Unidad No.4

El razonamiento algebraico y la modelación matemática[45]

Fabián Arley Posada Balvín
Jhony Alexander Villa Ochoa

Introducción

La perspectiva de construcción de modelos matemáticos que den cuenta de fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas, se puede entender como un proceso que permite dinamizar la construcción de elementos propios del álgebra, a partir del desarrollo de dos fases fundamentales: la fase de formulación y la fase de validación. En la fase de formulación se establecen las relaciones entre las variables de una situación, lo cual puede hacerse a partir de medidas o conjeturas; posteriormente, se ejecuta una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a expresar el modelo matemático en una forma simbólica algebraica. La fase de validación comprende la constatación de la validez del modelo, a partir de su comparación con la situación que lo origina. (Janvier, Nemorosky (1996))

En este caso, para entender al proceso de modelación matemática como herramienta didáctica, se debe cuenta los siguientes aspectos:

- El papel que juegan las diferentes magnitudes al interior del modelo.
- Los problemas que surgen para la comprensión de los fenómenos a partir del tipo de magnitudes involucradas en la situación.
- Diferenciar el doble estatus que el objeto matemático juega cuando es tratado como modelo: por un lado, propio de las ciencias matemáticas, y por otro representante de un fenómeno de variación.
- Las dificultades que surgen en el intento de generalizar los resultados matemáticos desarrollados por esta vía.
- El papel de los llamados sistemas semióticos de representación.
- El problema de la validez en los resultados obtenidos.

[45] Ideas tomadas de los planteamientos de: POSADA B. F. y VILLA O. J., presentes en el documento, trabajo de grado: "*Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*", aprobado para optar al titulo de Magíster en Educación: Docencia de las Matemáticas.

De esta forma, teniendo en cuenta los anteriores elementos y la poca familiaridad de la escuela con respecto al proceso de modelación matemática, es necesario considerar que la aproximación al álgebra escolar desde este enfoque, requiere de largos periodos de tiempo y por tanto debe ser una tarea emprendida desde los primeros años de escolaridad.

El concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional

El aprendizaje del concepto de función ha sido tradicionalmente considerado como un elemento que debe ser abordado por primera vez, en los últimos años de la educación básica (9º) y, en general, es objeto central de estudio en la media (10º y 11º). Actualmente se observa que la escuela trata dicho concepto como un caso particular de lo propuesto por el grupo Bourbaki, quienes basados en el lenguaje de los conjuntos, consideran su definición de la siguiente manera:

> *Sean A y B dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de A y un elemento variable y de B se llama una relación funcional, si para todo $x \in A$, existe un único $y \in B$ que está relacionado con x en la relación dada. Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in A$ el elemento $y \in B$ que está relacionado con x en la relación dada. (Lacasta y Pascual, 52)*

A partir de esta, los textos escolares proponen interpretaciones tales como:

> *Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x de X uno y solo un elemento y de Y. El conjunto X se llama dominio de la función. Zill (1992;143)*

Desde este punto de vista, el problema general a resolver en la escuela, ha estado determinado por hacer que los estudiantes aprendan que una función es un conjunto de pares ordenados de la forma (x,y) tales que no debe haber dos pares ordenados diferentes en el conjunto, que tengan el mismo primer elemento.

Así, esta idea tiene las siguientes implicaciones pedagógicas:

1- Al considerar que la comprensión de dicho concepto matemático depende en su totalidad, de la comprensión que se tenga de los conceptos abstractos de conjunto, par ordenado y regla de correspondencia, se considera absurdo pensar, que los niños y las niñas de la básica primaria se aproximen a él.

2- Como la definición no depende de los elementos pertenecientes a los conjuntos que la determinan, siempre y cuando la regla de correspondencia cumpla con la condición dada, desaparece la importante idea de ver en éste concepto un objeto matemático que atrapa la variación y el cambio, es decir como un modelo matemático.

3- No se logra captar el papel fundamental que juegan los diferentes registros semióticos de representación en la comprensión del concepto.

4- Se dificulta la construcción de interrelaciones que a través de este concepto se puede establecer con otras ciencias, tales como la física, la química, la ingeniería, etc.

Algunos de los fracasos en la comprensión del concepto de función se presentan porque su estudio se hace al margen de las anteriores consideraciones. Es decir, se estudia a espaldas del papel que juega como objeto que permite atrapar matemáticamente la covariación entre dos o más cantidades de magnitud, de la misma o distinta naturaleza, a través de algún registro semiótico de representación. Dicho de otra forma, no permite entenderlo como modelo matemático de un conjunto de situaciones que se rigen por características similares.

Así, sin negar que el estudio formal de este concepto requiere de elementos teóricos abstractos y por tanto sólo sería pertinente en los últimos grados de escolaridad, también se considera posible generar contextos a través de los cuales se logra dar inicio a su comprensión desde los primeros años. Una de ellas, como se mostró en capítulos anteriores, es a través del razonamiento proporcional, de actividades centradas en el estudio de patrones y regularidades, desde actividades que atrapen aspectos de la generalidad desde los fenómenos de variación, etc.

Por esta razón uno de los problemas determinantes que requiere ser abordado desde el pensamiento variacional, es entender que el paso en la apreciación del sentido variacional a la determinación de una expresión que correlacione dicha variación, no siempre es fácil ni inmediato.

Esto significa, que si se entiende por sentido variacional, aquella apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otra u otras, y a la noción de correlación como la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional, entonces el problema es encontrar, si es posible, una función que exprese la variación entre dichas variables. Esto es, en términos del proceso de modelación matemática, formular el modelo.

Como se puede apreciar, el proceso de modelación matemática está íntimamente relacionado con la propuesta funcional de construcción de los objetos algebraicos. Esto al menos por dos razones: la primera porque por esta vía se hace énfasis en los procesos que implican determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a la variación de otra u otras, es decir, la noción de variación es fundamental. Y Segundo porque una de las pretensiones es atrapar dicha variación a través de un modelo funcional[46].

El papel de los registros de representación del concepto de función en el proceso de modelación matemática

Las funciones racionales, trigonométricas, logarítmicas, etc. y muy especialmente las funciones polinómicas de grado uno y dos (lineales y cuadráticas respectivamente), han representado una particular importancia para la educación básica y media, a tal punto que se les dedica grandes periodos de tiempo, generalmente en los grados superiores. Las razones para que esto sea así, han sido en primera instancia, por su sin número de "aplicaciones" y de otro lado porque en particular las funciones polinómicas son la base para el estudio de los llamados casos de factorización.

[46] Si esto se logra se dice que las cantidades de magnitud están correlacionadas.

No obstante, como ya se mencionó, su estudio se ha desarrollado sin apelar a la noción de variación y esto ha impedido verlas como modelos matemáticos. Si bien es cierto, que la actual presentación formal del concepto de función, permite entenderlas como objetos matemáticos abstractos y por tanto responde a los cánones matemáticos bajo los cuales se construyen y entienden, dotadas del poder para expresar elevados niveles de generalidad; también es cierto que presentarlas así a los estudiantes de la educación básica y media, ha generado un impacto desfavorable para su comprensión, pues es negarles toda su riqueza en cuanto a su uso en la tarea de matematizar la variación.

Esto es, la moderna definición de este concepto abre más la brecha entre entenderla como un modelo matemático que permiten atrapar la variación y el cambio y como un objeto matemático abstracto-analítico ausente de todo carácter fenomenológico. La primera le imprime un sentido dinámico y la segunda estático.

Es por esto que a partir de una interpretación de lo propuesto por los lineamientos curriculares, se planteará la construcción de este y otros conceptos propios del álgebra, desde una perspectiva variacional, entendiéndolos en un primer momento como un modelo matemático (sentido dinámico), y desde allí construir puentes que permitan entenderlo como un objeto matemático analítico (sentido estático).

Esta tarea es desarrollada con la ayuda de diferentes registros de represtación para el concepto de función, y así, a partir de las actividades de tratamiento y conversión, ratificar la necesidad de entender desde temprana edad escolar la relación de igualdad como una relación de equivalencia en dos niveles: como identidad y como ecuación. Esto es, entender que si se estable una relación de igualdad entre dos funciones definidas en el mismo dominio, se pude encontrar que: a) las funciones son las mismas para todo el dominio, es decir, todos los valores de la función tienen una preimagen en el dominio, en este caso las funciones son idénticas. b) las funciones sólo son iguales para un subconjunto de valores del dominio, en este caso se dice que determinan una ecuación.

Los registros de representación que se adoptaron en este trabajo para el estudio del concepto matemático de función, son: El registro de representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfica cartesiano ortogonal, el registro de representación tabular y el registro de representación simbólico.

Desde esta perspectiva, comprender el concepto de función como un modelo matemático, implica la construcción de un registro simbólico analítico de una situación, que generalmente se presenta en lenguaje natural. Dicho de otra forma, construir un modelo matemático de cierta situación, se entenderá, como un proceso que parte de un fenómeno expresado en lenguaje natural para llegar a la construcción de sofisticados sistemas simbólicos matemáticos. Esto haciendo uso intermedio de diagramas, metáforas, simulaciones, en especial registros tabulares y gráficos. Lo anterior, dado que es el registro simbólico analítico el que permite referirse a los conceptos matemáticos con mayor grado de generalidad. En términos de Janvier (1996) se centrará la atención, principalmente en los primeros momentos del proceso de modelación (experimentación y abstracción) lo cual, es denominado por este autor, fase de formulación[47].

Por esta razón se crea la necesidad de analizar de cada uno de los registros de representación del concepto de función arriba mencionados. Se propone entonces, asumir al lenguaje natural y el simbólico como dos registros principales, dado que el primero se convierte, en general, en el punto de partida y el segundo se concibe como el modelo matemático del fenómeno. Los registros tabular y gráfico se tomarán como registros auxiliares en el reconocimiento de las relaciones funcionales entre las magnitudes que intervienen en la situación.

De esta manera, de acuerdo con Duval (2004; 58) los registros auxiliares tendrán las siguientes funciones:

- Aportarán información adicional en la comprensión del concepto (función) a partir de su contenido[48], que en la presentación discursiva (registro principal) no es posible dilucidar.
- Ofrecerán posibilidades de tratamiento totalmente diferentes al del registro principal. En particular, permiten desarrollar secuencias de reglas operatorias o de procedimiento. Es decir, tratamientos tipo algorítmicos.
- Suplirán un desconocimiento eventual de los registros principales.
- Separarán información pertinente o útil en relación con la tarea a realizar.
- Permitirán la organización en orden de necesidad o importancia de los diferentes registros elegidos para la tarea a realizar.
- Mostrarán posibles ejemplos que afirmen o rechacen algunos rasgos o propiedades del concepto en mención.

Desde un punto de vista variacional, el paso de una situación presentada en lenguaje natural al registro simbólico se determinará a partir del análisis de diferencias. Esto quiere decir, que a partir de los resultados obtenidos al comparar por cociente las diferencias de las cantidades magnitudes, cuya relación está siendo estudiada, se determinará el tipo de función que correlaciona dichas cantidades. En otros términos, esto significa que el cociente de diferencias entre cantidades de magnitud, se tomará como unidad significante[49] o elemento que permite construir el modelo matemático de la situación.

A continuación se presentan los elementos básicos que requieren ser identificados, en los cuatro registros de representación, para posteriormente estudiar el tipo de regularidades que muestra el cociente entre las diferencias o incrementos de las cantidades de magnitud.

[47] De acuerdo a este autor, durante la fase de formulación, un fenómeno o una situación es examinada para establecer relaciones claves entre las variables involucradas. Esas relaciones se originan desde observaciones o medidas, o simplemente llegan de hábiles conjeturas hechas sobre la situación bajo investigación, para desembocar finalmente en la función que correlaciona las variables.

[48] Entiéndase por contenido de un registro de representación, lo que en particular presenta del objeto.

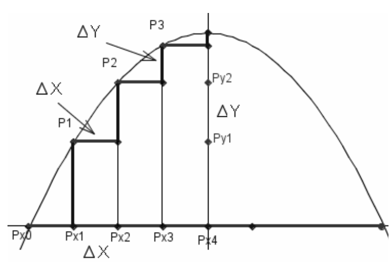
[49] Puede entenderse por unidad significante aquellos elementos que determinan el contenido en un registro de representación (Duval 1999).

El registro gráfico cartesiano ortogonal

Los objetos del registro de representación gráfico cartesiano ortogonal, son principalmente, los ejes ortogonales y los puntos definidos por las duplas si es bidimensional o tripletas si es tridimensional.

Las magnitudes que intervienen en la situación, se identifican con alguno de los ejes coordenados graduados, y luego se analizan los cambios o variaciones de dichas cantidades. A una de las dos cantidades de magnitud se le llamará cantidad independiente y la otra dependiente.

En este registro llamaremos incremento, cambio o variación de una cantidad de magnitud, a la longitud del segmento, resultado de la diferencia geométrica entre la longitud de dos segmentos formados por el punto origen y el punto que indica dos cantidades consecutivas de una misma magnitud. Este cambio se denotará por Δx si es el segmento diferencia en la coordenada x y Δy si el cambio es en el eje coordenado y.



Es importante tener en cuenta, que en este registro, no es posible tener total certeza en la unicidad de la representación. Esto al menos por dos razones: Por un lado, la imposibilidad de observar la representación en todo su dominio y en segunda instancia, por la posibilidad de que varias representaciones de funciones diferentes coincidan en determinados intervalos

El registro tabular

Los objetos del registro de representación tabular son: un arreglo rectangular (filas y columnas) y parejas o tripletas de números que las componen.

Para determinar la unidad significante de este registro de representación, cada una de las cantidades de magnitud de la situación a relacionar, se asociará a una de las columnas (o filas), y establecen una representación discreta de cada una. De esta manera, se centra la atención en los siguientes elementos: La diferencia entre dos valores, consecutivos o no de una columna, la diferencia de los valores correspondientes en la otra columna y la razón de cada una de estas diferencias.

Para este propósito es necesario tener en cuenta varios supuestos:

1. Por un conjunto de puntos (de un plano cartesiano) o de una tabla pasan infinitas funciones polinómicas. Lo que hace imposible determinar una única función para una tabla.
2. A pesar de existir infinitas funciones que satisfacen una misma tabla, si es posible reconocer a través de ella una función polinómica siempre y cuando se tenga la seguridad de que, efectivamente, es una función polinómica y que el número de parejas ordenas de la tabla exceda en la unidad al grado del polinomio que describe la función (Villa, 2001)
3. Las diferencias sucesivas se hacen constantes luego de iterar el proceso tantas veces como el grado del polinomio.

El registro simbólico algebraico

En el registro simbólico los objetos son símbolos que generalmente pertenecen a nuestro alfabeto, con ocasiones al alfabeto griego, los números indo-arábigos, los símbolos de las operaciones y relaciones aritméticas y signos de agrupación.

Para la determinación de la unidad significante en este registro se le asociará un símbolo a cada cantidad de magnitud y se le llamará variable, de esta forma se habla de los registros que contienen dos variables. Por lo general estas variables se asocian a los símbolos x y *f(x),* donde x representa la cantidad de magnitud independiente y *f(x)* la cantidad de magnitud que se relaciona con x.

En los dos registros anteriores (el tabular y el gráfico) se mencionaron dos tipos de limitaciones que dependen de su naturaleza, a saber: el problema de lo discreto como la restricción en el registro tabular y de los rangos de visualización en el registro gráfico; esta limitaciones imposibilitan la determinación de una única función con las características mencionadas, a menos que se hagan determinados supuestos (ver análisis de los registros anteriores). En el caso del registro simbólico se permite recoger la generalidad a través del símbolo, en términos de ser un representante de cualquier elemento de un determinado conjunto numérico.

El lenguaje natural

El lenguaje natural es uno de los registros que presenta mayor complejidad en su análisis. Esto debido fundamentalmente a dos ideas, por un lado a que es un registro completamente discursivo y por ende ofrece todas las funciones tanto discursivas como metadiscursivas[50], permitiendo una enorme divergencia en la forma de su empleo. Pero por otro, porque es un registro multifuncional, es decir, no permite tratamientos única-

[50] Las metadiscursivas son de tratamiento y conversión, comunicación y objetivación y las discursivas son de designación, apofántica, expansión discursiva y reflexividad discursiva. Duval (1999).

mente por algoritmización, o lo que es lo mismo, tiene una gran variedad de posibles tratamientos. Por tal motivo, es el registro más usado para describir, inferir, razonar, calcular, deducir, argumentar, es decir, es utilizado en todos los dominios de la vida cultural y social.

En este registro la unidad significante del concepto de función se puede inferir de los enunciados constituidos por frases proposicionales, y estas a su vez, determinadas fundamentalmente por la operación predicación[51].

Los objetos referenciales designados en dichas proposiciones son magnitudes fijadas por la situación. Por lo tanto, el primer paso, en la tarea de identificar algún criterio que permita clasificar los enunciados matemáticos dirigidos al concepto de función en este registro, es identificar las magnitudes que están interviniendo y sean cognitivamente pertinentes. Esto implica, entre otras cosas, determinar si las magnitudes son continuas o discretas y si las unidades de medida utilizadas son adecuadas.

Una vez identificadas las magnitudes, el paso a seguir es reconocer y establecer las posibles relaciones entre las cantidades de magnitud. En particular nos interesa determinar la relación por cociente entre las diferencias de las cantidades de magnitud. Este reconocimiento no siempre es evidente, y por tanto es aquí donde el problema se transforma en un problema cognitivo, dado que es a través del desarrollo del pensamiento matemático en sus diferentes niveles procedimentales, como se adquiere la habilidad para reconocer el concepto de función en un enunciado determinado.

Las funciones polinómicas como modelo matemático

En este texto los análisis se centrarán en el estudio de las funciones de la forma $h(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n+1} +...+a_1x + a_0$, con $a_n \neq 0$, las cuales son denominadas funciones polinómicas. Este tipo de funciones son aquellas cuya correlación entre dos cantidades de magnitud está expresada analíticamente mediante la forma $h(x)$. Esto quiere decir, que la cantidad de magnitud dependiente representada por $y=h(x)$ se relaciona en forma general con la cantidad de magnitud independiente, a través de una forma polinómica, donde a_n, a_{n-1},...a_1 ,a_0 representan números reales constantes (parámetros) y n representa un número natural incluyendo el cero. En particular, se tomará el caso cuando n toma el valor de uno o dos, es decir las funciones polinómica de grado uno (lineales) y de grado dos (cuadráticas).

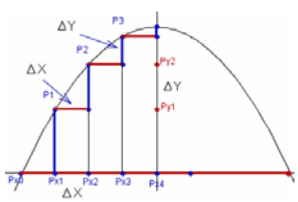
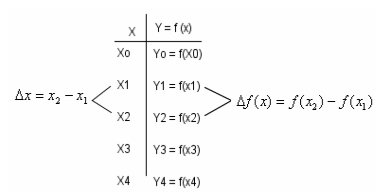
Desde una perspectiva variacional, el estudio de las funciones polinómicas implica tener presente dos aspectos:

a) Hacer variar intencionalmente una de las cantidades de magnitud cognitivamente pertinentes que intervienen en la situación, a ésta la llamaremos cantidad de magnitud "control" Ésta se simbolizará con la letra x en el registro simbólico analítico, se ubicará el eje horizontal en el registro gráfico cartesiano y representará los valores de una

[51] La operación predicación de la función apofántica, es la que vincula la expresión de una propiedad, de una relación o una acción con una expresión que designa algún objeto Duval (1999).

columna o fila en el registro tabular. A partir del tipo de variación que se perciba en la otra cantidad de magnitud, que llamaremos de "estudio", se estudiará la relación entre el cambio de la cantidad de magnitud "control" y el cambio en la otra, de "estudio". Esta última, se simboliza con la letra ***y*** en el registro simbólico analítico, se ubicará el eje vertical en el registro gráfico cartesiano y representará los valores de la otra columna o fila en el registro tabular.

El estudio de dicha variación se realizara a partir de la noción de incremento, el cual determina el cambio o variación de una cantidad de magnitud y se calcula a partir de la diferencia entre dos de los valores de la misma. Este incremento se denotará por Δx si es la diferencia entre los valores de la magnitud independiente y por Δy si el cambio es en la magnitud dependiente. En los siguientes gráficos se muestra el significado del incremento en cada registro.

<table>
<tr><th>Registro gráfico cartesiano</th><th>Registro tabular</th><th>Registro simbólico analítico</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$</td></tr>
</table>

b) El análisis del tipo de función que modela la situación se hace a partir de comparar mediante cociente, el incremento de la cantidad de magnitud dependiente con respecto al incremento en la magnitud independiente, es decir, el cociente entre ambas diferencias $\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$. Esto significa que la comparación por cociente entre estos dos cambios determina y define el tipo de función que los diferentes registros representan. A este cociente entre diferencia lo llamaremos razón de cambio.

Lo anterior significa que si la atención se centra no en las variables sino en los cambios de ellas, obtenemos que todas las funciones de grado uno cumplen con la propiedad que $\Delta f(x) = a\Delta x$ con a una constante perteneciente al conjunto de números reales. Esto quiere decir que todas las funciones polinómicas de grado uno tienen como razón de cambio $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a$, una constante. En otros términos, como se mostrará mas adelante, la propiedad fundamental que identifica a las funciones lineales o polinómicas de grado uno ($g(x) = ax+b$ con $a \neq 0$) es la razón de cambio constante $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a \ con \ a \in \Re$ diferente de cero.

El anterior análisis se pueden extender a funciones polinómicas de grados superiores; por ejemplo, las funciones cuadráticas $g(x) = ax^2 + bx + c$ tiene como primera razón de cambio una función lineal ($h(x) = dx+b$), esto es, $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = dx + b \ con \ d, b \in \Re$ y d diferente de cero, y por tanto si se obtiene la razón de cambio de esta última, por lo dicho en el párrafo anterior, será una constante. En otros términos, la segunda razón de cambio en un polinomio de grado dos es un valor constante.

Avanzando a procesos mas finos de generalización, se tiene que para una función polinómica de grado ***n*** con ***n*** un número natural, esto es, $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + ... + a_1 x + a_0$, se tiene que la razón de cambio n-ésima será un valor constante.

En este módulo se centrará la mirada en aquellas funciones con razón de cambio, entre cantidades de magnitudes, constante en el primer orden o en el segundo. Esto debido a que, por un lado, las primeras, como ya se mencionó, definen funciones lineales o de grado uno ($f(x) = ax+b$ con $a\neq0$) y las segundas, funciones cuadráticas ($g(x)=ax^2 + bx + c$ con $a\neq0$), sirven para modelar gran variedad de fenómenos que implican variación y cambio. En segunda instancia, porque son a las que tradicionalmente la escuela les dedica la mayor cantidad de tiempo, sobre todo en los grados 8º y 9º. Y finalmente porque el proceso de factorización para polinomios, en particular de grado 2 y la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas son tareas fundamentales en la educación matemática básica.

De esta forma independiente del registro semiótico de representación en el que esté expresado la función, la posibilidad de ver este concepto como un modelo matemático, está determinado por las condiciones de hallar en las situaciones estudiadas, las razones de cambio entre las diferentes cantidades de magnitud. Si en particular la primera razón de cambio es un valor constante entonces el modelo funcional que atrapa la variación es lineal o polinómica de grado uno, si por el contrario es la segunda razón de cambio, el modelo funcional que atrapa la variación entre las cantidades de magnitud es polinómica de grado dos, etc.

Esto significa que la razón de cambio constante en un orden determinado, es la unidad significante cognitivamente pertinente, que permite dar el primer paso para pasar de un registro a otro; en particular construir el modelo matemático de la situación. Finalmente este proceso permite entender la función polinómica como un objeto matemático independiente del registro en el que es representado y así diferenciar entre el objeto matemático de su representación.

Comprender entonces, al concepto de función como modelo matemático comienza por reconocer, en cada registro, la razón de cambio constante y el orden de aparición, es decir la unidad significante. Una vez se identifique ésta, se procede a construir el modelo, a partir de la demás información suministrada en la situación.

Por tanto, para dar inicio a la tarea de construir una función polinómica como modelo matemático, implica tener en cuenta las siguientes actividades:

- Discriminar las magnitudes cognitivamente pertinentes. Aquellas que serán correlacionadas.

- Identificar la posible covariación entre las magnitudes cognitivamente pertinentes, por ejemplo: diferencias, incrementos, razón de diferencias, cantidad de magnitud asociada al valor cero y uno de la magnitud independiente.
- Cuantificar de la relación mediante tablas de valores.
- Identificar la razón de cambio constante y el orden en que aparece.
- Reconocer a la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales si dicha constante se determina en el primer orden y cuadráticas si se determina en el segundo orden.
- Comprender la función polinómica como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.
- Identificar la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de determinados fenómenos.
- Generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar el concepto matemático de función.

Esto, atendiendo algunas de las problemáticas ya planteadas en diferentes investigaciones (Janvier (1996) en cuanto al cuidado que se debe tener en la fase de formulación de la construcción un modelo matemático, con respecto a los procesos cognitivos implicados en la comprensión del número[52] y a la dificultad de ver a la función polinómica como representante de un conjunto determinado de situaciones, por ello se debe poner especial atención en:

- Los enunciados presentados en lenguaje natural son de múltiples categorías.
- Los errores y aciertos que se pueden tener en la experimentación y toma de datos, son determinantes en la formulación y validación del modelo matemático.
- La simplificación respecto a factores externos a la situación que la afectan puede generar divergencia en los resultados.
- La generalidad de los resultados matemáticos frente a la particularidad de las situaciones y viceversa.
- El papel que juegan los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
- La validez de los resultados obtenidos.

No obstante lo anterior, el paso de un registro a otro propone diferentes niveles de conceptualización matemáticas, cada uno con su grado de dificultad cuando se va un determinado registro a otro. Esto es, las condiciones de ir del enunciado presentado en lenguaje natural, para obtener el registro simbólico (modelo matemático) que los representa, no son las mismas si se pretende realizar el proceso inverso.

Por último es de anotar, que el proceso de modelación matemática, entendida como herramienta hacia la construcción del concepto de función, está determinado según Bassanezi

[52] Janvier (1996) plantea que en estos casos el número puede jugar un doble papel: puede entenderse como objeto puramente matemático y/o como la medida de una magnitud.

(2002) por cinco grandes momentos: experimentación, abstracción, resolución, validación y modificación, todos ellos formando parte de un gran sistema conceptual expresado para un propósito específico y apoyado en los diferentes sistemas de representación arriba analizados.

Una vez la situación esté expresada en el segundo registro principal (simbólico-analítico), la actividad cognitiva de tratamiento, permite la resolución, validación y modificación. De igual forma estos momentos estarán apoyados por los registros auxiliares.

La función lineal

Como se pudo apreciar en párrafos anteriores, una forma de comenzar la materialización matemática de la variación desde los primeros años de escolaridad, es a través del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, a partir del razonamiento proporcional. De esta forma se trazan caminos dirigidos a la construcción del concepto de función lineal como una forma particular de correlacionar una variación. Esto permite iniciar con la elaboración de generalizaciones cada vez más finas y abstractas de las estructuras matemáticas invariantes que se encuentran en lo que varía y cambia.

Esto quiere decir, que la relación de proporcionalidad tanto desde el punto de vista numérico como métrico, es un concepto conector entre la multiplicación, el concepto de función lineal y posteriormente algunos elementos del cálculo y el análisis[53]. Dicho de otro modo, el razonamiento proporcional es didáctica y matemáticamente estratégico, para el desarrollo de algunos elementos propios del pensamiento variacional, pues desde éste pueden tenderse conexiones directas entre diferentes conceptos que le son propios (estructuras multiplicativas[54] y la función lineal).

Sin embargo, si el concepto de función lineal se presenta en éstos términos, quedaría determinado, simbólicamente, por aquellas que se expresan en la forma $f(x)=kx$ con k una constante perteneciente a los reales positivos, a diferencia de como se conoce en la mayoría de los libros de textos matemáticos, en los que las funciones lineales están asociadas a polinomios de primer grado, es decir de la forma $g(x) = ax+b$ con $a, b \in \Re$.

A las primeras se les reconoce, en algunos textos, como funciones lineales y a las segundas, como funciones lineales afines. La discusión con respecto a esta diferenciación ha tomado fuerza en los últimos tiempos y está básicamente determinada por el cumplimiento de las siguientes dos propiedades:

Aditividad: $f(x+y) = f(x) + f(y)$
Homogeneidad: $f(kx) = kf(x)$ con k una constante Real

[53] Ver documento: Unidad Nro. 5, De la multiplicación a la proporcionalidad del Módulo Nro. 1 Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.

[54] Vergnaud (1991)

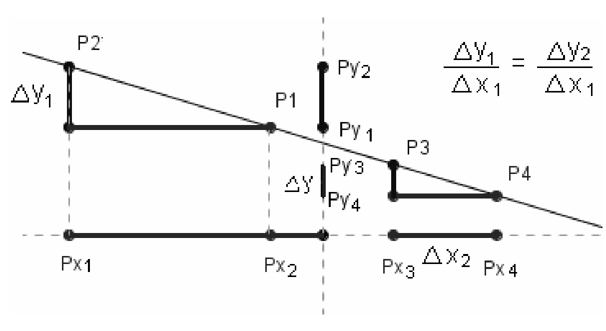
Las cuales sólo son cumplidas por las funciones de la forma *f(x)=kx*. Sin embargo, según los textos de álgebra lineal, dichas propiedades definen matemáticamente operadores o transformaciones lineales y no, necesariamente, funciones polinómicas de primer grado.

De esta manera es posible afirmar que las funciones de la forma $g(x) = ax + b$ *con* $a \neq 0$, son lineales y en particular cuando b es igual a cero es una transformación lineal.

Desde la perspectiva de los análisis anteriores en cuanto a la razón de cambio y los registros de representación, no es atrevido pensar que la función lineal tiene como elemento que le da identidad, a la razón de cambio constante de primer orden, esto significa, que si la atención no se centra en las variables sino en la variación, es dicha constante la que define la función lineal salvo un punto que la particularice.

Así, se puede probar que las funciones lineales se representan en el registro gráfico cartesiano a través de una línea recta, esto se observa en que independientemente de la longitud del segmento tomada para la cantidad de magnitud control y los puntos que lo definen, el cambio en la otra cantidad de magnitud será proporcional a éste, es decir, el cociente entre ellos determina una constante.

Dicha constante se visualiza en este registro, en uno de los siguientes aspectos: a) la congruencia entre los ángulos formados por la representación del registro dado y cualquier recta paralela al eje *x*, ó b) Por la semejanza presentada entre todos los triángulos rectángulos determinados por los segmentos diferencia correspondientes obtenidos. Lo anterior justifica el hecho que "toda recta en el registro de representación gráfico cartesiano es la representación de una función lineal", ver siguiente gráfico. En conclusión, en el registro gráfico toda función lineal tiene como representación gráfica una línea recta y toda línea recta en el registro gráfico, está asociada a una función lineal.



Independiente del incremento en y la relación por
cociente con respecto al incremento en x se conserva.

Desde el punto de vista del registro tabular, la función lineal se reconoce de acuerdo a la comparación por cociente del cambio observado en los valores tomados de la magnitud dependiente con respecto al cambio establecido entre los valores correspondientes de la magnitud asumida como independiente.

Aduciendo a la interpretación de la función lineal, para identificar una representación del objeto en el registro tabular, es necesario observar que toda razón entre las diferencias correspondientes de dos valores de la tabla es una constante. Con base en el supuesto 2 del registro de representación tabular (pág. 132) para el concepto de función, es posible determinar si es una función lineal, calculando la razón de diferencia entre dos parejas de números.

Para el reconocimiento de la función lineal a través del registro simbólico analítico, se hace el análisis de las razones entre los cambios de una variable y los cambios que se genera sobre la otra. En este registro se entenderá por cambio la diferencia entre dos valores de una misma variable y se denotará con el símbolo Δx que significa, $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta f(x)$ que significa $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$. Al cociente entre estas dos diferencias se le denomina razón de cambio, es decir $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Para determinar una función lineal, a través de una representación en este registro, es necesario establecer si la primer razón es constante para toda Δx, esto es determinar que para todo $x_1, x_2 \in \Re$, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$, con m un valor constante perteneciente al conjunto de los números reales.

Por otro lado si una función es lineal, la razón de cambio constante determina una familia de funciones. Para identificar una representación en particular, de esta familia, se debe disponer de otras relaciones entre las variables, en particular la cantidad asociada a $f(x)$ cuando x (variable independiente) es igual a cero.

De esta forma es posible demostrar que $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = m$ con m una constante real, y las relaciones anteriores, se puede transformar, con las reglas de tratamiento de este registro, a una forma $f(x) = mx + b$.

El reconocimiento del concepto de función lineal en el registro del lenguaje natural, requiere caracterizar el tipo de enunciado que la representa. Esta no es una tarea sencilla pero es el primer paso en la construcción del modelo matemático, es decir, en la actividad de pasar un enunciado a un registro simbólico analítico.

Esta caracterización se puede comenzar a través de subdividir los enunciados en cuatro grupos generales: dos de ellos frente al hecho que la razón de cambio se exprese o no de forma explícita en el enunciado y las otras dos, estarán directamente relacionadas con las anteriores, a partir del carácter continuo o discreto de las magnitudes que intervienen en la situación. En cada uno de estos cuatro grupos se pueden establecer subcategorías de acuerdo a si en las magnitudes continuas interviene o no el tiempo.

Determinar en el enunciado si la razón de cambio es explícita o implícita es importante puesto que, en ambos casos, si dicha razón de cambio es constante, entonces se puede asociar a una función lineal. Ahora bien, lo explicito o implícito, de la razón de cambio, hace referencia a que en el enunciado se exprese de forma directa o por el contrario sea necesario realizar algunos procesos, cálculos o inferencias para determinarla.

Por otro lado lo continuo y lo discreto en las magnitudes, es importante caracterizarlo, puesto que desde un punto de vista didáctico y cognitivo, cuando se trabaja sólo bajo situaciones donde interviene magnitudes discretas, se corre el riesgo de omitir la interpretación de la constante como una razón de cambio y limitarse sólo a un análisis adimensional, que aunque facilita el tratamiento aritmético de la situación, oculta su naturaleza variacional. Un caso particular de esto, ocurre con la interpretación de la multiplicación que en la escuela generalmente omite el análisis dimensional de las magnitudes y es susceptible de ser interpretada como una suma abreviada.

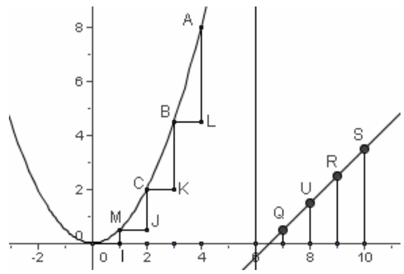
Magnitudes / **Razón de Cambio**	**DISCRETAS**	**CONTINUAS**	
		Tiempo	**No Tiempo**
Explícita			
Implícita			

Las funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas o polinómicas de grado dos, tradicionalmente se han presentado en los textos escolares como aquellas que pueden ser expresadas simbólicamente en la forma $f(x)=ax^2 + bx + c$ con $a\neq 0$ y se les ha diferenciado de las lineales, porque se puede encontrar en la expresión simbólica que la representa, un término cuya potencia de la variable independiente es uno más que las lineales, es decir dos. El valor del parámetro a es diferente de cero y la gráfica que la representa no es un línea recta sino una curva llamada parábola.

No obstante lo anterior, esta definición deja de lado un aspecto muy importante que le da identidad si se le mira desde una perspectiva variacional. Esto es, desde esta perspectiva la función cuadrática se determina a partir de percibir que la relación por cociente entre las diferencias Δy con respecto a Δx , da como resultado una variación lineal y por tanto aplicando de nuevo la razón de cambio se obtiene una constante. Esto quiere decir que desde cualquiera de los registros que la representan se requiere determinar que el primer cociente de diferencias sea lineal y el segundo constante.

En el registro gráfico esto se logra ver en el crecimiento o decrecimiento lineal de los segmentos diferencia en la variable dependiente cuando se determinan diferencias constantes en la variable independiente. ver la siguiente figura.



Obsérvese que se han definido diferencias en el eje x iguales a la unidad y por tanto el cociente entre los respectivos segmentos diferencia al ser ubicados en otro plano van formando un conjunto de puntos perfectamente alineados. Esto quiere decir, que la función original es una la función cuadrática o polinomica de grado dos, cuya razon de cambio de primer orden es lineal.

Para demostrar que el registro gráfico de una función cuadrática es una parábola, se requiere hacer uso de dos principios básicos de la geometría analítica: a) Construir los puntos del plano a partir de un referencial, es decir, reconocer a los puntos del plano como pares ordenados ubicados a partir de un punto de referencia absoluto y b) operar con dichos puntos de forma analítica, esto es, operar con los puntos no conocidos como si lo fueran. Este punto se planteará como ejercicio de exploración.

En el caso del registro tabular, la identificación de la función como cuadrática se determina a través de la construcción del conjunto de diferencias entre valores consecutivos de la variable dependiente, cuando se establecen diferencias consecutivas iguales entre los valores de la variable independiente. Este proceso se vuelve recursivo y si se reconoce que la segunda diferencia es constante, entonces dichos valores de la tabla se ajustan a los valores de una función cuadrática. Un ejemplo de ello puede verse en la siguiente tabla

Lo anterior atendiendo las limitaciones y restricciones que dichos registros presentan en la discusión antes planteada (ver pág.132).

Valores de la variable independiente	Valores de la variable dependiente	Primera diferencia	Segunda diferencia
0	-12	7	6
1	-5	13	6
2	8	19	6
3	27	25	6
4	52	31	6
5	83	37	6
6	120	43	6
7	163	49	6
8	212	55	6
9	267	61	6
10	328	67	6
11	395		

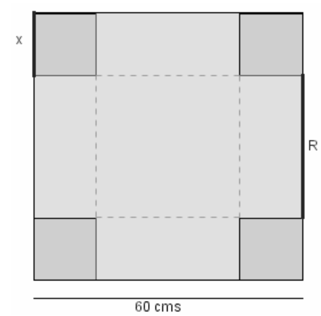
Para el registro simbólico analítico basta reconocer que si la razón de cambio es una función lineal $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=dx+b\ con\ d\in\Re \wedge d\neq 0$, entonces se tendrá que ***f(x)*** es una función cuadrática o polinomica de grado dos.

SITUACIÓN No. 1:

LA CAJA

MOMENTO 1

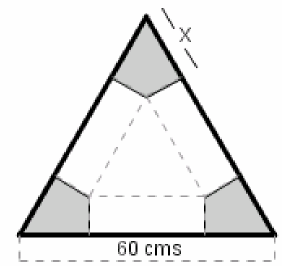
Se tiene un trozo de cartón de forma cuadrada de 60 cm de lado y se desea construir una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño de sus esquinas y doblando luego hacia arriba las pestañas que quedan, ver figura.



- A medida que al trozo de cartón se le recorten cuadrados más grandes, ¿qué crees que pasa con el perímetro de figura resultante? , ¿Qué crees que sucede con el perímetro del cuadrado recortado al trozo de cartón?, ¿Qué crees que sucede con la longitud R de la figura? y ¿Qué sucede con el perímetro de la pestaña?.
- Si se quiere recubrir la caja de cartón con papel, ¿crees que a medida que se recorten cuadrados mas grandes, necesitas mas papel?, ¿Habrá alguna caja para la cual necesite menos papel para recubrirla?, ¿para cuál caja necesitas exactamente una cantidad de papel igual a la mitad del trozo de cartón?.
- Para qué longitud x del cuadrado recortado el volumen de la caja es el más grande?

Caja rectangular							
X	**Perímetro de la figura resultante**	**Perímetro del cuadrado recortado**	**Longitud de R**	**Perímetro de la pestaña recortada**	**Área del cuadrado cortado**	**Área de la figura para construir la caja**	**Volumen de la caja**

MOMENTO 2



Ahora el trozo de cartulina tiene forma de triángulo equilátero de lado 60 cm y se desea construir la caja recortando las puntas a una distancia x cualquiera, perpendicular al lado de la cartulina y doblando luego hacia arriba las pestañas tal y como muestra la figura.

- Responda las mismas preguntas de la situación anterior para la nueva caja.

Caja triangular							
X	**Perímetro de la figura resultante**	**Perímetro del cuadrado recortado**	**Longitud de R**	**Perímetro de la pestaña recortada**	**Área del cuadrado cortado**	**Área de la figura para construir la caja**	**Volumen de la caja**

MOMENTO 3

A partir de lo observado en los casos anteriores, qué se podría concluir si se quieren construir cajas de bases pentagonales, hexagonales, etc.

- **GESTIÓN DE LA SITUACIÓN 1**

Esta situación proviene de uno de los problemas clásicos de los libros de cálculo, en el cual se pide hallar una longitud x que permita construir una caja de volumen máximo, Leithold (1992 p. 295). Para estos textos, es un problema que corresponde al tema de aplicaciones de la derivada. Sin embargo, en el contexto que aquí se propone pretende que el estudiante haga uso de algún registro de representación, como el tabular o el gráfico, para dar respuesta a las preguntas. Es muy importante que se hagan análisis de variación con intenciones de estudiar las condiciones que permiten determinar la correlación entre las cantidades de magnitud en cuestión. Esto es, se pretende incitar al estudiante para que explore las posibilidades de construcción de un modelo funcional que correlacione la variación entre las cantidades de magnitud longitud, área y volumen con la cantidad de longitud x.

La aplicación en el computador que se entrega con la situación, tiene por objeto ayudar al estudiante a imaginar el comportamiento del fenómeno, a través de la visualización para comprender el problema y tratar de resolver las preguntas.

Se puede proponer que esta tarea comience a partir de la construcción de una tabla donde se registren las medidas de la longitud x y las respectivas medidas de las magnitudes indicadas en la tabla. Es importante mostrar que en este proceso, el estudiante tiene control de las medidas de la magnitud x y que las demás dependen de los valores que a ésta se le asigna. Igualmente es importante hacer notar que aun siendo la magnitud representada por x continua, esta propuesta obliga a discretizar la magnitud.

Las preguntas del segundo y tercer item se proponen para hacer uso de las exploraciones y conclusiones obtenidas en el item 1. Esto quiere decir que en un primer momento se pretende construir el modelo funcional y en un segundo momento se desea hacer uso de dicho modelo para la toma de decisiones y control de la situación.

Una pregunta importante que debe comenzar a analizarse y que matemáticamente no es sencilla es: ¿Cómo construir, a partir de los datos de la tabla, la representación gráfica y simbólico-analítica?

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

Pensamiento Variacional	
1-3	Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
4-5	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos
	Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
	Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias
6-7	Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, ex presiones verbales generalizadas y tablas).
	Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).
	Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
8-9	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.
Pensamiento Numérico	
1-2	Resolver y formular problemas de proprocionalidad directa (mercancías y sus precios, niños y reparto igualitario de golosinas, ampliación de una foto).
4-5	Modelar situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
6-7	Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
8-9	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

Conceptos y procedimientos para las situaciones de la 2 a la 8

En este aparte se consideran los análisis y anticipaciones de las siguientes 8 situaciones, las cuales están pensadas para construir al concepto de función lineal como modelos matemáticos.

La situación 2 presentada en lenguaje natural induce a que el estudiante, mediante el sistema de representación tabular, infiera una relación entre el cambio de las dos magnitudes cognitivamente pertinentes y permita construir la relación funcional entre ellas.

En un segundo momento, se propone que la relación entre las magnitudes sea expresada mediante otros sistemas de representación tales como el gráfico y el simbólico. De igual manera, la situación exige al estudiante tener cierto control sobre las variables (magnitudes), de tal forma, que a través de su análisis pueda anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los empleados, con bases en las condiciones generales del problema.

Se espera que los estudiantes, una vez llenen la tabla, reconozcan la existencia de la covariación entre las magnitudes, aunque es posible que no logren expresar cuantitativamente dicha relación, esto a pesar de que detectaran los algoritmos con los que se hiciera.

La situación pretende poner en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar conceptos matemáticos, lo cual se hace evidente en los diferentes usos del lenguaje y los diferentes sistemas de representación.

Inicialmente, los estudiantes podrían entender la razón de cambio constante no como un cociente de diferencias, sino como el cociente aritmético entre los valores de la tabla. Esto permitirá proponer algunas ideas que les ayuden a identificar esta característica de la razón de cambio entre las respectivas diferencias y no entre los valores numéricos de las cantidades de magnitud. Se debe tener en cuenta que las magnitudes presentes en la situación son continuas (el tiempo) y discretas. Sin embargo, las que son cognitivamente pertinentes son de naturaleza discreta y por tanto los análisis cuantitativos se deben hacer teniendo esto presente.

Con la situación 3 se pretende reconocer la velocidad constante como razón de cambio entre dos cantidades de magnitud y usarla para identificar la función lineal como un modelo matemático que relaciona la distancia y el tiempo

La situación presenta la razón de cambio en forma explícita, las magnitudes que intervienen son continuas y una de ellas es el tiempo. Es muy importante anotar que en esta situación la razón de cambio es otra magnitud y que aunque se expresa como la relación entre dos magnitudes escalares, ella es de naturaleza vectorial.

En un primer momento de la situación los estudiantes pueden percibir la relación de crecimiento y decrecimiento en cada una de las magnitudes, sin embargo para garantizar la comprensión de la situación se hace necesario acompañar los razonamientos de los estudiantes con preguntas como: ¿Qué significa velocidad constante?, ¿Cómo observaría el movimiento del tren una persona que esté ubicada en la estación Niquia, San Antonio o Itagüí?

En el momento 2 de la situación se observa que se tienen tres tipos de gráfica, las cuales corresponden a diferentes relaciones lineales: de valor inicial con pendiente negativa, proporcionalidad directa y función por partes (dos partes, una lineal con pendiente negativa y la otra con pendiente positiva). Cada una de estas dependiendo del observador que está analizando el fenómeno.

Al presentarse los tres casos en forma sincrónica y en el mismo plano, es posible que la situación se interprete como si se tratara de fenómenos diferentes y no del mismo analizado por distintos observadores. Esto quiere decir, que muy posiblemente el estudiante interpretará la gráfica como de tres trenes moviéndose de forma simultánea, y no el movimiento de un tren, analizado al mismo tiempo por tres observadores, cada uno ubicado en una estación diferente.

Para responder el ítem 2 del momento 2, se deben tener en cuenta los conceptos de cero absoluto, cero relativo y el de unidad de medida, puesto que, por un lado, en este caso el momento de inicio de la observación del fenómeno no implica necesariamente ausencia de la cantidad de magnitud (longitud y/o tiempo) y por otro lado, dependiendo de la unidad de tiempo y de longitud que se tome se tendrá una determinada respuesta, esto quiere decir que se pueden tener respuesta divergentes.

Con la situación 4 se busca que el estudiante reconozca la razón de cambio constante y la use para determinar el crecimiento de una cantidad de magnitud que depende de otra para tomar las decisiones convenientes a partir del modelo que se construye con base en dicha razón.

Esta situación relaciona dos cantidades de magnitud bajo tres maneras diferentes de variación. Las cantidades de magnitud minutos consumidos y costo total del consumo, están determinadas por el plan que las relaciona (bajo, medio, alto). Esto significa que para construir el modelo matemático de la situación, es necesario reconocer simultáneamente estas tres maneras de variación de las dos cantidades de magnitud. Es muy importante resaltar, que incluso cada manera de variación (cada plan) está a su vez dividido en dos formas de variación, ambas variaciones constantes; una determinada por el cargo fijo para una cantidad específica de minutos incluidos (65, 150, 300 según el plan), de variación constante igual a cero, y la otra determinada por el valor del minuto adicional ($800, $700, $600 según el plan).

Esto obliga a que se reflexione en dos elementos conceptuales: por un lado, que las funciones que aquí aparecen son funciones por tramos, una parte constante y la otra lineal; y por otro lado, la situación contiene un enunciado que se ubica en la tipología cuya razón de cambio es explícita; además, es una situación donde interviene la magnitud continua tiempo. Sin embargo, en el primer momento de la situación la continuidad del tiempo no implica ningún problema, pero en el se segundo momento este tiempo aunque sigue siendo continuo, la situación obliga a discretizarlo.

La pregunta que se hace es abierta en el sentido que no es de respuesta única, esto es, la decisión se puede tomar convenientemente, pero deben presentarse argumentos apoyados en la identificación de variables y las relaciones de dependencia entre las mismas.

Un elemento adicional que tiene la situación, es el reconocimiento de que cada gasto implica el pago del impuesto al valor agregado (IVA), que aunque no cambia en nada la situación desde el punto de vista matemático, sí la contextualiza un poco y le imprime un grado mayor de dificultad.

Con el ánimo de ofrecerles a los estudiantes herramientas que les permitieran validar sus conjeturas, se crea el momento 2, con el que se pretende ayudar a la respuesta de la pregunta, basado en la lectura e interpretación del registro gráfico que la representa. De esta manera, igualmente se intenta evaluar la visión que se tiene con respecto al registro gráfico, bajo la hipótesis que este registro es un poco más familiar en cuanto al reconocimiento de la razón de cambio como la pendiente de la recta.

Para la situación 5 se debe tener en cuenta:

En el enunciado de esta situación se pueden percibir dos momentos, una en donde la razón de cambio no es explícita, y se debe calcular siguiendo las orientaciones del enunciado y/o los datos de la tabla. Y un segundo momento donde la razón es explícita. Se debe tener en cuenta que en ambos momentos las magnitudes que intervienen en esta situación son discretas.

Tener cuidado cuando intenten construir un gráfico cartesiano de la situación, pues en la mayoría de los casos trascriben punto a punto las parejas de la tabla construida, sin tener en cuenta la selección de escalas apropiadas para que dicha representación muestre algo coherente con la situación y permita análisis con sentido. Adicionalmente se debe estar pendiente al sentido que para los estudiantes puede tener la acción de unir los puntos que ubican en el plano.

Por otro lado se debe estar alerta con los análisis de variación cuya correlación generalmente la piensan como si fueran cantidades relacionadas bajo proporcionalidad simple directa y por tanto la forma de construir la tabla es a través de regla de tres simple, es decir a través de relaciones multiplicativas.

La situación 6 está diseñada para que los estudiantes, a través del cambio de los parámetros costo de la tarjeta, valor del minuto e intervalo de tiempo (incremento en t), movilicen saberes matemáticos como:

- Interpretación de los registros tabular y gráfico de un enunciado verbal.
- El reconocimiento de los valores B y V como parámetros que caracterizan la función $C(t)=Vt$ para la función costo de la llamada y $R(t)=B-Vt$ par la función dinero restante en la tarjeta.
- La identificación del parámetro "intervalo de tiempo", como un incremento "h" constante en t (tiempo de la llamada), que produce incrementos constantes ΔC y ΔR en C (función costo) y en R (función resto) respectivamente pero diferentes de "h".

- El reconocimiento de $\frac{\Delta C}{h}$ y como una nueva constante que identifica las funciones Costo de la llamada y Dinero restante como lineales. En el caso particular es muy importante reconocer a esta constante como y , es decir descubrir que dicha constante es el parámetro V (valor del minuto) o el opuesto de V respectivamente.
- La determinación de t, C y R como variables y su relación funcional lineal.
- La identificación de y con la pendiente de las rectas dadas en la gráfica.

Dificultades previstas:

- El conocimiento del Software y sus características.
- En general, a los estudiantes ya se les ha enseñado los elementos que componen la función lineal, esto quiere decir que han escuchado hablar de lo que es una función lineal, algún significado de la pendiente de la recta y el intercepto con el eje y. Pero todo lo anterior se ha hecho desde el punto de vista estático, donde este tipo de problemas se ven como aplicación de los conocimientos adquiridos. Se considera que en este punto se encuentra el primer obstáculo, pues los estudiantes no están acostumbrados a enfrentarse con el proceso de modelación desde el punto de vista didáctico, en particular con la primera y segunda fase de dicho proceso.

$\frac{\Delta R}{h} = -V$ $\frac{\Delta C}{h} = V$

- La discriminación de las unidades significantes cognitivamente pertinentes para la conversión entre los registros de representación de la función lineal modelo matemático de la situación.
- A los estudiantes se les ha mostrado la pendiente de una recta como una propiedad de la gráfica, como el grado de inclinación que tiene con respecto al eje x y/o en otras ocasiones se les ha hablado que este grado de inclinación se representa por la medida de un ángulo. Esta visión oculta completamente toda perspectiva variacional y por tanto dicha pendiente no es más que un número, estático y sin significado variacional para el contexto de la situación. En este sentido se prevee que será de mucha dificultad, entender el papel fundamental que juega el incremento del tiempo, las diferencias sucesivas de las cantidades de magnitud (costo total de la llamada y resto) y el cociente entre los anteriores, para construir el modelo funcional de la situación.

Con las situación 7 se pretende construir la función lineal como el modelo matemático de un fenómeno, a través de la identificación de la razón de cambio constante.

En esta situación se pretende movilizar saberes matemáticos como:

- Asocia la *razón* de cambio instantánea de las magnitudes de la función lineal.
- Identificar las funciones $h(V)=k\cdot V$ y $h(V)=kV+h_0$ como funciones variacionalmente equivalentes.

Situación 8. Esta situación tiene una particular importancia, en la medida que implica plantear supuestos para simplificar el problema. El docente puede complejizar o simplificar el fenómeno tanto como considere pertinente.

Al no estar explicita la forma y el momento en que debe usar algún registro de representación, se espera que el estudiante los utilice como herramientas que le permiten entender y solucionar la situación. Por esta razón se sugiere dar un poco de libertad pero sin dejar que se desmotiven. Se recomienda sistematizar los resultados que los estudiantes obtienen en el proceso. Será de mucha ayuda para análisis cognitivos posteriores. Tener en cuenta que es una situación abierta y por tanto se presta para discusiones en términos de la validación y el ajuste del modelo matemático obtenido. El profesor debe estar atento a las posibles respuestas de los alumnos para dirigir en buenos términos la discusión.

En el siguiente cuadro se muestran los estándares relacionados con las situaciones propuestas a continuación.

- **ESTÁNDARES RELACIONADOS**

Pensamiento Variacional	
1-3	Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
4-5	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos
	Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
	Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias.
6-7	Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
8-9	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas
	Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
	Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.
	Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.
Pensamiento Numérico	
1-2	Resolver y formular problemas de proprocionalidad directa (mercancías y sus precios, niños y reparto igualitario de golosinas, ampliación de una foto).
4-5	Modelar situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
6-7	Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.

SITUACIÓN No. 2:

Nombre: EL SALARIO DE ANA

Ana trabaja como vendedora del periódico "El Colombiano", sus ingresos dependen de un salario básico de $5.000 diarios, y se incrementa con base en las ventas que realice de este periódico.

a) Si por cada periódico vendido obtiene una comisión de $700. Responda:
   i. ¿Cuánto dinero devengaría en un día si Ana realizara, 5, 10 ó 16 ventas?
   ii. Con los datos anteriores llene la siguiente tabla.

Nro. de suscripciones	Salario total devengado a diario
5	
7	
	$11300
15	
	$19000
25	
	$33700
253	

   iii. Exprese la relación que existe entre el salario total devengado a diario y el número de suscripciones vendidas utilizando palabras, símbolos y gráficos cartesianos.

b) Con el cambio de administración de la empresa, se propone una nueva forma de pago. El salario básico diario sería disminuido en $2000, por el contrario la comisión por cada venta sería aumentada a $900. Analice las dos alternativas salariales y exprese cuál de las dos alternativas le traen mejores beneficios a Ana.

SITUACIÓN No. 3:

Nombre: DE NIQUÍA A ITAGUI, PASANDO POR SAN ANTONIO.

Enunciado:

Supongamos que el metro de Medellín sale a las 5:00 a.m. de Niquía con destino a Itagüi, y que durante su recorrido mantiene su velocidad constante. Queremos estudiar los tres siguientes casos:

Caso 1: Distancia a la que se encuentra el tren de Niquía en todo momento.
Caso 2: Distancia a la que se encuentra el tren de Itagüi en todo momento.
Caso 3: Distancia a la que se encuentra el tren de San Antonio en todo momento.

MOMENTO 1

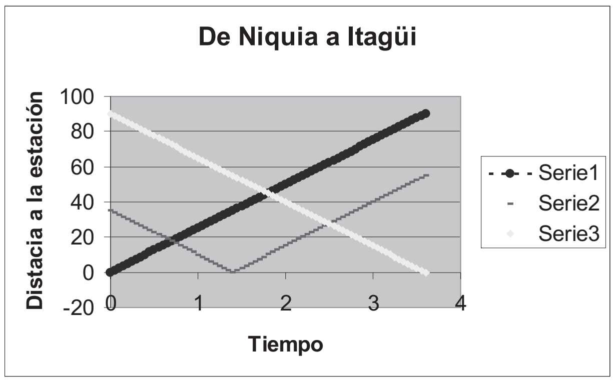
Describa una estrategia para calcular las distancias del tren a cada una de las estaciones anteriormente mencionadas.

MOMENTO 2

Si la gráfica que aparece a continuación representa la situación anterior:

1. Elabora un argumento que permita identificar una gráfica con cada caso.

2. A partir de la gráfica, a qué distancia de cada una de las tres estaciones, estará aproximadamente el tren cuando sean las 6:05 a.m. Estime además, la hora a la que llega a San Antonio, y la hora a la que llega a Itagüi.
3. ¿Qué puede significar los puntos de corte entre gráficas?



SITUACIÓN No. 4:

Nombre: CELULARES

Enunciado:

Una prestigiosa compañía de telefonía móvil tiene entre sus planes los siguientes:

PLAN BAJO.

Cargo Básico:	$35.000 + IVA
Minutos incluidos:	65
Minuto adicional:	$800 + IVA

PLAN MEDIO

Cargo Básico:	$70.000 + IVA
Minutos incluidos:	150
Minuto adicional:	$700 + IVA

PLAN ALTO

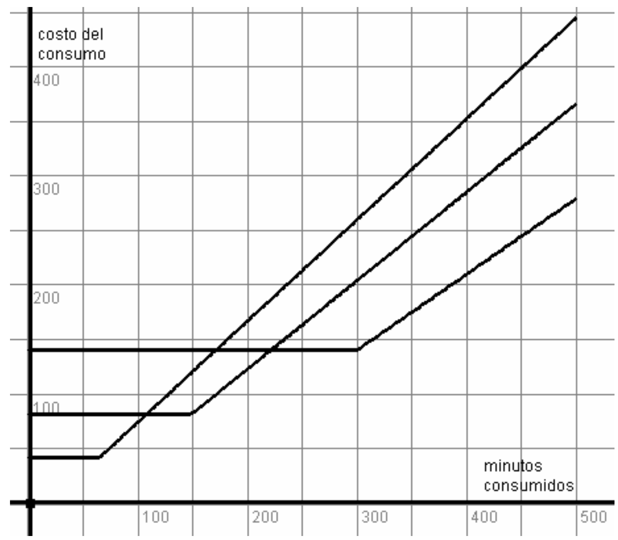
Cargo Básico:	$120.000 + IVA
Minutos incluidos:	300
Minuto adicional:	$600 + IVA

MOMENTO 1

Suponga que usted puede pagar cualquiera de los tres planes, pero quiere escoger el que, de acuerdo a su consumo mensual, le salga más favorable, ¿Cuál escogería? Suponga una tasa del 16% para el IVA.

MOMENTO 2

La siguiente gráfica representa la misma situación expuesta en el momento 1. Responda las mismas preguntas apoyado en lo que observa en dicha gráfica.



SITUACIÓN No. 5:

Nombre: LA EMPRESA JAVO

Propósito:

Mediante esta situación se pretende movilizar elementos básicos de relaciones funcionales entre magnitudes discretas, identificación del modelo funcional, su representación en tablas y los demás sistemas de representación, la identificación de la razón de cambio, y el control de variables en una situación problema.

Enunciado:

En la empresa de confecciones JAVO. Ltda. se tienen dos clases de empleados: unos para las máquinas planas y fileteadoras, y otros de pulidores; a estos últimos se les paga sus servicios con un salario base de $10.000 a la semana, más una comisión de $ 70 por cada prenda pulida. A los empleados de las máquinas planas y fileteadoras se les paga el día según un salario mínimo establecido por la empresa, más una comisión por cada prenda extra elaborada.

a) Sabiendo que la producción mínima exigida por la empresa para los empleados de las máquinas es de 200 prendas diarias. Llene los espacios en blanco de la siguiente tabla:

Número de prendas elaboradas a diario	Salario total devengado (diario)
200	$12000
210	$12500
215	
	$13250
251	
	$16000
271	
	$23650

- ¿Cuáles cantidades permanecen fijas y cuales varían en las condiciones planteadas para estos empleados?
- Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un empleado, utilizando cada uno de los siguiente registros: palabras, gráficos cartesianos y símbolos.
- ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

b) Con respecto a los pulidores responda:
- ¿Cuánto ganaría un pulidor a la semana si lograra pulir: 20 prendas, 50 prendas, 200 prendas, 750 prendas.
- Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas pulidas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.
- Si un empleado ganara a la semana $38000, $24000 ¿qué se puede decir del total de prendas pulidas por éste?

c) La empresa desea suprimir el salario base para los pulidores y en cambio piensa aumentar el valor de la comisión en $25 por prenda.

Analice esta nueva propuesta y diga si es conveniente para los empleados justificando el por qué de elección. Grafique esta situación en el plano cartesiano.

SITUACIÓN No. 6:

Nombre: LA TARJETA DE TELÉFONO

Propósito:
Determinar el papel que juega la relación por cociente entre las diferencias de dos cantidades de magnitud, en la dependencia entre ellas (costo de la llamada y resto de dinero en la tarjeta con respecto al tiempo de la llamada) y el que juega en el cambio de registro del lenguaje natural al simbólico.

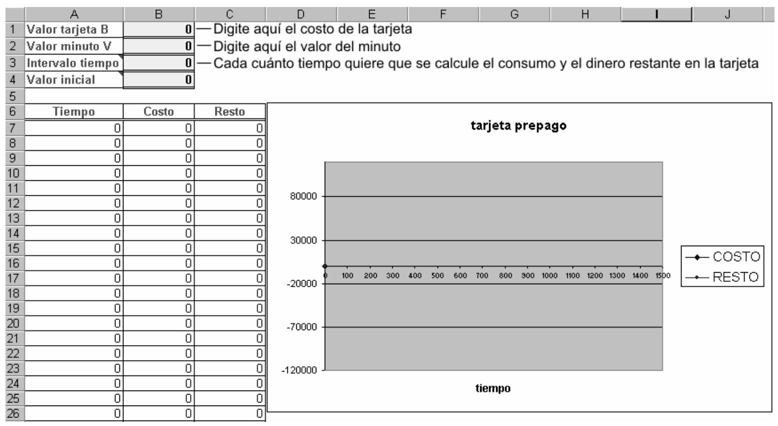
Enunciado:

En el archivo "tarjeta de teléfono.xls" del software EXCEL, analice la situación que se presenta a continuación:

Una persona compra una tarjeta de teléfono celular prepago por un valor de ***B*** pesos. Cada minuto de llamada cuesta un valor ***V*** pesos.

Escriba los valores de ***B*** y ***V*** que desee y a partir de lo observado en la gráfica y en la tabla, responda:

- ¿En qué momento se ha consumido la mitad del valor de la tarjeta?
- ¿Cómo saber que ya se consumió toda la tarjeta?
- ¿Qué expresión simbólica describe la relación entre el tiempo de llamada y el costo de la misma?
- ¿Qué expresión simbólica describe la relación entre el tiempo de llamada y la cantidad de dinero restante de la misma?



SITUACIÓN No. 7:

EL TANQUE CILÍNDRICO

Enunciado:

Se cuenta con un tanque cilíndrico de 100 litros de capacidad y altura 2 metros (fig. 1) el cual se dispone para llenarlo de agua. En esta experiencia se puede escoger la unidad que se desee.

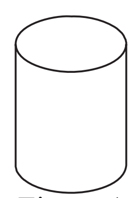


Figura 1

MOMENTO 1

En la experiencia ¿Cuáles cantidades permanecen constantes y cuales varían?

- Realiza un gráfico que permita describir la relación existente entre el volumen y el nivel de agua por cada unidad echada. Describa dicha relación en palabras y en símbolos.
- Si se cambia la unidad de volumen para el llenado, qué cambios se generaría en el nivel de agua, el volumen y en la relación existente entre el nivel de agua y el volumen.

MOMENTO 2

¿En qué cambian las respuestas de las preguntas anteriores (Momento 1), si inicialmente el tanque tiene una cantidad determinada de agua a un nivel de 50 cms?

SITUACIÓN No. 8:

LA CACERÍA

Un buen caballo puede alcanzar una velocidad de 60 kilómetros por hora y sostenerla durante 6 kilómetros aproximadamente. El leopardo, uno de los animales más rápidos que se conocen en el mundo, pude alcanzar velocidades de un poco más de 110 kilómetros por hora y mantenerla por aproximadamente un kilómetro.

Piensa en la siguiente situación:

Un leopardo es alertado por el sonido de los cascos de un caballo, éste al verlo se dispone a cazarlo. En el momento que el leopardo decide perseguirlo, el caballo se encuentra a unos 200 metros de distancia. El caballo logra alcanzar su velocidad máxima y aun tiene suficiente energía para sostenerse en esta. Considerando los datos del texto anterior sobre la capacidad del leopardo y el caballo para correr a altas velocidades.

¿Podrá el leopardo atrapar al caballo?, utiliza gráficos, tablas y/o registros simbólicos que permitan argumentar la respuesta.

SITUACIÓN No. 9:

LA CUENTA DE TELÉFONOS

1. Hasta diciembre del año 2005 las empresas telefónicas cobraban el servicio de llamadas a través de un cargo fijo, dependiendo del estrato socioeconómico y un cobro por impulso hablado. La nueva forma de cobro de llamadas es por plan, en donde se paga el costo del plan y el minuto consumido una vez se gasten los minutos ofrecidos en el plan. En la siguiente tabla aparecen los planes ofrecidos por una de las empresas colombianas prestadora del servicio de telefonía, con sus respectivas características.
   a) Construya una función que permita modelar el costo de cada uno de los planes ofrecidos por estrato socioeconómico. Tenga en cuenta todas las condiciones presentadas en al tabla
   b) A partir de los modelos funcionales construidos en el item a) determine las condiciones de conveniencia para la elección de algún plan.
   c) Consulte cuales eran los cargos fijos y el costo del impulso en la forma de cobro anterior, determine la función que modela esta forma de cobro y haga una comparación con los modelos anteriores e indique en que condiciones era mejor la forma de pago anterior comparada con la actual.

ESTRATO	NOMBRE DEL PLAN	MINUTOS INCLUIDOS	VALOR MENSUAL NETO A PAGAR	VALOR MINUTO INCLUIDO EN EL PLAN CON SUBSIDIO	VALOR MINUTO ADICIONAL
ESTRATO 1 (*2)	**PLAN ILIMITADO**	**ILIMITADO**	**$ 20.350**	**N/A**	**N/A**
	PLAN 220	220	$ 10.200	$ 46,36	$ 60,00
	PLAN 110 (*1)	110	$ 6.200	$ 56,36	$ 60,00
(*1) Tarifa subsidiada para el estrato 1 a partir del minuto 111 hasta el minuto 200 es de $26,75 (*2) Los primeros 325 minutos estarán exentos de IVA					
ESTRATO 2 (*2)	**PLAN ILIMITADO**	**ILIMITADO**	**$ 22.100**	**N/A**	**N/A**
	PLAN 220	220	$ 11.950	$ 54,32	$ 60,00
	PLAN 110 (*3)	110	$ 7.400	$ 67,27	$ 60,00
(*2) Los primeros **325 minutos** estarán exentos de IVA (*3) Tarifa subsidiada para el estrato 2 a partir del minuto 111 hasta el minuto 200 es de $32,10					
ESTRATO 3	**PLAN ILIMITADO**	**ILIMITADO**	**$ 39.000**	**N/A**	**N/A**
	PLAN 550	550	$ 35.000	$ 63,64	$ 63,64
	PLAN 370	370	$ 25.500	$ 68,92	$ 68,92
	PLAN 220	220	$ 17.000	$ 77,27	$ 77,27
	PLAN 110	110	$ 10.000	$ 90,91	$ 90,91
ESTRATO 4	**PLAN ILIMITADO**	**ILIMITADO**	**$ 41.500**	**N/A**	**N/A**
	PLAN 550	550	$ 35.000	$ 63,64	$ 63,64
	PLAN 370	370	$ 25.500	$ 68,92	$ 68,92
	PLAN 220	220	$ 17.000	$ 77,27	$ 77,27
	PLAN 110	110	$ 10.000	$ 90,91	$ 90,91
ESTRATO 5	**PLAN ILIMITADO**	**ILIMITADO**	**$ 49.800**	**N/A**	**N/A**
	PLAN 550	550	$ 42.000	$ 76,36	$ 76,36
	PLAN 370	370	$ 30.600	$ 82,70	$ 82,70
	PLAN 220	220	$ 20.400	$ 92,73	$ 92,73
	PLAN 110	110	$ 12.000	$ 109,09	$ 109,09
Los precios no incluyen IVA					

PLANES BÁSICOS LÍNEA TELEFÓNICA ESTRATO 1 Y 2:

NOMBRE DEL PLAN	ESTRATO	CARGO FIJO MENSUAL (Sin IVA	VALOR MINUTO HASTA MINUTO 200	VALOR MINUTO ADICIONAL A PARTIR DEL MINUTO 201 (Sin IVA)
PLAN BÁSICO	ESTRATO 1	$ 3.255	$ 26,75	$ 60,00
	ESTRATO 2	$ 3.906	$ 32,10	$ 60,00

PLANES PREPAGO LÍNEA TELEFÓNICA ESTRATO 1 Y 2:

NOMBRE DEL PLAN	DENOMINACIONES TARJETAS PREPAGO ETB	VALOR MINUTO LOCAL
PLANES PREPAGO	\$2.000	\$ 86
	\$3.000	
	\$5.000	
	\$10.000	
	\$20.000	

Situaciones para la función cuadrática

• **ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN:**

La situación tiene como propósito identificar las características más importantes de la función cuadrática, a saber: su crecimiento, decrecimiento, punto de máxima/mínimo, rapidez del cambio (concavidad), entre otros. Está diseñada para orientar a los estudiantes en dos momentos.

MOMENTO 1

En esta parte, la situación es presentada en lenguaje natural, de tal manera que permita inducir a los estudiantes a que mediante el sistema de representación tabular, identifique las relaciones funcionales entre las diferentes magnitudes que intervienen en la situación. Para promover este reconocimiento se formulan preguntas que sugieren a los estudiantes la realización de cálculos de los valores de una magnitud en relación con las otras. Además se requiere que el estudiante se aproxime a describir esta relación funcional haciendo uso del lenguaje natural.

Una vez llenen la tabla, se espera que reconozcan la existencia de la covariación entre las magnitudes, aunque es posible que no logren expresarla cuantitativamente. Esto a pesar de que detectaran los algoritmos con los que se hiciera su registro tabular.

Adicionalmente con este momento se pretende poner en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar conceptos matemáticos, lo cual se hace evidente cuando los expresan retórica o gráficamente.

MOMENTO 2

En un segundo momento, se propone que la relación entre las magnitudes sea expresada mediante otros sistemas de representación tales como: el gráfico y el simbólico usando una hoja de cálculo en Excel. En esta parte de la situación se pretende que los estudiantes identifiquen algunas características de la forma como cambian las variables, dado que la situación exige al estudiante tener cierto control sobre el cambio que se surge en cada una de las variables (magnitudes), a medida que crece o decrece el número de viajeros. De esta forma, a través de su análisis se podrá anticipar conclusiones favorables o desfavorables para los viajeros y para la empresa de viajes, con base en las condiciones generales del problema.

De igual manera, la situación permite que el estudiante identifique algunas propiedades de la función en cuanto a su variación y a la variación de la variación. Adicionalmente le permite asociaciones entre los sistemas de representación verbal gráfico y tabular. El docente debe estar atento a las posibles respuestas de los estudiantes y promover la identificación de estas características por ejemplo, las preguntas c, d y e del segundo momento pretender orientar el trabajo del docente, hacia el descubrimiento de la forma cómo "cambia el cambio" de la función, y su respectiva identificación de este rasgo en el registro de representación gráfico. En este sentido el docente puede apoyar el trabajo con un razonamiento gráfico como el siguiente:

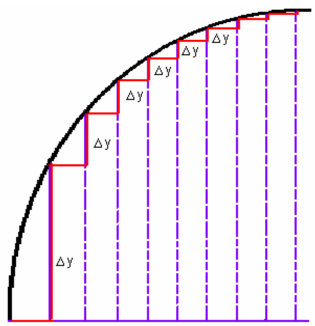
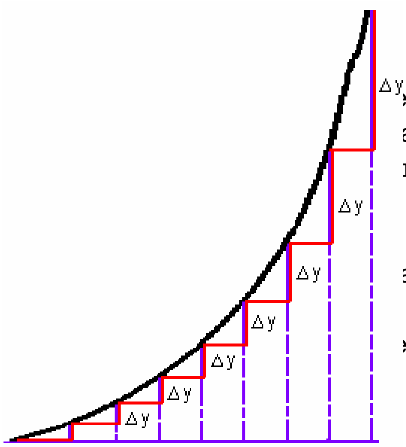


Gráfico 1. Tramo de la parábola de la relación funcional de la situación



N° 1 se muestra un tramo de la relación que existe entre el número de viaje- total del viaje para el grupo. Con la construcción de este gráfico se pretende a medida que el número de viajeros aumenta en una unidad, el costo total a el grupo también aumenta. Sin embargo, se puede observar que cada vez menor valor.

N° 2 se muestra un tramo de la relación que existe entre dos variables dife- a construcción de este gráfico se pretende observar que a medida que una de aumenta en una unidad la otra variable aumenta, pero en este caso se puede cada vez aumenta en un mayor valor.

Gráfico 2.

Por medio de actividades de este tipo es posible, mediante el proceso de generalización, llegar a la conclusión que las gráficas cóncavas hacia arriba representan un cambio positivo o de aumento en la variación de la función y que una gráfica cóncava hacia abajo representa un cambio negativo o disminución de la variación de la función.

Componentes de la situación

- **Elementos procedimentales y conceptuales Matemáticos:**
  - Discriminación de magnitudes variables y constantes.
  - Identificación de las magnitudes dependientes e independientes en una relación funcional.
  - La organización de la información en tablas que permitan reconocer y cuantificar el cambio.
  - La representación simbólica y cartesiana de las relaciones funcionales.

- **Elementos Didácticos:**
  - **Criterios de análisis en la Modelación.**
    - La identificación y selección de las magnitudes variables y constantes.
    - La formulación de hipótesis de trabajo
    - Construcción de ecuaciones y herramientas simbólicas y gráficas para realizar procedimientos.
    - El establecimiento de argumentos que permitan validar la obtención del modelo.
    - La utilización del modelo para elaborar y probar conjeturas de la situación problema.
  - **Criterios de análisis en el reconocimiento de la variación**
    - La determinación de las cantidades variables.
    - La identificación de las invariantes del problema
    - El reconocimiento de las relaciones multiplicativas entre las magnitudes que interviene en la situación.
    - La descripción y coordinación del cambio de una cantidad de magnitud con los cambios en otra.
    - Identificación de la concavidad de la función como la herramienta para determinar la variación del cambio de la función (variación de la variación)
  - **Criterios de análisis en la manipulación de los sistemas de representación.**
    - El uso de herramientas como la interpolación y extrapolación para determinar parejas de valores en una tabla.
    - El reconocimiento de los elementos de cada sistema semiótico de representación en relación con el concepto de función
    - La identificación de características de la función en un sistema de representación y sus correspondientes en otro sistema de representación.

SITUACIÓN No. 1:

En la empresa de viajes JAVO.Ltda se tiene que el valor de un paquete turístico a cualquier destino nacional por persona es de $350,000. Sin embargo para cualquier grupo se hace un descuento de $2,000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo. Es decir si viaja una pareja se hace un descuento de $4,000 a cada uno de ellos. De igual manera si es un grupo de 5 personas se hace un descuento de $10,000 (5 veces $2,000) a cada uno de los viajeros.

MOMENTO 1

Reconocimiento y representación de las relaciones funcionales.

Con base en la información anterior responda:

a. ¿Cuál sería el costo del viaje para un grupo de 10 personas? ¿y para un grupo de 23 personas?
b. Si el costo para un grupo es de $9'800,000. ¿cuántas personas hacen parte del grupo?
c. Con base en esta información llene la siguiente tabla:

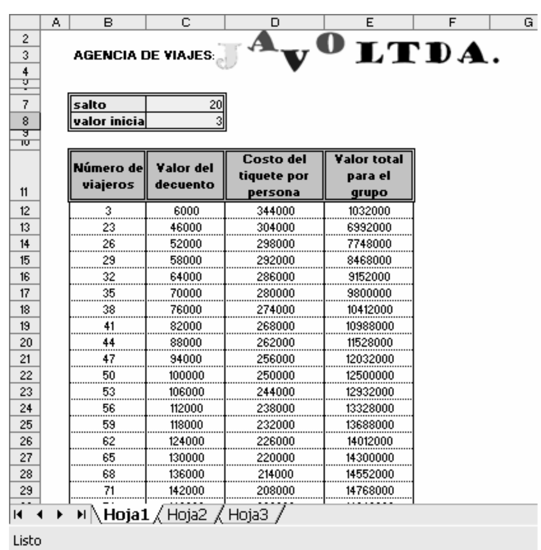
Número de miembros del grupo	Valor del descuento por persona	Valor tiquete por persona	Valor total del viaje para el grupo
2			
5			
	14.000		
		310.000	
50			
62			

d. Según las condiciones de la situación cuáles cantidades permanecen constantes y cuáles varían?
e. Exprese con palabras la relación que existen entre cada una de las siguientes cantidades:
a. Número de miembros del grupo y valor del descuento por persona.
b. Número de miembros del grupo y valor del tique por persona.
c. Número de miembros del grupo y valor total del viaje para el grupo.
f. Represente mediante símbolos cada una de las anteriores relaciones.

MOMENTO 2

Análisis de algunas propiedades a través de sus representaciones gráfica y tabular

En el archivo empresa de viajes JAVO.Ltda.xls se muestra una tabla y su respectivo gráfico, (ver gráfico N° 3) que elaboró la empresa para llevar el registro de sus posibles ofertas y restricciones a los clientes.



AGENCIA DE VIAJES: JAVO LTDA.

salto	20
valor inicia	3

Número de viajeros	Valor del decuento	Costo del tiquete por persona	Valor total para el grupo
3	6000	344000	1032000
23	46000	304000	6992000
26	52000	298000	7748000
29	58000	292000	8468000
32	64000	286000	9152000
35	70000	280000	9800000
38	76000	274000	10412000
41	82000	268000	10988000
44	88000	262000	11528000
47	94000	256000	12032000
50	100000	250000	12500000
53	106000	244000	12932000
56	112000	238000	13328000
59	118000	232000	13688000
62	124000	226000	14012000
65	130000	220000	14300000
68	136000	214000	14552000
71	142000	208000	14768000

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Listo

Gráfico 3. Imagen del archivo empresa de viajes javo.ltd**a**

1. Asigne diferentes valores a la casilla salto y valor inicial, observe y describa los cambios que genera en la tabla.
2. Observe la tabla y con base en ella responda:
   a. A medida que aumenta el número de viajeros, qué sucede con cada una de las siguientes cantidades:

      El descuento por persona,

      El valor del tiquete por persona,

      El costo total del viaje al grupo.
   b. Si se duplicara el número de viajeros qué efectos tendría esto sobre cada una de las otras cantidades de la tabla?
   c. En qué valor se incrementa el costo del viaje para el grupo cuando el número de viajeros aumenta de 12 a 15, de 15 a 18, de 18 a 21, de 42 a 45, 83 a 86, de 86 a 89 y de 89 a 91. Describe con tus palabras las regularidades que puedes observar.
   d. A medida que el número personas aumenta de 0 a 87 cómo es el crecimiento en el valor del viaje para el grupo. ¿Cómo se puede observar esta forma de crecimiento en la gráfica de la función?
   e. A medida que el número personas aumenta de 88 en adelante cómo es el decrecimiento en el valor del viaje para el grupo. ¿Cómo se puede observar esta forma de decrecimiento en la gráfica de la función?
   f. ¿Para qué número viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso? ¿Cómo se puede observar este valor en la gráfica de la función?
   g. Suponga que se tiene un grupo de 50 personas y otro de 125 personas. ¿Cuánto dinero recibiría la empresa por cada uno de estos grupos? ¿Cuál de los dos grupos es más conveniente que la empresa tome para su viaje? Argumenta tu respuesta.
   h. ¿Qué relación existe entre las ***cantidades Número de viajeros*** y ***costo del tiquete por persona*** con la cantidad del ***costo total para el grupo***?
   i. ¿Cuál es la gráfica que corresponde a cada una de las columnas de la tabla?
   j. ¿Qué relación se puede observar entre la gráfica del ***costo del tiquete por persona, el eje x*** y la ***gráfica del valor total del grupo.***
3. Si usted fuera gerente o asesor de la empresa, qué cambios sugeriría a este plan de tal manera que represente mejores utilidades a la empresa.

SITUACIÓN No. 2:

Se tiene una cuerda de longitud K metros. Con una parte x de ella se requiere encerrar una superficie circular y con la otra parte una superficie cuadrada, ver figura 2.

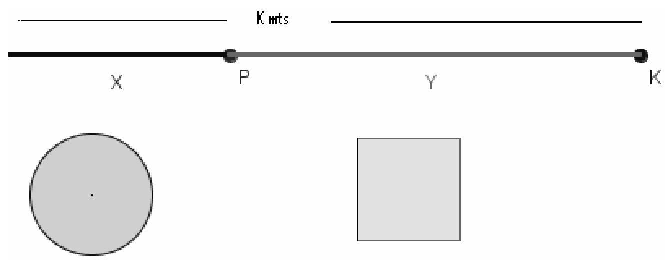


Figura 2

Actividad 1

a. Verifique que el área total A encerrada por la cuerda como función de la longitud x, es una función cuadrática.
b. Si la función A(x) es cuadrática entonces es una parábola, ¿Qué información ofrece a la situación el vértice de la misma?

Actividad 2

a. ¿Que trayectoria sigue el vértice de la parábola cuando k toma valores reales positivos? ¿Qué dice esta trayectoria de la situación?
b. Determine un valor exacto o aproximado de la longitud x para el cual el área total encerrada es mínima.
c. ¿Cuál es dicho valor mínimo para el área total encerrada?

SITUACIÓN No. 3:

Si el lado de un campo rectangular va a tener como límite el muro de una casa, halle las dimensiones del terreno rectangular mas grande que puede cercarse usando 240 m de valla para los otros tres lados.