

# DIFICULTADES DE FUTUROS PROFESORES EN LA LECTURA Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

Contreras, J.M. (1), Estrada, A. (2), Díaz, C. (3), Batanero, C. (1)

*Universidad de Granada (1), Universidad de Lleida (2), Universidad de Huelva (3)*

## Resumen

Se analizan las respuestas de una muestra de 69 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada a preguntas elementales sobre cálculo de probabilidad simple, conjunta y condicional en una tabla de contingencia, comparando los resultados con los de Estrada y Díaz (2006). Mientras que la falacia de la condicional transpuesta y la confusión entre diferentes tipos de probabilidad, descritos en trabajos previos es escasa en las dos muestras, aumenta el porcentaje de participantes que es incapaz de abordar el problema, así como la confusión entre frecuencias y probabilidades.

## Abstract

We analyze the responses in a sample of 69 prospective primary school teachers from the University of Granada to elementary questions of simple, compound and conditional probability in a two-way table and compare with results from Estrada and Díaz (2006). (2006). While the fallacy of the transpose conditional and confusion between different types of probabilities described in previous work are scarce in both samples, the percent of participants given no responses and confusion between frequencies and probabilities increase.

**Palabras clave:** Formación de profesores, Probabilidad, Interpretación de tablas de contingencia.

**Keywords:** Teacher training, Probability, Interpretation of contingency tables

## Introducción

En la actualidad se ha ampliado el contenido de probabilidad en la Enseñanza Primaria, (MEC, 2006), dentro del bloque 4, *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*. Se sugiere analizar las experiencias aleatorias y utilizar expresiones relacionadas con la probabilidad, estimando o calculando probabilidades sencillas. Aunque el cálculo de probabilidades compuestas y condicionales no se propone, sí hay referencia a interpretación de las tablas de contingencia. Por otro lado, tanto la interpretación de información en medios de comunicación, como la toma de decisiones requieren unas competencias mínimas en la lectura y cálculo de probabilidades simples, condicionales y compuestas a partir de dichas tablas.

Los futuros profesores deben adquirir estas competencias que hoy día están lejos de ser una realidad (Franklin y Mewborn, 2006). Aunque la investigación sobre formación del profesor para enseñar matemáticas ha crecido en los últimos años, el caso de la estadística apenas ha sido tenido en cuenta. El *Joint ICMI/IASE Study Teaching Statistics in School Mathematics* (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008) trata de contribuir a esta necesidad.

En este trabajo se analizan las dificultades en el cálculo de probabilidades de una tabla de contingencia en una muestra de futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada. Sus respuestas a preguntas elementales sobre probabilidad simple, conjunta y condicional se comparan con las obtenidas por Estrada y Díaz (2006) a una tarea similar en futuros profesores que cursaban una asignatura optativa de estadística, mientras que los participantes en nuestro estudio no la habían cursado. La hipótesis general del trabajo es que las dificultades descritas por las autoras serán similares o mayores en nuestra muestra, debido a la menor formación. En lo que sigue analizamos en primer lugar los antecedentes, presentando seguidamente la investigación y sus resultados.

## Antecedentes

La mayoría de los investigadores que han analizado las tablas de doble entrada se han centrado en la capacidad de los estudiantes para evaluar la asociación entre las variables. Una síntesis de ellas se presenta en Estepa (2004). Todos estos trabajos, se basaron en el estudio de Inhelder y Piaget (1955), quien consideró la comprensión de la asociación como el último paso en el desarrollo de la idea de la probabilidad y se centran en la descripción de las estrategias de los sujetos al juzgar la asociación. Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) complementan dicha investigación identificando concepciones incorrectas como la concepción causal (confundir asociación y causalidad) o la determinista (aceptar sólo la asociación perfecta).

Otra línea de investigación diferente es la llevada a cabo por Lonjedo y Huerta (e.g. Huerta y Lonjedo 2005; Huerta, 2009). Interesándose por las variables que

influyen sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional clasifican los problemas de probabilidad condicional en función de los datos dados y el formato de los mismos, así como el contexto. Asimismo estudian los razonamientos y estrategias de los estudiantes en diferentes tipos de problemas.

Otros muchos trabajos estudian las dificultades de comprensión y aplicación de la probabilidad, así como los sesgos de razonamiento asociados. En particular para esta investigación es importante tener en cuenta los resultados de Falk (1986) que indican que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente las dos diferentes probabilidades condicionales  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$  y los de Einhorn y Hogarth (1986) y Ojeda (1995), quienes observaron que algunos estudiantes malinterpretaron la conjunción "y" confundiendo la probabilidad conjunta y la condicional.

**Problema 1.** *En un centro médico han sido observados 780 personas. Los resultados son los siguientes:*

	<b>Menor o igual de 55 años</b>	<b>Mayores de 55 años</b>	<b>Total</b>
<b>Ha tenido un ataque al corazón</b>	29	75	104
<b>Nunca ha tenido un ataque al corazón</b>	401	275	676
<b>Total</b>	430	350	780

*Supongamos que elegimos una de estas personas al azar:*

- *¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga un ataque al corazón?*
- *¿Cuál es la probabilidad de ser mayor de 55 años y, al mismo tiempo haber tenido un ataque al corazón?*
- *Si la persona seleccionada es mayor de 55 años, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga un ataque al corazón?*

FIGURA 1. PROBLEMA PLANTEADO POR ESTRADA Y DÍAZ (2006)

En nuestro estudio seguimos la línea iniciada por Estrada y Díaz (2006), en que tratan de evaluar las dificultades de futuros profesores de educación primaria en problemas muy elementales que se encuentran en la vida cotidiana. Las autoras utilizan el problema 1 (Figura 1) y analizan las respuestas de una muestra de 65 futuros de la Universidad de Lleida cuyo plan de estudios contempla una asignatura troncal de Matemáticas y su didáctica (4,5 créditos) en la que uno de sus cuatro bloques temáticos es sobre Estadística y Probabilidad y una optativa de Estadística

(4,5 créditos) por lo que podemos asumir una mejor preparación que los participantes en nuestro estudio.

El porcentaje de respuestas correctas a todas las preguntas fue superior al 50%, e incluso superior al 75% en el cálculo de la probabilidad simple (ver tabla 1). Pero las autoras también encuentran en sus estudiantes confusión entre probabilidades simples compuestas y condicionales, así como confusión entre un suceso y su complementario, probabilidad con casos favorables o suponer independencia en los datos.

## Método

Nuestro trabajo trata de complementar el de Estrada y Díaz (2006), centrándonos en futuros profesores sin una formación específica en estadística. Para ello se presentó a 69 futuros profesores de Educación Primaria de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada el Problema 2 (Figura 2). Hacemos notar que, intencionalmente, se ha simplificado el enunciado del problema 1, evitando usar la desigualdad (menor o igual) para hacer el problema más asequible a los participantes. Los datos se tomaron como parte de una evaluación en la asignatura Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, una asignatura de 6 créditos ECTS, con carácter eminentemente práctico, cuyo contenido es la Didáctica de la Matemática incluida en el currículo de educación primaria en España. Los alumnos habían realizado dos prácticas dedicadas a los temas de estadística y probabilidad, donde realizaron análisis didácticos de problemas escolares de probabilidad y de respuestas de niños de primarias a los mismos. En el año anterior al que se tomaron los datos, los alumnos habían cursado la signatura Matemáticas y su Didáctica (9 créditos ECTS), dos de los cuales se dedicaron al bloque de *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*.

**Problema 2.** *En un colegio se pregunta a los alumnos, obteniendo los siguientes resultados:*

	Chicos	Chicas	Total
<b>Le gusta el tenis</b>	400	200	600
<b>No le gusta el tenis</b>	50	50	100
<b>Total</b>	450	250	700

*Si elegimos al azar uno de estos alumnos:*

- *¿Cuál es la probabilidad de que le guste el tenis?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica y además le guste el tenis?*
- *Sabiendo que el alumno elegido es una chica, ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el tenis?*

FIGURA 2. PROBLEMA PLANTEADO EN NUESTRA INVESTIGACIÓN

Recogidos los datos, se realizó un análisis semiótico de las respuestas abiertas de los estudiantes a cada uno de los tres apartados, que incluían los diagramas en árbol y fórmulas usadas, resultado numérico, y argumentos verbales. Siguiendo a Font, Godino y D'Amore (2007), en nuestro trabajo asumimos que en las prácticas matemáticas que realizan los sujetos al resolver problemas, se presentan múltiples funciones semióticas (bien de lectura o de representación), debido a la necesidad de usar y operar con objetos matemáticos, que son inmateriales. Estos autores consideran una tipología de objetos matemáticos (expresiones verbales o simbólicas, propiedades, procedimientos, problemas, argumentos, conceptos), que intervienen en las prácticas matemáticas y cada una de las cuales puede jugar el papel de antecedente o consecuente de una función semiótica. En el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, haciendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado. En algunas ocasiones, sin embargo, los significados atribuidos por el profesor y un estudiante a una misma expresión matemática no coinciden y se produce un *conflicto semiótico*.

En el problema planteado, se clasifican 700 niños imaginarios en función de dos variables dicotómicas (le gusta o no el tenis; es chico o chica). Las cuatro celdas centrales representan frecuencias absolutas de la variable bidimensional asociada; en la tabla también aparece el total de sujetos (700) y las frecuencias absolutas marginales de cada valor de cada variable. Al tomar un sujeto al azar, estamos realizando un experimento aleatorio, compuesto de dos:  $E_1$ , con dos sucesos:  $A =$  “Le gusta el tenis” y su complementario  $\bar{A}$  y  $E_2$  con otros dos sucesos:  $B =$  “ser chica” y su complementario  $\bar{B}$ . Las probabilidades pedidas en los tres apartados del problema son la probabilidad simple  $P(A)$ , la conjunta  $P(A \cap B)$  y la probabilidad condicional  $P(A/B)$ . Puesto que los casos son todos equiprobables estas probabilidades pueden ser calculadas sin fórmulas, con una aplicación directa de la regla de Laplace como cociente de casos favorables y posibles. Todos estos objetos matemáticos coexisten en el problema y pueden ser confundidos por el alumno al interpretar las preguntas o tratar de resolverlas. Nuestro objetivo es identificar tales conflictos semióticos y compararlos con los descritos por Estrada y Díaz (2006).

## Resultados y discusión

Clasificadas las soluciones dadas por los futuros profesores a los tres apartados, obtuvimos las categorías resumidas en la Tabla 1 en la que observamos una frecuencia menor de resultados correctos en nuestra investigación, en comparación con los obtenidos por Estrada y Díaz (2006), incluso en el cálculo de probabilidad simple. Explicamos la diferencia por la mayor formación estadística de los estudiantes de Lleida, pero en todo caso, los resultados son pobres en los dos grupos y sugieren la necesidad de una mejor preparación.

Muchos estudiantes no aportaron solución, lo que indica falta de competencia en la lectura de la tabla doble, especialmente en los estudiantes de Granada (alrededor del 30% en la probabilidad simple y del 40% en la condicional). Al contrario de lo sugerido por Falk (1986) son muy pocos los sujetos (sólo 7 entre los dos grupos) que confunden la probabilidad condicional  $P(A/B)$  con  $P(B/A)$ , aunque sí aparecen 20 confusiones entre la probabilidad condicional y conjunta e incluso unos pocos casos que confunden la simple y la condicional (3) o la conjunta (4). Conflictos (16 en Granada y 2 en Lleida) se producen en sujetos que confunden probabilidad con casos posibles o favorables. En otros casos se confunde el suceso con otro (7 en Lleida y 2 en Granada) e incluso se calcula la probabilidad conjunta como producto de las probabilidades de los sucesos, suponiendo independencia en las variables (2 en Granada y 1 en Lleida), lo que implica una falta de percepción de la asociación entre ellas. Otros identifican correctamente las probabilidades pero confunden las fórmulas (8 en Granada y 1 en Lérida). Dieciocho alumnos en Granada y 2 en Lleida confunden casos favorables con posibles o dan probabilidades mayores que 1.

	<i>Pregunta planteada</i>					
	<i>P(A)</i>		<i>P(A ∩ B)</i>		<i>P(A/B)</i>	
<b>Soluciones dadas por los participantes</b>	Granada <i>n</i> = 69	Lleida <i>n</i> = 65	Granada <i>n</i> = 69	Lleida <i>n</i> = 65	Granada <i>n</i> = 69	Lleida <i>n</i> = 65
<b>Correcta</b>	23(33,3)	49(75,3)	16(23,2)	34(52)	15(21,7)	36(56)
<b>Fórmula correcta sin resultado numérico</b>	1(1,4)		1(1,4)		3(4,3)	
<b>Resultado numérico correcto sin fórmula</b>	8(11,6)		3(4,3)		2(2,9)	
<b>Confunde probabilidad simple y compuesta</b>		1(1,5)	3(4,3)			
<b>Confunde probabilidad simple y condicional</b>	1(1,4)				1(1,4)	1(1,5)
<b>Confunde probabilidad condicional y compuesta</b>			4(5,8)	12(18,5)	4(5,8)	
<b>Confunde <math>P(A/B)</math> con <math>P(B/A)</math></b>					2(2,9)	5(7,5)
<b>Confunde <math>P(A)</math> con <math>P(A/noB)</math></b>		1(1,5)				
<b>Confunde <math>P(A)</math> con <math>P(B)</math></b>		1(1,5)				

<b>Confunde <math>P(A \cap B)</math> con <math>P(A \cap B) * P(B/A)</math></b>			1(1,4)			
<b>Confunde un suceso con su contrario</b>			1(1,4)	2(3,0)	1(1,4)	3(4,5)
<b>Confunde <math>P(A \cap B)</math> con <math>P(A \cup B)</math>, asumiendo sucesos incompatibles</b>			2(2,9)			
<b>Confunde probabilidades con casos posibles</b>	6(8,7)		5 (7,2)		4(5,8)	2(3,0)
<b>Confunde probabilidades con casos favorables</b>	1(1,4)					
<b>Compara casos favorables y desfavorables</b>	1(1,4)		1(1,4)		1(1,4)	
<b>Supone independencia en los datos</b>			2(1,4)	1(1,5)		
<b>Confunde <math>P(A \cap B)</math> con <math>P(B/A) * P(B/A)</math></b>			1(1,4)			
<b>Calcula <math>P(A \cap B)</math> como cociente entre casos favorables y desfavorables</b>			1(1,4)		1(1,4)	
<b>Confunde <math>P(A \cap B)</math> con <math>P(B/\bar{A})/P(B/A)</math></b>			1(1,4)			
<b>Probabilidades mayor que la unidad</b>	1(1,4)		1(1,4)		1(1,4)	
<b>Formula incorrecta y resultado correcto</b>					2(2,8)	
<b>Resultado incorrecto sin fórmula</b>	4(5,8)		5(7,2)	1(1,5)	5(7,2)	
<b>No contesta</b>	23(33,3)	13(20,0)	21(30,4)	15(23,0)	27(39,1)	18(27,7)
<b>Total</b>	69 (100)	65(100)	69(100)	65(100)	69(100)	65(100)

TABLA 1. FRECUENCIA (Y PORCENTAJE) DE SOLUCIONES DADAS POR LOS FUTUROS PROFESORES

	Básicam. correcta	Incorrecto	No responde						
	$P(A)$	$P(A \cap B)$	$P(A/B)$	$P(A)$	$P(A \cap B)$	$P(A/B)$	$P(A)$	$P(A \cap B)$	$P(A/B)$
<b>Granada (n=69)</b>	32(46,4)	20(29,0)	20(29,0)	14(20,3)	28(40,6)	22(31,9)	23(33,3)	21(30,4)	27(39,1)
<b>Lleida (n=65)</b>	49(75,4)	34(52,3)	36(55,4)	3 (4,6)	16(24,7)	11(16,9)	13(20,0)	15(23,1)	18(27,7)
<b>Total (n=134)</b>	81(60,4)	54 (40,3)	56(41,8)	17(12,7)	44(32,8)	33(24,6)	36(26,9)	36(26,9)	45(33,6)

TABLA 2: RESUMEN DE LAS SOLUCIONES DADAS POR LOS FUTUROS PROFESORES

En la tabla 2 se resumen los resultados agrupando según responden en blanco, dan respuestas básicamente correcta (fórmula o resultado correctos o ambos correctos) o producen errores, destacando los que confunden diversos tipos de probabilidades y los que confunden  $P(A/B)$  con  $P(B/A)$ . Se observan los mejores resultados en los estudiantes que siguieron una materia optativa de estadística en Lleida y también la semejanza de dificultad en el cálculo de probabilidad condicional y compuesta, a pesar de que autores como Falk (1986) indican la mayor dificultad de la primera. Las diferencias entre Granada y Lleida fueron estadísticamente significativas en el test Chi-cuadrado ( $\chi^2 = 30,76$  con 8 g.l.;  $p = 0,002$ ).

## Conclusiones

Muchas actividades de los profesores, como seleccionar tareas para la enseñanza, detectar las dificultades de los estudiantes y proponer medios para ayudar a superarlas, requieren un conocimiento matemático sólido por parte del profesor (Ball y Mewborn, 2001). En consecuencia, la enseñanza adecuada de la probabilidad en la Educación Primaria dependerá del conocimiento probabilístico del profesor. Esto es motivo de preocupación, pues nuestros resultados sugieren que la interpretación de una tabla de contingencia y el cálculo de probabilidades no es fácil para los futuros profesores.

Aunque, como indica Falk (1986), parte de las dificultades pueden ser originadas por la antigüedad del lenguaje cotidiano utilizado en la interpretación de la probabilidad, el futuro educador debe dominar el lenguaje del azar para transmitirlo

en la enseñanza. Los numerosos conflictos semióticos y el número de estudiantes que no han podido dar una respuesta en nuestro estudio indican la necesidad de mejorar la educación estadística que los futuros profesores reciben durante su formación en las facultades de educación.

### Agradecimientos

Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER y beca FPI BES-2008-003573.

### Referencias

- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Batanero, C., Burrill, G., Reading, A y Rossman (2008) (Eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons).
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies y preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Einhom, H. J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, 99, 3-19.
- Estepa, A. (2004). Investigación en Educación Estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática* (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Universidad de Extremadura.
- Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables. An exploratory study with future teachers . In A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

- Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent*. Paris: P.U.F.
- Huerta, P. (2009). On conditional probability problem solving research – structures and contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3) 163-194.
- Huerta, P. y Lonjedo, M. A. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. En M.Bosch (ed.). *Proceedings the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4* Sant Feliu de Guíxols, Girona: ERME. ISBN: 84-611-3282-3. CDROM.
- M.E.C. (2006)). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, (BOE de 8 diciembre 2006) *Decretos de Enseñanza mínimas de la Educación primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.