**GEOMETRIZACIÓN DEL CURRICULUM EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS**

**GEOMETRIZATION OF THE CURRICULUM IN THE MATHEMATICS TEACHER TRAINING**

**Pinto Leivas, J. C.**

leivasjc@yahoo.com.br

Universidade Franciscana de Santa Maria – UNIFRA – Brasil

**Resumen.** *Esta comunicación es un documento teórico en el que el autor define la geometrización del currículo en la formación docente en matemáticas, cuando a partir de una cuestión sobre que geometría se debe enseñar en la formación docente y las habilidades de la imaginación, la intuición y la visualización puede ser empleado para*

*visualmente los conceptos matemáticos en diversas áreas, ofrece sugerencias a la enseñanza de los números complejos y matrices.*

**Palabras clave**: formación docente; geometrización del currículo; conexiones; intuición visual; matrices y complejas.

**Abstract.** *This communication is a theoretical paper in which the author defines geometrization of the curriculum in teacher training in mathematics, when starting from a question on which geometry should be taught in teacher education and skills of imagination, intuition and visualization can be employed for such innovation curricula. By understanding how a geometric process of using geometric approaches as a method to understand and visually represent mathematical concepts in several areas, offers suggestion involving the teaching of complex numbers and matrices.*

**Key words**: teacher training; geometrization of the curriculum; connections; visual intuition; complex and matrices.

## INTRODUÇÃO

Courant e Robbins (2000) ao prefaciarem o livro “O que é Matemática?” fazem sua incursão numa busca de respostas a tal questionamento, afirmando que

> A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o supremo valor da Ciência Matemática; (Courant; Robbins, 2000, prefácio)

Tem-se refletido sobre mudanças sociais e políticas de acesso à escola em virtude de resultados de avaliações nacionais e internacionais como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). A escola convive com altos índices de reprovação e evasão escolar e isso exige atitudes arrojadas dos professores, educadores e sociedade, com procedimentos metodológicos e comportamentais adequados, ou seja, é preciso inovar.

Pesquisas em Educação Matemática têm mostrado necessidade de que na formação inicial dos professores seja dado um tratamento adequado aos conhecimentos dos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. Isso não se percebe, ainda, em diversas partes do mundo, como destacam Ball e Ma (Loureiro, 2004) em relatório da *Conference Board of Mathematical Sciences*, no qual dois temas foram discutidos: "a base intelectual da Matemática escolar e a natureza específica do conhecimento matemático necessário para o ensino". Dentre as recomendações gerais consensuais do documento destaca-se:

> [...] recomendação 1. Os futuros professores necessitam de cursos de matemática que desenvolvam uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar.
>
> recomendação 3. Os cursos acerca das ideias fundamentais da matemática escolar devem ter por objetivo central um desenvolvimento completo de ideias matemáticas básicas.
>
> recomendação 4. Ao mesmo tempo em que constroem o conhecimento matemático, os cursos de matemática para futuros professores devem desenvolver os hábitos de pensamento próprios a um matemático e dar a conhecer estilos de ensino flexíveis e interativos. (Loreiro, 2004, p. 51)

Este artigo é um ensaio teórico e oferece uma possibilidade para reflexão da prática educativa que o autor julga essencial na formação inicial do professor de Matemática para a Escola Básica brasileira de modo que a área de Geometria possa ocupar um papel mais relevante daquele que ocupa atualmente nessa formação e que possa contribuir para uma melhoria no desempenho do futuro professor de Matemática nos níveis fundamental e médio.

O autor caracteriza o que denomina geometrizar o currículo da Licenciatura, inserindo três aspectos: imaginação, intuição e visualização e oferece um exemplo de como um tema, em geral, desenvolvido de forma algébrica pode ter uma conotação geométrica importante, a saber, os números complexos. Sua inquietação partiu da seguinte questão: **Qual Geometria deve ser ensinada na formação inicial de professores de Matemática?**, uma vez que suas pesquisas iniciais nesse sentido apontavam que em cursos de Licenciatura em Matemática no estado do Rio Grande do Sul, Brasil, temas como Topologia, Geometria Fractal, Tecnologias, Geometria Dinâmica, tendências atualizadas para o ensino de Geometria e Geometrias Não Euclidianas não faziam parte dos currículos de forma sistemática e nem de forma interligada com outras disciplinas curriculares.

Assim, a partir do contato com a literatura, acreditou ser **possível ensinar conceitos geométricos em disciplinas de cursos de Licenciatura em Matemática a partir de abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização.**

## REVISITANDO A LITERATURA

O parecer 9/2001 do Conselho Nacional de Educação do Brasil, institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior. Nessas diretrizes, no inciso III e IV do Art. 2º, que trata da organização curricular, encontram-se outras formas de orientação para a atividade docente, dentre elas o preparo para: "III. O exercício de atividades de enriquecimento cultural; IV. O aprimoramento em práticas investigativas;" (Brasil, 2001, p. 61)

O documento determina que se busquem competências para a atuação profissional devendo-se adotá-las como norteadoras, tanto da proposta pedagógica, em especial do currículo e da avaliação, quanto da organização institucional e da gestão da escola de formação. Para tal

> O projeto pedagógico de cada curso, considerado o artigo anterior, levará em conta que:
>
> I. a formação deverá garantir a constituição das competências objetivadas na educação básica;
>
> II. o desenvolvimento das competências exige que a formação contemple diferentes âmbitos do conhecimento profissional do professor;
>
> III. a seleção dos conteúdos das áreas de ensino da educação básica deve orientar-se por ir além daquilo que os professores irão ensinar nas diferentes etapas da escolaridade;
>
> IV. os conteúdos a serem ensinados na escolaridade básica devem ser tratados de modo articulado com suas didáticas específicas. (Brasil, 2001, p. 63).

Propostas e processos de mudanças curriculares para a escola básica ou para as universidades, embora sejam realizados e divulgados por instâncias governamentais, são elaborados por professores, em geral universitários, indicados das mais diferentes formas. Schubring (1999) aponta que tais reformas não são recentes, destacando o papel desempenhado pela Alemanha, e em particular o de Félix Klein (1927), que idealizou reformas curriculares a partir das universidades, inclusive para o nível médio em escolas técnicas.

Ele percebe a necessidade de mudanças de concepções governamentais bem como dos professores, afirmando seu propósito de não somente referir-se aos estudos da Matemática universitária, mas também a todo aquele do interesse do professor que se preocupa com o seu ensino. Afirma que, desde as primeiras décadas do século XX, os professores de Matemática e de Ciências Naturais das universidades têm manifestado interesse pela formação adequada dos futuros professores, que atendam às necessidades da Ciência. Para ele,

> Este fenômeno é bem recente; antes, durante e por muito tempo, se cultivava na Universidade exclusivamente a ciência superior sem levar em consideração em nada as necessidades da Escola e sem cuidar o mínimo da relação com o ensino de Matemática com ela. (Klein, 1927, p. 1).

Minha pretensão de que a área de Geometria seja atendida num currículo inovador para os cursos de Licenciatura em Matemática não segue o que consensualmente é entendido como componente curricular:

> [...] matéria ou disciplina acadêmica que compõe a grade curricular de um determinado curso de um determinado nível de ensino. São obrigatórias sua inclusão e ministração com a carga horária determinada na grade, a fim de que o curso tenha eficiência e validade. [68]

---

[68] Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Componente_curricular. Acesso em 17abr 2008.

Como pensar, portanto, nos conteúdos escolares contemplando, na Educação Matemática, uma educação geométrica? Nos cursos de Licenciatura de Matemática, se faz necessário que conteúdos de Matemática, de Educação Matemática, de Geometria e de Educação Geométrica sejam abordados de forma conjunta e complementar, buscando eliminar possíveis discriminações entre as disciplinas constituintes da proposta curricular do curso.

Klein (1927, p. 1), logo ao iniciar suas escritas sobre Geometria diz que essa ocupa um posto de honra comparativamente ao que escreveu sobre Aritmética, Álgebra e Análise. Diz que

> [...] as linhas gerais de nosso plano estão traçadas, tendo em conta, em primeiro lugar, o que poderia chamar-se atualidade enciclopédica, que nos obriga a proporcionar uma olhada geral sobre a totalidade da Geometria, na qual se encontra todos os conhecimentos alterados que no decorrer dos vossos estudos tereis adquirido, ordenado, classificado e postos para qualquer aplicação que queira dar-lhes.

Diz que a formação matemática geral, além do conhecimento dos detalhes adquiridos em ação continuada, precisa ter um amplo conceito das relações de dependências, tanto técnicas quanto históricas, que existem entre eles.

> Para evitar a má inteligência que pode ocasionar a aparente separação desta parte geométrica da aritmética explicada no primeiro semestre, devemos dizer que nossa tendência nestas lições, como em todas as de caráter geral, é a fusão da Aritmética com a Geometria, entendendo por Aritmética, não somente o estudo dos números, senão também a Álgebra e a Geometria. (Klein, 1927, p. 3)

Para ele, a palavra *fusão* tem um sentido muito mais amplo do que aquele utilizado na Itália, em que ela significa exclusivamente uma mistura de Geometria Plana e Geometria do Espaço. Afirma que, ao fazer uso desse sentido para a palavra *fusão*, não está deixando que a intuição do espaço seja relegada a um segundo plano e, para que isso seja possível, propõe utilizar nas discussões abstratas da Aritmética, da Álgebra e da Análise, figuras e métodos gráficos, que tornam conceitos mais compreensíveis nessas áreas do conhecimento matemático. Acredito como Klein (1927), que a intuição espacial deve ocupar lugar de destaque nos currículos da Licenciatura em Matemática, pelo alto grau facilitador da expressão precisa dos entes e dos fatos geométricos. Uma pergunta que pode ser feita nesse momento é se a fusão preconizada por Klein (1927) não teria contribuído para a absorção da Geometria por outras áreas do conhecimento matemático?

Portanto, o autor desse artigo definiu em sua tese de doutorado **componente curricular geométrica** para um currículo de Licenciatura em Matemática como uma forma de abordar conceitos geométricos em todas as suas vertentes e possibilidades, no sentido de desenvolver um pensamento geométrico a exemplo do que é discutido pelo *Topic Group* 7 do CERME-3 , segundo Dorier, Gutiérrez e Strässer[69]. Para eles, Duval distingue em atividades cognitivas ligadas à *semiosis*, três tipos de atividades: “a formação de uma representação, a qual pode ser identificada como pertencente a um determinado registro; processamento e transformação de uma representação no próprio registro onde foi criado; e, finalmente, conversão, isto é, a transformação de uma representação semiótica de um registro em outro”.

---

[69] CERME3/PROCEEDING/GROUPS/TG7. Disponível em http:WWW.dm.unipi.it/~didattica. Acesso 18.05.2010.

Para Guzmán (1993) a Matemática é uma atividade velha, polivalente e que ao longo dos séculos tem sido empregada com objetivos profundamente diversos, com o que concordo, uma vez que, em um grande número de instituições de ensino, há uma intersecção entre as disciplinas oferecidas aos cursos da área de ciências exatas e naturais e nas tecnologias, muito embora os objetivos do curso de formação de professores sejam completamente distintos daqueles dos cursos de formação de engenheiros, por exemplo.

Ele aponta a Matemática como ciência dinâmica e mutante, isto porque mudanças ocorrem de forma muito rápida e turbulenta nos próprios conteúdos dessa ciência, com o que concordo novamente, haja vista o que ocorreu com os Fundamentos da Matemática no século XIX e a criação das Geometrias Não Euclidianas, os estudos relativos à Topologia no século XX, bem como a Geometria Fractal nos tempos atuais e, mais recentemente, o uso de softwares exploratórios de Geometria Dinâmica.

Defino **geometrização** do currículo da Licenciatura em Matemática como um processo de utilizar abordagens geométricas como um método para compreender e representar visualmente conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização, portanto, Geometria é um ponto de vista que conduz à geometrização.

Numa primeira reformulação das normas emanadas pelo NCTM, (Princípios, 2008), foi dada ênfase ao pensamento visual identificando "a geometria e sentido espacial", o que, segundo Costa (2000, p. 162), enfatizou no "uso da visualização e raciocínio espacial para resolver problemas tanto dentro como fora das matemáticas".

O grupo de Psychology of Mathematics Education tem dado atenção às questões de visualização como observado por Presmeg (Gutiérrez e Boero, 2006. p. 206) "o termo visualização tem sido utilizado de várias maneiras na pesquisa nas duas últimas décadas". Indo mais além, afirma "A visualização é levada para concluir processos de construção e transformação tanto em imaginação visual e mental em todas as relações de natureza espacial que podem estar envolvidas no fazer matemática."

A seguir apresento um indicativo de como a Geometria pode estar conectada a outra área do conhecimento matemático, desde que a considere como um elemento interdisciplinar na Licenciatura em Matemática. Os temas número complexo, matriz, vetor, trigonometria e operador linear, usualmente são abordados em disciplinas distintas na formação inicial do professor, sem conexões e sem produção de significado geométrico para os estudantes. A isso se pode definir como um estilo, ou seja, uma forma de tratar cada tema isoladamente, ao invés de integrar o individual num processo concreto, que, embora seja abstrato em Matemática, pode partir de uma situação concreta, ou ainda de uma experiência, e dessa, por meios intuitivos, produzir significados.

## NÚMEROS COMPLEXOS: UMA VISÃO GEOMÉTRICA

Quando se fala em número complexo, logo vem à mente um conjunto de operações lógicas bem definidas. Essa abordagem, na maioria das vezes, é feita em livros didáticos e até mesmo nos cursos introdutórios na formação do professor, quando esse assunto é tratado. Isso corresponde a considerar um número complexo como um par (x,y) de números reais, estabelecendo um isomorfismo entre os dois conjuntos de naturezas diferentes, ou seja,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

como uma coleção de pares de números e o complexo como

$$\mathbf{C} = \{z = x + i.y \mid i = \sqrt{-1}\}$$

em que **i** é a unidade dessa coleção e corresponde ao par (0,1) satisfazendo a propriedade $i^2 = -1$. Pensar nesse conjunto com a mesma estrutura considerada nos reais, por exemplo, com a multiplicação, induz frequentemente a um erro que indica falta de conhecimento do conteúdo:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} \neq -1$$

O erro ocorre porque a estrutura multiplicativa em **C** corresponde a

$$z = z_1.z_2 = (x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1.x_2 - y_1.y_2,\ x_1.y_2 + x_2.y_1)$$

o que justifica, por exemplo, i.i = (0,1).(0,1) = (0.0 – 1.1, 0.1+1.0) = -1.

Mas em que os aspectos intuitivos visuais podem contribuir para eliminar tais dificuldades? Pensar em **R** como um conjunto de números tem um sentido e pensar em **R** como um conjunto de pontos de uma reta r tem outro. Entretanto, de forma análoga ao que foi feito anteriormente, estabelece-se um isomorfismo entre os dois conjuntos por meio de uma bijeção que faça corresponder ao número real zero, um ponto $O \in r$, considerado ponto origem de r, a cada número real positivo, faça corresponder um ponto $Q \in r$ distante de O uma “quantidade de unidades” correspondente ao número real positivo considerado e, a cada número real negativo, faça corresponder um ponto P distante de O, à sua esquerda na figura 1, uma “quantia de unidades” correspondente ao número real negativo considerado. Daí,

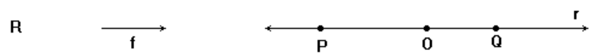


Figura 1 – Isomorfismo da reta com os números reais.

De forma análoga, tem-se uma representação da função f definida do $\mathbf{R}^2$ no plano:

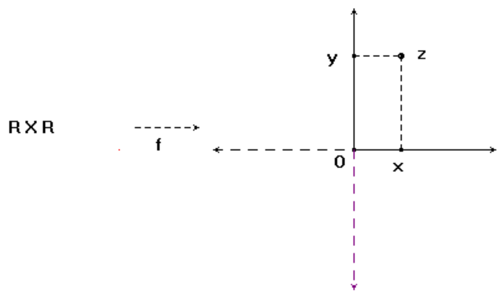


Figura 2 – Isomorfismo do plano com $\mathbf{R}^2$.

Mas, ao se estabelecer essa analogia, tem-se um isomorfismo entre o conjunto de pares ordenados de números reais e um conjunto de pontos do plano, assim, o número complexo ganha um *status* geométrico que pode ser relevante para sua compreensão. O complexo adquire um aspecto dinâmico, pois pode ser considerado em sua forma trigonométrica e isso conduz ao envolvimento com ângulo, em geral denominado argumento do número complexo, o qual traz um indicativo geométrico até certo ponto intuitivo. Em paralelo, há um indicativo do módulo do número complexo o que induz a outra ideia, a saber, a de grandeza.

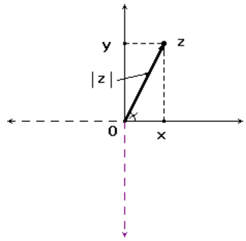


Figura 3 – Vetor.

Assim, o número complexo pode ser pensado como um elemento estático, ou seja, um vetor com seu módulo e sua direção bem definidos ou como um elemento dinâmico, ou seja, uma transformação geométrica que leva um par ordenado de números reais em um ponto do plano, sua imagem geométrica.

Os aspectos exemplificados até o presente momento podem bem ser desenvolvidos em disciplinas iniciais na Licenciatura em Matemática como, por exemplo, as de Fundamentos de Matemática Elementar ou mesmo de Introdução à Análise Matemática.

Ao denotar por $\theta$ o ângulo que o vetor forma com o sentido positivo do eixo horizontal, tem-se o vetor $z = |z|\cos\theta + i|z|\text{sen}\theta$, com componentes $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z|\text{sen}\theta$, de forma que $z = (x,y)$ é um par ordenado de números reais. Dessa forma, o ente matemático denominado número complexo pode ser compreendido como um vetor, considerado um ente estático, ou como um ente dinâmico, ou seja, um operador que pode dilatar ou expandir, comprimir ou reduzir, rotacionar ou refletir o objeto, como pode ser percebido geometricamente. A primeira parte da figura 4 mostra a dinâmica da transformação do objeto conservando o seu módulo e a segunda, conservando o ângulo.

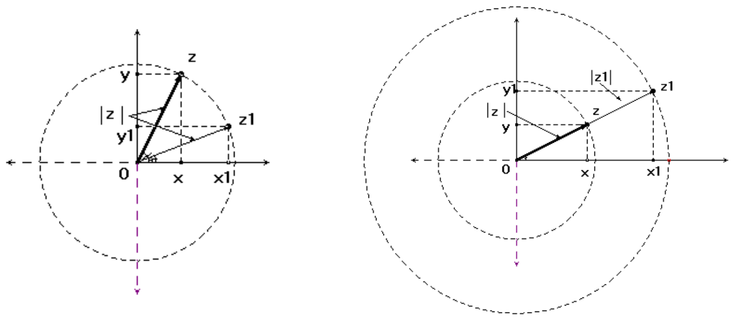


Figura 4 – Módulo do complexo.

Ao tratar com matrizes, em geral esse conteúdo é desenvolvido na introdução das disciplinas de Geometria Analítica, o que se visualiza imediatamente é numa outra estrutura, com suas propriedades operatórias algébricas sem imagens geométricas. Seja $\mathbf{R}^2$ o espaço vetorial com sua base canônica $\{(1,0), (0,1)\}$ e um operador linear T que leva um vetor z = (x,y) do $\mathbf{R}^2$ no vetor $z_1 = (x_1,y_1)$ do $\mathbf{R}^2$, como nas figuras 4, acima. Ao dispor as coordenadas do vetor z em forma de coluna, então T(z) pode ser expresso na forma T(z) = A.z em que a matriz canônica do operador T é A = [T(1,0) T(0,1)], a qual pode ser representada por [T].

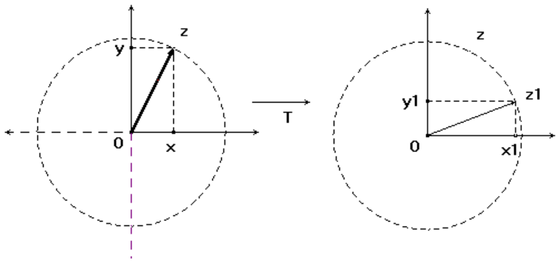


Figura 5 – Coordenadas do complexo.

Assim, considerando-se a base {1, i} do espaço vetorial E = ($\mathbf{R}^2$, .) em que a multiplicação é por escalar, tem-se o operador linear T conservando distâncias quando |z| = 1 e pode ser interpretado como uma rotação em torno da origem O = (0,0) com a multiplicação por complexo de módulo 1. Dessa forma, T(z) = [T].z é o operador que transforma o par (x,y) no número complexo z = $|z|\cos\theta + i|z|\operatorname{sen}\theta$ e tem a seguinte representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} .$$

Tomando-se a unidade real, isto é, o vetor (1,0) essa matriz é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e para a unidade imaginária (0,1) tem-se $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

isto é, para o número complexo z = 1 = 1 + 0.i, tem-se, da álgebra matricial que

$$1.1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

enquanto que para o imaginário puro i = 0 + 1.i tem-se

$i.i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = -1, obtido por uma álgebra matricial, isto é, de uma forma diferente daquela obtida acima pelo caminho da álgebra definida por pares ordenados. Dessa forma, ao abordar vetores, em cursos de Álgebra Linear, por exemplo, pode-se produzir significado a tais objetos matemático o que, em grande parte, é feito apenas e exclusivamente de modo abstrato.

Mostram-se assim, utilizando as indicações de estilos preconizadas por Granger (1974), possibilidades de interligar vários tipos de representações ou formas de tratamento do ente matemático, o número complexo, em estruturas diferentes, mas que todas podem ter um elemento integrador que é a representação geométrica envolvida, haja vista que essas matrizes podem ser interpretadas como rotações em torno da origem do sistema cartesiano, como reflexões em torno de eixos coordenados ou ainda como projeções ortogonais sobre uma reta passando pela origem. Cada uma das estruturas tem seu sistema bem definido e é isso que se caracteriza como um estilo, segundo Granger (1974), ou seja, é uma forma específica de linguagem ou de representação de um conceito.

Granger (1974) dizia que a intuição espacial unia os antigos, a partir da citação de Descartes de que lhe causava “escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria” e que esta se encontrava conjurada. Talvez isso levasse à criação do Estilo Analítico, no qual a intuição algébrica fornece subsídios para a fundamentação da Geometria contrariamente ao pregado por Hilbert em sua primeira obra – Geometria e Imaginação, na qual tem por objetivo apresentar Geometria sob um aspecto intuitivo e visual. Entretanto, na segunda obra, segundo Hadamard, ele “elimina qualquer apelo à intuição” ao dar tratamento rigoroso em seu “Fundamentos de Geometria”.

Procurei dar uma visão sobre aspectos de imaginação, intuição e visualização em Matemática, particularmente em Geometria de forma teórica. Entretanto, entendo que, numa disciplina da Licenciatura, como Álgebra Linear, ou mesmo uma disciplina de Geometria Analítica, esta forma de desenvolver o conteúdo traria um ganho na produção de significados. Outros exemplos envolvendo conteúdos matemáticos com abordagem geométrica podem ser encontrados em minha tese de doutorado, (Leivas, 2009).Acredito como Klein (1927) que as reformas na formação do professor que atuará na escola básica devem partir da sua formação inicial na Universidade.

Na tentativa de propor uma geometrização do currículo da formação do professor de Matemática, entendo estar inovando para uma educação matemática a fim de desmitificá-la como “atividade velha”, de acordo com Gusmán (1993), desenvolvendo um pensamento geométrico como discutido por Dorier, Gutiérrez e Strässer. Além disso, entendo que, criar uma componente geométrica no Currículo da Licenciatura em Matemática da forma como sugeri em minha tese, corrobora o que Bishop (1989) salientou a importância da interligação entre os conceitos de visualização, imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, os quais são úteis para a Educação Matemática e precisam ainda ser mais bem compreendidos.

## Referências


Bishop, Alan J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics* education. Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 11, n. 1-2, p. 7-16.

Brasil. (2002). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília.

Costa, C.. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Disponível em: <www.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2007

Courant, Richard; Robbins, Herber. (2000). *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Moderna.

Granger, G.F. (1974). *Filosofia do Estilo*. São Paulo: Perspectiva, Editora da USP.

, A. Boero, P**.** (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education***:** past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers.

Guzmán, Miguel de. (1993). Enseñanza de la matemática. In: Gil Pérez, D.; Ozámiz, M. G. *Enseñanza de las ciencias y la matemática*: tendencias e innovaciones. Biblioteca Virtual OEI. p. 62-89. Disponível em: <http://www.oei.org.co/oeivirt/ciencias.pdf >. Acesso em 03 nov. 2007.

Klein, Félix. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática.

Leivas, J.C.P. (2009. *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

Loureiro, C. (2004). Que formação matemática para os professores do 1º Ciclo e para os educadores de infância? In: Borralho, A.; Monteiro, C.; Espadeiro, R. *A matemática na formação do professor*. Évora, Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação. p. 89-124.

Princípios *e Normas para a Matemática Escolar*. (2008). Lisboa: APM, Trad. dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.