CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

THE DIDACTIC-MATHEMATICS KNOWLEDGE ON ELEMENTARY ALGEBRAIC REASONING: AN EXPLORATORY STUDY

Aké. L. [1]**, Castro, W. F.**[2] **, Godino, J. D.**[1]

[1]Universidad de Granada (España); [2]Universidad de Antioquia (Colombia)

Resumen. *En este trabajo se informa de algunos resultados de la primera fase de una investigación en la que se indaga sobre el conocimiento didáctico-matemático manifestado por futuros maestros de educación primaria al resolver tareas de naturaleza algebraica. La información se obtuvo mediante un cuestionario compuesto*

razonamiento algebraico elemental.

Palabras clave: Razonamiento algebraico, nivel de algebrización, formación de maestros, conocimiento del profesor.

Abstract. *We report some results of an ongoing research that examines the didactic-mathematics knowledge exhibited by 40 prospective primary school teachers when solving algebraic tasks. The information was obtained by applying a questionnaire designed to explore some features of the didactic-mathematics knowledge related to elementary algebraic reasoning.*

Keywords: Algebraic reasoning, level of algebraization, teacher's training, teacher's knowledge.

PROBLEMA Y ANTECEDENTES

Diversas investigaciones recomiendan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación primaria (Kaput, 2000; Davis, 1984; Vergnaud, 1988). Esta integración del razonamiento algebraico en todos los grados y todos los temas de la escuela elemental, plantea en el ámbito de la formación inicial de profesores, la cuestión: *¿Qué conocimientos deben ser promovidos durante la formación inicial de los maestros para que puedan reconocer el carácter algebraico de las tareas matemáticas, y promover el razonamiento algebraico en los niños de la escuela elemental?* Cuestiones como éstas referidas a los conocimientos del profesor forman parte de la problemática que constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática. Al respecto Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor que integra, organiza y extiende diferentes modelos propuestos (Shulman, 1986; Hill, Ball y Schilling, 2008) sobre el complejo de conocimientos que un profesor de matemáticas pone en juego para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes.

La formación de maestros de escuela elemental que les faculte para reconocer y promover el razonamiento algebraico elemental en los niños, es un reto para los formadores. Para Blanton y Kaput (2005, p. 414), "la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos del razonamiento algebraico elemental…" y agregan "…debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzcan cambios en las prácticas curriculares" (p. 414). Sin embargo existe poca evidencia sistemática de los efectos en la formación en maestros de acciones instruccionales específicas (Jacobs, Franke, Carpenter, Levy y Battey, 2007); por tanto, la investigación que promueva el razonamiento algebraico en los maestros en formación es tema de interés (Borko, Frykholm, Pittman, Eiteljorg, Nelson, Jacobs, et al., 2005). Es relevante mencionar que aunque Castro, Godino y Rivas (2010) investigaron las competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental, nuestro trabajo ofrece una orientación diferente.

En este sentido, nuestro problema de investigación se centra en el estudio del conocimiento didáctico-matemático que manifiestan futuros maestros de primaria, cuando resuelven tareas con características algebraicas. En esta comunicación se informa sobre algunos de los resultados obtenidos referentes a la resolución de una tarea que forma parte de un cuestionario piloto que se ha diseñado, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009).

MÉTODO

El método de investigación para este estudio se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004). Se trata de un estudio de tipo exploratorio, que se realizó durante el curso académico 2010-2011 en la Escuela Normal para Maestros en la ciudad de Mérida, Yucatán, en el que se utilizó un cuestionario como instrumento para la recogida de datos.

Los sujetos

La aplicación del cuestionario se realizó con un grupo de 40 estudiantes en el contexto de un curso de formación en didáctica general. Los futuros maestros cursaban el último año de estudios y realizaban su prácticum en escuelas de educación primaria. El grupo está formado por 83% de mujeres y 17% de hombres, y cuya edad promedio está alrededor de los 21 años. La muestra para el estudio se escogió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes participaron en tanto que estaban inscritos en el curso de didáctica general referido.

El cuestionario

El cuestionario de respuesta abierta, consta de ocho tareas. Algunas de estas fueron modificaciones de tareas propuestas en diferentes investigaciones referidas al álgebra en la escuela primaria (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Blanton y Kaput, 2003, Bednarz, Radford, Janvier, y Lepage, 1992), así como algunas tareas propuestas en libros de texto. La selección final se realizó considerando la presencia o ausencia de ciertos rasgos algebraicos.

Para el diseño de las tareas se tomaron en cuenta dos criterios, por un lado el nivel de algebrización, y por otro, el tipo de conocimiento que puede manifestarse a través de la resolución. La naturaleza algebraica se concibe desde una visión ampliada sobre el razonamiento algebraico que permite reconocer distintos tipos y grados de algebrización de la actividad matemática. Así, la consideración de una tarea como algebraica se ha basado en la identificación de rasgos algebraicos intrínsecos en la resolución de la misma. En las siguientes líneas, se describen sucintamente cinco ejes que permiten la identificación de rasgos algebraicos y, en función del número de estos rasgos se puede atribuir grados o niveles de algebrización (Aké, 2010).

- *Relaciones*. Se consideran: (1) las relaciones entre operaciones y sus propiedades; y (2) las relaciones binarias y sus respectivas propiedades. Las propiedades fundamentales de las operaciones y las diversas acepciones para el signo igual.
- *Funciones*. Se incluyen los diferentes tipos de funciones, operaciones con funciones, y propiedades; así como también las funciones proposicionales, fórmulas y parámetros.
- *Estructuras*. Se consideran, los diferentes tipos de estructuras, propias del álgebra, que permiten entender, por ejemplo, los naturales como un semi-anillo conmutativo.
- *Lenguajes*. Se consideran diferentes lenguajes para expresar la actividad matemática. Se hace referencia al uso de palabras, representaciones gráficas o figurativas, imágenes, iconos, sistemas alfanuméricos, etc.
- *Intensivos*. En este eje se ha considerado, a la generalización como un rasgo característico del razonamiento algebraico. La generalización se puede expresar mediante la identificación de características generales presentes en casos particulares. Por ejemplo, en el estudio de las funciones, sería una función particular perteneciente a la clase de funciones lineales, esta última expresión será un objeto general. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal, será un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo).

En el cuestionario se incluyeron consignas para explorar tres tipos de conocimientos de los futuros maestros, a saber: (1) conocimiento común, que faculta al maestro a resolver la tarea matemática; (2) conocimiento especializado utilizado por el profesor en la enseñanza, que demanda el uso de los diferentes significados de un objeto, de sus diferentes representaciones, la identificación de conocimientos de naturaleza algebraica puestos en juego en la resolución de las tareas; y (3) conocimiento ampliado, que favorece vincular el conocimiento común y el especializado y realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo.

A continuación se describen y analizan dos resoluciones dadas por futuros maestros a una tarea planteada en el cuestionario. El análisis realizado usando nociones del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), permitirá desvelar los diversos componentes del contenido involucrados en la resolución de la tarea. Esto proporcionará información sobre aspectos relevantes del conocimiento manifestado por los maestros en formación.

La tarea

Del cuestionario que se ha diseñado, se ha elegido, la tarea dos (tomada de un libro de texto de 6º de Educación Primaria), para ser discutida en este informe (ver Figura 1). Esta tarea busca obtener información sobre el conocimiento común a través de la resolución al inciso a). Por otro lado, la resolución de los incisos b) y c) ofrece información sobre el conocimiento especializado.

TAREA 2

Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el dígito que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C?
b) ¿Cómo sabes que son correctos?
c) Identifica conocimientos de tipo algebraico que se ponen en juego al resolver este problema.

Figura 1. Tarea 2

Se ha considerado a la tarea dos como una tarea matemática con rasgos algebraicos de tipo relacional y estructural "…la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico" (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets, 2006, p. 88). En tal sentido, la atribución del carácter algebraico a la tarea se fundamenta en la identificación de propiedades estructurales que soportan el algoritmo de la suma y el uso del sistema posicional que permiten obtener las condiciones para encontrar los valores numéricos de A, B y C. También se fundamenta, en la presencia de relaciones entre las operaciones y entre los números y en la introducción de un lenguaje simbólico-literal.

ANÁLISIS DE LA TAREA: SOLUCIÓN ARITMÉTICA

En la solución aritmética se debe interpretar, inicialmente que la suma de tres veces el mismo "número" debe dar como resultado un número cuya cifra de las unidades sea igual al número buscado. Esta condición, cuya identificación favorece la búsqueda sistemática del número, ofrece dos opciones: los números cero y cinco. Se descarta el primero, y de esta manera se encuentra una de las incógnitas. De la lectura de la suma de la segunda columna, la correspondiente a las decenas, se aprecia otra condición: la suma de tres números repetidos más una "unidad" da como resultado un número de dos cifras que termina en cinco. Esta condición permite identificar al número buscado: ocho. Para obtener el valor de la incógnita A se procede de manera análoga, y se halla el único número posible para la letra A: nueve. El algoritmo de la suma en columnas subyace en el proceso numérico de resolución.

Ejemplo de resolución aritmética

En la Figura 2 se presenta el proceso de resolución del estudiante A. Este proceso resalta la interpretación por parte del futuro maestro del elemento lingüístico, “determinar el número que representa cada letra”, como el proceso de asignación de números a las letras, que otorga un significado de número generalizado a las mismas.

También se han identificado, conceptos como la noción de suma, la multiplicación como suma repetida, el signo igual como asignación de un valor específico y como resultado de la operación de sumar. Así mismo, se aprecia que el futuro maestro pone en uso el concepto de variable cuando asigna valores, tomando casos posibles de solución.

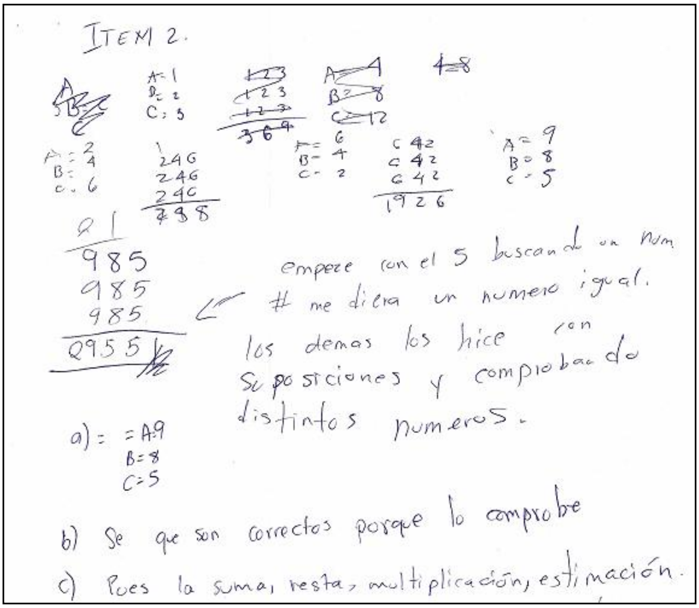

Figura 2. Resolución de la tarea 2 por el estudiante A

El maestro en formación no logra identificar una proposición o propiedad que oriente su estrategia de resolución, aunque posteriormente, parece percibirla y lo expresa “empecé con el cinco buscando un número que me diera un número igual”. Sin embargo, a partir de la sentencia “los demás los hice con suposiciones y comprobando distintos números”, indica que los valores para las letras A y B se deducen por ensayo y error, una vez que ha logrado identificar el valor para la letra C.

Como procedimientos el maestro en formación reemplaza cada letra con el mismo número, efectúa el proceso de cálculo y posteriormente, con base en la comparación del resultado obtenido con la terna de números escogidos, cambia la terna y continúa con el proceso. Parece, que a partir de los ensayos en la primera parte del proceso de solución, el futuro maestro utiliza un procedimiento de ensayo y error que no obedece a una estrategia basada en las condiciones implicadas en la tarea.

Con respecto a los argumentos, el futuro maestro justifica la validez de su solución con la comprobación numérica más que con la identificación de una regla en la que se considere el uso de las propiedades para el algoritmo de la suma.

Se advierte que aunque el estudiante A tiene un conocimiento común que le permitió dar una solución correcta, no identificó conocimientos intrínsecos en la tarea y que son relativos a la educación primaria como digito, número y valor posicional.

ANÁLISIS DE LA TAREA: SOLUCIÓN ALGEBRAICA

Una solución que resalte el carácter algebraico de la tarea puede ser aquella que transforme la suma vertical en una ecuación del tipo: , que a su vez puede ser escrita como: , y simplificada mediante la aplicación de operaciones elementales en: . Ahora se puede despejar C en función de los parámetros A y B, y escribir una ecuación bi-paramétrica de la forma: de donde se obtiene . La búsqueda de valores numéricos, para los dos parámetros, pertenecientes al conjunto de números desde el uno hasta el nueve, proporciona la solución: .

Ejemplo de resolución algebraica

La Figura 3 presenta la resolución del estudiante B. Esta solución de un futuro maestro se ha escogido en virtud al enfoque procedimental de naturaleza “algebraica” que ha usado.

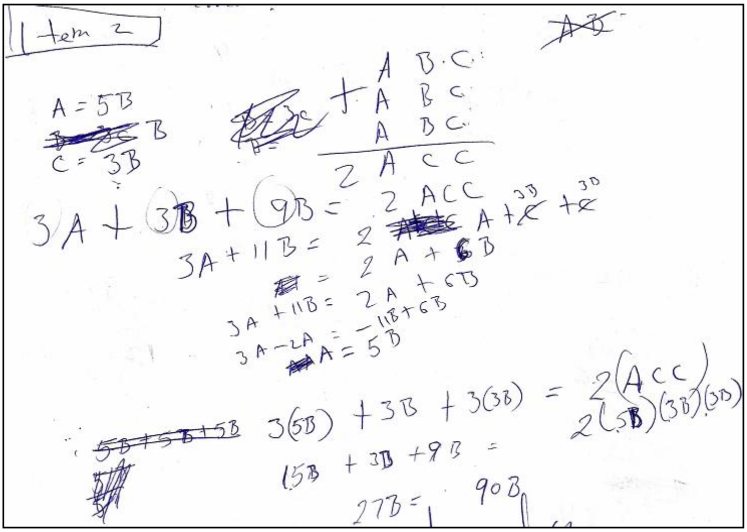

Figura 3. Resolución completa de la tarea 2 por el estudiante B

Se identifica el uso de propiedades de los números reales, que se ponen de manifiesto al aplicar operaciones elementales tales como: sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la ecuación.

Como procedimientos el futuro maestro plantea una relación entre las incógnitas, que deja a la letra B como parámetro. El establecimiento de esta relación se justifica en términos de lo que observa en la suma , ( ) y atiende al conteo de las letras A, B y C. El segmento horizontal, lo considera como signo igual, en su acepción de resultado. Interpreta la expresión algebraica 2ACC como una concatenación de caracteres, y aparentemente considera que concatenar es equivalente a unir caracteres y unir caracteres es equivalente a sumar (plantea). Posteriormente reemplaza la letra *C* por *3B* y agrupa términos semejantes.

En este punto del desarrollo de la resolución se aprecia el carácter algebraico procedimental de la solución, se halla ecuaciones equivalentes aplicando operaciones elementales, obteniendo finalmente otra relación, . Posteriormente el futuro maestro retoma la expresión inicial , reemplaza *A* por la expresión *5B*, pero a continuación interpreta la "concatenación" *2ACC* como un producto (ver Figura 4). Sin embargo llama la atención que el estudiante multiplica solo los números mas no así las letras. Igualmente el estudiante no hace uso de la interpretación de la concatenación de letras en términos del sistema posicional, que parece desconocer. Finalmente, al apreciar que los resultados obtenidos, no conducen a un valor numérico, el estudiante renuncia.

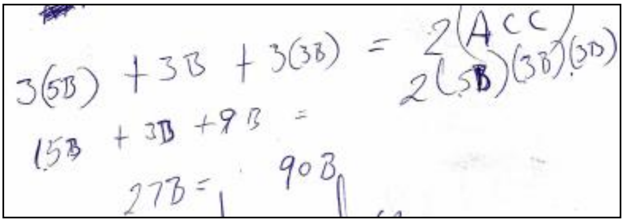

Figura 4. Segundo planteamiento de una ecuación por del estudiante B

Aunque el maestro en formación sigue un procedimiento basado en las relaciones entre A, B y C que observa en la suma, no los percibe como dígitos de un número, pasa por alto la estructura matemática que soporta al sistema posicional, lo que le lleva a que la ecuación que plantea no cumpla con las condiciones de la tarea.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se advierte que la tarea supone un reto a los futuros maestros, pues precisa identificar las letras como representaciones de dígitos desconocidos, que deben ser hallados y que están sometidos a ciertas condiciones. Se pone en juego el concepto de incógnita. En su solución se utilizan configuraciones de objetos y significados que dan origen a una resolución aritmética y a otra algebraica.

En el caso del estudiante A, el procedimiento seguido (ensayo y error) bajo un enfoque aritmético le llevó a encontrar los valores correctos de A, B y C, pero llama la atención que identificó como conocimientos usados para la resolución de la tarea la suma, "resta", multiplicación y "estimación" y ninguna de carácter algebraico. Se observa que la resta no parece haber sido usada por el estudiante durante el proceso de resolución y el conocimiento "estimación" corresponde al método de ensayo y error. El estudiante A remite a la comprobación para justificar la validez de su resultado. Por otro lado, el estudiante B, vinculó las letras cuyos valores deben ser hallados con el uso de procedimientos "algebraicos"; intenta dar solución a la tarea planteando una ecuación, sin embargo no utilizó procedimientos que soportan el algoritmo de la suma en columnas, y propiedades vinculadas con el sistema posicional.

Además de este análisis descriptivo, los datos recogidos con el cuestionario, se han sometido a un análisis de carácter cuantitativo y cualitativo, usando las variables "grado de corrección" y "método de solución" respectivamente. Los resultados, respecto a la tarea 2, indican que el 55% de los estudiantes dio una respuesta correcta, el 25% dio una respuesta incorrecta y el 20% restante no dio respuesta alguna. Por otro lado, el 57% usó un método de ensayo y error, un 20% aplicó el algoritmo de la suma y la multiplicación y el 3% abordó la tarea planteando una ecuación. Los estudiantes apoyan sus afirmaciones en frases como "los valores asignados son correctos porque al realizar la suma me da el resultado" e identificaron prioritariamente conocimientos relativos a la aritmética.

CONCLUSIONES

En el análisis realizado se advierte que aunque los futuros maestros resolvieron la tarea, exhiben dificultades cuando intentan proporcionar una justificación y conectar las condiciones de la tarea con la identificación de conocimientos algebraicos implicados, aspectos relacionados con el conocimiento especializado. En este sentido, se precisa que tanto los maestros como los alumnos experimenten "procesos de desarrollo y proposición de ideas matemáticas en relación con la estructura, las propiedades o las relaciones que subyacen las ideas matemáticas" (NCISLA, 2003, p.11). Según los resultados, parece plausible que los obstáculos detectados en la comprensión y uso del algoritmo de la suma existan también en contextos no numéricos.

Es necesario brindar oportunidades a los maestros en formación no solo para construir una visión más ampliada del pensamiento algebraico sino también para que sean capaces de conectar éste con el currículo de la primaria en sus distintos bloques de contenido.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN), Fondos FEDER, y de la Beca MAEC-AECID (Ministerio de Asuntos Exteriores y Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo).

Referencias

Aké, L. (2010). *Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático.* Tesis de Fin de Máster, Universidad de Granada, España.

Bednarz,N., Radford,L., Janvier,B. y Lepage, A. (1992), Arithmetical and algebraic thinking in problem solving. *Proceedings of PME-XVI*, Durham, (Vol. 1, pp. 65-72).

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teacher's "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10*, 70-77.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412.

Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J. K., Clark, K. K., y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *Zentralblatt für didaktik der mathematik: International reviews on mathematical education*, *37*(1), 43-52.

Carraher, D., Schiliemann, A. D., y Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Ed). Conferencia magistral prsentada en el *22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), pp. 87-115.*

Castro, W.F., Godino, J.D., y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 259-270). Lleida: SEIEM

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education.* London: Croom Helm.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Kaput, J. J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. *National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA.

León, O. G. y Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación*. (3ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.

National Center for Improving Student Learning and Achievement-NCISLA- (2003). Algebraic skills and strategies for elementary teachers and students. *Brief*, *3*(1), 1-12.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des matematiques et de l' informatique*, 189-19