DISEÑO DE UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DEPENDENCIA LINEAL

ata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to yo
pr

Aranda, C. (1), **Callejo, M. L** (2).

IES Pere Mª Orts i Bosch, Alicante (1), *Universidad de Alicante* (2)

Resumen

En esta comunicación se presenta la primera parte de una investigación cuyo objetivo fue analizar si un experimento de enseñanza diseñado ad hoc ayudó a la construcción de caracterizaciones equivalentes del concepto de dependencia lineal, en lenguaje geométrico y analítico. En primer lugar se diseñó un experimento de enseñanza en un contexto de geometría dinámica utilizando simultáneamente representaciones geométricas y analíticas del concepto y se describió una ‘trayectoria hipotética de aprendizaje’ en términos del mecanismo de ‘reflexión sobre la relación actividad-efecto’. En segundo lugar se describieron las trayectorias de aprendizaje de estudiantes de 2º de bachillerato (17-18 años) identificando las ‘acciones de generalización’ y las ‘generalizaciones de la reflexión’.

Abstract

We present the first part of a research focused on analyzing if a teaching experiment design ad hoc could help to identify equivalent characterizations of linear dependency concept, in geometric and analytic language. Firstly, we designed a teaching experiment in the context of dynamic geometry using simultaneously geometric and analytic representations of the concept. Also, we described ‘hypothetical learning trajectory’ in terms of ‘reflection on activity-effect relationship’ mechanism. Secondly, we identified ‘actions of generalization’ and ‘generalizations of reflection’ to describe secondary students’ (17-18 years old) learning trajectories.

Palabras clave. Dependencia lineal, geometría dinámica, experimento de enseñanza, proceso de generalización.

Key words. Linear dependence, dynamic geometry, teaching experiment, generalization process.

Aranda, C., Callejo, M.L. (2010). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 199-210). Lleida: SEIEM

Introducción

Las investigaciones sobre el álgebra lineal han puesto de manifiesto algunas de las dificultades de enseñanza/aprendizaje como la necesidad de articular el lenguaje geométrico de 2 y 3 dimensiones, el aritmético de R^n y el algebraico (Dorier, 1997), entre otras. Para abordar esta dificultad se sugiere el uso de las tecnologías como instrumentos de mediación semiótica para introducir conceptos y relaciones matemáticos, para presentar simultáneamente varias representaciones de un concepto y favorecer la interacción y el dinamismo (Heid y Blume, 2008) y se han elaborado propuestas centradas en diferentes conceptos del álgebra lineal articulando distintos lenguajes y utilizando software de geometría dinámica (Dreyfus, Hillel y Sierpinska, 1998; Uicab y Oktac, 2006).

Las investigaciones sobre estas propuestas muestran que "se ha hecho un considerable esfuerzo por explotar el potencial de la tecnología para ofrecer múltiples representaciones relacionadas. Algunos resultados sugieren que la relación de representaciones en la pantalla puede facilitar que se construyan las conexiones mentales" (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006, p. 255). Pero Duval (2006, p. 159) indica que "la yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto en dos registros diferentes no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados", y lo explica por la necesidad de la *doble discriminación* para convertir una u otra de estas dos representaciones: por una parte es preciso "ver diferencias entre dos representaciones que parecen globalmente semejantes y, por otra, ser capaz de distinguir en las representaciones de un registro las características del significante que son matemáticamente pertinentes, para relacionarlas con una representación en otro registro, y las características significativas de un registro que no lo son para la conversión en otro registro" (p. 160).

Uno de los primeros conceptos de estudio del álgebra lineal es el de dependencia lineal, que es importante para la construcción de otros como los de independencia lineal, sistema generador, base, espacio vectorial o transformación lineal. En relación a este concepto, las investigaciones han puesto de manifiesto que con frecuencia los estudiantes lo ven sólo en términos algorítmicos, manejan los procedimientos algorítmicos sin comprender su significado y no saben relacionar diferentes representaciones de este concepto (Andreoli, 2005; Oropeza y Lezama, 2007). Esta comunicación describe un experimento de enseñanza en un entorno tecnológico usando *escenas* del applet *Descartes*[1] (Galo y Cañas, 2007; Núñez, 2005) para la construcción del concepto de dependencia lineal en R^2, para alumnos

---

[1] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

de bachillerato (17-18 años). La función de este applet consistió en proporcionar una herramienta que permitiese representar y manipular vectores en R^2 utilizando de forma coordinada el lenguaje geométrico (puntos, vectores, sistemas de referencia, colinealidad y paralelismo de vectores) y el lenguaje analítico (representación de vectores como combinación lineal a partir de un sistema generador o por sus componentes respecto a un sistema de referencia).

Para el diseño y planificación de la instrucción se describe una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon y Tzur, 2004) que tiene como modelo el *mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) para explicar la construcción de conceptos matemáticos.

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación complementa la caracterización del mecanismo cognitivo que se centra en la relación actividad-efecto (Simon et al., 2004) con una taxonomía de los procesos de generalización (Ellis, 2007).

Mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto

A partir de la idea de *abstracción reflexiva* y la noción de *anticipación* de Piaget (1977), Simon et al. (2004) han elaborado la noción de *mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto* según la cual las estructuras cognitivas que han construido los individuos les permiten anticiparse a los efectos de sus actividades. Este mecanismo cognitivo proporciona “lentes teóricas” para analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes, y cómo se sirven de éstos para construir nuevos conceptos (Tzur, Hagevik y Watson, 2004). Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la construcción de un nuevo concepto: la *fase de participación* es el proceso por el cual el estudiante abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido; la *fase de anticipación* se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas de la que llevó a la abstracción.

Roig (2008) ha caracterizado tres momentos en la *fase de participación*: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los estudiantes construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, en el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros y, finalmente, en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada a nuevos casos particulares.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

Por otra parte, desde la caracterización del proceso de abstracción dado por el mecanismo cognitivo de la *reflexión sobre la relación actividad-efecto,* Simon y Tzur (2004) han elaborado la idea de *trayectoria hipotética de aprendizaje*. Para generarla, es necesario conocer los conceptos previos de los estudiantes y tener presente los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes, y no necesariamente en este orden, puesto que se seleccionan las tareas a partir de las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje y estas hipótesis están basadas en las tareas a realizar. Y es aquí donde, según estos autores, entra en juego la manera en la que se caracteriza el mecanismo de *reflexión sobre la relación actividad-efecto*: se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que, desde las *actividades* disponibles para los estudiantes, sean la base para el aprendizaje pretendido. Así, "el mecanismo ofrece un marco para pensar sobre cómo las tareas pueden fomentar el proceso de aprendizaje" (Simon y Tzur, 2004, p. 101). En el caso que nos ocupa, en el que complementamos la abstracción reflexiva con los procesos de reflexión para dar cuenta del aprendizaje de la idea de dependencia lineal en R^2, necesitamos caracterizar los procesos de generalización para describir la trayectoria hipotética que permitirá seleccionar las tareas.

Taxonomía de la generalización

Para el análisis de la actividad cognitiva de los estudiantes en la realización de las tareas usamos la *taxonomía de la generalización* de Ellis (2007) en un proceso de abstracción creativa compatible con la perspectiva piagetiana. Este autor distingue dos grandes categorías:

Las *acciones de generalización* (AG): *actividad* mental de los estudiantes inferida a partir de sus acciones y/o su discurso. Son de tres tipos *relacionar*, *buscar* y *extender*.

Las *generalizaciones de reflexión* (GR) (lo que produce la acción de reflexión y ha sido generalizado): declaraciones verbales o escritas de las generalizaciones de los estudiantes, o bien la constatación de que usan el resultado de una generalización previa, por ejemplo aplicando una idea anterior en un nuevo problema o contexto. Son de tres tipos: *afirmación*, *definición* y *transferencia*.

Hay una estrecha relación entre ambas categorías, pues a veces las *generalizaciones de reflexión* son expresiones verbales o aplicaciones de las acciones de reflexión; otras veces, representan un paso más allá, al formalizar una acción en un principio o regla algebraica. Por último, hay veces en que estos resultados de las *acciones de generalización* van más allá de la situación que las provocó o no están vinculados a una acción de generalización identificable.

Roig (2008) incluye en la fase de *proyección* las acciones de *relacionar* y *buscar*, y en la fase de *anticipación local* la acción de *extender* junto con *afirmación* y *definición*.

Diseño del experimento de enseñanza

El objetivo de aprendizaje del experimento de enseñanza (Gravemeijer, 2004) fue que los estudiantes *construyesen* o *consolidasen* el concepto de dependencia lineal identificando caracterizaciones equivalentes de este concepto en lenguaje analítico y geométrico.

Trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de dependencia lineal

La Figura 1 muestra el proceso hipotético de *construcción* o *consolidación* del concepto de dependencia lineal. Los óvalos representan el proceso de resolución de una tarea. Los rectángulos indican las "lentes teóricas" adoptadas para analizar el proceso: los negros, la taxonomía de Ellis (2007) y los blancos, las fases y subfases del proceso de *abstracción*; la flecha grande representa la *reflexión* anidada en la *proyección* (Tzur y Simon, 2004; Roig, 2008).

FIGURA 1. APROXIMACIÓN AL PROCESO HIPOTÉTICO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DEPENDENCIA LINEAL

Nuestra hipótesis es que hay que proporcionar a los estudiantes tareas para que realicen *acciones* experimentando con vectores particulares representados simultáneamente de forma geométrica y analítica, *relacionen*:

- la representación gráfica y analítica de 2 vectores paralelos (existe un número que multiplicado por un vector da el otro o uno es combinación lineal del otro) y no paralelos (no existe dicho número);
- idem de 3 vectores (al menos uno de ellos es combinación lineal de los otros dos);
- la dependencia lineal y la representación gráfica de 2 o 3 vectores (paralelismo de 2 vectores; un vector de dirección la diagonal de un paralelogramo cuyos lados están en la dirección de otros dos).

y *busquen* otros ejemplos para comprobar o rechazar hipótesis. Se espera que estas *acciones* estén dirigidas a inferir propiedades de tipo analítico (relativas a la dependencia lineal y combinación lineal) y geométrico (relativas a la dependencia lineal y posición relativa de 2 o más vectores) y a *relacionar* las propiedades antes citadas gracias al uso simultáneo y coordinado de los lenguajes geométrico y analítico.

Tras el proceso de *reflexión* sobre las acciones anteriores con vectores particulares en diferentes posiciones relativas pueden llegar a *extender* estas situaciones a todos los vectores de R^2 y *afirmar* propiedades (p.e. que 2 vectores en R^2 pueden ser o no linealmente dependientes; 3 o más vectores en R^2 son linealmente dependientes) y *definir* caracterizaciones equivalentes de la dependencia lineal en términos geométricos (2 vectores en R^2 son linealmente dependientes, si y sólo si, son colineales o paralelos) y analíticos (un conjunto de vectores es linealmente dependiente, si y sólo si, uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros). Estas *generalizaciones* podrían situarse en la subfase de *anticipación local* (*construcción del concepto*) o bien trascender el contexto, situándose en este caso en la *fase de anticipación* (*consolidación*).

A continuación presentamos las *escenas* del proyecto Descartes seleccionadas, las tareas diseñadas y lo que se espera de ellas.

Tarea 1: Dos vectores[2].

Esta tarea tiene como objetivo que los estudiantes puedan generar un conjunto de registros relativos a la relación entre una acción (modificar los parámetros relativos a dos vectores) y el efecto producido (el vínculo entre el paralelismo o no de dos vectores y los valores de los parámetros).

La *escena* en la que se apoya es dirigida y proporciona la definición de vectores linealmente dependientes. Se pueden mover los vectores y variar los escalares (Figura 2) para que los estudiantes experimenten, a través de la modificación de los parámetros, cómo se representa la dependencia gráficamente. La *escena* presenta

---

[2] http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Vectores3D_d3/vectores3D_07.htm
Autora: Ángela Nuñez Castaín

dos situaciones al mismo tiempo, una en que los dos vectores son linealmente dependientes (vectores paralelos) y otra en que no lo son (vectores no paralelos). A las preguntas se responde eligiendo una opción de un menú: si la respuesta es correcta aparece una ventana de confirmación y, si no lo es, aparecen mensajes de error dando orientaciones para encontrar la solución correcta. Después de responder a las preguntas de la *escena* se pedía a los estudiantes que describieran los significados que desde la experimentación guiada habían podido generar sobre la frase "si alguno de ellos es combinación lineal de los demás", contestando por escrito a las siguientes cuestiones:

¿Cuándo son linealmente dependientes dos vectores?

Exprésalo analíticamente.

Exprésalo geométricamente.

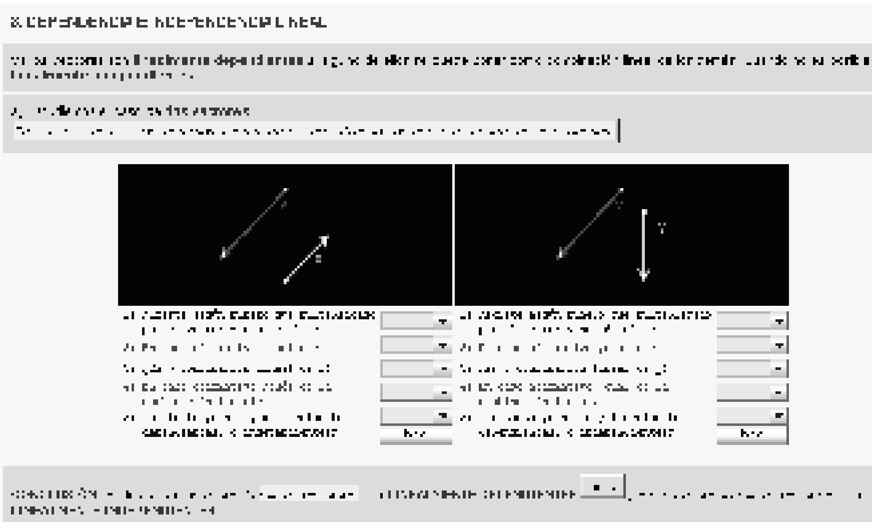

FIGURA 2. ESCENA CORRESPONDIENTE A LA TAREA 'DOS VECTORES'

Tarea 2: Tres vectores[3]

El objetivo de esta tarea es que los estudiantes asocien una combinación lineal expresada analíticamente con su representación gráfica.

[3] http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/vectores/CombiVectores.htm. Autor: José Ireno Fernández Rubio.

La *escena* en la que se apoya tiene una trama con tres vectores: **u**, **v** y **A** (Figura 3) que se pueden modificar pinchando en sus extremos (controles gráficos); el cambio se refleja en la expresión analítica y en la trama. Esta *escena* ofrece posibilidades de manipulación gráfica de los vectores y ayuda a deducir que 3 vectores no nulos en R^2 son siempre linealmente dependientes, y que por tanto uno de ellos es combinación lineal de los otros 2.

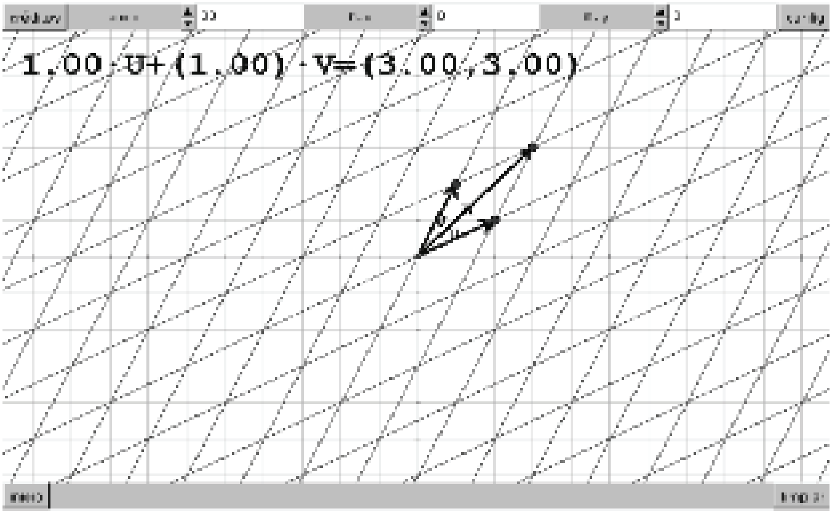

FIGURA 3. ESCENA CORRESPONDIENTE A LA TAREA 'TRES VECTORES'

Esta tarea pretende generar un conjunto diferente de registros relativos a la relación entre la actividad de modificar los parámetros y los efectos que esto produce en la representación gráfica de los vectores. Para ello, propusimos a los estudiantes las siguientes indicaciones y cuestiones:

Empezad estirando el punto situado en el extremo del vector A, modificando el vector sin cambiar la dirección pero sí el sentido. ¿Qué ocurre?

Cambiad el vector u, o el v o ambos. ¿Qué ocurre?

Modificad ahora el vector A. ¿Qué ocurre?

¿Qué significa la trama inicial dibujada?

¿Qué pasa, tanto con los vectores iniciales como cuando modificas los vectores?

El potencial de estas dos tareas se puede expresar en términos de los tipos de generalizaciones (Ellis, 2007) que se espera que realicen los estudiantes (Tabla I).

Tipos de Generalizaciones	Tarea: Dos vectores
Relacionar	Dos vectores linealmente dependientes (LD), paralelismo y combinación lineal (CL). Dos vectores no LD, no paralelismo y no CL.
Extender	A partir de los casos particulares, la relación entre vectores LD expresada analítica y geométricamente, al caso general.
Definición	Definir la dependencia lineal de 2 vectores analítica y geométricamente: si y sólo si uno de ellos se puede expresar como CL del otro; si y sólo si son colineales o paralelos.
	Tarea: Tres vectores
Relaciona	Un vector CL de otros dos y diagonal de un paralelogramo de lados las direcciones de los otros dos.
Buscar	Generar casos particulares para buscar: • Que los vectores que son CL de otros dos están en el mismo plano. • Que a partir de dos vectores linealmente independientes (LI) se puede obtener cualquier vector del plano. • Que dos vectores LD no son sistema generador.
Extender	Extender el rango de aplicabilidad de las relaciones y propiedades anteriores a todos los vectores del plano: tres vectores en el plano siempre son LD y se puede poner uno de ellos como CL de los otros.
Afirmación	Identificación de las siguientes propiedades, más allá de casos particulares: • Tres o más vectores en el plano son LD. • Con las CL de dos vectores LI se forman todos los vectores del plano.

TABLA I: TIPOS DE GENERALIZACIONES ESPERADAS EN R^2

La relación entre los lenguajes en las escenas seleccionadas y las posibles acciones sobre sus elementos se muestran en la Tabla II.

	Relación entre lenguajes		
Escenas	**Geométrico**	**Analítico**	**Acciones**
Tarea 1: Dependencia lineal de dos vectores en R^2	Representación geométrica de vectores (flechas) **x, v** e **y, v** paralelos o no paralelos. (Figura 2)	Existe (no existe) un número que multiplicado por el vector **x** o **y** da el vector **v**	Mover los vectores **x, v** e **y** cambiando su origen y conservando módulo y dirección. Multiplicar el vector **v** por un escalar para obtener **x**
Tarea 2: Dependencia lineal de tres vectores en R^2	Trama de paralelogramos en la dirección de los vectores **u** y **v**. Paralelogramo de lados los vectores **u** y **v** y diagonal el vector **A**.(Figura 3)	$t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v} = (a_1, a_2)$	Modificar los vectores **u**, **v** y **A** (módulo, dirección y sentido) pinchando en los extremos.

TABLA II: RELACIÓN ENTRE LOS LENGUAJES GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO EN LAS ESCENAS SELECCIONADAS

Pensamos que, como muestra la Tabla II, las escenas seleccionadas y las tareas diseñadas pueden ayudar a los estudiantes a realizar la *doble discriminación* (Duval, 2006) para construir caracterizaciones equivalentes del concepto de dependencia lineal, en lenguaje geométrico y analítico.

La descripción de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, objeto de la segunda parte de esta investigación, permitirá saber en qué medida este experimento de enseñanza ayuda a la construcción del concepto de dependencia lineal en el plano.

Agradecimiento

Este estudio ha sido financiado por la Universidad de Alicante (España) en el marco del proyecto “Construcción y uso de estructuras matemáticas específicas” nº GRE08-P03.

Referencias

Andreoli, D.I. (2005). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad (Tercera Fase). *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas*. UNNE. Corrientes. Consultado en febrero de 2008 en http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-004.pdf

Dorier, J.L. (Ed.) (1997). *On the teaching of linear algebra. Dordrecht* : Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1998). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Actas CERME-1*. Consultado en diciembre 2009 en: <http://www.fmd.uniosnabrueck.de/ebook/erme/cerme1proceedings/papers/g2-dreyfus-et-al.pdf>.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Ellis, A. B. (2007). A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-274). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Galo, J.R. & Cañas, J.J. (2007) Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo & M.T. González (Eds), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM* (pp.235-245) Huesca: SEIEM. .

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teaching in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105-128.

Heid, M.K. & Blume, G.W. (2008). Algebra and function development. En M. K. Heid & G. W. Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*, *1* (pp. 55-108). Charlotte N. C.: NCTM-IAP.

Núñez, A. (2005). El proyecto Descartes en el aula. Nuevas metodologías y contenidos, en I. M. Gómez Chacón (Ed.), *Usos matemáticos de Internet* (pp. 123-147). Madrid: MEC.

Oropeza, C. & Lezama, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: Una propuesta de actividades para el aula. *REIEC, 2* (1). Consultada el 28 de febrero, 2008, en <http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio2/num1/REIEC_anio2_num1_art2.pdf>.

Piaget, J. (1977). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex: Psychology Press.

Roig, A.I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Alicante, España.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Tzur, R., Hagevik, A. & Watson, M. E. (2004). Fostering mathematical meaning via scientific inquiry: a case study. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*. (pp. 345-352.). Bergen: PME.

Tzur, R. & Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.

Uicab, R. & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(3), 459-490.