APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN PRIMITIVA: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON APPLETS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

APPROCHE TO THE CONCEPT OF PRIMITIVE FUNCTION: A TEACHING EXPERIMENT USING APPLETS OF DYNAMIC GEOMETRY

Aranda, C.[1], Callejo, M. L.[2]
[1]I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, [2]Universidad de Alicante

Resumen. *Esta comunicación aporta información sobre cómo un experimento de enseñanza en un entorno tecnológico usando applets elaborados con el programa de geometría dinámica Geogebra, ayudó a estudiantes de bachillerato (17-18 años) a construir distintas aproximaciones al concepto de función primitiva. Los resultados muestran por una parte que los estudiantes fueron capaces de relacionar distintas ideas usando argumentos variados para asociar la gráfica de una función con la de una de sus primitivas; en estos argumentos subyace principalmente la relación de este concepto con el de derivada. Por otra parte las soluciones aportadas se apoyaron más en el pensamiento visual que en el analítico.*

Palabras clave: función primitiva, experimento de enseñanza, soluciones visuales, soluciones analíticas

Abstract. *This communication provides information about how a teaching experiment in a technological environment using applets developed with software of dynamic geometry Geogebra, helped to high school students (17-18 years) to build different approaches to the concept of primitive function. The results show on one hand that students were able to relate different ideas using various arguments to associate the graph of a function with a graph of one of its primitive; the main argument is the relationship between the concept of function primitive and function derivative. On the other hand the solutions were supported mainly in the visual thinking.*

Key words: primitive function, teaching experiment, visual solutions, analytical solutions

1. INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido objeto de debate e investigación en las dos últimas décadas y constituye una parte importante de los programas de bachillerato de tipo científico y de algunos estudios universitarios. Su estudio debe atender a la comprensión de las ideas y conceptos básicos, a su aplicación a la resolución de problemas y al manejo de las reglas y algoritmos de cálculo. Sin embargo muchas veces su presentación se focaliza en aspectos de tipo procedimental como el manejo de una serie de reglas para calcular límites, derivadas o integrales.

Muchos de los estudios sobre la enseñanza del Cálculo han indicado la necesidad de usar múltiples representaciones para presentar los conceptos y de enfatizar las conexiones entre ellos para desarrollar una comprensión más profunda de los mismos (Tall, Smith y Piez, 2008). Por otra parte un significativo número de investigaciones considera que la comprensión en matemáticas tiene que ver con la habilidad para usar el pensamiento visual y el analítico (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) y que en lo referente al Cálculo los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar analíticamente más que visualmente (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Uno de los conceptos fundamentales del Cálculo es el de integral cuya comprensión exige coordinar las representaciones gráficas y analíticas del concepto (Ferrini-Mundi y Graham, 1994).

Actualmente las tecnologías, además de liberar a los estudiantes de realizar manipulaciones algebraicas y cálculos tediosos, ofrecen la posibilidad de identificar representaciones equivalentes del mismo concepto, además de favorecer la interacción y el dinamismo (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006). Algunas propuestas didácticas para introducir el concepto de integral usando calculadoras gráficas, programas de cálculo simbólico u hojas de cálculo han arrojado resultados importantes. Berry y Nyman (2003) investigaron acerca de la relación entre el gráfico de una función derivada y el de la antiderivada; los resultados obtenidos confirmaron que al comienzo de la actividad los estudiantes mostraron una visión algebraica del Cálculo y tuvieron dificultad para relacionar las gráficas de una función derivada y la función original, pero el uso de la tecnología permitió desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo. Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y simbólicas de este concepto proporcionó un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas. Camacho (2005) ha advertido de la necesidad de prestar atención al proceso de transformación y relación entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Nuestro trabajo se encuadra en las investigaciones que consideran que comprender un concepto implica reconocerlo en diferentes representaciones, manipularlo en una representación dada y trasladarlo de una representación a otra (Lesh, Post y Behr, 1987). También en los trabajos de Presmeg (2006) que proporcionan un marco para describir distintas formas de aproximación y representación de los conceptos matemáticos y de abordar y resolver problemas. Siguiendo a esta autora identificamos elementos para categorizar como analíticas y visuales, las respuestas de los estudiantes a cuestiones relacionadas con el concepto de integral definida. Las soluciones analíticas implican habitualmente el uso de ecuaciones, de manera que una representación gráfica se traduce a una representación analítica; en algunos casos estas soluciones no utilizan ecuaciones, pero identifican el tipo de función asociado a un tipo de ecuación (por ejemplo polinómicas); también suelen incluir el uso de números, por ejemplo identificando los valores que toma una función. Las soluciones visuales son las que interpretan las propiedades de los gráficos (por ejemplo máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc.) sin apoyarse en representaciones analíticas.

El objetivo de esta comunicación es identificar en estudiantes de Bachillerato (17-18 años) el tipo de solución (visual o analítica) y los conceptos que utilizan cuando relacionan la gráfica de una función con la de su primitiva. Estos estudiantes habían participado en un experimento de enseñanza en un entorno tecnológico con *applets* en los que se utilizaban simultáneamente representaciones gráficas y analíticas.

2. MÉTODO

- *Participantes*

15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) participaron en un experimento de enseñanza donde se trabajó la integral definida. El rendimiento académico de estos estudiantes era muy alto o medio-alto (4), medio (5) y bajo o muy bajo (6). Previamente habían estudiado el concepto de límite y de derivada usando asiduamente el lenguaje visual y *applets* diseñados con el programa *Geogebra* para ilustrar estos conceptos.

- *Experimento de enseñanza*

El experimento se llevó a cabo en 8 sesiones de 1 hora durante tres semanas. La secuencia de enseñanza constaba de 11 tareas, 3 de ellas relacionadas con la función integral y 1 con el Teorema Fundamental del Cálculo integral.

La secuencia didáctica plantea la integral a partir del área (Turégano, 1998) y se articula a través de los siguientes puntos:

- cálculo del área del círculo y el método de "agotamiento";
- aproximación de manera dinámica al área bajo una gráfica mediante rectángulos cuya altura es un extremo del intervalo, haciendo que la longitud de los subintervalos (base de los rectángulos) tienda a cero;
- exploración gráfica de las propiedades de la integral;
- introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

Los estudiantes trabajaron por parejas o tríos de similar nivel de rendimiento académico y se les proporcionaron guías con tareas, que debían resolver con la ayuda de los *applets*, ocasionalmente con una hoja de cálculo o con calculadora, y con lápiz y papel. En algunas tareas se les pedía que experimentaran con los *applets*, escribieran sus respuestas, reflexionaran sobre ellas y anotaran sus conclusiones, con el propósito de que construyesen el concepto de integral definida y estudiasen sus propiedades; otras eran de aplicación de los resultados obtenidos a la resolución de problemas reales. Al principio de cada sesión se hacía una puesta en común de la sesión anterior.

Se diseñaron distintos tipos de *applets*. Unos aproximaban el área de figuras:

- El área de un círculo mediante n triángulos con un vértice común en el centro del círculo e igual base, inscritos y circunscritos al círculo.
- El área bajo el gráfico de funciones como o $f(x) = x^2$ en un intervalo mediante n rectángulos de igual base y de altura los valores extremos de $f(x)$ en cada subintervalo.

Para introducir la función integral se propusieron tres tareas. Dos de ellas se apoyaban en un *applet* que mostraba el área de la región determinada por una recta, $y=mx+n$ (inicialmente $y=-2$) y el eje de abscisas en el intervalo y el valor de la integral . Se pedía justificar, usando las fórmulas de las áreas de los polígonos, los valores de las integrales que aparecían al variar m y n; también obtener estas mismas integrales para cualquier valor de t ($t \geq 0$), y en un tercer paso, fijos m, n y t, el valor de la integral para cualquier valor de a ($a<t$). Se pretendía así que los estudiantes obtuviesen la expresión analítica de la función que representaba el área, en este caso un polinomio de segundo grado. En la segunda tarea se pedía dibujar de forma aproximada con lápiz y papel, las gráficas de las funciones que expresaban el área bajo dos gráficas

dadas (la recta horizontal de ecuación *y=2* y la recta oblicua *y= x+2*) en el intervalo para .

Un *applet* que generaba la función integral en tiempo real (Figura 1) se utilizó como apoyo a la tercera tarea. Cambiando los valores de *m* y *n* mediante los deslizadores se podía generar la función área *A(x)* para otras rectas. Se pedía comprobar los resultados de la tarea anterior y hallar la integral para $m \geq 0$ y $n \geq 0$ en el intervalo y en el intervalo (siendo *a* y *t* positivos).

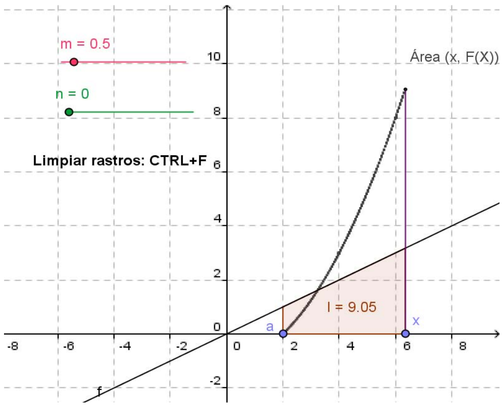

Figura 1. Traza de la función integral

Por último para introducir el teorema fundamental del Cálculo un *applet* ilustraba que los límites de las tasas de variación media (por la izquierda y por la derecha) de la función integral son la función dada. Moviendo el deslizador, disminuyendo el valor *h* de amplitud del subintervalo, y para un valor de *x* dado, se podía ver como la tasa de variación media se aproximaba al valor *f(x)*. Con ello se podía intuir y demostrar que si *f* es continua, la función integral es continua y derivable, por tanto *f(x)* es la derivada de *F(x)*.

- *Recogida de datos*

Tres semanas después de finalizar el experimento de enseñanza los estudiantes respondieron a un Test con 12 ítems seleccionados y adaptados de Hong y Thomas (1997), la mayor parte de los cuales no se podía responder si no se habían comprendido los conceptos. Los estudiantes debían contestar usando lápiz y papel y podían utilizar la calculadora gráfica

En esta comunicación presentamos los resultados del análisis de las respuestas al ítem 10 que hace referencia a la comprensión del concepto de función primitiva y al teorema fundamental del Cálculo. El objetivo de este ítem era identificar, a través de las respuestas de los estudiantes, distintas aproximaciones al concepto de función primitiva. En él se presenta la gráfica de una función *f(x)* (Figura 2) y se pide seleccionar entre cinco gráficas (Figura 3) la que representa una primitiva de *f* y justificar la respuesta.

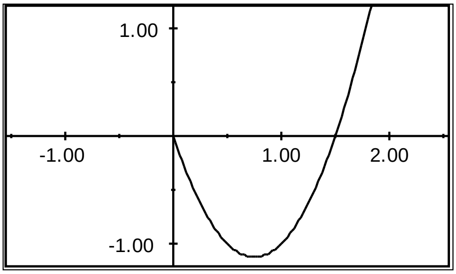

Figura 2. Gráfica de una función *f(x)* de la que se pide identificar una primitiva.

Las gráficas para seleccionar son: (a) una traslación de *f(x)*; (b) una función creciente; (c) una función integral de *f*; (d) la gráfica simétrica de (b) respecto del eje de abscisas; y (e) la gráfica simétrica de (c) respecto del eje de abscisas (Figura 3).

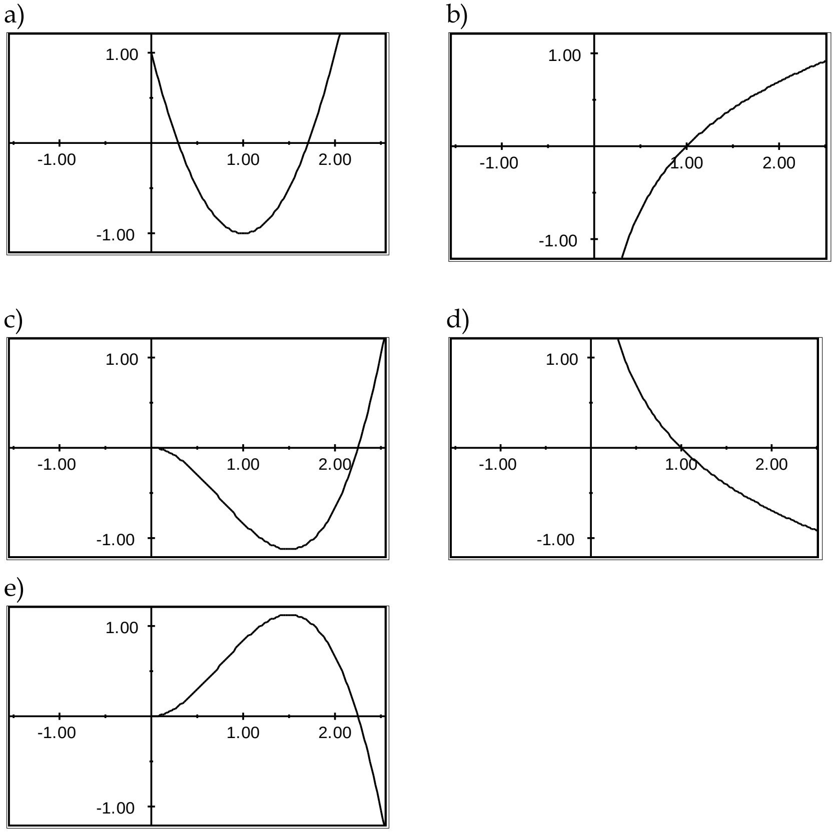

Figura 3. Alternativas de posibles funciones primitivas de f(x) dadas en el Item 10

Dado que se trata de un ítem con formato de múltiples respuestas, se puede razonar centrando la atención en las características de *f(x)* o en las de las posibles primitivas, apoyándose en el concepto de derivada (observando la variación de la pendiente de las tangentes en el intervalo [0, 2]) o en el de integral como área de la superficie la función *f* cuando *x* varía entre 0 y 2. También se puede identificar *f(x)* como función cuadrática y por tanto su primitiva es polinómica de grado 3.

Análisis de datos

Las respuestas de los estudiantes se analizaron identificando los conceptos e ideas utilizados y si los argumentos propuestos por los estudiantes eran de tipo visual, analítico o una combinación de ambos (armónico) (Presmeg, 2006).

Las soluciones analíticas son aquellas en las que los estudiantes identifican la ecuación de la función *f(x)*, calculan la función primitiva *F(x)* y reconocen cuál de las posibles gráficas corresponde a *F(x)* (es decir, asocian la ecuación obtenida con alguna de las gráficas dadas en el ítem). También se han considerado dentro de esta categoría las respuestas en las que sin escribir la ecuación de *f(x)* o de las posibles primitivas, el estudiante identifica a qué familia de funciones pertenece *f(x)* (cuadrática en este caso) y relaciona la ecuación de esta función y su primitiva o de una función y su derivada.

Las soluciones visuales son aquellas que operan con imágenes y determinan el aspecto de la gráfica de la primitiva de distintas formas: visualizando el cambio del valor del área entre la gráfica de *f(x)* y el eje de abscisas en el intervalo [0, 2], o el cambio del valor de la pendiente de la tangente de cada una de las posibles primitivas, o el comportamiento de *F(x)* por el decrecimiento/crecimiento de *f(x)* y el valor mínimo.

Finalmente, las soluciones armónicas son las que combinan elementos de tipo visual y analítico.

3. RESULTADOS

De los 15 estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza sólo 12 contestaron este ítem y 10 la justificaron. La Tabla 1 muestra los conceptos utilizados y los tipos de soluciones de estos 10 estudiantes.

Tabla 1. Conceptos utilizados por los estudiantes y tipo de solución

Solución/conceptos	Derivada	Área bajo una curva	Derivada y área bajo una curva	Total
Visual	5	0	2	7
Analítica	0	1	0	1
Armónica	0	0	2	2
Total	5	1	4	10

En la Tabla 1 se observa que la mayor parte de los argumentos de los estudiantes se basaron sólo en el concepto de derivada o en el de derivada y área bajo una curva simultáneamente. En cuanto al tipo de solución la mayor parte son de tipo visual. A continuación presentamos protocolos de los distintos tipos de soluciones encontradas.

Soluciones visuales

- 6 estudiantes se apoyaron de forma explícita o implícita en que *F(x)* es una función cuya derivada es *f(x)*, dando dos tipos de argumentos:
    - 2 estudiantes interpretaron que *f(1.5)=0* nos da información sobre un máximo/mínimo de la primitiva. A partir de esta información los estudiantes

discriminaron las diferentes alternativas considerando la concavidad de *f(x).* Estos estudiantes inicialmente seleccionaron dos posibles respuestas y discriminaron entre ellas estudiando la evolución de la función o la forma de la gráfica:

"Podrían ser la (c) y la (e) porque en el punto 1.5 f(x) corta al eje x, y tanto en (c) como en (e) hay en ese punto un mínimo o un máximo relativo respectivamente, pero por la concavidad de la gráfica su primitiva es la (c)."

- 4 estudiantes hicieron el estudio del decrecimiento y crecimiento de *f(x)* en el intervalo [0, +∞) y extrajeron consecuencias:

"La respuesta (c) es la correcta debido a que f(x) es negativa en [0, 1.5] y por tanto F(x) tiene que ser decreciente en el intervalo [0, 1.5]. En el intervalo [1.5, +∞] f(x) es positiva, por tanto F(x) es creciente. En el punto 0 la f(x) es 0, por tanto en F(x) tiene que haber un punto de inflexión."

- 1 estudiante se apoyó en que *F(x)* representa la variación del área encerrada bajo la gráfica *f(x)* en el intervalo [a, x] siendo a fijo y $a \leq x \leq b$:

"(c) ya que es la única decreciente hasta x=1.5 y creciente a partir de ese punto, lo cual se corresponde con el área abarcada por f(x)."

Solución de tipo analítico

- 1 estudiante identificó la expresión simbólica de la gráfica de *f(x)* e integró dicha función:

"Utilizando los valores x=0.5, 1 y 2 la gráfica coincide con la (c)".

Soluciones armónicas

- Por último 2 estudiantes dieron una solución en que aparecían elementos visuales y analíticos. Uno de ellos, además de interpretar el significado de *f(1.5)=0*, en su exposición subyace la asociación entre la forma de una gráfica y su expresión analítica:

"La (b) y la (d) no pueden ser debido a que una función exponencial no puede ser la primitiva de una función polinómica. La (a) no puede ser tampoco debido a que cuando en f(x) para x=1.5, en la primitiva ha de haber un máximo o un mínimo, ya que la derivada es igual a 0. Así que tampoco puede ser la (e). Por tanto la única que puede ser es la gráfica (c)."

En resumen, de los 10 estudiantes que justificaron sus respuestas, 7 usaron únicamente el pensamiento visual con elementos del concepto de derivada (intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión) y de función integral (valor del área bajo la gráfica), sólo 1 calculó la primitiva, dando una solución de tipo analítico y por último, 2 se apoyaron en ambos conceptos, derivada e integral, usando tanto elementos visuales como analíticos para justificar su respuesta.

4. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El objetivo de esta comunicación era identificar en estudiantes de Bachillerato que habían participado en un experimento de enseñanza, el tipo de solución (visual o analítica) y los conceptos que ponían en juego cuando respondían a un ítem relativo a la relación entre la gráfica de una función y la de su primitiva.

Los resultados muestran que los estudiantes respondieron mayoritariamente usando soluciones visuales y relacionando diferentes ideas matemáticas: las características de una función y sus implicaciones en el comportamiento de su primitiva (que tome el valor 0; el crecimiento/decrecimiento); los conceptos de función integral asociada a los conceptos de derivada y área bajo una gráfica (cuando la función es negativa la función integral decrece porque el área bajo el eje aumenta y cuando es positiva crece). Pero también hubo estudiantes que generaron soluciones analíticas para justificar sus respuestas (una función polinómica tiene una primitiva polinómica). Asimismo se constató una tendencia mayor a apoyarse en el concepto de derivada utilizando distintos argumentos. Esto muestra que el experimento de enseñanza ayudó a la construcción del concepto de función primitiva en la medida en que los estudiantes relacionaron distintas ideas, y favoreció el desarrollo del pensamiento visual.

En el experimento de enseñanza se utilizaron *applets* para generar de forma constructiva la función integral en tiempo real, una vez fijado el intervalo de integración, y para relacionar el concepto de integral y de derivada, ilustrando que los límites de las tasas de variación media (por la izquierda y por la derecha) de la función integral son la función dada. Nosotras interpretamos los resultados obtenidos en el sentido de que estos *applets* y las tareas asociadas ayudaron a los estudiantes a relacionar diferentes conceptos y a aplicarlos a una situación nueva, pues la gráfica de *f(x)* (Figura 2) difería de las que se habían trabajado en clase, lo cual es un indicador de la comprensión. Además parece que tanto la presentación de la cuestión como los tipos de *applets* utilizados favorecieron que los estudiantes dieran preferentemente soluciones visuales, a pesar de que disponían de los conocimientos necesarios para dar soluciones de tipo analítico, identificando los tipos de funciones que aparecían en los diferentes gráficos y la relación entre la expresión analítica de una función y su primitiva.

Finalmente, una vez más se pone de manifiesto que trabajar con distintos sistemas de representación es importante para la construcción de los conceptos matemáticos (Aranda y Callejo, 2010), pues promueve la capacidad de relacionar el pensamiento analítico y visual, que es esencial en la comprensión de la diferenciación y la integración (Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg, 2010). En este sentido 2 estudiantes fueron capaces de relacionar ambos tipos de pensamiento. Nos parece pues que experimentos de este tipo ayudan a mejorar la comprensión del concepto de función primitiva.

Referencias

Aranda, C., & Callejo, M.L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 129-158.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático hacienda uso de CAS (computer algebra system). En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 97-110). Córdoba: SEIEM.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127–138). Washington, DC: MAA.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ferrini-Mundi, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. En J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results*, *MAA Notes 33* (pp. 31-45). Washington, DC: MAA.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting cases of Calculus students' understanding of derivative graphs'. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 152 -176.

Hong, Y., & Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 81–88). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M,. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M. K. Heid & G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*. Vol. 1 (pp. 207-258). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(2), 233-249.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 435-457.