

MOMENTOS CLAVE EN EL APRENDIZAJE DE ISOMETRÍAS

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar ejemplos de momentos clave en el aprendizaje de isometrías de alumnos de 3º de ESO. Mostramos tres ejemplos de momentos clave y los analizamos para obtener nuevas características que ayuden a refinar la propia noción en construcción de momento clave.

Abstract

In this study, we attempt to identify some examples of key moments in the learning of isometries with students who are 14 and 15 years old. We show three examples of key moments and we analyze them to find new characteristics that contribute to reconstruct the notion itself of key moment.

Palabras clave: Geometría dinámica, Isometrías, Momentos clave, Instrumentación.

Key words: Dynamic geometry, Isometries, Key moments, Instrumentation.

Introducción

El objetivo de esta investigación es realizar un estudio exploratorio, tratando de identificar ejemplos de momentos clave (MC) en el aprendizaje matemático de isometrías de alumnos de 3º de ESO. En la planificación y la implementación del diseño instruccivo se han considerado sesiones de resolución de problemas de una unidad didáctica de Transformaciones en el plano con el soporte de un Software de Geometría Dinámica (DGS) y puestas en común orquestadas por un tutor. Con la finalidad de detectar evidencias de posibles momentos clave, nos fijamos en la influencia de las interacciones entre parejas de alumnos con el tutor y con el software. No es objeto de estudio analizar estas interacciones, sino detectarlas.

Resaltamos la importancia de investigar los momentos de aprendizaje por su relevancia en la mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje en su conjunto. Por otra parte, hacemos notar que existe literatura de MC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de resolución de problemas, como en Carrillo (2003), que concluye con la importancia con que tienen que ser considerados por los profesores a la hora de llevar la resolución de problemas al aula, pero con el foco en MC del aprendizaje y en particular de las isometrías, la bibliografía existente es escasa, circunstancia que confiere un valor científico añadido a esta investigación.

En esta comunicación, presentamos parte del diseño instruccivo, parte del análisis de las interacciones e interpretamos tres MC de aprendizaje identificados en una sesión de clase, que corresponde a la puesta en común de la resolución de un problema de isometrías. Esto, nos ayudará a tener una base sobre la que construir una definición de MC adecuada a nuestro contexto, objetivo fundamental en nuestra investigación en curso.

Marco teórico

Una característica general de MC en el aprendizaje, es que emerja de un estado inicial con conceptos o procesos no asumidos y haya evidencias de que efectivamente se produce un cambio en el aprendizaje. Dentro de nuestro planteamiento de la investigación, el MC debe estar influenciado al menos por una de las tres variables de interacción que consideramos en nuestro marco teórico, la pareja de trabajo, el tutor y el Software de Geometría Dinámica. Una representación gráfica de MC se puede basar en la consideración de las interacciones entre un estadio inicial y uno final (Figura 1).



FIGURA 1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MC

De acuerdo con estas consideraciones, el marco teórico de la investigación se estructura en base a tres aspectos, que van a permitir aproximarnos a una teoría sobre los momentos de aprendizaje.

En primer lugar consideramos los aspectos cognitivos relacionados con la producción de aprendizaje tanto de contenidos como de procesos implicados en la resolución de problemas sobre isometrías y en su argumentación. Para ello, adaptamos el concepto de espacio básico de un problema y el de espacio básico de la acción tutorial humana de Cobo y Fortuny (2005). Estos aspectos también están relacionados con el diseño de la unidad didáctica y los propósitos de la misma.

En segundo lugar nos fijamos en la mediación semiótica que produce un entorno de DGS en el aprendizaje y en particular en la génesis instrumental de los estudiantes (Rabardel, 1995). Utilizamos la idea de orquestación instrumental (Drijvers, Doorman, Boon, & Gisbergen, 2010; Trouche, 2005) con el fin de poder analizar la gestión del profesor respecto a la génesis instrumental de cada alumno, apoyándose en la tutorización de la interacción por parejas y la instrumentación (Iranzo & Fortuny, 2009).

En tercer lugar, nos fijamos en los aspectos de gestión del tutor, que tiene que ir creando la necesidad de que los alumnos sigan un proceso de matematización vertical (García, s.d.). Damos importancia a los procesos relacionados con la gestión, que se pueden ver como MC en el aprendizaje y en particular el proceso de filtrado “filtering approach” (Sherin, 2002). La estructura de las discusiones en el diseño instructivo seguido ha involucrado tres componentes principales:

- (a) la generación de ideas,
- (b) la comparación y evaluación, y
- (c) el filtrado.

Metodología

La recogida de datos se ha llevado a cabo en una escuela de Barcelona con una clase de 3º de ESO, donde se analizan en profundidad seis alumnos que trabajan por parejas, Eli-Hu, Meri-Ca y Adri-Ma, y que han sido elegidos por su participación y calidad expresiva en la asignatura de matemáticas. Para crear las parejas se han tenido en cuenta niveles académicos similares, pero capacidades procedimentales diversas. Los alumnos restantes de la clase no son objeto de la investigación, pero han realizado todas las actividades y tienen un papel significativo en las sesiones de puestas en común.

Durante el curso han trabajado el concepto de demostración y el de conjetura, aplicado sobre todo a temas algebraicos. Antes de realizar esta unidad didáctica, los alumnos realizaron otra de geometría básica para familiarizarse con el software y la diferencia entre producir dibujos y figuras (Laborde & Capponi, 1994).

El diseño instructivo se ha estructurado en ocho sesiones como indica la siguiente Tabla 1.

Estructura esquemática de la Unidad Didáctica		
SESIÓN	LUGAR	TÍTULO
1	Clase ordinaria	Introducción + Test inicial
2	C. de ordenadores	Prob. 1: Construir simetrías axiales
		Prob. 2: Identificar simetrías axiales y construir eje
3	C. ordinaria	Puesta en común prob. 1 y 2
4	C. de ordenadores	Prob. 3: Encontrar el centro de giro
5	C. ordinaria	Puesta en común prob. 3
6	C. de ordenadores	Prob. 4: Composición simetrías axiales
7	C. de ordenadores	Prob. 5: El prob. del billar
8	C. ordinaria	Puesta en común + Valoración global

TABLA 1. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA


La sesión 1 consiste en resolver un test inicial por parejas con lápiz y papel. El test es un instrumento para definir el nivel inicial de conocimiento de las parejas que se están grabando. En las sesiones 2, 4, 6 y 7, los alumnos trabajan por parejas con un entorno de DGS y asistidos por el profesor cuando plantean cuestiones. El profesor tiene una guía para dar mensajes que se basa en el espacio básico del problema y el de la acción tutorial humana, tal como ya se hizo en el estudio documentado en Cobo y Fortuny (2005).

En las sesiones 3, 5 y 8, el profesor gestiona una puesta en común de todos los alumnos de la clase y se conserva la distribución por parejas para poder seguir observando la interacción. Cabe notar, que aun teniendo la guía del espacio básico del problema, hay que poner especial atención en la gestión, para incorporar no sólo los conocimientos requeridos, sino los procesos de resolución que se pueden ver involucrados.

En esta comunicación nos centramos en la sesión 5, correspondiente a la puesta en común de la resolución del problema 3 (ver Figura 2), escogida por su riqueza en el papel del tutor como orquestador y por la riqueza de conocimientos conceptuales y procedimentales que involucra.

Los datos de esta sesión surgen de registrar en video la hora de clase desde diferentes ángulos y de grabar la voz de los seis alumnos participantes en la investigación, para poder centrar nuestra atención en ellos. En este caso, la investigadora, hace también el papel de tutora.

Imaginad que nos contratan en una fábrica, para ayudar a resolver un problema:



Tenían una máquina que nos giraba las piezas de un sitio a otro, como se muestra en la animación anterior, pero la llevaron a arreglar, y ahora que ya funciona perfectamente, no saben dónde la tienen que colocar para que siga transportando las piezas como lo hacía antes.

Ayudad a los técnicos a colocar la máquina de giro en su sitio. Escribid argumentos para convencer a los técnicos de vuestra solución. Tenéis la ventana del GeoGebra para ayudaros a resolver la situación.

FIGURA 2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3

Antes de proponer el problema 3 a los alumnos, lo hemos analizado haciendo una adaptación del espacio básico del problema, incluyendo los mensajes del espacio de acción tutorial humana. Como se observa en la Figura 3, el esquema de resolución del problema lleva incorporados los mensajes que el profesor puede proporcionar durante la resolución del problema según el punto en el que se encuentran los alumnos. Así, con alumnos de niveles y ritmos de trabajo distintos, el profesor puede ser flexible en cuanto a qué rama de resolución debe seguir cada pareja teniendo en cuenta que podrán reflexionar sobre los puntos a los que no hayan llegado en la puesta en común. En este caso, el problema no sólo es interesante por la variedad de procesos involucrados sino por la riqueza de rigor matemático que se requiere para resolverlo totalmente.

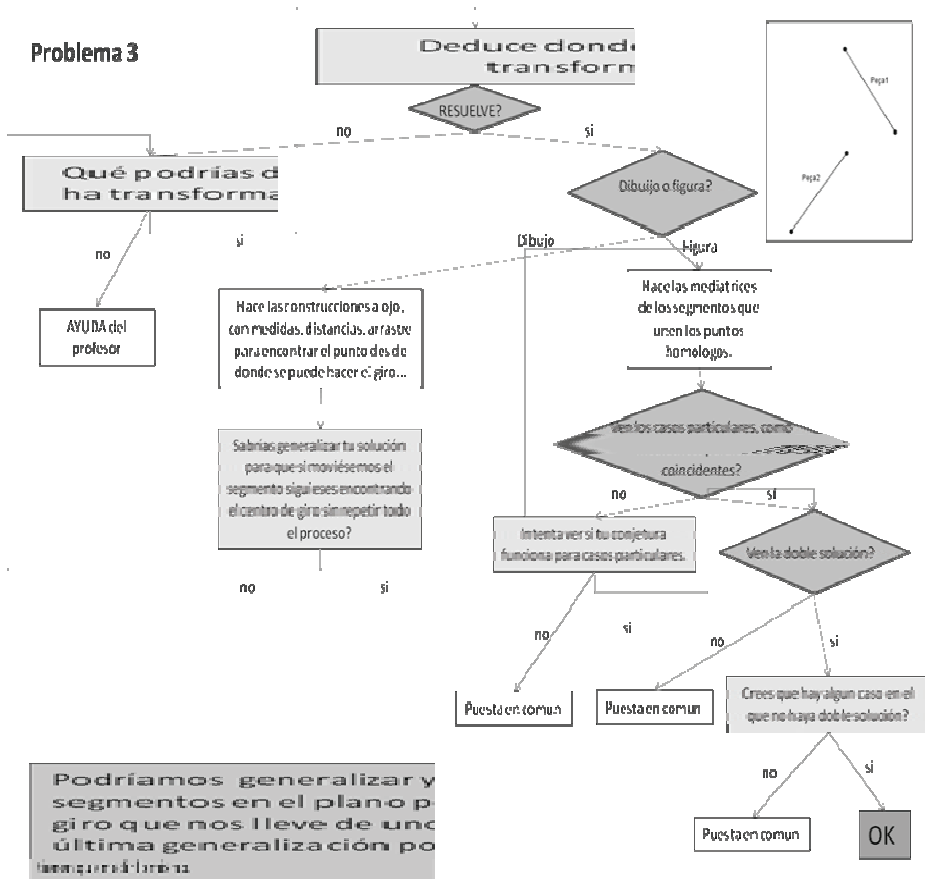


FIGURA 3. ADAPTACIÓN DEL ESPACIO BÁSICO Y DE ACCIÓN TUTORIAL HUMANA

Analisis de datos

En este apartado, mostramos ejemplos significativos que hemos detectado para ilustrar el concepto preliminar de MC con el que estamos trabajando.

Una vez recogidos los datos, se han transcrito las conversaciones y las acciones, en una tabla como la que se muestra en la Tabla 2.

Temps	Elisabet	Hugo	Meritxell	Carles	Adriana	Matias	Tutora	Altres	Software	Comentaris	Indicis
-------	----------	------	-----------	--------	---------	--------	--------	--------	----------	------------	---------

TABLA 2. ESQUEMA DE LA TRANSCRIPCIÓN DE LOS DATOS

En un análisis más detallado donde se trata como caso cada uno de los indicios, modificamos la tabla para centrarnos en el candidato a MC que hemos detectado. Hacemos una reorganización de las columnas para cada caso, conservando como individuos los protagonistas del cambio en el aprendizaje y sus parejas; también conservamos la figura del tutor y la aparición de software cuando la hay. Finalmente creamos unos conectores de influencia para dar dinamismo al MC y evidenciar gráficamente las diferentes interacciones que se han producido.

De la sesión analizada que tratamos en esta comunicación hemos escogido tres ejemplos de MC que resultan interesantes por sus características básicas representadas en la Figura y por la riqueza del entorno en el que están contextualizados.

A continuación vamos a analizar cada uno de estos ejemplos. Recordamos que nuestro objetivo es encontrar diferentes ejemplos de MC de forma exploratoria, con lo que sólo tenemos la estructura de la Figura para localizarlos y no tenemos definidos previamente otros requisitos. Queremos que sean los ejemplos los que nos ayuden a crear una definición.

Hemos escogido dos primeros momentos significativos desde el punto de vista de procesos de resolución del problema. Uno es directamente influyente en el otro, así los dos son consecutivos en la Tabla 3. La clase se encontraba en un punto en que acababan de conjeturar que el centro de giro de la máquina se situaría en el punto de corte de las mediatrices de los puntos homólogos (Figura 4), pero tenían un caso particular en que encontraban el giro de otra forma, prolongando los segmentos (Figura 5).

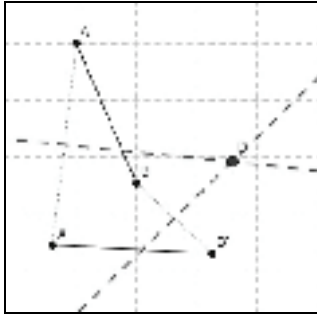


Figura 4. Donde se cortan las mediatrices

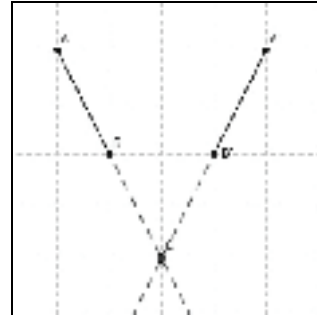


Figura 5. Donde se cortan las prolongaciones

‘Momento Clave 1. Generalización de casos particulares’

En la Tabla 3 podemos observar un cambio en el aprendizaje de Meri (línea 8), y una evidencia de que su punto de partida (línea 4), no era el mismo que al final. Esta alumna empieza diciendo que la conjetura funcionaría para dos segmentos cualesquiera excepto en un caso concreto, pero después ve que se puede considerar un caso particular del general y que no hay necesidad de mencionarlo. Éstas son dos de las características que tenía que cumplir la secuencia identificada para ser MC en el aprendizaje.

También ha habido una influencia indirecta de la tutora, mediante la orquestación que hace de la discusión en clase, se encuentra en el punto de filtraje de las diversas ideas que han ido generando los alumnos y que ella ha comparado y evaluado. En este caso da prioridad al aprendizaje de procesos, ya que hay errores en el contenido matemático de las ideas de los alumnos, no es cierto que la máquina de giro se pueda colocar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes como sugieren los alumnos, aunque es de esperar que en un filtraje posterior se vaya refinando el contenido matemático. Esta influencia indirecta basada en el “filtering approach” (Sherin, 2002), hace que la orquestación sea crucial en el desarrollo del MC. Los procesos de generalización no se podrían haber aprendido si se hubiese cortado la discusión para filtrar los contenidos matemáticos erróneos.

Año	Alfres paralles	Meri i cell	Carles i Parella	Tutora	Infinis
1			↘		
2					
3			↙		
4			↙		
5			↙		
6			↙		
7			↙		
8			↙		
9			↙		
10			↙		
11			↙		
12			↙		

TABLA 3. GENERALIZACIÓN DE CASOS PARTICULARES

Respecto a la interacción de Meri con otros agentes a parte de la tutora, en este caso está la influencia de su pareja y de otros alumnos, que son los que hacen intervenciones de tipo progresivo (Cobo & Fortuny, 2005), ya que introducen procedimientos matemáticos, que a ella le influyen en el cambio que evidencia, como fijarse que en el caso particular también se pueden hacer mediatrices, y que se cortarían en el punto encontrado, aunque, también en infinitos más (línea 6).

‘Momento clave 2. Enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración’

En este caso consideramos que Eli, hace una aportación muy interesante a raíz de la intervención de su compañera. El cambio en el proceso de resolución del problema en Meri, ha influido directamente en un cambio en el aprendizaje, también

de procesos, de otra compañera, Eli. No hay evidencia del estado inicial, pero consideramos que por omisión, no lo sabía anteriormente. Aparentemente la única influencia sobre ella es el comentario de su compañera, pero si ampliamos la mirada, es con todo el episodio anterior, con el que ha interactuado.

Eli hace la reflexión de que igual que en este caso concreto se ha acabado viendo que sí que era un caso particular, piensa que puede haber otros casos concretos que quizá hagan replantearse la conjetura (línea 12). Defiende que si algunos segmentos hacen que sus mediatrices se corten en un punto, y así queda determinado el punto donde colocar la máquina, y algunos segmentos hacen que sus mediatrices sean coincidentes, determinando entonces que hay infinitos puntos donde colocarla (recordar que es un concepto matemático erróneo), pues que también debe haber segmentos que estén colocados de tal forma que sus mediatrices queden paralelas, y que habría que pensar qué pasaría con la máquina.

Vemos pues que hay un enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración, pero que a la vez, también hay contenidos matemáticos implícitos que van siguiendo un proceso de filtraje con la ayuda de la orquestación de la tutora. Notamos que es un punto muy importante la gestión de la tutora basada en generación de procesos, porque en este ejemplo, si hubiera filtrado los conceptos matemáticos erróneos (Sherin, 2002), nos aventuramos a conjeturar que no se hubiera llegado a dicho comentario.

‘Momento clave 3. Refutar una conjetura con visiones distintas. Dos ejemplos paralelos.’

Antes de analizar el episodio, contextualizamos que una vez los alumnos ya habían resuelto el problema de manera general, la tutora decide filtrar los contenidos matemáticos erróneos lanzando la pregunta: “En este caso (Figura Figura) todos veis claro que podemos poner la máquina en cualquier punto de las mediatrices?” (línea 1)

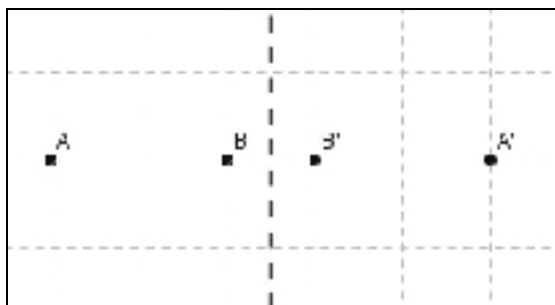


FIGURA 6. CASO PARTICULAR DE MEDIATRICES COINCIDENTES

Este ejemplo de MC, tiene la peculiaridad de que son dos momentos con la estructura requerida que suceden en paralelo pero con características distintas, y justamente por ese motivo los hemos querido mostrar aquí. Vamos a mostrar primero la Tabla 4 y a continuación haremos el análisis de los dos momentos.

Mes	Elisabet	Hugo	Allres parelles	Maria	Tutora	Software	Indis:
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							

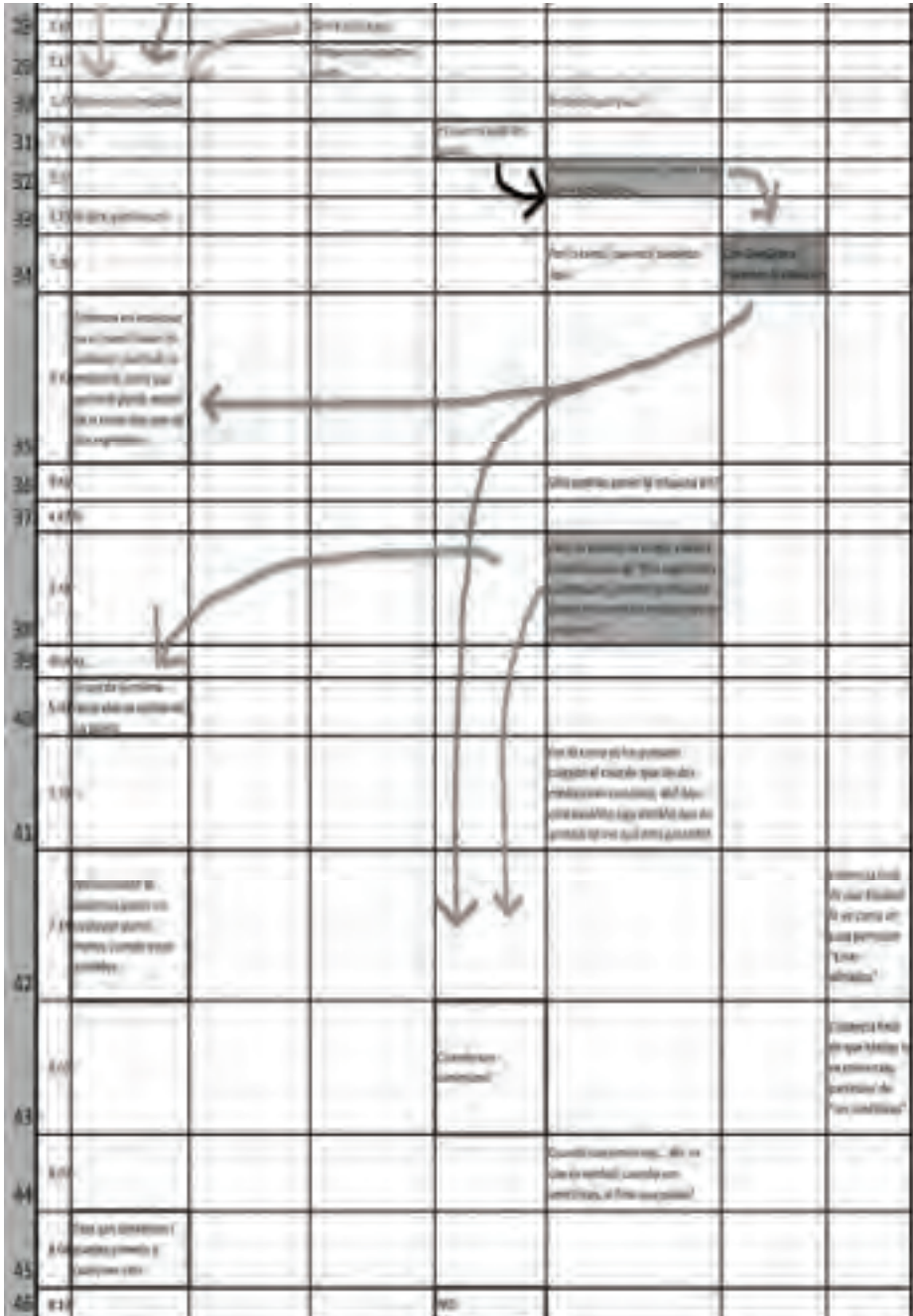


TABLA 4. REFUTAR UNA CONJETURA CON VISIONES DISTINTAS

Al principio, tanto Eli como Ma, ponen de manifiesto que creen que cuando los dos segmentos están alineados, la máquina de giro se puede situar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes, incluso contrariamente a Hu, la pareja de Eli, que opina que no (línea 3), ella se reafirma en su opinión (línea 10).

Después, influenciada por la orquestación de la tutora, que en este caso pone énfasis en los contenidos matemáticos, acepta que el giro no va a ser de 180° . De todas maneras, no ve la falsedad de su conjetura, simplemente considera, que será otro ángulo de giro. Cuando la tutora insiste en qué ángulo sería si no son 180° , Ma dice que no lo preguntan (línea 22), como si no se pudiese determinar. Esta insistencia por no aceptar que el centro de giro no se puede poner en cualquier punto, puede venir influenciado también del hecho de que en este momento de la discusión nos encontramos dentro de una demostración empírica en la que han hecho un ejemplo genérico, pero que a petición de algunos compañeros, están haciendo experimentos cruciales (Gutiérrez, 2005) que puedan usar de contraejemplos para refutar la conjetura y que ellos tengan un cierto recelo a que se evidencie que la conjetura no era correcta.

Un compañero propone construir la situación con GeoGebra, y muchos ya prevén que el segmento homólogo no coincidirá con el que buscan. Eli, ha tenido la influencia del software, que en este caso lo han utilizado para comprobar un hecho concreto y dice que entonces es imposible (línea 30). Notemos que ha sido más decisivo para ella el hecho de ver que en el GeoGebra no sucede que no las explicaciones que estaba dándole Hu, su pareja.

Ma sigue diciendo que con el GeoGebra no han visto que no se pudiese con ningún ángulo, sólo el de 180° . Y esta intervención hace que la tutora haga una orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010; Trouche, 2005), para que el hecho de no tener un grado alto de instrumentación no condicione la fase ascendente (Arzarello, Micheletti, Olivero, & Robutti, 1998) en la que se encuentran. Eli, después de ver que con la barra deslizadora del GeoGebra tampoco funciona, se convence definitivamente, y hace diversas intervenciones donde transmite que el caso en el que los segmentos están alineados, hay que tratarlo a parte y que la solución sólo será el punto medio de los puntos homólogos.

Vemos que no generaliza sino que ve como a excepción sólo a ese caso (línea 42). En cambio, Ma, ve esta excepción como un caso particular de todos los pares de segmentos simétricos (línea 43).

En este caso se evidencia que aunque los dos alumnos parten, a priori del mismo estado inicial, estando presentes en la misma puesta en común, a cada uno le influyen variables distintas y llegan a estados finales distintos.

Discusión y resultados

Con esta experiencia hemos puesto de manifiesto que respecto a una primera definición de MC, hay ejemplos que siguen las características que hemos definido. Situados en nuestro marco, podemos considerar que se produce un momento de aprendizaje, cuando se puede identificar un conato de cambio entre un estado inicial y uno final en un proceso de aprendizaje personal. En nuestro caso hemos identificado tres momentos que se desprenden del análisis anterior:

1. Generalización de casos particulares.
2. Enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración.
3. Refutar una conjetura con visiones distintas.

Estos "momentos de aprendizaje" corresponden a instantes precisos en que se ha presentado una oportunidad educativa de forma interesante y en su contexto, de manera que el conocimiento se ha podido aprovechar y ampliar a través de una conversación y descubrimiento.

Como hemos mencionado en el marco teórico, el proceso de "filtering approach" (Sherin, 2002) se hace evidente en los tres episodios. El tutor en la experiencia descrita, ha filtrado las ideas, centrando la atención de los estudiantes en un subconjunto de las ideas matemáticas que en cada momento se han planteado. La esencia del filtrado es que determina que se produzca un cambio en el estado final de aprendizaje, como observamos en los tres momentos identificados. Como se observa en el análisis, la gestión del profesor en este punto es crucial e intencionada, por ello, lo consideramos una interacción presente, pero externa, en las características del MC que queremos definir, así llegamos a una representación gráfica más refinada de la estructura de MC (ver Figura 7).

En resumen, consideramos que cualquier momento puede convertirse en un momento de aprendizaje y esto puede ocurrir en las distintas fases de aprendizaje como hemos observado en nuestros resultados: en la fase de generación de ideas, el 1, en la de comparación y evaluación, el 2 y en la fase de filtrado, el 3.



FIGURA 7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MC FINAL

Así, un MC de aprendizaje es una oportunidad de aprendizaje "aprovechada" por los alumnos, es decir, una oportunidad de aprendizaje en la cual se produce y se hace evidente un aprendizaje "efectivo" en el sentido de evolución de los conocimientos de los alumnos, entendiendo conocimientos como un concepto muy abierto que abarca la generalización (momento 1), la mejora de las competencias deductivas (momento 2) y aprender el proceso de validación de una conjetura (momento 3).

El cambio de crecimiento conceptual y procedimental, identificado en un momento de aprendizaje, como es el caso de la evolución en el conocimiento sobre procedimientos de los ejemplos citados anteriormente, puede provenir tanto de la negociación de significado, del intercambio de perspectivas múltiples y/o del cambio de nuestras representaciones internas a través del aprendizaje colaborativo, como podemos observar en distintos puntos de los episodios descritos.

Agradecimientos

Proyecto 'Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico', EDU2008-01963, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España

Referencias

- Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. En *Proceedings of 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 24-31). Presentado en PME, Stellenbosch, South Africa.
- Carrillo, J. (2003). Resolución de problemas: su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 151-161.
- Cobo, P., & Fortuny, J. M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 55-70). Presentado en SEIEM, Córdoba, Spain.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., & Gisbergen, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice. En F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*. Presentado en CERME 2009, Lyon, France. En prensa.

- García, J. A. (s.d.). La Didáctica de las Matemáticas (NTI, RTEE). *Matemáticas en Secundaria*. Recuperado Mayo 23, 2010, a partir de <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 27-44). Presentado en SEIEM, Córdoba, Spain.
- Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.
- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.
- Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 205-233.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). New York: Springer.