Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra

Jhony Alexander Villa-Ochoa
javo@une.net.co
Universidad de Medellín
Medellín-Colombia

Marcelo C. Borba
mborba@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista "Julio Mesquita Filho"
Rio Claro-SP, Brasil

Resumen. Este documento se usa el constructo teórico *Humans-with-Media* para analizar una situación construida con el software Geogebra. La situación muestra un posible entendimiento de la función derivada a partir del reconocimiento de la "función tasa de variación"

Palabras Clave: Humans-with-Media; Geogebra, tasa de variación, derivada

1. Introducción

La incorporación de la tecnología en las matemáticas escolares ha llamado la atención de un amplio número de investigadores en el campo de la Educación Matemática (Borba & Villarreal, 2005; Borba & Godoy, 2010; Cedillo, 2006; Del Castillo & Montiel, 2008; Laborde, 2002; Lagrange & Keith, 2001; Moreno, 2002; Rabardel & Verillon, 1995). De manera particular, en Colombia, la incorporación de las TIC en las aulas escolares ha sido sugerida por el Ministerio de Educación Nacional a través de diversas publicaciones, entre ellas, la serie de documentos enmarcados en el proyecto "Computadores para Educar" (MEN, 2002).

Por su parte, Borba y Villarreal (2005) presentan un constructo teórico denominado *Humans–with–Media* en el cual se evidencia cómo el conocimiento matemático es producido por un colectivo pensante de seres-humanos-con-medios. Estos autores señalan que los medios empleados para comunicar, representar y para producir ideas matemáticas condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos. En el siguiente apartado se describirá algunos de los elementos que hacen parte del constructo teorico *Humans-with-Media* de Borba y Villarreal.

2. Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático

Borba y Villarreal (2005) usan el término *Humans-with-Media* para mostrar que los medios están en interrelación con los humanos y no como dos entes separados. De esta manera, los autores se fundamentan epistemológicamente en los planteamientos de Lévy (1993) quien, según Borba y Villarreal (2005), afirma que la tecnología y los artefactos deben ser vistos en interrelación con los seres humanos, de dicha interrelación depende la manera en que producimos conocimiento; según Lévy, las bibliotecas, las ciudades y los artefactos son parte de la manera en que conocemos.

El constructo teórico de Seres-humanos-con-medios está soportado en dos pilares, a saber: que la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva; y que la cognición incluye herramientas, dispositivos, artefactos y medios con los cuales el conocimiento es producido (Villarreal & Borba, 2010). Como se mencionó en Villa-Ochoa y Ruiz (2010), dentro de este constructo teórico, la separación entre seres humanos y medios no tiene sentido, pues los medios son componentes del sujeto epistémico, no son simples auxiliares ni complementos, sino una parte esencial y constitutiva de éste. Para estos investigadores, los medios son tan relevantes que el uso de diferentes tipos de medios conduce a la producción de diferentes tipos conocimiento.

En *Humans-with-Media* se presta especial atención a cómo a través de la modelación, la visualización, la Educación On-line y la experimentación se construye en conocimiento matemático escolar. Particularmente, en dicho constructo se muestra una perspectiva de la modelación con un enfoque pedagógico que está en sinergia con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Para Borba y Villarreal (2005) la experimentación-con-tecnología, aunado con la modelación se convierte en un ambiente en el que se promueve la formulación de conjeturas su discusión y prueba. De esa manera, estos investigadores resaltan que en el planteamiento de problemas, en estrecha relación con la modelación, va mucho más allá de la formulación de un problema matemático; ello implica que son los estudiantes quienes deben elegir, en asesoría con sus profesores, el tema o fenómeno de estudio el cual puede estar fuera del ámbito matemático.

Con respecto a la visualización Borba y Villarreal (2005) establecen que desde la literatura, este proceso ha sido considerado como una forma de razonamiento en la investigación en matemáticas y en Educación Matemática. En ese mismo sentido, Villa-Ochoa y Ruiz

(2010) estos investigadores presentan dos niveles en los que puede considerarse la visualización: el primero asociado a su uso en la prueba matemática formal; y otro, relacionado con su uso en otras actividades matemáticas tales como la elaboración de conjeturas, la solución de problemas o los intentos de explicar algunos resultados matemáticos a colegas o estudiantes. Borba y Villarreal, se apoyan en las palabras de Hanna (2000) para afirmar que en el primer caso las representaciones visuales no son aceptadas como parte de una prueba formal sino como un acompañamiento heurístico a la prueba que inspira a un teorema o a su demostración; en la segunda, la visualización no es más que un recurso periférico o pedagógico.

Aun cuando existe un consenso "teórico" sobre potencialidades pedagógicas de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el trabajo de Borba y Villarreal (2005) notan cierto tono de desconfianza con respecto a la visualización que, para estos investigadores, puede implicarse de la influencia que la práctica científica de las matemáticas tiene sobre las prácticas pedagógicas. En todo caso, estos autores presentan argumentos desde el acceso y comprensión del conocimiento matemático y de las maneras de resolver problemas para justificar la importancia de la visualización en la Educación Matemática.

Al interior del constructo teórico presentado en este apartado, la visualización es un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen. Al ser el constructo teórico Seres-humanos-con-medios asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, pues dicha dicotomía carece de valor ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo. Para los autores, esta visión es compatible con los planteamientos de Nemirosky y Noble (1997) cuando sugieren que nuestras experiencias, memorias e intenciones se llevan con nosotros. La experiencia que estamos teniendo, o tuvimos con cualquier tipo de medio dado, es parte de esa unidad Seres-humanos-con-medios así no esté disponible en ese mismo momento (Borba y Villarreal, 2005).

Basado en los planteamientos teóricos de Borba y Villarreal en este documento se presentan algunas situaciones con las cuales se puede producir conocimiento matemático en el aula de clase usando software como el GeoGebra. Para ver de manera mas amplia algunas situaciones el lector puede remitirse a Villa-Ochoa y Ruiz (2010) en donde se muestran algunas actividades que pueden orientarse en el desarrollo del pensamiento variacional. Asimismo, en Villa-Ochoa (2011b) se diseñaron algunas actividades para promover la comprensión de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada. En el siguiente apartado se analiza una de dichas actividades.

3. La función tasa de variación

Investigadores como Tall (2009) han recomendado la importancia de aproximarse a los conceptos del cálculo a través del establecimiento de relaciones dinámicas entre las nociones asociadas a tales conceptos. Como una manera de aproximarse a la comprensión de la derivada como una función, se desarrollo en Villa-Ochoa (2011) una herramienta en el software GeoGebra con la cual se podía calcular hacer una extensión del mecanismo de “triángulo” para analizar la tasa de variación en un punto el cual fue presentado en Villa-Ochoa (2011a). La herramienta en mención consiste en usar una secuencia de triángulos y sus respectivos valores de la tasa de variación para analizar la manera cómo cambia la tasa de variación en una gráfica cartesiana.

Con la ayuda del deslizador se hace cada vez más pequeño el intervalo en el cual está definida la longitud horizontal de cada triángulo (ver figura 1). Con la herramienta puede observarse cómo “la función derivada aparece como un límite de la función tasa de variación cuando el valor del incremento tiene a cero”. En las figura 1 se muestran algunas imágenes de la herramienta para la función *f(x)*= *cos (x)*. De igual manera, en la figura 3 se muestra el protocolo de construcción de la herramienta.

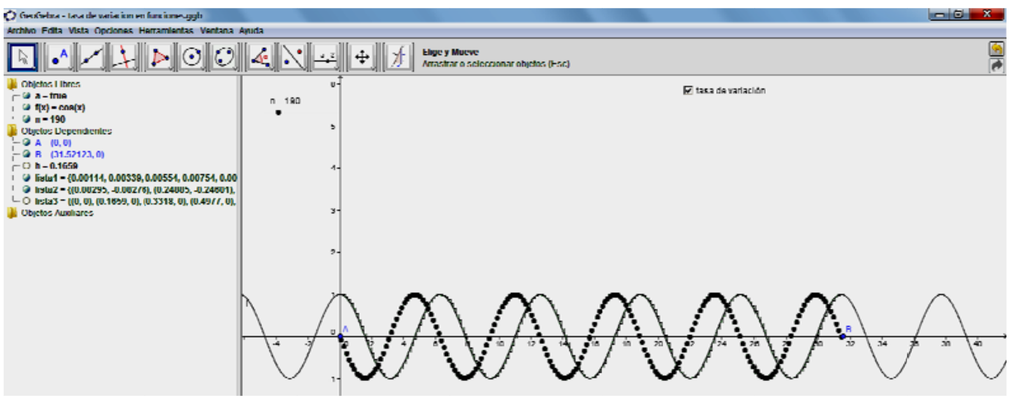


Figura 1. Visualización de la función tasa de variación cuando la longitud del intervalo decrece.

Protocolo de la Construcción

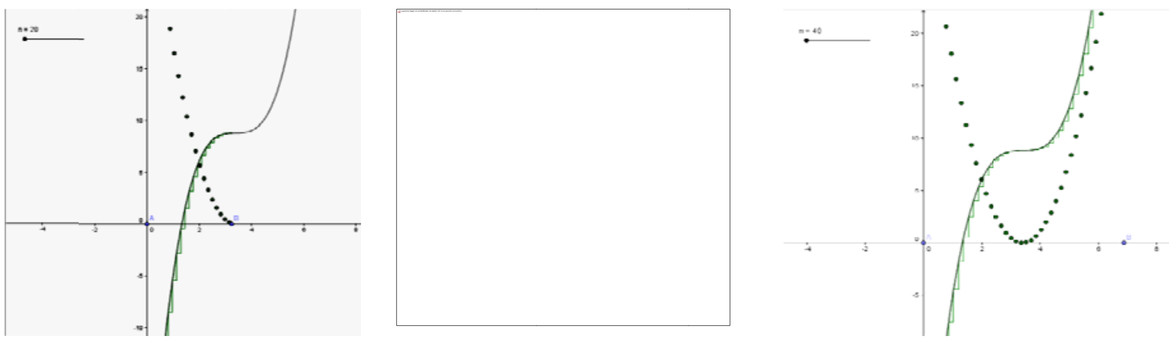
Archivo Vista Ayuda

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número n		n = 80
2	Punto A	Punto en EjeX	A = (0, 0)
3	Función f		f(x) = cos(x)
4	Punto B	Punto en EjeX	B = (31.52123, 0)
5	Número h	(x(B) - x(A)) / n	h = 0.39402
6	Lista lista1	Secuencia[Polígono[(i, f(i)),	lista1 = {0.0151, 0.04297, 0...
7	Lista lista3	Secuencia[(i, 0), i, x(A), x(B),	lista3 = {(0, 0), (0.39402, 0)...
8	Lista lista2	Secuencia[(i + h / 2, (f(i + h) -	lista2 = {(0.19701, -0.1944...
9	Valor Boolean...		a = true

Figura 2. Protocolo de construcción para la función tasa de variación

Por la manera en que se construyó la herramienta, los usuarios tienen la potestad de hacer variaciones en intervalo e interpretar la longitud del mismo, asimismo, también puede hacer alteraciones de la cantidad de intervalos y observar los gráficos a través del zoom. En Villa-Ochoa (2011b) se muestra algunas evidencias de cómo a través de esta actividad los estudiantes consiguen asociar las concavidades de las funciones con la manera como varía la tasa de variación, por ejemplo que "*la función es cóncava hacia arriba si la tasa de variación crece*". A continuación se presenta evidencia empírica de este hecho:

Con una idea imprecisa de que la secuencia de puntos representa la grafica de la derivada, las participantes de la investigación de Villa-Ochoa (2011b) describieron de las gráficas que se muestran en la siguiente ilustración



(a) (b) (c)

Figura 3. Secuencia de gráficos para estudiar el cambio de la tasa de variación

Con respecto a la secuencia de gráficas presentada en la figura 4, Estefanía, una de las estudiantes participantes de la investigación de Villa-Ochoa (2011b), afirmó que:

"*Ahí la derivada va bajando ya que el crecimiento se va haciendo más pequeño, ¿cierto?. Pero si lo aumentamos* [refiriéndose a mover los puntos para formar la Figura(b)] *ella también va a aumentar, el crecimiento va a ser más grande. Va a ser cóncava hacía arriba*".

Este tipo de estrategias diseñadas con el software, también se convierten en un elemento para visualizar otras relaciones como ejemplo, los puntos de inflexión como aquellos en los cuales la tasa de variación cambia su sentido d variación. Para una mirada más amplia de las potencialidades de esta herramienta, el lector podrá remitirse a Villa-Ochoa (2011b)

4. Consideraciones finales

Tal y como en Villa-Ochoa (2011a) se señala, existe evidencia para sustentar más la idea que aun cuando los estudiantes no hayan desarrollado una comprensión de la noción de límite, ni de la tasa de variación instantánea, se pueden ofrecer interpretaciones de las concavidades de una función; ello conlleva a ciertas implicaciones para el aula de clase la cual tiene que ver con el estudio de las concavidades de las funciones en los cursos previos al cálculo donde, generalmente, prima una secuencia didáctica que se inicia en la definición y termina en las aplicaciones, pero que exiguamente hace alguna referencia a las concavidades (Villa-Ochoa, 2011). En este sentido, más allá del estudio de las propiedades de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función no lineal, puede realizarse una interpretación de sus concavidades a través del estudio del cambio de la tasa de la variación media.

Tal y como lo señalaron Villa-Ochoa y Ruiz (2011), el uso de medios tecnológicos no pretende posicionarse como una manera de enseñar más fácil, sino que por el contrario, se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, pero sobre todo, se reconoce que los medios son una manera de redimensionar la manera de producir conocimiento matemática en las aulas de clase. Estos elementos ponen de manifiesto que la visualización es un proceso que va más allá del simple acto de mostrar una imagen, ni mucho menos una herramienta adicional u opcional en el proceso de comprensión, pues como afirman Borba y Villarreal (2005), los medios hacen parte de nuestra naturaleza y de esa manera el proceso de aprendizaje se observa como una unidad donde la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, ya que dicha dicotomía carece de valor puesto que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo.

Referencias bibliográficas

- Borba, M., & Godoy, M. (2010). *Informática e Educacao matemática.* Belo Horizonte: Autentica.
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking.* New York: Springer.
- Cedillo, T. (Enero - Marzo de 2006). Enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sitemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa* , 129 - 153.
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (2008). ¿Artefacto o instrumento? esa es la pregunta. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22*, págs. 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Laborde, J.-M. (2002). dinámica, Basar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la noción de variación con geometría. En MEN, *Tecnologias computacionales en el currículo de matemáticas* (págs. 30-43). Bogotá: MEN.
- Lagrange, J., & Keith, J. (2001). Herramientas y tecnologías en didáctica de las matemáticas. *Europeo de la Investigación en Educación Matemática II* , 125-127.
- MEN. (2002). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia.* Bogotá: MEN.
- Moreno, L. (2002). Argumentación y Formalización mediadas por Cabri-Geometre. En MEN, *Tenologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas* (págs. 45 - 51). Bogotá: MEN.

- Rabardel, P., & Verillon, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal in education and psicology* .
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education , 41* (4), 481-492.
- Villa-Ochoa, J. A. (2011b). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín.
- Villa-Ochoa, J. A. (2011a). Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Recife: Comité Interamercano de Educação Matemática.
- Villa-Ochoa, J., & Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de noción variacional. *Educação matematica pesquisa* , 514 - 528.
- Villarreal, M., & Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education , 42* (1), 49-62.

Volver al índice
Cursos