MÓDULO 3
ANÁLISIS COGNITIVO

María José González y Pedro Gómez

Una vez realizado el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar, pasamos a realizar otro análisis en el que el foco de atención es el aprendizaje del estudiante. En MAD hemos asumido una visión funcional de las matemáticas escolares. Bajo esta perspectiva, se pone el foco de atención en la utilidad de los conceptos matemáticos para resolver problemas reales en distintas situaciones. El estudiante necesita tener un conocimiento teórico y un dominio técnico, pero además debe ser capaz de poner en juego y aplicar esos conocimientos y técnicas para resolver problemas en una variedad de situaciones. Para ello, es necesario que desarrolle estrategias cognitivas propias, que maneje distintas representaciones de las nociones matemáticas, que sea capaz de decidir por sí mismo la estrategia a seguir, que pueda argumentar sus decisiones y que comunique sus procesos de pensamiento con fluidez. La consideración funcional de las matemáticas es, por tanto, coherente con una posición constructivista del aprendizaje de los escolares. Esta consideración del aprendizaje puede concretarse en distintas metodologías de enseñanza que se analizarán en los módulos siguientes de MAD.

Centrándonos en el nivel de planificación del profesor, el análisis cognitivo sirve para concretar, sobre un tema de matemáticas, las visiones del profesor sobre las matemáticas y el aprendizaje. Se trata de hacer una descripción de las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático en cuestión y sobre sus previsiones acerca del modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje. Esta es una problemática muy compleja que puede enfocarse desde muchos puntos de vista. Aquí haremos una aproximación concreta que pretende dar respuesta a las siguientes cuestiones:

1. establecer las expectativas de aprendizaje que se desean desarrollar en el tema matemático: determinar a qué competencias se quiere contribuir, seleccionar los objetivos de aprendizaje

que se pretenden desarrollar e identificar qué capacidades de los estudiantes se ponen en juego;

2. determinar las limitaciones al aprendizaje que surgen en el tema matemático: qué dificultades y errores van a surgir en el proceso de aprendizaje;
3. expresar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas: especificar, mediante caminos de aprendizaje, conjeturas sobre el proceso que seguirán los alumnos al resolver tareas matemáticas.

Pasamos a describir en las secciones 1, 2 y 3 siguientes los organizadores del currículo que vertebran el análisis cognitivo y que acabamos de mencionar: expectativas de aprendizaje (competencias, objetivos y capacidades), caminos de aprendizaje, y errores y dificultades. En dicha descripción, establecemos relaciones entre las expectativas de aprendizaje que nosotros utilizamos y las que aparecen en los documentos institucionales colombianos (MEN, 1998a y MEN, 2006).

Por otro lado, si bien el análisis cognitivo se centra fundamentalmente en aspectos relacionados con el conocimiento, su propósito es contribuir a mejorar el rendimiento de los estudiantes. Distintas investigaciones apuntan a que el origen del bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas no solo se explica desde una dimensión puramente cognitiva (falta de conocimientos). También intervienen otros factores afectivos como la motivación o la ansiedad ante las matemáticas. De hecho, ambas facetas parecen estar directamente relacionadas, aunque queda mucho camino por recorrer para poder establecer correlaciones claras y útiles entre ellas. En este módulo, tenemos en cuenta algunos elementos afectivos: en la sección 4 hacemos una breve introducción sobre el dominio afectivo. Posteriormente, en la sección 5, presentamos algunas ideas sobre la influencia del dominio afectivo en los organizadores del currículo del análisis cognitivo. Finalmente, en la sección 6 indicamos un proceso para realizar el análisis cognitivo de un tema de matemáticas escolares. Este proceso se implementará mediante las actividades del módulo.

1. Expectativas de aprendizaje: competencias, objetivos y capacidades

Las competencias, los objetivos y las capacidades expresan tres niveles distintos de concreción de las expectativas del profesor sobre el aprendizaje del estudiante. Es importante aclarar, antes de nada, que en cada documento curricular y en cada contexto pueden variar notablemente los significados que se atribuyen a estos términos o pueden usarse otros términos equivalentes. Pero lo importante, y es uno de los propósitos de este módulo, es distinguir tres niveles de expectativas de aprendizaje que, por sencillez, identificaremos con el nombre antes referido, aunque con la clara la intención de que cada profesor pueda llegar a "traducir" estos nombres al lenguaje que se use en su contexto. A continuación, trataremos de caracterizar estos tres niveles de expectativas, concretando el significado que daremos a estos términos en el contexto de MAD, y haremos referencia a los correspondientes términos que hemos identificado en los documentos institucionales colombianos (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998a; MEN, 1998b; MEN, 2006).

1.1 Competencias y procesos generales

Una *competencia* es una meta a alcanzar tras un proceso de largo recorrido, por ejemplo, al término de la etapa educativa obligatoria o al finalizar la formación universitaria. Las competencias suelen referirse a *procesos generales* que se desarrollan a partir de los distintos contenidos del currículo, de forma transversal a todos ellos. En los documentos educativos recientes que nos son más familiares (OCDE, 2004; MEN, 2006; Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) encontramos referentes a una idea general de competencia que se concreta en un listado de competencias básicas, también llamadas generales, una de las cuales es la competencia matemática.

El documento de *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (MEN, 2006) caracteriza la idea de competencia general de la siguiente manera:

> *La noción de competencia… es entendida como saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes… las competencias son transversales a las áreas del currículo y del conocimiento. Aunque generalmente se desarrollan a través del trabajo concreto en una o más áreas, se espera que sean transferidas a distintos ámbitos de la vida académica, social o laboral.* (p. 12)

Más adelante, en la sección dedicada a la competencia matemática, reelabora de nuevo la idea de competencia general

> *como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase.* (p. 49)

Después, omite la caracterización de la competencia matemática en sí, pero pasa a describir lo que significa *ser matemáticamente competente*, y lo hace mediante referencias a los procesos generales de la actividad matemática descritos en el documento *Lineamientos curriculares en matemáticas* (MEN, 1998a):

> *Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.*
>
> *Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.*
>
> *Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.*
>
> *Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz.*

El documento de *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* indica explícitamente (pp. 50-51) que estos cuatro enunciados son equivalentes a los procesos generales[1] del documento de *Lineamientos curriculares en matemáticas* (MEN, 1998a). Por ello, nosotros también los consideraremos equivalentes y, en este documento, haremos referencia a estos cuatro enunciados refiriéndonos a ellos como *procesos generales*.

La idea de competencia matemática se reinterpreta de muy diversas formas en los distintos documentos que estamos manejando. Incluso pueden aparecer distintos enfoques dentro de un mismo marco de referencia. Por ejemplo, Rico (2005, p. 14) ha identificado distintos usos de este término en el Proyecto PISA:

> *La noción de competencia es central en el estudio PISA y desempeña diferentes funciones:*
>
> *• Expresa una finalidad prioritaria en la enseñanza de las matemáticas.*
>
> *• Expresa un conjunto de procesos cognitivos que caracterizan un esquema pragmático de entender el hacer matemáticas.*
>
> *• Concreta variables de tarea para los ítems en la evaluación; destaca por los grados de complejidad.*
>
> *• Marca niveles de dominio al movilizar las capacidades para resolver tareas matemáticas.*

En dicho proyecto, el listado de competencias matemáticas que se propone es el siguiente (OCDE, 2004, p. 40):

- ♦ Pensar y razonar
- ♦ Argumentar
- ♦ Comunicar
- ♦ Modelar
- ♦ Plantear y resolver problemas
- ♦ Representar
- ♦ Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
- ♦ Usar herramientas y recursos

Estos enunciados nos recuerdan a los procesos generales tratados antes. Por ello, en este módulo, consideraremos que el nivel de expectativas de aprendizaje que captan las competencias matemáticas PISA es equivalente al que describen los procesos generales de los documentos colombianos.

El nivel de planificación para el aula que realiza el profesor sobre un contenido matemático necesita una elevada concreción que parece alejada de la idea de competencia —transversal y de largo alcance—. Pero es imprescindible que, a la hora de realizar esta planificación para el aula, el profesor tenga en cuenta la contribución de dicha planificación a las competencias establecidas para la etapa. En este sentido, hay que tener en cuenta las competencias en todos los sentidos,

[1] Procesos generales en los Lineamientos: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

desde la selección de tareas a la evaluación, pasando por la metodología. Más adelante se concretará esta idea.

Además, vamos a introducir otros dos niveles de expectativas que sí están vinculados a los contenidos disciplinares y, por tanto, nos permiten reflexionar más de cerca sobre la planificación diaria. Continuamos, por tanto, describiendo dichos niveles y más adelante retomaremos la relación entre ellos y las competencias.

1.2 Objetivos de aprendizaje

Caracterizamos un *objetivo de aprendizaje* por:

- ♦ estar vinculado a un nivel educativo concreto;
- ♦ estar asociado a un contenido matemático concreto; y
- ♦ expresar una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario, sino que tiene que involucrar conexiones entre los conceptos y procedimientos involucrados en la estructura matemática, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza.

Por ejemplo, dos objetivos correspondientes a una unidad didáctica sobre el tema Función cuadrática para un nivel de 16 años podrían ser los siguientes:

1. Reconocer y usar el significado gráfico de los parámetros en las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar el resultado de su uso.
2. Interpretar fenómenos de movimiento rectilíneo acelerado mediante la función cuadrática.

Estos objetivos hacen referencia a las relaciones que se dan entre los distintos sistemas de representación de la función cuadrática y a uno de los fenómenos organizados por esta noción.

Pero, frases sintéticas como estas no expresan suficiente información sobre

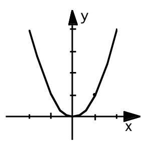
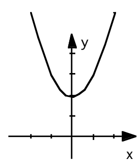
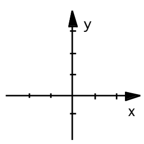
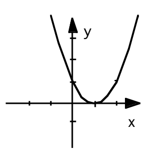
- ♦ qué tareas matemáticas sabe resolver un estudiante que ha desarrollado el objetivo y
- ♦ qué tareas matemáticas ha de resolver el estudiante durante el proceso de instrucción para desarrollar el objetivo.

Por ello, el alcance de un objetivo se concreta cuando le asociamos conjuntos de tareas matemáticas. Así, el profesor puede asociar al objetivo el conjunto de tareas que, desde su punto de vista, sirven para demostrar que quien resuelve esas tareas ha conseguido desarrollar el objetivo. Por ejemplo, el profesor puede considerar que un estudiante ha desarrollado el objetivo 1 que hemos enunciado para la función cuadrática si resuelve el conjunto de tareas siguiente (Gómez, Mesa, Carulla, Gómez y Valero, 1998, pp. 20-21).

La clase se ha organizado en grupos de cuatro estudiantes. Tu grupo debe llenar las casillas de la tabla 1 siguiente. La información gráfica que aparece en la primera columna es orientativa y no es posible utilizar las coordenadas de los puntos para resolver el problema. Cuando todos los grupos hayan terminado, cada grupo presentará y justificará los resultados de una de las filas. Se espera que cada grupo comente y critique el trabajo de los otros grupos.

Tabla 1

Un conjunto de tareas asociadas al objetivo 1 de la función cuadrática

Gráfica	*Expresión simbólica*	*Vértice*	*Eje de simetría*	*Foco*	*Directriz*	*Acción con relación a $y = x^2$*	*Raíces*	*Corte con el eje y*
	$y = x^2$	(0,0)	$x = 0$	$(0, \frac{1}{4})$	$y = -\frac{1}{4}$	*Ninguna*	*0, doble*	*y = 0*
				$(0, \frac{9}{4})$	$y = \frac{7}{4}$	*Traslación en y de dos unidades hacia arriba*		
	$y = x^2 - 1$				$y = -\frac{5}{4}$			
						*Traslación en x de una unidad hacia la derecha*		

Otro conjunto de tareas asociado al objetivo, normalmente distinto del anterior, lo conforman las tareas para el aula que el profesor considera que contribuyen a que el estudiante desarrolle el objetivo durante el periodo de instrucción establecido. Uno de los propósitos del módulo de análisis cognitivo es disponer de un procedimiento para determinar, de forma argumentada, cuál es este conjunto de tareas. Abordaremos este propósito en la sección 2, aunque es importante señalar que este procedimiento considera sólo una de las dimensiones del aprendizaje: la que estamos llamando cognitiva y que afecta a la previsión en que los estudiantes resuelven tareas matemáticas. Posteriormente, en el análisis de instrucción, se introducirán otras dimensiones (tipos de tareas, gestión de la clase, agrupamiento, significatividad, interacción, etc.) que permitirán determinar el conjunto de tareas definitivo que el profesor selecciona para llevar a cabo la instrucción.

1.3 Relación entre objetivos, estándares de competencia y procesos generales

Al buscar vínculos entre la noción de objetivo que acabamos de introducir y las que se manejan en los documentos oficiales colombianos, encontramos ciertas similitudes entre ellos, aunque también algunas diferencias. La idea de estándar en MEN (2006) es muy compleja, integradora de muchas aproximaciones diferentes y con posibilidad de interpretarse desde las distintas dimensiones y niveles del currículo:

> *...los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas se distribuyen según los tipos de pensamiento y sus sistemas, pero involucran también los procesos generales, reflejan los que tradicionalmente se habían llamado "los contenidos del área", o sea, los conceptos y procedimientos de las matemáticas, y se refieren a los contextos en los cuales se pueden alcanzar y ojalá superar los niveles de competencia seleccionados como estándares para cada conjunto de grados.* (MEN, 2006, p. 71)

Por ello, analizaremos a continuación las similitudes y las diferencias que percibimos entre estándares, objetivos y procesos. A partir de este análisis, podremos utilizar unos para relacionarlos con los otros, de forma que sean útiles al propósito de planificación que pretendemos.

Niveles Educativos

Los estándares se distribuyen por niveles educativos (concretamente, en cinco conjuntos de grados —primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a decimoprimero—). La decisión de agrupar parejas de grados se sustenta en una visión flexible de la distribución de tareas en el tiempo escolar y de una concepción del desarrollo de competencias gradual y progresivo, no necesariamente delimitado en el tiempo. En el caso de los objetivos, se exige una mayor concreción, ya que los asociamos a un único curso y se refieren a una unidad temporal concreta y relativamente breve. Pero también es claro que el enunciado de un objetivo, en sí mismo, no tiene porqué informar sobre el nivel educativo para el que se propone; más bien, ocurre que, al especificar el nivel educativo para el que se establece un objetivo, aportamos información adicional sobre el mismo. Por ejemplo, si enunciamos el objetivo "Aplicar el teorema de Pitágoras", podemos tener la intención de que los estudiantes resuelvan problemas de cálculo de distancias inaccesibles en cuya modelización aparecen triángulos rectángulos, o bien de que construyan ángulos rectos con cuerdas de nudos. Si ahora indicamos que el objetivo es para estudiantes de 13 años, estamos aportando como información adicional que nos referimos a la segunda opción. En resumen, la redacción de un objetivo, acompañada del nivel educativo al que va dirigido, concreta a un espacio temporal delimitado y breve las expectativas de aprendizaje deseables en ese periodo. Los estándares de un conjunto de grados tienen, en general, un nivel mayor de generalidad, por lo que no pueden considerarse objetivos, pero sirven de orientación para enunciar éstos, que deben ser más concretos y vinculados al requisito de temporalidad que requiera la programación. Por ejemplo, el estándar siguiente, de grados 4º y 5º, asociado a pensamiento espacial y sistemas geométricos, "Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades", nos ha servido de orientación para redactar los objetivos siguientes, que forman parte de la programación de una unidad didáctica sobre el tema Poliedros en el nivel de 13 años:

- ♦ Distinguir los poliedros regulares.
- ♦ Reconocer las propiedades más significativas de los poliedros regulares en relación con la simetría.

Tipos de Pensamiento

Los estándares se distribuyen según 5 tipos de pensamiento matemático que, en su misma denominación, se asocian a grandes áreas de contenido matemático:

- ♦ pensamiento numérico y sistemas numéricos,
- ♦ pensamiento espacial y sistemas geométricos,
- ♦ pensamiento métrico y sistemas métricos o de medidas,
- ♦ pensamiento aleatorio y sistemas de datos y
- ♦ pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

La intención explícita de describir tipos de pensamiento es integrar en un todo las distintas ramas tradicionales del conocimiento matemático escolar (aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidad y estadística). Sin embargo, los enunciados de los estándares están redactados con distintos niveles de generalidad desde el punto de vista de los contenidos. Por ejemplo, los dos estándares siguientes permiten identificar dominios acotados de contenido, pero mientras el primer caso se refiere a un ámbito muy restringido (fracciones), en el segundo se apela a un dominio de gran amplitud (representaciones geométricas en matemáticas y otras disciplinas):

- ♦ "Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones" (p. 82) y
- ♦ "Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas" (p. 86).

El estándar sobre fracciones podría considerarse, directamente, el enunciado de un objetivo; pero el estándar sobre representaciones geométricas debería concretarse más si queremos que sea útil a la planificación que pretendemos. Por ejemplo, si estamos preparando un tema sobre trigonometría, un objetivo relacionado con este estándar podría enunciarse como "Obtener triangulaciones planas a partir de situaciones geográficas espaciales y determinar posiciones de puntos, medidas de distancias o áreas de terrenos utilizando las razones trigonométricas".

El ejemplo que hemos mostrado en el apartado anterior sobre objetos tridimensionales también tiene un elevado grado de generalidad. Los dos objetivos que hemos enunciado inspirándolos en él constituyen una concreción del mismo a los poliedros regulares y a la simetría para alumnos de 13 años. Así pues, dependiendo del nivel de generalidad con que esté redactado un estándar, podremos usarlo como objetivo o, por el contrario, tendremos que concretarlo más.

Procesos generales

Los estándares incluyen en su redacción referencias a los procesos generales. Con ello, captan la idea de que el aprendizaje de los estudiantes no se reduzca a reproducir procedimientos rutinarios sobre contenidos matemáticos sino que debe incluir las actividades mentales genuinas propias del pensamiento matemático. Además, como hemos indicado en el párrafo anterior, relaciona estos procesos con las áreas de contenido tradicionales. Con ello, el estándar describe un nivel de expectativas de aprendizaje más concreto que la idea de competencia, más cercano al contenido. La noción de objetivo que nosotros hemos planteado busca también un plano de concreción intermedio entre la idea de competencia y el tercer nivel, mucho más concreto, de capacidades que describiremos en la sección siguiente. En ese sentido, comparte con el estándar la intención de hacer referencia a procesos complejos y de vincular éstos a los contenidos matemáticos. Por ello, los consideramos como referentes para el enunciado de objetivos también desde el punto de vista de los procesos, aunque es posible que necesiten alguna reformulación para ser útiles a la planificación para el aula. Por ejemplo, desde el punto de vista de los procesos, interpretamos que el estándar siguiente hace referencia fundamentalmente al proceso sobre argumentación —siendo el dominio muy amplio, desde el punto de vista de los contenidos, ya que afecta a todas las unidades de medida estandarizadas—.

- "Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias" (p.87).

Nos hemos inspirado en este estándar para redactar el objetivo siguiente, que formaría parte de una unidad didáctica sobre Área para alumnos de 16 años:

- Saber deducir las fórmulas de área de los polígonos habituales (triángulo, rectángulo, trapecio, polígonos regulares) y explicar la dependencia de la fórmula de la unidad de medida utilizada.

En este objetivo el proceso sobre argumentación se concreta en la deducción de fórmulas y en la comprensión de la influencia de la unidad de medida de superficie.

Utilidad del conocimiento

Por último, la noción de estándar trata de captar el requisito de que el conocimiento sea útil a la resolución de problemas del entorno del estudiante. Este requisito de utilidad se pone de manifiesto de forma especialmente relevante en el proceso sobre formulación, planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana. Por otro lado, desde el punto de vista del objetivo, es un referente importante a la hora de seleccionar tareas asociadas a un objetivo ya que, del abanico posible de tareas, serían más adecuadas aquellas que involucran situaciones reales cercanas al entorno del estudiante.

Estándares como fuente de inspiración para la redacción de objetivos

En resumen, consideramos que los estándares de competencia son una fuente de inspiración importante para la redacción de los objetivos de un tema matemático. Hemos argumentado que un estándar capta las actividades mentales genuinas propias del pensamiento matemático; está asociado a un nivel educativo; hace referencia al contenido matemático; y orienta la búsqueda de aplicaciones del conocimiento. Pero, para enunciar objetivos útiles al tipo de planificación para el aula que requiere el profesor, se requiere un nivel de concreción mayor que el de los estándares sobre cada uno de estos aspectos .

Por último queremos señalar que, aunque en esta sección hemos analizado las relaciones entre objetivos, estándares y procesos, la idea de estándar conlleva la preocupación por establecer unos requisitos de calidad mínimos que todos los alumnos deben alcanzar, es decir, unos referentes para la evaluación[2]. Por ello, los estándares también serán referentes destacados en el módulo de análisis de actuación, donde se profundiza en la evaluación.

1.4 Capacidades

El siguiente nivel de expectativas de aprendizaje que vamos a introducir es el que se asocia de forma más concreta a las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos del tema matemático. Tratan de captar las expectativas de aprendizaje de más bajo nivel cognitivo. Así, definimos una *capacidad* como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes, por lo cual es importante que estén enunciadas de forma que quede clara cuál es la información de partida y cuál es la información que se genera al poner en juego la capacidad.

En este nivel estamos introduciendo la idea de *procedimiento rutinario* como elemento central en la descripción de la capacidad. El calificativo de rutinario para un procedimiento depende del nivel cognitivo de los estudiantes para los que se vaya a realizar la planificación. Por ejemplo, el procedimiento para calcular el máximo o el mínimo de una función cuadrática es rutinario si los estudiantes ya conocen las aplicaciones de la derivada (a los 17 años), pero no lo es, si están aprendiendo de forma intuitiva nociones de crecimiento y decrecimiento de funciones (a los 14 años). Por tanto, a los 17 años, podríamos decir que calcular el máximo o el mínimo de una función cuadrática es una capacidad, pero a los 14 años tendríamos que enunciar varias capacidades asociadas a ese procedimiento: por ejemplo, elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función; representar gráficamente una tabla de valores; e interpretar gráficamente los máximos y mínimos. Unos párrafos más adelante retomaremos esta idea.

Aunque una misma capacidad podría corresponder a varios objetivos distintos, para obtener la lista de capacidades de un tema suele ser útil fijar un objetivo y pensar en los procedimientos rutinarios que el estudiante necesita saber hacer como condición necesaria para poder decir que ha desarrollado dicho objetivo. Por ello, hablaremos de las capacidades asociadas a un objetivo. Además, al involucrar procedimientos rutinarios, el conocimiento procedimental que se identifica al realizar el análisis de contenido es una fuente de información de primer orden para determinar las capacidades asociadas a un objetivo.

La figura 1 muestra un esquema del análisis de contenido correspondiente al objetivo 1 sobre la función cuadrática. En esta figura aparecen representados los procedimientos que transforman cada una de las formas simbólicas de la función cuadrática en otras, el significado gráfico de los parámetros de cada una de dichas formas simbólicas y las transformaciones que sufre la representación gráfica de la función cuadrática al variar esos parámetros.

[2] "Un estándar es un *criterio* claro y público que permite *juzgar si un estudiante*, una institución o el sistema educativo en su conjunto *cumplen* con unas *expectativas* comunes de calidad". (énfasis nuestro) (MEN, 2006, p. 11)

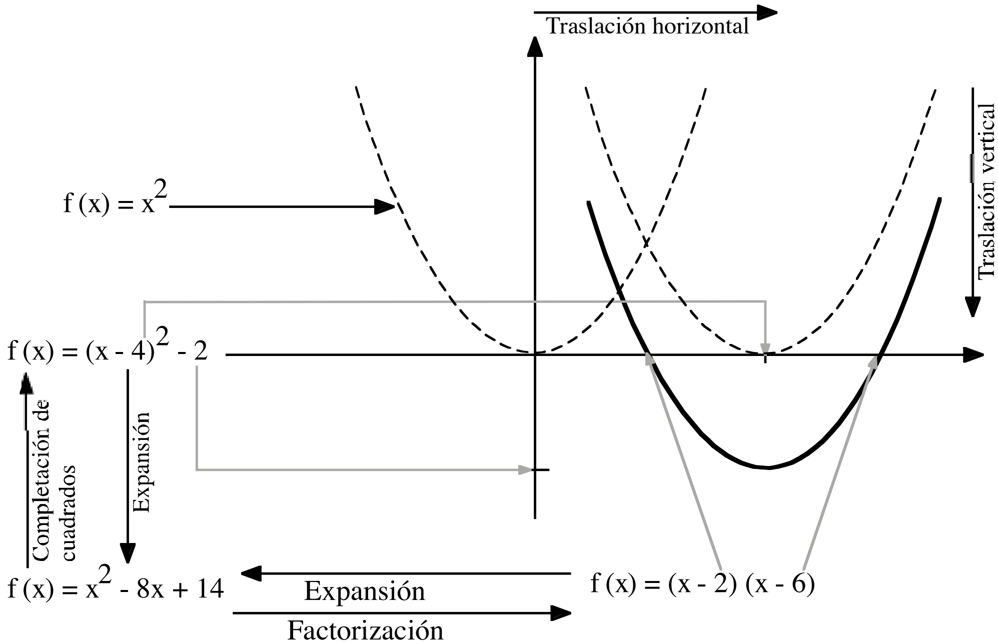


Figura 1. Procedimientos que relacionan las distintas formas de representar la función cuadrática

A partir de esta información, que surge del análisis de contenido, hemos obtenido la tabla 2 siguiente, que contiene una lista de 16 capacidades asociadas al objetivo 1 anterior sobre la función cuadrática (Gómez, 2007).

Tabla 2
Listado de capacidades asociadas al objetivo 1 sobre la función cuadrática

Cod	Capacidad
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones simbólicas):
C1	completación de cuadrados
C2	Expansión
C3	Factorización
	Identificar, mostrar y justificar los parámetros de la
C4	forma canónica (a, h, k)
C5	forma foco (p, h, k)
C6	forma estándar (a, b, c)
C7	forma multiplicativa (a, r1, r2)

	Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos
C8	coordenadas del vértice
C9	puntos de corte con el eje Y
C10	puntos de corte con el eje X
C11	coordenadas del foco
C12	ubicación de la directriz
C13	ubicación del eje de simetría
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones gráficas):
C14	Translación horizontal
C15	Translación vertical
C16	Dilatación

Nótese que el propio enunciado de cada capacidad podría usarse como enunciado de una tarea rutinaria propuesta al alumno. Así, por ejemplo, un alumno ha desarrollado la capacidad C1 cuando saber resolver una tarea como la siguiente:

Expresa la función $f(x)= x^2 +12x +10$ en forma canónica.

Las capacidades expresan los procedimientos rutinarios que forman parte del desarrollo de los objetivos. Pero no podemos concretar, de forma precisa y con carácter general, cuál es la frontera entre lo rutinario y lo no rutinario. Esto nos lleva a preguntamos cuál es el nivel de detalle requerido para redactar las capacidades de un tema. Ya hemos dicho que es el nivel cognitivo de los estudiantes para los que estamos haciendo la planificación el que puede ayudarnos a determinar ese nivel de detalle. Por tanto, previamente a la redacción de capacidades de un tema, es importante establecer cuáles son los conocimientos previos de dichos estudiantes. Esto nos permite delimitar el punto de partida de lo que consideramos rutinario para estos estudiantes.

Un segundo problema, relacionado con el anterior, que surge al describir las capacidades de un tema es decidir hasta donde llegar. Por ejemplo, si redactamos como capacidad "elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función", nos preguntamos si también es necesario redactar "sustituir valores numéricos en una expresión simbólica" y, si seguimos remontando, llegamos a preguntarnos si también es necesario redactar "calcular el cuadrado de un número". Con carácter general, podemos decir que no es necesario redactar capacidades que expresen procedimientos excesivamente alejados del tema matemático analizado por su transversalidad o por ser suficientemente conocidos por los estudiantes. Recordemos que las capacidades deben recordarnos a una tarea de tipo rutinario que tenga sentido en el tema matemático analizado. Retomando el ejemplo anterior, "elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función" sí sería una capacidad por tener sentido como tarea rutinaria en el tema de la función cuadrática, pero no serían capacidades del tema "sustituir valores numéricos en una expresión simbólica" ni "calcular el cuadrado de un número". Ambas tienen carácter transversal, no tendrían sentido como tareas propias del tema de función cuadrática y formarían parte de los conocimientos previos de los estudiantes.

Algunas recomendaciones básicas que pueden resultar útiles para obtener las capacidades de un tema son las siguientes:

- determinar los conocimientos previos de los estudiantes —delimitan el punto de partida de lo que consideramos rutinario para estos estudiantes—;
- utilizar la lista de conocimiento procedimental que surge del análisis de contenido del tema —los niveles más bajos de conocimiento procedimental corresponden a las capacidades—;
- identificar tareas rutinarias propias del tema —están directamente asociadas a procedimientos rutinarios y, por tanto, a capacidades—;
- resolver algunas tareas complejas del tema —esto nos permite identificar los procedimientos rutinarios que se requieren y que suelen ser compartidos por varias tareas complejas—. Puede ser útil realizar este proceso en parejas o en grupo: una persona resuelve la tarea diciendo en voz alta cada lo que hace o piensa y otra persona lo registra por escrito. En la descripción hecha por el resolutor es posible identificar numerosas capacidades;
- comparar entre sí enunciados de distintas capacidades para ver si corresponden al mismo nivel cognitivo; si vemos, por ejemplo, que un enunciado se puede expresar en términos de dos o más enunciados, entonces es demasiado general para ser considerado una capacidad.

Las capacidades representan los conocimientos básicos que forman parte del desarrollo de los objetivos. Pero siendo importantes estos conocimientos, el desarrollo de los objetivos que nos interesan se asocia al hecho de que el alumno sepa cómo combinarlos adecuadamente ante la resolución de tareas complejas. Es decir, el alumno ha de ser capaz de ejecutar secuencias de capacidades y ha de ver dichas secuencias de un modo global. Asimismo, dichas secuencias deben poder entremezclarse de forma coherente y con flexibilidad. En la sección siguiente se formalizará esta idea mediante la noción de camino de aprendizaje.

2. Coordinación entre competencias, objetivos y capacidades

2.1 Relación capacidades-objetivo: caminos de aprendizaje

Cada capacidad está asociada a la realización de una tarea matemática rutinaria propia de un tema. Pero los objetivos se desarrollan o se evalúan mediante tareas matemáticas no rutinarias que involucran a varias capacidades. La relación entre capacidades y tareas no rutinarias es una cuestión central a los efectos de realizar una programación para el aula. En esta cuestión intervienen las hipótesis que el profesor realiza sobre el modo en que un estudiante resolverá cada una de dichas tareas. Trataremos de captar dichas hipótesis en términos de secuencias de capacidades. Para ello, es imprescindible identificar vínculos entre capacidades y relacionarlos con las tareas que van a poner en juego dichos vínculos. La noción de camino de aprendizaje capta esta idea.

Un *camino de aprendizaje de una tarea* es una secuencia de capacidades que los alumnos pueden poner en juego al resolverla. Por ejemplo, un camino de aprendizaje para la tarea siguiente es la secuencia de capacidades C10 → C7 → C2 → C6 → C1 → C4 → C8 de la tabla 2.

> *Una parábola corta al eje X en puntos de abscisa 2 y 6. Además su coeficiente principal es 1 ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*

Un camino de aprendizaje de una tarea se construye, por un lado, a partir de la lógica con la que un resolutor experto (el profesor) resolvería dicha tarea; por otro lado, a partir del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de sus estudiantes. Una misma tarea puede tener asociados distintos caminos de aprendizaje, dependiendo del nivel educativo o del nivel cognitivo de los estudiantes. Las tareas complejas suelen tener asociados varios caminos de aprendizaje. En el anexo I se pueden ver los caminos de aprendizaje de las 19 tareas que hemos agrupado en la tabla 1 para la función cuadrática, donde se ponen en juego las capacidades de la tabla 2. En algunas de ellas se han previsto dos caminos de aprendizaje diferentes.

Si el profesor está manejando un conjunto de tareas, el correspondiente conjunto de caminos de aprendizaje se puede representar mediante un grafo. Por ejemplo, el conjunto de tareas correspondiente a la penúltima fila de la tabla 1 está representado en la figura 2. En este grafo, se indica con un redondel dónde comienza cada camino de aprendizaje. Los números en los recuadros grises indican el número de veces que se pone en juego cada capacidad. También se indica el número de veces que se pone en juego el vínculo entre cada pareja de capacidades. En el anexo II aparecen los grafos de las tres filas de la tabla 1.

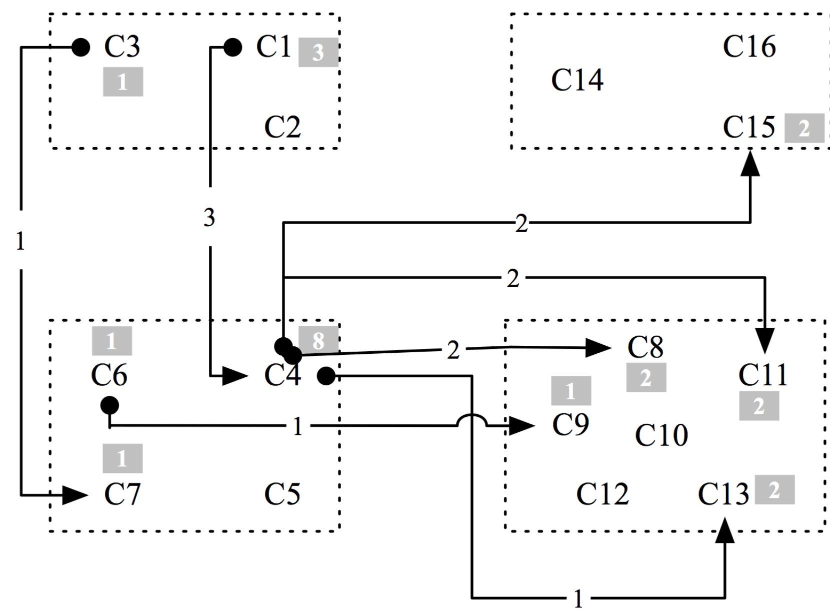


Figura 2. Caminos de aprendizaje de algunas tareas sobre la función cuadrática

Al juntar los caminos de aprendizaje de varias tareas en un grafo se obtiene una visión más global sobre los énfasis y las omisiones que se producen en ese grupo de tareas. Por ejemplo, en el conjunto de tareas representado en la figura 2 se observa que:

- Hay seis capacidades (C2, C5, C10, C12, C14, C16) que nunca se ponen en práctica.
- La conexión (natural) entre C1 y C4 se trabaja con intensidad.
- Casi todas las tareas usan la forma canónica de la función cuadrática (C4) y varias de ellas la toman como dato inicial.
- El grupo de capacidades relacionado con las transformaciones gráficas (C14 a C16) prácticamente no se trabaja.
- Se trabajan todos los elementos gráficos excepto la directriz (C12) y los cortes con el eje X (C10).

Este análisis puede realizarse sobre cualquier conjunto de tareas, pero es especialmente interesante cuando se realiza sobre un conjunto de tareas asociado a un objetivo, ya que es entonces cuando el profesor obtiene información sobre el modo en que dicho objetivo se va a desarrollar o evaluar. Cuando queremos analizar un conjunto completo de tareas asociado a un objetivo, por ejemplo, las 19 tareas de la tabla 1, tenemos que conjugar toda la información obtenida sobre ellas. Si hay muchas, como en este ejemplo, puede ocurrir que la información gráfica resulte ilegible. Entonces, dicha información puede representarse resumida en forma de tabla. La tabla 3 siguiente contiene información resumida sobre las 19 tareas: en cada casilla (i,j) aparece el número de veces que se establece una conexión desde la capacidad Ci hasta la capacidad Cj. En la última fila y en la última columna, aparece el número de veces que se pone en juego cada una de las capacidades. Resulta natural que haya muchas casillas vacías en la tabla ya que hay muchas parejas de capacidades cuya relación no tiene sentido.

Tabla 3
Información resumida sobre los caminos de aprendizaje del objetivo 1 de la función cuadrática

Capacidades de salida	Capacidades de entrada																
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
1				4													4
2			1			1			1								3
3							3										3
4		1	1		1			2			2		3		2		12
5		2		1					1		1	1					6
6									2								2
7										1							1
8				5	1												6
9																	
10																	
11					6												6
12																	
13																	
14							7										7
Total	0	3	2	10	8	1	10	2	4	1	3	1	3	0	2	0	

Conjugando toda la información (caminos de aprendizaje de cada tarea, grafos de los caminos de aprendizaje y la tabla resumen) obtenemos datos sobre la forma con la que buscamos que los escolares desarrollen el objetivo y sobre los énfasis que estamos poniendo en las tareas. En el ejemplo anterior, se ponen de manifiesto las siguientes cuestiones.

- ♦ La capacidad C16 no se pone en juego. No hay tareas que involucren la dilatación.
- ♦ El resto de las capacidades se ponen al menos una vez en juego. Las capacidades C10 —puntos de corte con el eje X— y C12 —ubicación de la directriz— se usan una única vez.
- ♦ Las capacidades C4, C8 y C11 se ponen en juego con frecuencia. Estas capacidades tienen que ver con el vértice y el foco de la parábola.
- ♦ Las relaciones más frecuentes entre capacidades se dan de la C11 a la C5 —obtener los parámetros de la forma de foco a partir de las coordenadas del foco—, de la C8 a la C4 —obtener los parámetros de la forma canónica a partir de las coordenadas del vértice— y de la C1 a la C4 —obtener la forma canónica por completación de cuadrados—.

- ♦ La secuencia C14 → C8 → C4 ocurre cinco veces en las tareas de la tercera función cuadrática. Esta secuencia permite obtener las coordenadas del vértice a partir de la gráfica de la función y del conocimiento de que ha sido trasladada horizontalmente.

Este proceso constituye una importante herramienta para analizar conjuntos de tareas ya que, a partir del mismo, podemos modificar las tareas si deseamos corregir algo. En consecuencia, es útil para seleccionar y diseñar las tareas que finalmente formarán parte de la instrucción.
El análisis de los errores y las dificultades que presentamos en la sección 3 complementa este proceso, ya que señala cuestiones clave que supondrán complicaciones para el estudiante: son nodos o conexiones del grafo sobre los que el profesor debe insistir.

2.2 Relación competencias-objetivos

Recordemos que cada objetivo de un tema contribuye al desarrollo de competencias. Las tareas asociadas a dicho objetivo permiten argumentar cuál es el tipo de contribución que se realiza.

Al decidir a qué competencias de una lista dada contribuye una determinada tarea se suele percibir una gran distancia entre enunciados de tipo transversal y de largo recorrido, y enunciados de tareas muy concretas, asociadas a un contenido matemático y que se llevan a cabo en un periodo temporal breve. Esta circunstancia puede llevarnos a pensar que todas las tareas contribuyen a todas las competencias de la lista. Cuando esto ocurre, la información que obtenemos no nos permite mejorar el conjunto de tareas. Por ello, aportamos aquí algunas ideas que esperamos contribuyan a aclarar el modo en que hay que realizar la asignación. Mostramos unos descriptores que clarifican el alcance de cada competencia y, en consecuencia, ayudan a determinar a qué competencias contribuye una tarea.

Para caracterizar las competencias PISA utilizamos descriptores que provienen de análisis que se han realizado de dichas competencias en distintos documentos, entre los que cabe destacar Lupiáñez (2009) y Rico y Lupiáñez (2008). Los procesos que aparecen en los documentos colombianos de Estándares y de Lineamientos se describen en estos documentos de forma muy breve y tienen muchas similitudes con los descriptores que se usan para caracterizar las competencias PISA; por ello, utilizamos para caracterizarlos los descriptores PISA complementados con algunas frases que provienen de los documentos de *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (MEN, 2006) y *Lineamientos curriculares en matemáticas* (MEN, 1998a).

Descriptores de las competencias PISA
El proyecto PISA describe las competencias como se presenta en la tabla 4.

Tabla 4

Descriptores de las competencias PISA

Competencia	Descriptores
Pensar y Razonar	- Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿cuántos hay? ¿cómo encontrarlo? si es así, ¿entonces…? etc.); - Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones; - Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); - Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.
Argumentar	- Conocer lo que son las pruebas y demostraciones matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático. - Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos. - Disponer de sentido para la heurística (qué puede o no ocurrir y porqué). - Crear y expresar argumentos matemáticos.
Comunicar	- Expresar de manera oral o escrita acerca de las matemáticas. - Comprender e interpretar los enunciados orales o escritos de otras personas.
Modelizar	- Estructurar y analizar la situación o problema inicial. - Expresar esa situación en términos matemáticos. - Construir o usar modelos matemáticos para resolver ese problema matemático. - Interpretar los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial. - Analizar y criticar ese modelo y sus resultados.
Plantear y Resolver Problemas	- Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados). - Resolver distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías.
Representar	- Decodificar y codificar. - Interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones. - Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico, y Operaciones	- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural. - Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal. - Manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas.

	- Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.
Emplear soportes y herramientas tecnológicas	- Tener conocimientos sobre diferentes soportes y herramientas. - Ser capaz de utilizar herramientas de las tecnologías de la información que pueden ayudar en la actividad matemática. - Conocer las limitaciones de las herramientas y de las tecnologías de la información.

Descriptores de los procesos generales según los Lineamientos curriculares en matemáticas MEN (1998a)

La tabla 5 presenta los descriptores de los procesos generales según el documento de lineamientos (MEN, 1998a).

Tabla 5

Descriptores de procesos generales según MEN (1998a)

Procesos Generales	Descriptores
Formulación, tratamiento y resolución de problemas.	- Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados). - Resolver distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías. - Encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos. - Modificar condiciones y originar otros problemas.
Modelación	- Estructurar y analizar la situación o problema inicial. - Expresar esa situación en términos matemáticos. - Construir o usar modelos matemáticos para resolver ese problema matemático. - Interpretar los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial. - Analizar y criticar ese modelo y sus resultados.
Comunicación	- Expresar de manera oral o escrita acerca de las matemáticas. - Comprender e interpretar los enunciados orales o escritos de otras personas. - Decodificar y codificar.

Razonamiento	- Interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones. - Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito. - Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural. - Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal. - Conocer lo que son las pruebas y demostraciones matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático. - Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos. - Disponer de sentido para la heurística (qué puede o no ocurrir y porqué). - Crear y expresar argumentos matemáticos.
Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos	- Ejecutar de forma segura y rápida procedimientos mecánicos o de rutina ("algoritmos"). - Explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya y seguir la lógica que lo sustenta. - Saber cuándo aplicar un método de manera fiable y eficaz. - Describir, comparar y ensayar distintos algoritmos, apreciando sus ventajas y desventajas. - Inventar otros procedimientos para obtener resultados en casos particulares. - Manejar calculadoras, hojas de cálculo, elaborar macroinstrucciones y programar computadores.

Descriptores de lo que significa ser matemáticamente competente según los Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas (MEN, 2006)

La tabla 6 presenta los descriptores que caracterizan la idea de ser matemáticamente competente según MEN (2006).

Tabla 6

Descriptores de lo que significa ser matemáticamente competente (MEN, 2006)

Competencias	Descriptores
Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.	- Estructurar y analizar la situación o problema inicial. - Expresar esa situación en términos matemáticos. - Construir o usar modelos matemáticos para resolver ese problema matemático. - Interpretar los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial. - Analizar y criticar ese modelo y sus resultados. - Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados). - Resolver distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías. - Encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos. - Modificar condiciones y originar otros problemas.
Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.	- Expresar de manera oral o escrita acerca de las matemáticas. - Comprender e interpretar los enunciados orales o escritos de otras personas. - Decodificar y codificar. - Interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones. - Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito. - Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural. - Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.	- Conocer lo que son las pruebas y demostraciones matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático. - Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos. - Disponer de sentido para la heurística (qué puede o no ocurrir y porqué). - Crear y expresar argumentos matemáticos.

Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz.	- Ejecutar de forma segura y rápida procedimientos mecánicos o de rutina (“algoritmos”). - Explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya y seguir la lógica que lo sustenta. - Saber cuándo aplicar un método de manera fiable y eficaz. - Describir, comparar y ensayar distintos algoritmos, apreciando sus ventajas y desventajas.
	- Inventar otros procedimientos para obtener resultados en casos particulares. - Manejar calculadoras, hojas de cálculo, elaborar macroinstrucciones y programar computadores.

Cualquiera que sea el conjunto de competencias elegido, para determinar a qué competencias contribuye una tarea tenemos que verificar si se ponen en juego en ella algunos de los descriptores de la competencia. Pero además, se deben tener en cuenta los siguientes dos criterios.

Contribución significativa. Se debe contribuir a la competencia en forma significativa. Por ejemplo, tal como se reconoce en el documento de Estándares (p. 52), el proceso general de formulación, tratamiento y resolución de problemas es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas en todas las tareas. Pero consideramos que para que una tarea contribuya a este proceso, debe ser claro que la tarea promueve en el estudiante una actitud mental perseverante e inquisitiva ante la posibilidad de seguir distintas estrategias, de encontrar múltiples soluciones que debe interpretar, debe implicar un reto suficientemente complejo y atractivo.

Énfasis en la contribución. De las posibles competencias a las que contribuye una tarea, se deben seleccionar aquellas a las que la tarea contribuya con más énfasis. Por ejemplo, una tarea puede requerir que el estudiante haga una argumentación. La tarea puede requerir el uso del lenguaje matemático, y posiblemente la utilización de variables y la resolución de alguna ecuación. Pero el énfasis en la tarea lo tiene la idea de argumentar. Éste proceso es el hilo conductor de la tarea. En este caso, indicaremos que la tarea contribuye sólo a la competencia de argumentación.

Teniendo en cuenta estas indicaciones, una manera operativa de describir la contribución del conjunto de tareas asociado a un objetivo a una lista de competencias es rellenar una tabla como la tabla 7. Hacemos esta propuesta adaptando las ideas que se encuentran en Lupiáñez (2009) sobre el establecimiento de vínculos entre objetivos y competencias. En la primera columna aparecen las tareas asociadas al objetivo. Cada una de las columnas siguientes corresponde a una de las competencias elegidas. En cada celda ponemos una marca si consideramos que la tarea de esa fila contribuye al desarrollo de la competencia de la correspondiente columna. La contribución global del objetivo a una competencia i se obtiene mirando la columna i, donde se ve la cantidad de tareas que contribuyen a dicha competencia. En la tabla 7, hemos representado esta contribución con distintos tonos de gris.

Tabla 7
Contribución de un objetivo al desarrollo de competencias

Tareas	Competencia 1	Competencia 2	Competencia 3	…
Tarea 1	×		×	
Tarea 2		×	×	
…	×	×	×	

El rellenado de una tabla de contribución de un objetivo al desarrollo de competencias puede hacerse siguiendo criterios detallados. Por ejemplo, en la tabla 8 se tienen en cuenta cada uno de los descriptores de cada competencia: si una tarea potencia un descriptor de competencia, se pone una cruz en la casilla correspondiente. Este sistema fue desarrollado durante el desarrollo de MAD 1 por el grupo 6 (Arenas, Morales, Becerra, Urrutia, Gómez, en prensa, p. 391-392). Nótese que en lugar de usar una escala de grises, se establecen porcentajes que representan el número de descriptores de competencia potenciados por las tareas. En la tabla, el grupo realiza el análisis para todos los objetivos.

Tabla 8

Relación entre objetivos, tareas y competencias en el trabajo del grupo 6 de MAD 1

Tareas	Competencias												
	FTRP				SR				FCEP				
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	e
	Objetivo 1												
Medida de los triángulos parte 1, problema 1	✔		✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	
Problema 2	✔		✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	
Medida de los triángulos parte 2	✔		✔			✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Objetivo 2												
La sombra	✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
La cometa Pregunta a	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Pregunta b	✔		✔		✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	
	Objetivo 3												
Las moscas	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Total por descriptores	20 de 28				25 de 28				33 de 35				
Total por competencia	71,5%				81,3%				94,3%				

FTRP: formulación, tratamiento y resolución de problemas; SR: sistemas de representación; FCEP: formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Si repetimos este análisis para todos los objetivos de un tema, como se presenta en la tabla 8, obtenemos información relevante sobre las competencias a las que contribuye globalmente el tema. Nuevamente, esta información nos permite redefinir las tareas, caso de que no se esté contribuyendo a las competencias en la forma pretendida.

3. Dificultades de aprendizaje y errores[3]

El análisis cognitivo también se ocupa de las limitaciones para el aprendizaje que, de diferente modo, pueden distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los escolares. Es una manera de

[3] La reflexión que realizamos en esta sección se sustenta fundamentalmente en los trabajos de Socas (1997) y Rico (1995). Además, utilizamos la reelaboración de estas ideas que ha realizado Lupiáñez (2009). Hemos incorporado algunos párrafos de este documento de forma literal.

complementar la reflexión realizada sobre las expectativas de aprendizaje ya que, metafóricamente, el análisis cognitivo atiende tanto la parte positiva del aprendizaje (qué esperamos que sean capaces de hacer los escolares), como la parte negativa (qué limitaciones pueden surgir en ese proceso de aprendizaje).

Son muchas las variables que intervienen en la caracterización de las limitaciones del aprendizaje. Algunas se relacionan con aspectos sociales, como el ambiente familiar o el nivel socio cultural. Otras, se ocupan de trastornos cognitivos que pueden afectar al rendimiento en matemáticas. Nuestra perspectiva es muy concreta: en el análisis cognitivo nos preocuparemos de limitaciones de aprendizaje relacionadas con temas matemáticos particulares. Para ello, siguiendo el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997), consideraremos las dificultades y los errores, como dos tipos relacionados de limitaciones en el aprendizaje. A continuación los caracterizamos y ejemplificamos. Pero es importante señalar que, aunque el análisis cognitivo se focaliza en un tema matemático, algunas de estas limitaciones trascienden al tema matemático, son de tipo transversal y se expresan mediante enunciados generales que después se concretan de distintas formas sobre cada tema. Es importante que el profesor maneje simultáneamente estos distintos niveles. En las secciones siguientes quedará más claro el alcance de esta observación.

3.1 Dificultades de aprendizaje en matemáticas

Una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos. Mantendremos, a nivel teórico, esta definición general, que se irá concretando más adelante a través de ejemplos y de la relación entre las dificultades y los errores. La importancia de las dificultades reside en identificarlas, conocer qué factores son los responsables de que aparezcan y saber de qué modo se pueden superar. Socas (1997) organiza las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en cinco categorías, según los factores que las originan (p. 126):

1. Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Estas dificultades tienen que ver con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, con su naturaleza teórica y formal y, al mismo tiempo, práctica. Estas dificultades también se relacionan con las formas de representar esos conceptos y con las relaciones que se establecen entre esas representaciones. La complejidad de lenguaje que se usa en las matemáticas, también están en la base de este tipo de dificultades. Por ejemplo, cuando se introducen las potencias, el sistema de representación utilizado desarrolla la idea de potencia como número de veces ($3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$), pero este significado falla cuando la idea de potencia se extiende a otros números (¿qué significado tiene $3^{5/6}$ en términos de número de veces?). En el anexo III detallamos esta dificultad relacionada con la complejidad del lenguaje matemático.

2. Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático. Estas dificultades se deben a la naturaleza lógica de las matemáticas. El desarrollo de explicaciones, argumentos y demostraciones concentran a menudo muchas de las dificultades de los escolares. La resolución de problemas y la modelización, aún cuando los escolares manejan con soltura nociones matemáticas, también genera numerosas dificultades. Por ejemplo, los estudiantes tienden a pensar que todas las operaciones matemáticas responden a un modelo lineal. Es esta la causa de que tengan dificultades para realizar operaciones no lineales, como es el caso de la potenciación (¿por qué no ocurre que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?). En el anexo IV damos algunos ejemplos más.

3. Asociadas a los procesos de enseñanza. Estas dificultades se deben a una determinada organización curricular, a la forma en que están realizados los agrupamientos en clase (homogéneo o heterogéneo), a determinados estilos de enseñanza, etc.

4. Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Las distintas teorías del aprendizaje especifican estadios de desarrollo intelectual que indican qué tipos de razonamiento y de tareas pueden resolver los alumnos en cada estadio.

5. Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. La consideración social de las matemáticas lleva, en ocasiones, a que los estudiantes desarrollen sentimientos de ansiedad o infravaloración personal.

3.2 El error en el aprendizaje de las matemáticas

El error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y tareas concretas que les demanda el profesor. Por ello, es el error el que más nos acerca al tema matemático que estemos analizando. Rico (1995) indica que la mayoría de los investigadores atribuyen a los errores las siguientes características.

- Son sistemáticos, no se producen por azar, manifiestan un proceso mental subyacente incompleto o equivocado que el sujeto utiliza de modo consistente y con confianza.
- Se manifiestan de manera sorprendente: por lo general se mantienen ocultos durante un tiempo y sólo surgen ante determinadas tareas.
- Son persistentes debido a que pueden afectar a una parte amplia de conocimiento adquirido que previamente ha tenido validez en otros contextos.
- Ignoran el significado, de modo que respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan.

Esta caracterización excluye de la noción de error aquellas manifestaciones equivocadas de los alumnos que se dan por azar y que sólo reflejan una falta de cuidado o un lapsus ocasional.

Una aclaración que queremos añadir es que, al igual que las capacidades y los objetivos, el listado de errores que pretendemos obtener debe estar asociado a un nivel educativo determinado y a unos estudiantes concretos, posiblemente hipotéticos. Por ello, se trata de un listado que no tiene porqué agotar todas las posibilidades que se encuentren en la literatura. En la sección siguiente concretamos el modo en que vamos a tratar las dificultades y los errores en el análisis cognitivo. No obstante, queremos indicar que la literatura trata los errores con profusión y, aunque nosotros los manejaremos de una forma particular, queremos aportar algunas referencias sobre el tema que pueden encontrarse en el anexo V.

3.3 Dificultades y errores en el análisis cognitivo

En el análisis cognitivo nos centraremos en los errores que están relacionados con las dificultades 1 y 2, por ser éstos los que están más directamente vinculados al contenido matemático. No obstante, incluso en estos dos tipos, hemos expresado como dificultades enunciados generales como "la complejidad del lenguaje matemático". Esta dificultad, mirada desde un tema matemático, se concreta sobre los contenidos de dicho tema. Por ejemplo, en el tema de función cuadrática se expresaría como la "dificultad para relacionar las formas simbólicas y gráfica de la función cuadrática". Lo importante es que el profesor tenga como referente el enunciado general y sea capaz de mirarlo desde su tema matemático.

Para cada dificultad que el profesor haya expresado en un tema, enuncia un listado de errores que describen las manifestaciones equivocadas en las que van a incurrir los estudiantes. Por ejemplo, la dificultad expresada antes sobre la función cuadrática se manifestaría mediante errores como los siguientes (Zaslavsky, 1997):

- identificar el parámetro a de la forma estándar $ax^2 + bx + c$ con la pendiente de la parábola;
- considerar que el parámetro b de la forma estándar traslada horizontalmente la gráfica de la parábola; y
- considerar que el parámetro c de la forma estándar forma parte del vértice de la parábola.

Un análisis detallado de errores y dificultades sobre el número natural puede encontrarse en Lupiáñez (2009). En la tabla 9 siguiente mostramos un breve extracto adaptado de dicho trabajo.

Tabla 9
Algunas dificultades y errores relacionados con los números naturales

Dificultades	Errores
Predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa	Aplicar propiedades aditivas a la operatoria con potencias
	Resolver problemas multiplicativos mediante operaciones aditivas
Desconexión entre diferentes representaciones de los números naturales	Expresar incorrectamente números grandes en notación científica
	Aplicar la reglas de valor posicional del SDN a la numeración romana
Dificultades para interpretar las reglas que determinan el sistema decimal de numeración	Confundir el valor de una cifra con su valor posicional
	Leer o escribir incorrectamente números naturales en los que interviene el 0.

Estos listados de dificultades y errores intervienen en distintas fases del análisis cognitivo. Por un lado, al considerar que las limitaciones de aprendizaje son la cara negativa de las expectativas, permiten revisar éstas de forma que se incorpore a ellas la superación de las dificultades y errores detectados. Los enunciados de objetivos y de capacidades de un tema deben incorporar, en consecuencia, elementos relacionados con las dificultades y errores. Por ejemplo, el objetivo 1 de la función cuadrática y las capacidades C6, C8 y C14 de la tabla 2, tratan específicamente las dificultades y errores que acabamos de enunciar para este tema. Por otro lado, también intervienen en el análisis de tareas que se realiza mediante los caminos de aprendizaje. Un estudiante que tiene una dificultad incurrirá en errores durante el proceso de resolución de una tarea, de forma que su actuación no podrá asociarse con ninguno de los caminos de aprendizaje previstos. Por tanto, la información sobre errores y dificultades permite al profesor identificar aquellos caminos de aprendizaje en los que un estudiante no tendrá éxito, por no haber desarrollado las capacidades necesarias o los vínculos entre ellas. Como consecuencia, podrá revisar las tareas, por ejemplo, para introducir aquellas en las que se pongan en juego las secuencias de capacidades que involucran dificultades de los escolares o para promover que varias tareas hagan intervenir a una misma capacidad correspondiente a un error frecuente.

Durante el desarrollo de MAD 1, uno de los grupos, el grupo 4 (Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero, en prensa), desarrolló una modificación de los caminos de aprendizaje que incluía los errores. Lo denominaron, por su aspecto, "espina de pescado". A continuación mostramos un ejemplo proporcionado por este grupo, que trabajó sobre el tema Método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para grado noveno (14-16 años). La tabla 10 muestra los errores y dificultades identificados por el grupo 4 para este tema.

Tabla 10
Errores y dificultades para el tema método gráfico para solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para grado noveno

Dificultades	Errores
	Complejidad de los objetos matemáticos
Dificultad para representar sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano.	E1. Confunde los parámetros de la ecuación de una recta en su forma estándar y = mx+b para representarla sin hacer tabulación (Ej: toma el valor de b como la pendiente). *E2. Calcula parámetros usando fórmulas o reglas de procedimientos erróneas.* E3. Asume que todas las gráficas de las rectas son lineales y no afines. *E4. Ubica en el plano puntos no colineales.*
Dificultad para establecer la solución de un sistema lineal a partir de expresiones algebraicas y/o representación de rectas en el plano.	E5. Ubica el punto de corte de las dos rectas por encima del punto de corte de cada recta con el eje y. *E6. Utiliza escalas inapropiadas para solucionar sistemas de ecuaciones.* E7. Relaciona incorrectamente el valor de las pendientes de dos rectas con su posición relativa en el plano. E8. Considera que la igualdad en los coeficientes de las mismas variables implica representación de rectas coincidentes. E9. Asume que dos ecuaciones no son equivalentes si la una no es múltiplo entero de la otra. E10. Considera que dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son: $m_1 = -m_2$ o $m_1 = 1/m_2$. E11. Escribe expresiones que no tienen concordancia con las relaciones implícitas entre las variables en una situación. E12. Confunde la representación grafica con el respectivo número de soluciones del sistema (Ej: relacionar que rectas superpuestas repre-

	sentan un sistema con única solución).
	E13. Confunde en un par ordenado las ordenadas con las abscisas (implica obtener una solución intercambiada: x por y).
Procesos propios del Pensamiento Matemático	
Dificultad para representar situaciones no rutinarias con Sistemas de Ecuaciones Lineales identificando las variables y la relación establecida entre ellas.	E14.: Reduce un problema de dos variables a una sola variable. E15. Despeja variables ignorando la jerarquía de las operaciones (implica obtener ecuaciones no equivalentes). E16. Iguala todas las ecuaciones a cero. E17. Supone que las rectas que representan móviles que parten de un mismo lugar deben partir del mismo punto en el plano. *E18. Ubica en el eje de las ordenadas la variable dependiente.* *E19. Soluciona un sistema de ecuaciones hallando el valor de una sola variable.*

Uno de los objetivos enunciados por el grupo fue el siguiente.

Objetivo 2. Comprender la noción de solución de un sistema lineal relacionando la existencia de única solución, infinitas soluciones o ninguna solución con la posición relativa de las rectas en el plano.

Una de las tareas que el grupo seleccionó asociada a este objetivo fue la siguiente.

Tarea 4: Rectas en el plano
Ubique en un plano pares ordenados que cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de sus coordenadas sea 2 y trace la recta que los une.
- La diferencia de sus coordenadas sea 3 y trace la recta que los une.

¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Qué relación tiene el punto de corte de las dos rectas con las condiciones dadas?

Para esta tarea, construyeron la espina de pescado. En palabras del grupo: “La columna de la espina es el camino de aprendizaje y las espinas representan los posibles errores. La secuencia se lee desde la cola hacia la cabeza del pescado… En ella mostramos la relación que se da entre un camino de aprendizaje y los posibles errores en los que se puede incurrir en el desarrollo del mismo: establece una secuencia de capacidades y entre ellas se señala el posible error que lo puede conducir a soluciones incorrectas de la tarea” (Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero, 2011, p. 15). La figura 3 muestra su representación.

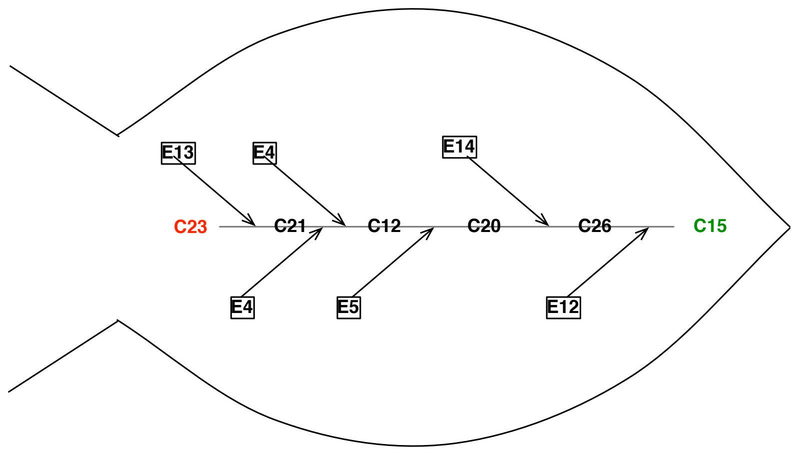


Figura 3. Espina de pescado

Las capacidades a las que hace referencia la espina de pescado son las siguientes:

C12. Representa rectas en el plano a partir de dos o más puntos.

C15. Determina la posición relativa de dos rectas en el plano.

C20. Halla las coordenadas del punto intersección de dos rectas, si existe.

C21. Identifica las coordenadas de puntos pertenecientes a una recta.

C23. Elabora e interpretar tablas de valores.

C26. Relaciona la representación gráfica de una situación con los datos del enunciado.

4. Dimensión afectiva en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

El dominio afectivo aglutina un "extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de esta dominio las actitudes, creencias y emociones" (McLeod, 1989, p. 245). Por ejemplo, los factores afectivos pueden explicar la ansiedad que los sujetos experimentan ante la resolución de problemas de matemáticas, aunque sus conocimientos sean amplios. De manera general, la relación que se establece entre cognición y afecto es cíclica: por una parte, la experiencia que tiene el alumno cuando aprende matemáticas le provoca distintas emociones e influye en la formación de sus creencias. A su vez, las creencias que tiene el sujeto influyen en su actitud ante el aprendizaje y en su rendimiento (Diego, 2011).

4.1 Descriptores del dominio afectivo

En las descripciones anteriores, vemos que empiezan a aparecer algunos descriptores básicos del dominio afectivo: creencias, emociones y actitudes. Los definimos brevemente a continuación.

Creencias

Según la RAE, una creencia es "el firme asentimiento y conformidad con algo. El completo crédito que se presta a un hecho o noticia como seguros o ciertos". Una creencia no existe si no hay una persona que la profesa. Por eso, una característica remarcable de la creencia es que tiene que ser expresada por alguien como su propia opinión: "Yo creo que…". Por tanto, las creencias forman parte del conocimiento subjetivo de las personas. Este conocimiento subjetivo puede estar validado o no como conocimiento objetivo. Por ello, en ocasiones no hay una frontera clara entre el conocimiento y las creencias.

En el ámbito de las matemáticas, distintos autores establecen categorías de creencias (que sirven tanto para profesores como para estudiantes).

Las siguientes son algunas creencias sobre las matemáticas como disciplina.

- Los problemas de matemáticas se pueden resolver mediante la aplicación directa de fórmulas y procedimientos mecánicos infalibles.
- Las matemáticas son exactas, precisas, no ambiguas.
- Las matemáticas son difíciles, sólo las personas con talento pueden aprender matemáticas.
- Las matemáticas son abstractas, alejadas de la realidad cotidiana.
- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.

Las siguientes con creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

- Para aprender matemáticas hay que memorizar procedimientos y fórmulas. Por tanto, la mejor forma de aprender es repetir los procedimientos muchas veces.
- La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.
- Resolver un problema de matemáticas es cuestión de suerte, de encontrar la idea feliz.
- Las matemáticas no se pueden aprender de memoria, hay que entenderlas.
- Para resolver problemas de matemáticas hay que tener mucha paciencia.

Y las siguientes son creencias acerca de uno mismo como aprendiz de Matemáticas.

- Se me dan bien las Matemáticas.
- Cuando me enfrento a un problema de matemáticas tengo confianza en que encontraré la solución.
- Si me esfuerzo mucho estudiando matemáticas estoy seguro de que aprenderé.
- Me entretengo mucho haciendo problemas de matemáticas
- Aunque me esfuerce mucho tratando de resolver problemas de matemáticas no lograré encontrar la solución.

Emociones

Según la RAE, una emoción "es una alteración del ánimo intensa y pasajera, agradable o penosa, que va acompañada de cierta conmoción somática". Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para el sujeto. La ansiedad, la frustración, el miedo, la ira, la satisfacción, la inseguridad, la culpabilidad, la gratitud, la desesperación, etc. son emociones.

Actitudes
Según la RAE, una actitud "es una disposición de ánimo manifestada de algún modo". Una actitud expresa una intención personal e influye en el comportamiento. No es la expresión de lo que uno cree sino la predisposición a actuar que tiene. El interés, la curiosidad, la perseverancia, el rechazo, el espíritu crítico, la objetividad, la flexibilidad, etc. son actitudes.

4.2 Factores que determinan el desarrollo de creencias, emociones y actitudes
Desde el punto de vista de la planificación de la enseñanza, al profesor le interesa conocer cuáles son los factores que influyen en el desarrollo del dominio afectivo. Gestionar esos factores puede ayudarle a intervenir en ellos. Al igual que el profesor establece sus expectativas sobre lo cognitivo, también puede describir sus expectativas sobre lo afectivo.

Algunos factores identificados en la literatura son los siguientes.

- Contexto en el que el estudiante vive (consideración social o familiar de las matemáticas).
- Contexto en el que el estudiante está escolarizado (actitud de los profesores de matemáticas).
- Experiencias vividas por el estudiante sobre sus propias habilidades.
- Interacciones diarias en el aula.

Por ejemplo, la creencia de que los problemas de matemáticas se pueden resolver mediante la aplicación directa de fórmulas y procedimientos mecánicos infalibles está originada en situaciones de clase en las que los estudiantes continuamente son enfrentados a tareas matemáticas rutinarias en lugar de resolver problemas matemáticos genuinos que no tienen una solución obvia o cerrada.

Aunque la complejidad del tratamiento de estos factores supera con creces el propósito de estas páginas, abordamos esta cuestión a través de un constructo en el que confluyen aspectos afectivos y cognitivos y al que consideramos especialmente útil desde el punto de vista de la planificación: la motivación.

4.3 Motivación
El término motivación se viene definiendo desde hace años en la literatura sobre investigación educativa. Lejos de haberse llegado a un consenso sobre su significado, se pueden encontrar descripciones muy diversas y un amplio abanico de recomendaciones, a veces contrapuestas, para el profesor. En todo caso, asumiremos la definición de motivación dada por González y Tourón (1992, p. 285) como el "proceso que explica el inicio, dirección, intensidad y perseverancia de la conducta encaminada hacia el logro de una meta, modulado por las percepciones que los sujetos tienen de sí mismos y por las tareas a las que se tienen que enfrentar". En situaciones educativas, la motivación hace referencia al grado de participación y perseverancia de los estudiantes al enfrentarse a una tarea.

La motivación se relaciona de forma compleja con otros constructos del dominio afectivo. Por ejemplo, las creencias sobre uno mismo como aprendiz (p. ej., la autoeficacia) y las emociones (p. ej., la ansiedad), intervienen en la motivación y cobran sentido en la práctica a través de propuestas de intervención que pretenden aumentar la motivación.

Uno de los marcos teóricos que han estudiado en profundidad la motivación en relación con el aprendizaje es el que analiza las creencias motivacionales y su relación con el aprendizaje autoregulado (self-regulated learning) (Zimmerman, 2004). Desde el punto de vista afectivo, se consideran creencias motivacionales como la autoeficacia —la apreciación del estudiante sobre sus posibilidades para resolver problemas—, el valor intrínseco de las tareas —la apreciación del estudiante sobre la utilidad, interés o importancia de una tarea— y la orientación hacia objetivos —la apreciación del estudiante sobre las razones que le llevan a comprometerse en la resolución de una tarea, que pueden ser intrínsecas, como la curiosidad o las ganas de mejorar, o extrínsecas, como la recompensa o el reconocimiento de otros—. Desde el punto de vista del aprendizaje, se analizan estrategias de aprendizaje autoregulado, que pueden ser de distintos tipos. Mencionamos brevemente algunos ejemplos.

- Estrategias de auto-regulación personales (cómo el estudiante organiza e interpreta información): subraya, resume, esquematiza, busca reglas mnemotécnicas, anota los errores,…
- Estrategias de auto-regulación sobre el comportamiento: se autoevalúa, busca refuerzos (premios), evita penalizaciones,…
- Estrategias de auto-regulación sobre el entorno: busca ayuda en compañeros o en el profesor, amplía la bibliografía, acondiciona su espacio físico para eliminar distracciones,…

Las creencias motivacionales se desarrollan y a su vez promueven el desarrollo de estrategias de auto-regulación (McWhaw y Abrami, 2001). Este vínculo nos da algunas pautas sobre la intervención en el aula. A modo de ejemplo, mostramos algunas indicaciones para el profesor que se consideran eficaces para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de estrategias de auto-regulación.

- Promover el diálogo reflexivo, verbalizar el pensamiento, hacer puestas en común
- Dar feedback, de modo que la información sea clara y permita al estudiante seguir avanzando; que el feedback se refiera a la resolución de la tarea, no al estudiante.
- Ayudar al estudiante a distinguir lo importante de lo superfluo, proporcionarle ejemplos que rebajen el nivel de abstracción de una tarea.
- Ayudan al estudiante a conectar el conocimiento nuevo con el previo e integrar ejemplos de la vida real en las tareas.

En el caso de las matemáticas, encontramos algunos programas de intervención concretos basados en las ideas anteriores. Por ejemplo, Guerrero y Blanco (2004) proponen un programa de intervención orientado a enseñar al estudiante a afrontar situaciones de ansiedad y a manejar emociones ante situaciones de resolución de problemas de matemáticas. En la figura 4 se puede ver un resumen.

Modelo de resolución de problemas	Entrenamiento en autoinstrucciones
1. Analizar y comprender el problema ¿Qué es lo que desconoces?, ¿cuáles son los datos? ¿cuáles son las condiciones?, ¿es posible cumplir las condiciones del problema?, ¿son suficientes, insuficientes, contradictorios para cumplir los objetivos el problema?, ¿qué conceptos y procesos matemáticos están implicados en el problema?, ¿los dominas?,	***1. Autoinstrucciones antes del suceso. Fase de preparación*** Preocuparse no cambia el problema Piensa qué has de hacer exactamente Tú puedes conseguirlo. Es más fácil una vez que se ha empezado. Estarás bien No te dejes llevar por pensamientos negativos. Respira y relájate
2. Buscar una estrategia de solución ¿Has visto este problema anteriormente, otro igual o parecido?, ¿conoces alguno relacionado, algún teorema que pueda ser útil?. observando el planteamiento del problema, intenta pensar sobre problemas que tengan la misma o similar incógnita. en estas condiciones, ¿hay algún problema que has resuelto?, ¿podrías usarlo?, ¿podrías usar su resultado o su método?	***2. Autoinstrucciones al comienzo del suceso: Fase de confrontación*** Cálmate, puedes controlarlo Piensa qué has hecho en otras ocasiones. Sólo tienes que dar un paso cada vez. Si no piensas en el miedo no lo sentirás Concéntrate en lo que tienes que hacer, no en el miedo. Esto sólo es una señal para relajarse.
3. Llevar a cabo el plan y examen. Comprobar que los pasos son correctos. Registrar todos los cálculos, resaltar los logros intermedios, actuar con orden, con precisión y explicar el estado de la ejecución.	***3. Autoinstrucciones durante la tarea: Fase de afrontamiento*** Respira profundamente, haz una pausa y relájate. ¿Cuál es el paso siguiente?. Concéntrate en él. El miedo es natural, surge, persiste pero no es peligroso Esto terminará enseguida, no puede durar siempre, cosas peores podrían pasar. He sobrevivido otras veces y a cosas peores Concéntrate en lo que estás haciendo
4. Revisión de la solución y del proceso Haremos al alumno las siguientes preguntas: ¿sabes analizar el resultado, examinar los argumentos?, ¿sabes obtener estos resultados de diferente modo?, ¿podría resolverlo de un vistazo?, ¿puede usar el resultado para otro problema?	***4. Fase de reforzamiento del éxito*** Lo hiciste!!. Conseguiste el objetivo. No fue tan malo. Lo hice bien. Tus pensamientos eran peores que la realidad. La próxima vez será más fácil. Poco a poco lo conseguirás.

Figura 4. Modelo de resolución de problemas y entrenamiento en autoinstrucciones (Guerrero y Blanco, 2004, p. 10)

5. Influencia del dominio afectivo en los organizadores del análisis cognitivo

El estudio del dominio afectivo es complejo puesto que las interacciones entre lo cognitivo y lo afectivo constituyen un imbricado mosaico de factores y particularidades en cada persona. En el ámbito educativo la consideración de lo afectivo es relativamente reciente (unos 30 años). Se sabe que lo afectivo influye de forma importante en el rendimiento de los estudiantes, pero no se han logrado establecer correlaciones fuertes entre los factores analizados y dicho rendimiento y distintos autores reportan inconsistencias en este campo. Lo que el estudiante cree sobre las matemáticas influye en sus emociones al estudiar matemáticas, lo que le predispone a tener distintas actitudes. Por ejemplo, un estudiante que tenga una creencia negativa sobre sí mismo ante el aprendizaje de las matemáticas, tenderá a sentir inseguridad al resolver problemas de matemáticas y ello podrá llevarle a tener una actitud de rechazo hacia las mismas. Pero también puede ocurrir que un estudiante con una creencia positiva sobre las matemáticas, como por ejemplo su utilidad, no se sienta bien ante tareas matemáticas concretas y, como consecuencia, también tienda a rechazarlas. Igualmente resulta paradójico que aunque el estudiante se muestre confiado y seguro de sus habilidades no llegue a implicarse en el futuro: "Me encantan pero no soy capaz de hacer una carrera que lleve muchas Matemáticas" (Báez, 2007, p. 304).

Estos factores son, a priori, ajenos al contenido concreto que se trabaje, incluso algunos de ellos son ajenos a la propia materia. Pero el profesor debe tratarlos a partir de cada uno de los contenidos a enseñar. Es por esto que iniciamos aquí la consideración de lo afectivo en el análisis cognitivo y será retomado en el análisis de instrucción.

5.1 Dominio afectivo y expectativas de aprendizaje

Desde el punto de vista de las expectativas de aprendizaje, es frecuente que los documentos normativos mencionen algunas dimensiones afectivas, aunque no llegan a dar detalles sobre el modo de abordarlas. Por ejemplo, en el documento de *Estándares básicos de competencias en matemáticas* (MEN, 2006) se reconoce que el aprendizaje de las matemáticas "no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social" (p. 47). Sin embargo, este planteamiento inicial no parece concretarse más allá de la recomendación general de que se planteen actividades relacionadas "con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas" (p. 70). Hay un apartado que recoge la necesidad de fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas en el que se reitera como recomendación el tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. En el documento *Lineamientos curriculares en matemáticas* (MEN, 1998a) hay una práctica ausencia de referencias al ámbito afectivo.

En el actual currículo de matemáticas español, uno de los bloques de contenido, llamado Contenidos comunes, contiene aspectos de tipo transversal entre los que se incluyen algunos referentes afectivos: se promueve el desarrollo de la confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas, así como la perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas. No se hace ninguna recomendación concreta sobre el modo de conseguirlo a través de los distintos contenidos. Sin embargo, en un currículo español previo (MEC, 1991), se abordaron específicamente las actitudes en matemáticas asociadas a los distintos contenidos del currículo. Así, por ejemplo, el bloque de contenido denominado Medida, estimación y cálculo de magnitudes, está distribuido de la siguiente manera:

Conceptos

1. Medición de magnitudes. Unidades de medida.
2. Medida de ángulos. Sistema sexagesimal.
3. Fórmulas para el cálculo de longitudes, perímetros, áreas y volúmenes en figuras y cuerpos geométricos.

Procedimientos

1. Expresión de las medidas de los objetos con la terminología y precisión adecuadas.
2. Medida de longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras utilizando fórmulas y otras técnicas.
3. Acotación de errores cometidos al estimar, medir o aproximar una magnitud.
4. Estimación de la medida de objetos, tiempos y distancias.

Actitudes

1. Disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medias de objetos, espacios y tiempos cuando la situación lo aconseje.
2. Revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados.
3. Cuidado y precisión en el uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.

Observamos, a lo largo de este currículo, que el vínculo de las actitudes al contenido se expresa a través del desarrollo de hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, la creatividad en la formulación de conjeturas, la flexibilidad para cambiar el propio punto de vista, la autonomía intelectual para enfrentarse con situaciones desconocidas y la confianza en la propia capacidad de aprender y de resolver problemas. Estas finalidades se materializan mediante tareas matemáticas contextualizadas, entendiéndose que el planteamiento de este tipo de tareas y su implementación mediante metodologías centradas en el estudiante contribuye a su desarrollo.

Por tanto, el enunciado de expectativas de aprendizaje en el análisis cognitivo puede complementarse mediante la consideración de expectativas de tipo afectivo. Algunos ejemplos son los siguientes.

Funciones y gráficas para alumnos de 14-15 años

1. Reconocimiento y valoración de la precisión y utilidad del lenguaje numérico y gráfico para representar, comunicar y resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
2. Curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos.
3. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante los mensajes de naturaleza numérica y gráfica.

4. Voluntad y gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.
5. Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo como la manera más eficaz para realizar determinadas actividades (planificar y llevar a cabo un proyecto, toma de datos, etc).

Geometría del plano para alumnos de 15-16 años

1. Reconocimiento de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno.
2. Desarrollo de estrategias personales para la resolución de problemas sobre el Teorema de Pitágoras.
3. Confianza y perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras.
4. Interés por la investigación de las relaciones no conocidas de las figuras geométricas.

Los tres niveles de expectativas de aprendizaje que hemos considerado para el ámbito cognitivo no tienen su correspondiente en el dominio afectivo. No obstante, podemos apuntar algunas relaciones: el carácter transversal de las expectativas de tipo afectivo y la necesidad de periodos de tiempo relativamente largos para desarrollarlas las coloca en un nivel cercano a las competencias. Pero es recomendable que sus enunciados hagan referencia al tema matemático que se esté trabajando, por lo que también están cercanas a los objetivos. Lo más importante es poder establecer vínculos entre las tareas matemáticas que se vayan a proponer y el desarrollo de expectativas de tipo afectivo.

5.2 Dominio afectivo y limitaciones de aprendizaje

Muchas de las limitaciones de aprendizaje tienen su origen en el dominio afectivo. Estas limitaciones suelen trascender al tema matemático que se esté analizando, pero no por ello son menos importantes, ya que se manifiestan a través de los distintos temas del currículo. Los errores y dificultades que hayamos descrito al realizar el análisis cognitivo de nuestro tema no modifican su enunciado; sin embargo, sabiendo que su origen puede ser afectivo, podemos intervenir en ellos de distintas formas. Veamos la sección siguiente.

5.3 Dominio afectivo e hipótesis de aprendizaje

Parece haber dos factores clave a la hora de desarrollar el dominio afectivo: seleccionar tareas retadoras intelectualmente para el estudiante, pero que estén a su alcance; y planificar cuidadosamente la implementación en el aula de dichas tareas y la actuación del profesor durante la misma. Por tanto, una de las dimensiones curriculares más influyentes en el dominio afectivo es la metodológica. La forma en que el profesor gestiona la clase y la manera en que implementa las tareas matemáticas influye en el tipo de creencias, emociones y actitudes de los estudiantes. En consecuencia, condiciona el modo en que los estudiantes se enfrentan a las tareas. Así, podemos afirmar que las hipótesis que realiza el profesor sobre las estrategias que puede seguir un estudiante al resolver una tarea dependen de forma muy directa de la forma en que dicha tarea se implementa en el aula. Los caminos de aprendizaje se pueden enriquecer incorporando esta información. Ya vimos que se podía incorporar la información relativa a los errores (espina de pescado); también se pueden incorporar elementos de autorregulación del aprendizaje y conductas del profesor que intervienen en la estrategia y la modifican cuando el estudiante encuentra errores (figura 5).

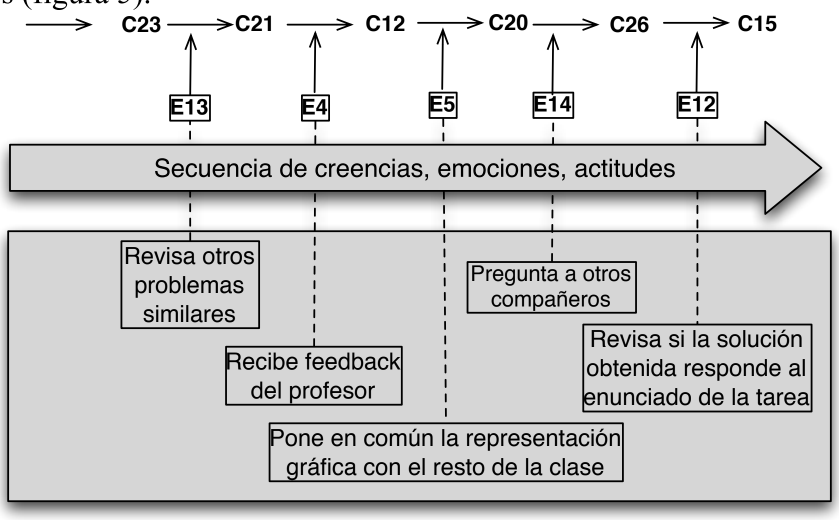


Figura 5. Inclusión de (errores y de) elementos afectivos en los caminos de aprendizaje

5.4 Contribución al desarrollo de expectativas de tipo afectivo

Hemos visto en 3.2 una forma de caracterizar la contribución de un conjunto de tareas (asociada a un objetivo) al desarrollo de un conjunto de competencias. Análogamente, podemos caracterizar la contribución de un conjunto de tareas al desarrollo de expectativas de tipo afectivo. En este caso, es esencial tener en cuenta que el modo en que se van a implementar las tareas. Veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que en un tema de geometría plana hemos establecido las expectativas de tipo afectivo siguientes.

- Mejorar las emociones: (EA1) ansiedad, (EA2) gratitud, (EA3) satisfacción, (EA4) ira.
- Mejorar las actitudes: (EA5) creatividad, (EA6) interés, (EA7) curiosidad, (EA8) perseverancia.
- Desarrollar creencias motivacionales: (EA9) autoeficacia, (EA10) metas personales.

Consideramos la tarea de la cometa siguiente, a la que denominamos (adaptación de De Villiers, 1996).

- Construye una cometa en Geogebra. Comprueba que la construcción es correcta. Compara con las construcciones de tus compañeros.
- Construye los puntos medios de los lados y únelos consecutivamente para formar un cuadrilátero inscrito. ¿Qué observas sobre él? Escribe tu conjetura.
- Arrastra un vértice cualquiera de la cometa a otra posición. ¿Se confirma tu conjetura? Si no, ¿puedes modificarla?

- ¿Es cierta la conjetura también cuando la cometa es cóncava?
- Establece una conclusión final para cualquier tipo de cometa. Compárala con tus compañeros, ¿es la misma o diferente?
- ¿Puedes explicar porqué es verdad?
- Compara tus explicaciones con las de tus compañeros. ¿Coincides con ellos? ¿Por qué? ¿Qué explicación es la más satisfactoria? ¿Por qué?

Prevemos implementar esta tarea según las siguientes orientaciones.

- Se da iniciativa al alumno en todo momento.
- Se le pregunta explícitamente por la realización de conjeturas.
- Se requiere que las ponga por escrito.
- Se hacen puestas en común para contrastar los resultados.
- Es necesario justificar las decisiones.
- Se pide generalización.
- Se acompaña de un material que le permite visualizar de una manera sencilla el resultado que se pide.
- El profesor proporciona feedbak en los momentos necesarios.

Teniendo en cuesta este planteamiento, consideramos que se trata de una tarea que incita al estudiante a construir una respuesta nueva para él; que la ayuda del material ayudará a rebajar la ansiedad ante la resolución de problemas y constituirá un elemento motivador; que el hecho de obtener la respuesta por sí mismo dará satisfacción al estudiante; que la generalización que se solicita contribuirá a mejorar la curiosidad en otros problemas; y que mejorará la apreciación del estudiante sobre sus posibilidades, es decir, su autoeficacia. Reflejamos estas consideraciones en la tabla 11.

Tabla 11
Contribución de una tarea al desarrollo de expectativas de tipo afectivo

	Emociones				Actitudes				Creencias	
	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6	EA7	EA8	EA9	EA10
Tarea de la cometa	✔		✔		✔		✔		✔	

Al igual que hicimos con las competencias, si contamos con descriptores de las expectativas de tipo afectivo, podemos concretar más esta asignación, Por ejemplo, podemos considerar los descriptores de la creatividad (EA5) dados por Boesen (2006):

Originalidad. Se lleva a cabo una secuencia de razonamiento nueva para el estudiante.

Flexibilidad. Se realizan distintas interpretaciones de la situación y se adapta la información que se posee a dichas interpretaciones.

Plausibilidad. se dan argumentos para apoyar la estrategia seguida y que motivan el porqué las conclusiones son ciertas o plausibles.

Adecuación. Los argumentos se basan en propiedades matemáticas fundamentales de los objetos sobre los que se está razonando.

Teniendo en cuenta estos descriptores, consideramos que la tarea de la cometa contribuye al desarrollo de la creatividad a través de dos de sus cuatro descriptores: plausibilidad y adecuación. De manera análoga a lo que hicimos con las competencias, podríamos registrar esta información en una tabla para expectativas de tipo afectivo usando los descriptores de dichas expectativas. Reiterando estos procesos sobre todas las tareas de una propuesta, formaríamos una tabla —equivalente a la tabla 8 para competencias—, que nos indica el grado en que la propuesta contribuye al desarrollo de las expectativas de tipo afectivo consideradas.

6. Descripción del Proceso para hacer el análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares

Los puntos siguientes orientan sobre la forma de proceder al realizar el análisis cognitivo de un tema matemático. Es importante destacar que no se trata de una secuencia lineal ordenada de apartados, sino que cada punto puede ser objeto de revisión al realizar los otros puntos. En la figura 6 puede verse un esquema de los procesos cíclicos involucrados en el análisis cognitivo.

1. Establecer el listado de competencias y las expectativas de tipo afectivo a las que se quiere contribuir.
2. Enunciar el listado de objetivos que se pretenden desarrollar.
3. Enunciar el listado de capacidades implicadas en los objetivos del tema.
4. Enunciar el listado de dificultades y errores previstos.

Para cada objetivo:

5. organizar y, si es necesario, reformular las capacidades que corresponden al objetivo;
1. organizar y, si es necesario, reformular las dificultades y errores previstos en relación al objetivo;
2. identificar un primer conjunto de tareas asociado al objetivo;
3. establecer los caminos de aprendizaje de cada tarea, representar en forma de grafo y/o en forma de tabla el conjunto de caminos de aprendizaje;
4. analizar la contribución del conjunto de tareas al desarrollo del objetivo, teniendo en cuenta las dificultades y los errores previstos;
5. establecer la contribución de este conjunto de tareas al desarrollo de competencias; y
6. revisar todo el proceso; en particular, si fuese necesario, modificar el conjunto de tareas.

Coordinar la información correspondiente a cada objetivo:

1. representar en forma de grafo y/o en forma de tabla el conjunto de caminos de aprendizaje de todos los objetivos;
2. en función de este grafo, revisar los listados de expectativas y de tareas para mejorar lo que sea necesario; y
3. caracterizar la contribución de la propuesta a las expectativas planteadas.

La información obtenida en el análisis cognitivo se complementará en los módulos posteriores, en los que se incorporarán nuevos criterios de análisis y selección de tareas.

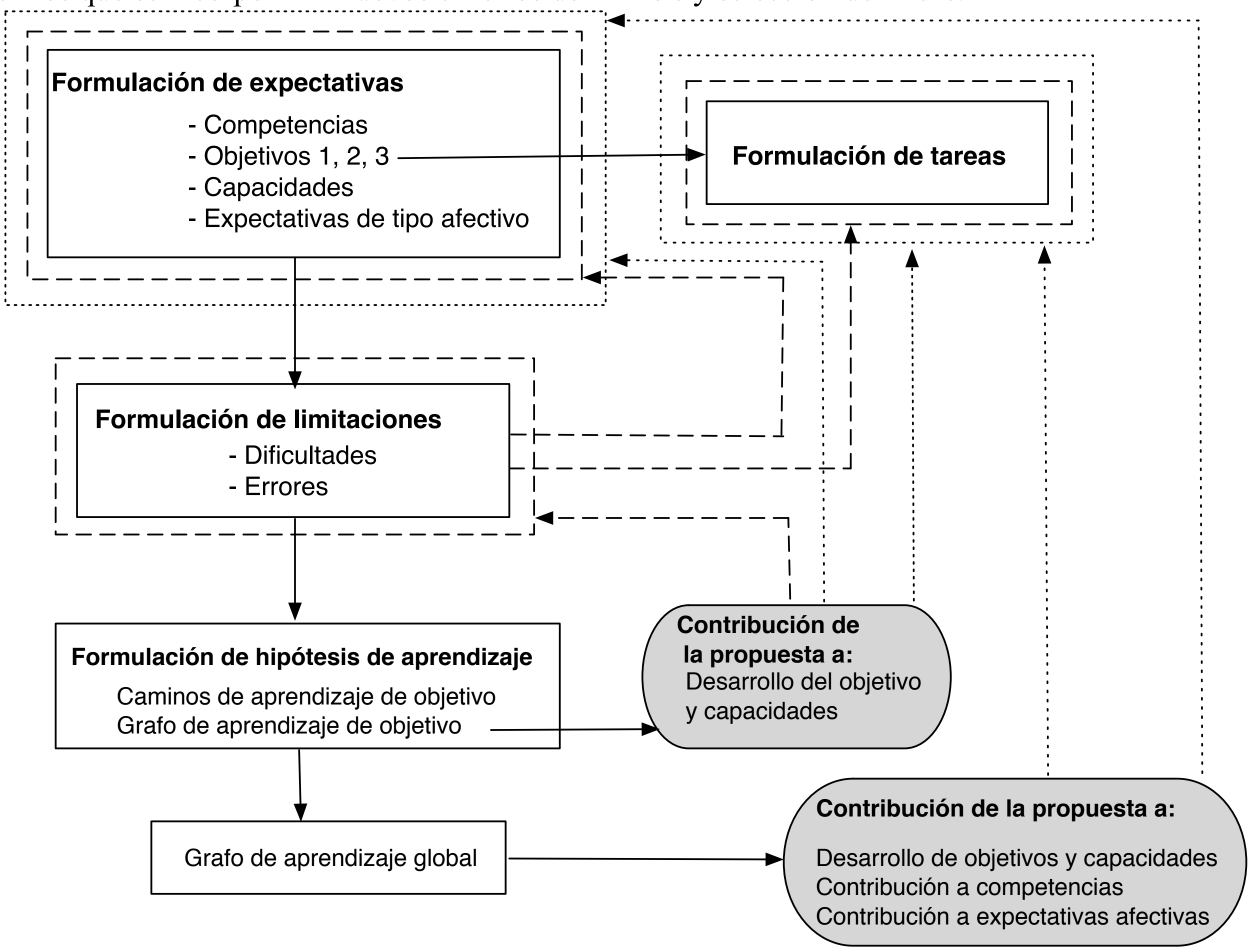


Figura 6. Esquema del análisis cognitivo

7. ANEXO 1. CAMINOS DE APRENDIZAJE DE LAS TAREAS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Enumeramos las tareas de acuerdo con el orden de las casillas en la tabla 1, empezando en la segunda fila ya que la primera es un ejemplo en el que no hay ninguna tarea por resolver. Así, por ejemplo, la casilla (1,2) corresponde a la primera casilla vacía de la tabla —hallar la expresión simbólica para la función cuadrática de la segunda fila—, mientras que la casilla (2,5) corresponde a la identificación del foco para la función cuadrática de la tercera fila de la tabla.

7.1 Casilla (1,2): Expresión Simbólica

Conozco las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz. Debo identificar las coordenadas del foco (C11) e identificar los parámetros de la forma foco (C5). Debo hacer una operación algebraica para hallar el valor de *p* a partir de la ecuación de la directriz.

C11 → C5

7.2 Casilla (1,3): Coordenadas del Vértice

Debo reconocer que la forma de foco y la forma canónica son equivalentes.

C11 → C5 → C4

7.3 Casilla (1,4): Eje de Simetría

Debo reconocer que el eje de simetría pasa por el vértice y el foco.

C11 → C5 → C13

Aquí habría la posibilidad de que el estudiante sólo reconozca la relación entre el eje de simetría y el vértice, lo que implicaría pasar por C4 primero.

7.4 Casilla (1,8): Raíces

Debo pasar a la forma de foco, expandir y después factorizar. No esperamos que los escolares conozcan fórmulas directas.

C11 → C5 → C2 → C3 → C7

7.5 Casilla (1,9): Corte con el eje y

Aquí hay claramente dos formas: reemplazar $x = 0$ en cualquiera de las formas simbólicas o usar la forma estándar.

C11 → C5 → C9

C11 → C5 → C2 → C9

7.6 Casilla (2,1): Gráfica de la función

Reconozco la traslación vertical

$$C4 \rightarrow C15$$

7.7 Casilla (2,3): Vértice

Conozco la forma simbólica. La completación de cuadrados es o automática o sencilla. En ese sentido, hay una situación en la que el escolar puede reconocer esta forma simbólica como estándar o canónica o las dos.

$$C4 \rightarrow C8$$
$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C8$$

7.8 Casilla (2,4): Eje de Simetría

Necesito reconocer que el eje de simetría pasa por el vértice.

$$C4 \rightarrow C13$$
$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C13$$

7.9 Casilla (2,5): Foco

Puedo reconocer que ya es la forma del foco o pensar que tengo que hacer completación de cuadrados.

$$C4 \rightarrow C11$$
$$C1 \rightarrow C4 \rightarrow C11$$

7.10 Casilla (2,7): Acción sobre $y = x^2$

Reconozco la traslación vertical.

$$C4 \rightarrow C15$$

7.11 Casilla (2,8): Raíces

Debo factorizar.

$$C3 \rightarrow C7$$

7.12 Casilla (2,9)

Reconozco que es la forma estándar.

$$C6 \rightarrow C9$$

7.13 Casilla (3,2): Forma Simbólica

Reconozco la transformación gráfica y su relación con los parámetros.

$$C14 \rightarrow C8 \rightarrow C4$$

7.14 Casilla (3,3): Vértice

Lo obtengo de lo anterior.

C14 → C8

7.15 Casilla (3,4): Eje de Simetría

C14 → C8 → C4 → C13

7.16 Casilla (3,5): Foco

Reconozco la equivalencia entre la forma canónica y la forma estándar.

C14 → C8 → C5 → C11

7.17 Casilla (3,6) Directriz

Debo reconocer el valor p en la forma de foco y restarlo a la ordenada del vértice.

C14 → C8 → C4 → C5 → C12

7.18 Casilla (3,8): Raíces

Debo factorizar

C14 → C8 → C4 → C3 → C7 → C10

7.19 Casilla (3,9): Corte con el Eje y

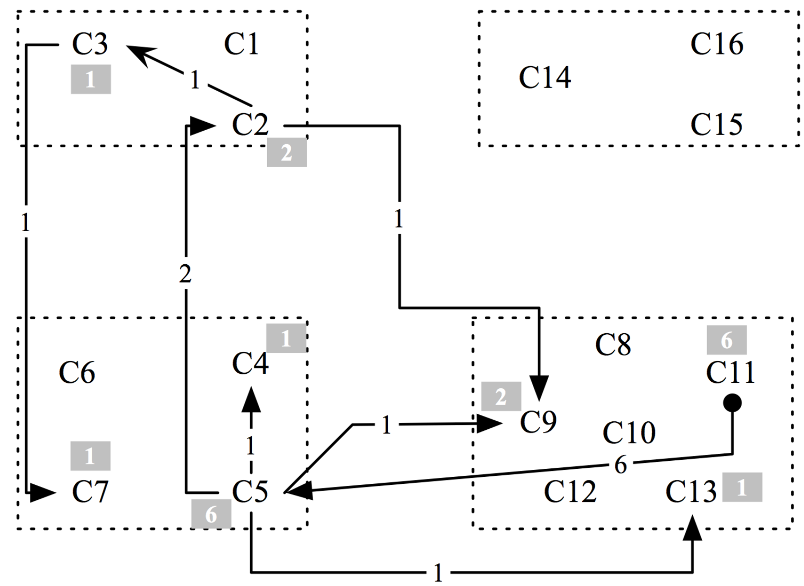
Debo expandir la forma canónica. Reconozco el corte en la forma estándar.

C14 → C8 → C4 → C2 → C6 → C9

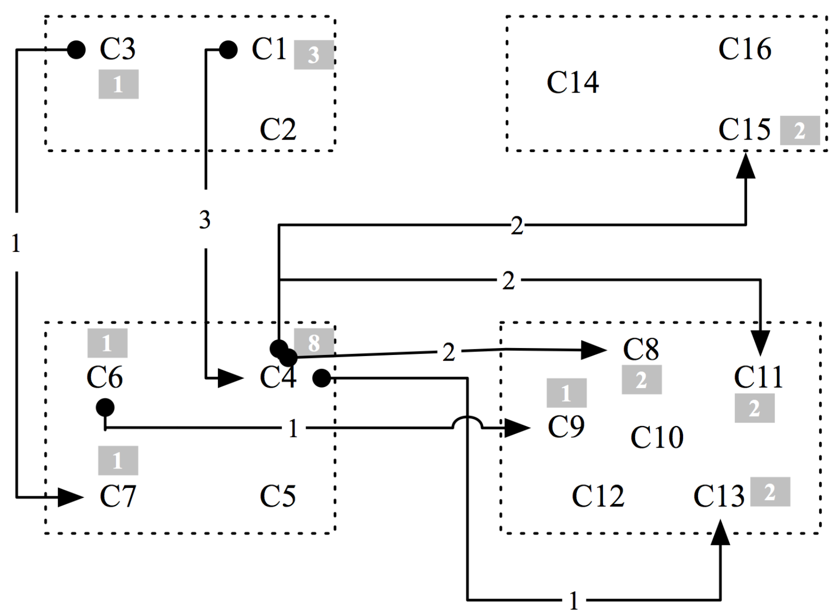
8. Anexo II. Grafos de caminos de aprendizaje

Los siguientes son los grafos de los caminos de aprendizaje de cada una de las filas de la tabla 1. Los hemos separado de esta forma puesto que el grafo de todas las tareas sería demasiado complejo y cada fila tiene coherencia puesto que se refiere a una función cuadrática concreta. En cada grafo, hemos indicado el número de veces que se pone en juego cada capacidad, el número de veces que se pasa de una capacidad a otra y los puntos de inicio de los diferentes caminos de aprendizaje.

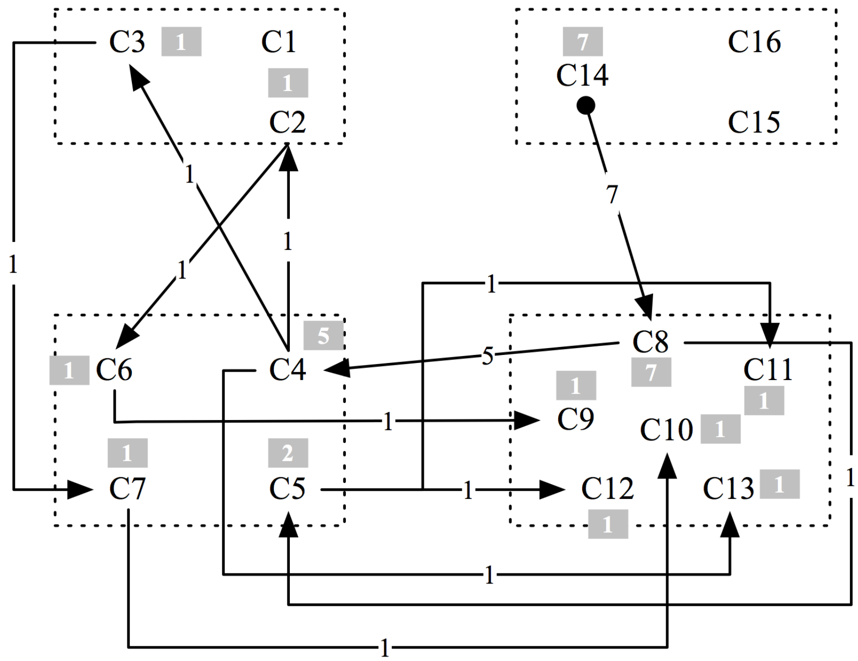
Función 1



Función 2



Función 3



9. ANEXO III. DIFICULTADES ASOCIADAS A LA COMPLEJIDAD DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Analizaremos la complejidad del lenguaje matemático desde tres dimensiones: la precisión que requiere, su semántica y sus usos.

9.1 Precisión

El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como rupturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. Sin embargo, el lenguaje de las Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos.

9.2 Semántica

1. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, límite, etc. tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, aunque, al tiempo, pueden estar relacionados con significados particulares en contexto matemático. Dichas interpretaciones pueden tener validez parcial que el sujeto tiende a generalizarlas (por ejemplo, límite como algo que no puede sobrepasarse).
2. Hay palabras específicamente matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, ecuación, polinomio, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que sólo aparecen en matemáticas, por lo que la atribución de significado a las mismas sólo cuenta con contextos matemáticos como

referentes para la acción (el rango de acciones que el sujeto puede hacer sobre ellos es muy limitado, salvo que conozca las matemáticas...).

9.3 Usos del lenguaje de signos matemáticos

La sintaxis del lenguaje de signos —reglas formales de las operaciones— puede algunas veces extenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Esta dificultad ha de gestionarse en la enseñanza mediante un proceso caracterizado por diferentes etapas, que explicaremos mediante ejemplos.

Exponentes

En el proceso de aprender a usar correctamente los exponentes, podemos diferenciar tres etapas distintas:

Estadio semiótico. El sistema nuevo de signos adquiere significado a partir del sistema antiguo, ya conocido de los alumnos, que es en este caso el conjunto de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir; de esta manera, se definen los elementos del sistema nuevo 3^4 o a^4 como:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

Estadio estructural. El sistema nuevo *se estructura* según la organización del antiguo, y así, mediante procesos como:

$$3^4 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \ \times \ 3 \times 3 \times 3 = 3^7$$

llegamos al esquema general $a^4 \times a^3 = a^{4+3}$, que, después será expresado simbólicamente como $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Empleando los métodos de manipulación de fracciones aritméticas y algebraicas, se puede obtener, mediante el sistema antiguo, un esquema para la división:

$$a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2$$

que se expresa simbólicamente como $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ya tenemos así la ley de los exponentes.

Pero en este segundo estadio comienzan a aparecer problemas que nos obligan, en un primer momento, a poner restricciones, por ejemplo, $m > n$, ya que a^0 ó a^{-2} no tienen explicación en el sistema antiguo. [Sí tienen sentido en el sistema antiguo situaciones como $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$].

Las situaciones que no se ajustan al sistema antiguo se explican de otro modo: recurriendo a la observación de regularidades, por ejemplo, en este caso:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$3^1 = 3$

$3^0 = 1$ (ya que $3^0 = 3^{n-n} = \frac{3^n}{3^n} = 1$)

$3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Estadio autónomo. Hemos eliminado algunas restricciones pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones; en este momento estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior:

$$3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$e^{2/5} = \sqrt[5]{e^2}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Es, por tanto, el sistema nuevo una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo.

Las funciones trigonométricas

Estadio semiótico. Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, se relacionan con triángulos rectángulos y son formuladas en términos de medida de los lados “adyacente”, “opuesto” o “hipotenusa” (conocidos previamente).

Estadio estructural. Junto con las propiedades que pueden ser organizadas con el sistema antiguo, aparecen propiedades como la *periodicidad* o la *naturaleza funcional*, que nuevamente han de ser dotadas de significado por el principio de regularidad y los comportamientos patrones.

Estadio autónomo. Los signos actúan con significado propio; por ejemplo, la función $\cos(x^2)$ es significativa, aunque el cuadrado de un ángulo no lo sea.

10. Anexo IV. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Encontramos los siguientes tipos de dificultades.

10.1 Desarrollo de modelos implícitos

El conocimiento matemático (parcial) que los alumnos tienen en un determinado estadio de su desarrollo cognitivo produce *modelos implícitos* para resolver problemas matemáticos que son adecuados a ese estadio pero constituyen un obstáculo para la adquisición de conocimiento matemático nuevo.

Ejemplo 1
El modelo lineal crea dificultades para la incorporación de modelos multiplicativos

La multiplicación se introduce (en primaria) como una adición repetida sobre los números naturales:

$$\underset{(b \ \ veces)}{a + \ldots + a} \quad = b \times a$$

Si se desea extender a otros números, esta idea de adición da sentido a la multiplicación de:

- naturales por enteros: si $a \in Z$ y $n \in N$, tenemos $a + \ldots + a = n \times a$
- naturales por racionales: si $\frac{p}{q} \in Z$ y $n \in N$, tenemos $\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q} = n \times \frac{p}{q}$

Pero esta linealidad produce errores si se aplica a operaciones que requieren modelos multiplicativos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$sen(3a) = 3sen(a)$$

$$a^{m+n} = a^m + a^n$$

donde el primero de estos errores adquiere más fuerza a causa de la *analogía* con

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 2
Los modelos lineal y multiplicativo crean dificultades para la incorporación de modelos exponenciales.

Toma una hoja de papel, dóblala una vez, dos veces, tres veces… Si doblo n veces, ¿cuántos pedazos de papel tengo? Respuesta errónea: $2n$

Si $a^4 = 3$, calcula a^8:

- Lineal: $a^8 = a^{4+4} = a^4 + a^4 = 3+3 = 6$.
- Multiplicativo: $a^8 = a^{4x2} = a^4.a^2 = 3\sqrt{3}$

El modelo lineal está asociado a un tipo de razonamiento proporcional que genera errores en distintos los ámbitos de las matemáticas. En el trabajo titulado "La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad", De Bock, Van Dooren y Verschaffel (2006) muestran un buen número de ejemplos.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del *proceso normal* de construcción del conocimiento matemático.

10.2 Lógica social versus lógica escolar

En el contexto escolar se desarrolla un tipo de razonamiento asociado a las situaciones educativas que es distinto del razonamiento social. Veamos algunos ejemplos concretos.

Obligatoriedad de Encontrar Respuesta única y Exacta o de Satisfacer las Expectativas del Profesor

> *Hay un barco que tiene 50m. de largo y 20m. de ancho, transporta 100 ovejas y 500 toneladas de trigo ¿Cuál es la edad del capitán?*

En una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble (Instituto de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas) que se publicó en el Boletín de la Asociación de profesores de Matemáticas de la enseñanza pública en 1980 y que dio origen a un libro del mismo título realizado por Stella Baruk en 1985, se observó que una mayoría de alumnos da respuesta numérica a este problema.

Números Decimales

Los números decimales se presentan en la vida corriente como parejas de números enteros; así decimos "Víctor mide un metro ochenta" y no se trata del número 1,80, sino de dos números enteros, 1 y 80, con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. Este tratamiento del número decimal como pareja de números enteros produce errores como:

- $1{,}3 < 1{,}28$ porque $3 < 28$, o
- $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9$ porque $0 \times 0 = 0$ y $3 \times 3 = 9$, o
- entre 1,3 y 1,4 no hay otro número porque no hay número entre 3 y 4.

Principio de máxima información

En la lógica social utilizamos el principio de máxima información: si un hijo dice a su padre "tuve un accidente con tu coche, la puerta está rota" pero no dice "y también se han destrozado el motor y las ruedas" está mintiendo. Sin embargo, en matemáticas podemos decir sin mentir que "un cuadrado es un rectángulo". Aquí no se exige máxima información, "es" significa inclusión.

11. Anexo V. Algunas referencias a la literatura sobre errores en Educación Matemática

Un buen número de trabajos de investigación sobre errores tratan de categorizar los errores más habituales en temas específicos de matemáticas. Algunos de estos ejemplos son:

- Carpenter, Franke y Levi (2003) sobre aritmética y álgebra escolar;
- Geier (1998) y Franchi y Hernández (2004) sobre geometría;

- González (1995) sobre números naturales;
- Hitt (2003) sobre la noción de infinito y sus repercusiones en el aprendizaje de las funciones;
- Rico y Castro (1995) sobre razonamiento numérico;
- Ruiz y Lupiáñez (2009) sobre razón y proporción;
- Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre números racionales;
- Zaslavsky (1997) sobre la función cuadrática;
- Ruano, Socas y Palarea (2008) sobre procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra;
- Orhun (2001) sobre trigonometría;
- Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) sobre desigualdades e inecuaciones;
- Puerto, Seminara y Minnard (2007) sobre estadística descriptiva; y
- Cerdán (2010) sobre el proceso de traducción algebraico.

Otro grupo de trabajos realizan estudios estadísticos para delimitar patrones de errores. Un ejemplo destacado es el de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), quienes realizaron un estudio empírico con estudiantes de educación secundaria. Después de recoger las soluciones de estos escolares a una serie de problemas, diferentes expertos clasificaron los errores y la depuración de ese análisis brinda seis categorías descriptivas.

1.Datos mal utilizados. Son errores producidos por una discrepancia entre los datos de un problema y el tratamiento que les da el alumno. Aquí se encuentran los casos en que se añaden casos extraños, se omite algún dato necesario para la solución, se contesta algo innecesario, se hace una lectura incorrecta del enunciado, se utilizan valores de una variable para otra distinta, etc.

2. *Interpretación incorrecta del lenguaje*. Son errores al traducir una información dada en un determinado sistema de representación a otro. Por ejemplo, modelización mediante una ecuación inadecuada, transferencia de reglas de un sistema de representación simbólico a otro (en el que ya no son válidas); por ejemplo, al sumar números complejos en forma polar, aplicar reglas válidas sólo para la forma binómica [$r_q+s_d=(r+s)_{q+d}$].

3. Inferencias lógicas no válidas. Son falacias de razonamiento no asociadas a contenidos específicos. Por ejemplo, concluir, a partir de un enunciado condicional, su contrario; utilizar incorrectamente los cuantificadores; confundir una condición necesaria y una suficiente; o reglas que producen reglas. Un ejemplo de este último caso es el siguiente:

$$\text{Si } (x-2)(x-3)=0 \text{ entonces } x=2 \text{ o } x=3$$
$$\text{Por tanto, si } (x-2)(x-3)=2 \text{ entonces } x=4 \text{ o } x=5$$

Teoremas o definiciones deformados. Son deformaciones de principios, reglas o definiciones (asociadas a contenidos). Por ejemplo, aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar una propiedad distributiva a una función no lineal, etc.

Falta de verificación de la solución. Son errores que se presentan cuando cada paso de la resolución de una tarea es correcto pero no responde a la solución pedida.

Errores técnicos. Son errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, de manipulación de símbolos algebraicos, de ejecución de algoritmos básicos, etc. Por ejemplo,

$$2^3=6$$

$$2x - x = 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Esta clasificación permite pensar en tipologías de errores que pueden surgir al trabajar cada tema específico de matemáticas y nos permite abarcar un espectro amplio de errores sobre cada tema.

Al realizar el análisis cognitivo de un tema matemático vamos a tomar como referencia una dificultad para enunciar sus errores asociados. Para enunciar las dificultades también hemos aportado una tipología. Manejando estas distintas tipologías, que se alimentan una a la otra, el profesor genera la información que necesita sobre las limitaciones de aprendizaje que presentarán sus estudiantes.

12. Referencias

Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L. y Gómez, P. (en prensa). Razones trigonométricas. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1895/

Báez, A. (2007). *El autoconcepto matemático y las creencias del alumnado: su relación con el logro de aprendizaje, un estudio exploratorio, descriptivo e interpretativo en la ESO.* Didáctica de la Matemática. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Oviedo, Oviedo.

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. y Romero, I. (2011). *Presentación final a la actividad 3.4 de MAD 1*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://tinyurl.com/b7t4fpo

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. y Romero, I. (en prensa). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1893/

Bock, D. d., Dooren, W. v. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa, 4*, 115-135.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.* Department of Mathematics and Mathematical Statistics. Tesis de no publicada, Umea University, Umea, Suecia. Disponible en http://tinyurl.com/abrb9pe

De Villiers, M. (1996). *Some adventures in Euclidean geometry*. South Africa: University of Durban-Westville.

Diego, J. M. (2011). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Canta-*

bria and Cyprus. Mathematics Education. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cambridge, Cambridge.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P., Mesa, V. M., Carulla, C., Gómez, C. y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/669/

González, M. C. y Tourón, J. (1992). *Autoconcepto y rendimiento escolar: sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje*. Pamplona: Eunsa. Disponible en http://tinyurl.com/bkqmck4

Guerrero, E. y Blanco, L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la interven-ción en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación, 33*(5), 1-14. Disponible en http://tinyurl.com/aznb5xg

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Didáctica de la Matemática. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España. Disponible en http://tinyurl.com/8k4wt9j

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.

McWhaw, K. y Abrami, P. C. (2001). Student Goal Orientation and Interest: Effects on Students' Use of Self-Regulated Learning Strategies. *Contemporary Educational Psychology, 26*(3), 311-329. Disponible en http://tinyurl.com/aod7ytv

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Indicadores de logros curriculares*. Bogotá: MEN. Disponible en http://tinyurl.com/7rug428

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/7t988s5

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/bljb3wd

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (1991). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE, 152*, 21193-21195. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/1991/06/26/pdfs/A21193-21195.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007). Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE, 5*, 677-773. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf

OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD. Disponible en http://tinyurl.com/aq83wlf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori. Disponible en http://tinyurl.com/cyrkdrq

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en http://tinyurl.com/a63pl2g

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-44. Disponible en http://tinyurl.com/apc5qgl

Zimmerman, B. J. (2004). Sociocultural influence and students' development of academic self-regulation: A social-cognitive perspective. En D. M. McInerney y S. Van Etten (Eds.), *Big theories revisted* (pp. 139-164). Greenwhich, CT: Information Age.

13. BIBLIOGRAFÍA

Los siguientes son documentos que abordan algunos de los temas que se tratan en este módulo.

13.1 Documentos curriculares e institucionales

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Indicadores de logros curriculares*. Bogotá: MEN. Disponible en http://tinyurl.com/7rug428

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/7t988s5

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/bljb3wd

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (1991). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE, 152*, 21193-21195. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/1991/06/26/pdfs/A21193-21195.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007). Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. *BOE, 5*, 677-773. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf

OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD. Disponible en http://tinyurl.com/aq83wlf

13.2 Artículos sobre dificultades y errores en distintos temas de matemáticas escolares

Bock, D. d., Dooren, W. v. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa, 4*, 115-135.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, Inglaterra: Heinemann. Disponible en http://tinyurl.com/becfcvk

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA, 4*(3), 99-110. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/620/

Franchi, L. y Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *EDUCERE, 25*, 196-204. Disponible en http://tinyurl.com/az9dc4h

Garrote, M., J., H. M. y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las de-sigualdades e inecuaciones. *Suma, 46*, 37–44. Disponible en http://tinyurl.com/bawtfzw

Geier, R. (1998). Error analyses of geometry problems in secondary schools. The Pythagorean Theorem. *Mathematische Unterrichtspraxis, 19*(4), 37-46.

Gómez, P., Mesa, V. M., Carulla, C., Gómez, C. y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/669/

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, I. C., R. F. y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal For Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Orhun, N. (2011). Student's mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. Mathematics Education into the 21st Century Project. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the international conference: New ideas in Mathematics Education* (pp. 127-132). Palm Cove, Australia: University of Queensland. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/AOrhun.PDF

Puerto, S., Seminara, S. A. y Minnard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*(3), 1-9. Disponible en http://www.rieoei.org/expe/1729Puerto.pdf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. y Castro, E. (1994). Difficulties and errors in number reasoning development. En N. Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the first Italian-Spanish research symposium in mathematics education* (pp. 123-130). Modena, Italia: Universita di Modena. Disponible en http://tinyurl.com/aoeffm7

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/569/

Ruiz, E. F. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles in teaching and learn-ing the topics of reason and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 397-424. Disponible en http://tinyurl.com/a4d5xrg

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en http://tinyurl.com/a63pl2g

Socas, M. y Palarea, M. M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO, 14*, 7-24.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational number: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467. Disponible en http://tinyurl.com/bj8rzny

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-44. Disponible en http://tinyurl.com/apc5qgl

13.3 Referencias generales sobre aprendizaje de las matemáticas

Cánovas, A., Callejo, M. L. y Gutiérrez, J. (1994). Psicología cognitiva, teorías del aprendizaje y educación matemática. En L. Rico y J. Gutiérrez (Eds.), *La formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato*. Granada: ICE Universidad de Granada.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC Labor.

Dienes, Z. (1986). *Seis etapas en el aprendizaje de las matemáticas*.

Glaeser, G. (1978). La transmisión de los movimientos matemáticos ayer, hoy y mañana. En J. Hernández (Ed.), *La enseñanza de la matemática moderna*. Madrid: Alianza Universidad.

Goñi, J. M. (2009). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: M.E.C. - Paidós. Disponible en Biblioteca Uniandes: 370.15651 R295 Z261

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/529/

Rico, L. y Lupiañez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial. Disponible en http://tinyurl.com/d5fm4zy

Romberg, T. A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación, 294*, 323-406.
Romberg, T. A. (1993). Cómo uno aprende: modelos y teorías del aprendizaje de las matemáticas. *SIGMA: Revista de Matemáticas, 15*, 3-17.
Skemp, R. R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata. Disponible en Biblioteca Uniandes: 370.15651 S425 Z235
Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en http://tinyurl.com/a63pl2g
Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-44. Disponible en http://tinyurl.com/apc5qgl

13.4 Referencias sobre el dominio afectivo

Báez, A. (2007). El autoconcepto matemático y las creencias del alumnado: su relación con el logro de aprendizaje, un estudio exploratorio, descriptivo e interpretativo en la ESO. Didáctica de la Matemática. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Oviedo, Oviedo.
Blanco, L., Guerrero, E., Caballero, A., Piedehierro, A. y Gómez del Amo, R. (2010). El dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas: una revisión de investigaciones locales. Campo abierto: Revista de educación, 29(1), 13-31. Disponible en http://tinyurl.com/b6bp3h2
Diego, J. M. (2011). Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria and Cyprus. Mathematics Education. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cambridge, Cambridge.
González, M. C. y Tourón, J. (1992). Autoconcepto y rendimiento escolar: sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje. Pamplona: Eunsa. Disponible en http://tinyurl.com/bkqmck4
Guerrero, E. y Blanco, L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la interven-ción en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de educación, 33(5), 1-14. Disponible en http://tinyurl.com/aznb5xg
Marcou, A. y Lerman, S. (2007). Changes in students' motivational beliefs and performance in a self-regulated mathematical problem-solving environment. En D. Pitta, P. Philippou y G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 288-297). Larnaca, Chipre: CERME. Disponible en http://tinyurl.com/b3kvnyz
McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.
McWhaw, K. y Abrami, P. C. (2001). Student Goal Orientation and Interest: Effects on Students' Use of Self-Regulated Learning Strategies. Contemporary Educational Psychology, 26(3), 311-329. Disponible en http://tinyurl.com/aod7ytv

Zimmerman, B. J. (2004). Sociocultural influence and students' development of academic self-regulation: A social-cognitive perspective. En D. M. McInerney y S. Van Etten (Eds.), Big theories revisted (pp. 139-164). Greenwhich, CT: Information Age.