatorias entre verificación, planificación e implementación, la dinámica estándar de los procesos de resolución de problemas otorga coherencia a dichas relaciones. La planificación conlleva habitualmente un proceso de implementación de lo planificado acompañado de verificación o control durante y/o después de dicha

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

implementación. Si no se obtienen resultados satisfactorios, se vuelve sobre el proceso de planificación o sobre el proceso de implementación. En cuanto a la relación entre verificación y observación para la pareja 3, ésta indica que mientras que uno de los sujetos está llevando a cabo acciones de verificación, el otro normalmente observa.

Tabla6  
 Datos numéricos coordenadas polares para Verificación de A5

		Lec	Ana	Exp	Imp	Ver	Obs	Ips	Dlg	
Retardo	Criterio	Condicionadas								
1	Ver	0,06	0,06	0,06	0,00	0,00	0,69	0,00	0,13	
2	Ver	0,07	0,13	0,07	0,00	0,47	0,00	0,00	0,07	
3	Ver	0,20	0,07	0,07	0,00	0,13	0,47	0,00	0,07	
4	Ver	0,13	0,20	0,07	0,00	0,20	0,13	0,00	0,13	
5	Ver	-1,02	-0,64	0,01	2,43	0,11	-0,25	-0,64	0,95	
	ZsumX	-0,56	-0,18	0,28	2,43	0,91	1,04	-0,64	1,35	
	X=	-0,25	-0,08	0,13	1,09	0,41	0,47	-0,29	0,60	
-5	Ver	-0,57	-0,90	-0,11	-0,80	0,11	2,48	1,03	-1,69	
-4	Ver	-1,26	-0,88	0,70	0,71	0,83	-0,60	-0,68	1,49	
-3	Ver	-0,54	-1,67	-0,18	0,72	0,03	2,53	1,05	-1,67	
-2	Ver	-2,00	-0,86	0,61	0,72	4,14	-1,19	-0,68	-0,06	
-1	Ver	-0,59	-1,65	-0,93	2,25	-1,65	3,83	-0,67	-0,85	
	ZsumY	-4,96	-5,96	0,09	3,60	3,46	7,05	0,05	-2,78	
	Y=	-2,22	-2,67	0,04	1,61	1,55	3,15	0,02	-1,24	
	Cuadrante(X,Y)	(- -)	(- -)	(+ +)	(+ +)	(+ +)	(+ +)	(- +)	(+ -)	
	Radio=	2,23	2,67	0,13	1,94	1,60	3,19	0,29	1,38	
	Ángulo	-83,56	-88,27	17,82	55,98	75,26	81,61	4,47	-64,10	
	Áng. Corregidos	263,56	268,27	17,82	55,98	75,26	81,61	175,53	295,90	



Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

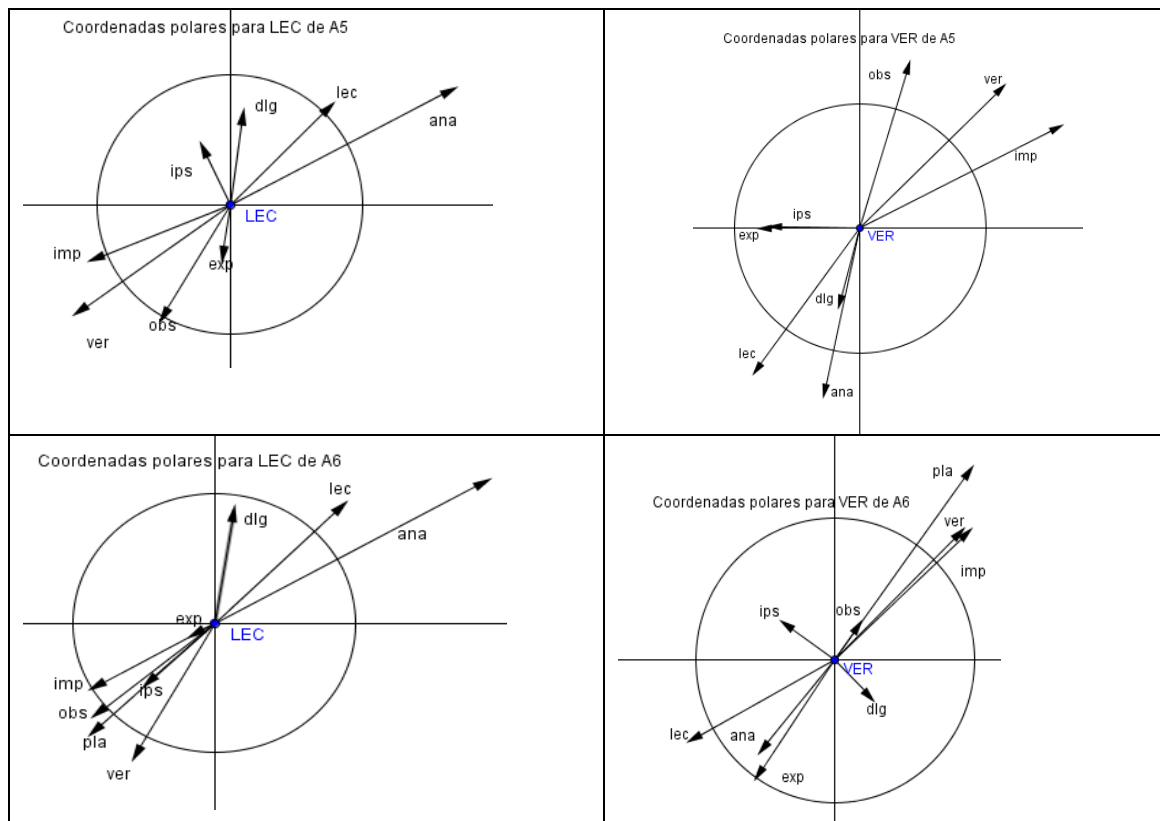


Figura 8. Gráficos coordenadas polares con episodios criterio Lectura y Verificación

## Conclusiones

El estudio llevado a cabo muestra que la aplicación del análisis secuencial y la técnica de coordenadas polares es una potente herramienta y ha sido acertada con vistas a llevar a cabo nuestro propósito de investigación.

En este sentido, nos permite abordar el estudio de las relaciones entre los episodios que se establecen durante el proceso de resolución, tomando distintas unidades de observación (pareja y sujetos) lo que a su vez, describirá el trabajo colaborativo llevado a cabo. Por tanto, se puede llevar a cabo un análisis global y particular que otras técnicas enfocan principalmente desde una vertiente cualitativa y descriptiva.

Por otro lado, el estudio estadístico no depende del tipo de i-actividad o problema que abordan los sujetos sino del sistema taxonómico elegido, añadiendo flexibilidad al enfoque para abordar nuevas investigaciones en resolución de problemas y en Educación Matemática.

Por último, no queremos olvidar, aunque en este trabajo no se ha abordado, que una de las principales dificultades de la metodología observacional y por ende, de este tipo de análisis,

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.



es el diseño y elaboración del sistema taxonómico. Además, añadido a ello, se tiene que tener en cuenta aquellos aspectos relacionados con la fiabilidad, registro y codificación de las observaciones; por ejemplo la concordancia entre observadores; así como la validez y calidad de los datos; por ejemplo la cantidad de datos mínimos necesarios.

### **Agradecimientos**

Este trabajo se ha realizado dentro del grupo FQM-193 de la Junta de Andalucía y ha sido apoyado por el proyecto I+D+i “Modelización y Representaciones en Educación Matemática”, con referencia EDU2009-11337.

### **Referencias Bibliográficas.**

Anguera, M. T. (1990). Metodología observacional. En J. Arnau, M. T. Anguera y J. Gómez (Eds), *Metodología de la investigación en ciencias del comportamiento* (pp. 125-236).

Murcia: Universidad de Murcia.

Anguera, M. T. (Ed) (1993). *Metodología observacional en la investigación psicológica*.

Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Anguera, M. T. (1997, April). From prospective patterns in behavior to joint analysis with a retrospective perspective. *Colloque sur invitation «Méthodologie d'analyse des interactions sociales»*. Université de la Sorbonne. Paris.

Anguera, M. T. y Losada, J. L. (1999). Reducción de datos en marcos de conducta mediante la técnica de coordenadas polares. En M.T. Anguera (Coord) *Observación de conducta interactiva en contextos naturales: aplicaciones* (pp.163-188). Barcelona: Universidad de Barcelona

Artzt, A. y Armour-Thomas, E. (1990). Protocol analysis of group problem solving in mathematics: A cognitive-Metacognitive framework for assessment. Comunicación presentada en *Annual Meeting of American Educational Research Association*, Boston, abril de 1990. Obtenido de <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED320927.pdf> el 13 de noviembre de 2011.

Artzt, A. y Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9(2), 137-175.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

Bakeman, R. y Gottman, J. M. (1989). *Observación de la interacción: introducción al análisis secuencial*. Madrid: Ediciones Morata.

Bakeman R. y Quera, V. (2011). *GSEQ. Software for the analysis of interaction sequences V5.1*. Obtenido de <http://www.ub.edu/gcai/gseq/>

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En G. Luengo (Coord.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp.¶) Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Obtenidode:

<http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm> el 14 de noviembre de 2010

Codina, A. (2000). *Elementos para la reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas*. Granada: Universidad de Granada.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2010). Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas de matemáticas. En F. Albuquerque, G. Lobato, J. P. De Matos, I. Chagas, E. Cruz (Eds.), *I Encontro Internacional Tic e EducaÇão. InovaÇão curricular com TIC* (pp. 1-7). Lisboa: Instituto de EducaÇão da Universidade de Lisboa.

Codina, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2011). Un sistema de categorías para el análisis de la interactividad en una i-actividad de resolución de problemas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 157-164). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

De Ketele, J. M. y Roegiers, X. (1995). *Metodología para la recogida de la información*. Madrid: La Muralla.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 193-223.

Gorospe, G. y Anguera, T. A. (2000). Modificación de la técnica clásica de coordenadas polares mediante un desarrollo distinto de la retrospectividad: aplicación al tenis. *Psicothema*, 2(2), 279-282.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. J. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princenton: Princenton University Press (Zagazagoitia, J. (1965). Como plantear y resolver problemas. México D.F.: Trillas)

Quera, V. (1993). Analisis Secuencial. En M.T. Anguera (Ed.) *Metodología Observacional en la Investigación Educativa*, Vol. 2 (pp. 341-583). Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Scakett, G. P. (1980). Lag sequential analysis as a data reduction technique in social interaction research. En D.B. Sawin, R.C. Hawkins, L.O. Walker y J.H. Penticuff (Eds.), *Exceptional infnat. Phychosocial risks in infant-environment transactions* (pp. 300-340). New York: Brunner/Mazel.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). *Ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en Educación Matemática*. Trabajo presentado en el XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.