PERSPECTIVAS TEÓRICAS EN EL PROCESO DE ELABORACIÓN DE CONJETURAS E IMPLICACIONES PARA LA PRÁCTICA: TIPOS Y PASOS

Cañadas, María Consuelo[1]; Deulofeu, Jordi[2]; Figueiras, Lourdes[2]; Reid, David A.[3] y Yevdokimov, Oleksiy[4]
[1] Universidad de Zaragoza, España
[2] Universitat Autònoma de Barcelona, España
[3] Acadia University, Canadá
[4] University of Southern Queensland, Australia
mconsu@unizar.es
jordi.deulofeu@uab.es
lourdes.figueiras@uab.es
david.reid@acadiau.ca
yevdokim@usq.edu.au

Resumen. En el artículo proponemos una posible clasificación de las conjeturas que surgen en un contexto de resolución de problemas de matemáticas, así como los diferentes pasos que conducen a su formulación. Elaboramos, a partir de los resultados de investigaciones diversas, un marco teórico incipiente que permite analizar el proceso de elaboración de conjeturas en un contexto de resolución de problemas y lo utilizamos para el análisis de un ejemplo concreto. A lo largo del artículo discutimos alguna de las implicaciones de la investigación para la práctica de la educación matemática.

Palabras clave. Resolución de problemas, conjeturas.

Theoretical perspectives in the process of producing conjectures and implications for practice: types and steps

Summary. We propose a possible classification of the conjectures that arise in the context of mathematical problem solving, and of the different steps taken in the process. Starting from the results of various previous investigations, we elaborate the beginnings of a theoretical framework that permits an analysis of the conjecturing process in a problem-solving context, and we use it to analyze a particular example. Moreover, we discuss some implications of this investigation for practical Mathematical Education.

Keywords. Problem solving, conjectures.

Nadie pondría hoy en duda que la resolución de problemas y la formulación de conjeturas son fundamentales para la actividad matemática. Desde que Pólya (1954) proporcionara las bases para analizar con detalle el proceso de conjeturar, atendiendo especialmente a procesos como la atención a casos particulares o la generalización, ha habido un aumento del interés específico por comprender el proceso que se sigue para la formulación de conjeturas.

La formulación de conjeturas ha sido tratada desde diferentes perspectivas. Fischbein (1987), considera las conjeturas como expresiones de intuiciones. Mason (2002) muestra la importancia de crear una *atmósfera de conjeturas* para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Recientemente, Bergqvist (2005) analiza cómo los estudiantes verifican conjeturas y cómo influyen las concepciones de sus profesores en el proceso. Algunas investigaciones han atendido la producción de conjeturas dentro de un contexto específico, por ejemplo de geometría dinámica (Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola y Robutti, 1998; Furinghetti y Paola, 2003). Estos trabajos, entre otros muchos, ponen de manifiesto que la acción de conjeturar es importante en la resolución de problemas. No todos los problemas invitan a conjeturar, y problemas diferentes conducen a distintos tipos de conjeturas.

En las investigaciones consultadas, se observa cierta carencia de la investigación de formulación de conjeturas en relación con el proceso más general de resolución de problemas, especialmente en la elaboración de marcos teóricos. Como base para la descripción de la relación entre contextos de resolución de problemas y la acción de conjeturar, nos referiremos al proceso de formulación de conjeturas desde un punto de vista teórico para después proporcionar diferentes ejemplos de su aplicación práctica con ejemplos concretos. El objetivo, pues, de este artículo es considerar factores en los problemas que permiten o inhiben la formulación de conjeturas, los tipos de conjeturas a las que conducen, e implicaciones que se derivan para la enseñanza.

A lo largo del artículo, recopilamos perspectivas y resultados de trabajos llevados a cabo de manera independiente por investigadores de Australia, Canadá, España y Ucrania, con el objetivo de dar respuesta a las preguntas siguientes:

– ¿Qué tipos de conjeturas identificamos en nuestros trabajos y cuáles son los pasos que caracterizan el proceso de conjeturar?

– ¿Qué problemas pueden llevar a qué tipo de esas conjeturas?

– ¿Cómo podemos caracterizar los rasgos del comportamiento de los individuos que se ponen en marcha al elaborar una conjetura?

Más allá de los resultados de investigación que se deriven de la respuesta justificada a tales preguntas, pretendemos promover una reflexión educativa en torno a las siguientes cuestiones:

– ¿Cómo podrían los profesores ser capaces de enseñar a los estudiantes a elaborar conjeturas?

– ¿Por qué muchos profesores prefieren no usar o no promover actividades que impliquen conjeturas en el aula?

– ¿Cuáles son los obstáculos de los estudiantes y profesores en el estudio y en la enseñanza de las conjeturas?

Proponemos estas preguntas para introducir nuestro trabajo, así como para manifestar nuestro interés explícito por proyectar los resultados de la investigación en la práctica educativa. El valor del estudio y análisis conjunto que presentamos de algunas de nuestras investigaciones está en la conexión de sus resultados para poder dar respuesta a las preguntas anteriores. Los aspectos teóricos o metodológicos específicos de cada una de las investigaciones que son relevantes para lo que aquí se expone se incluyen en el momento correspondiente y, en otro caso, se remite al lector a las publicaciones particulares.

MARCO TEÓRICO

Resolución de problemas

Uno de los enfoques desde que la resolución de problemas se constituyera como un campo de investigación para los psicólogos es la Teoría del Procesamiento de la Información, en la que se considera que la resolución de problemas tiene dos fases: *a*) la representación del problema y *b*) la solución del mismo (Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972). En este enfoque, la búsqueda de soluciones a un problema necesita de un procedimiento al que llaman *estrategias*. Dentro de éstas, los *heurísticos* son procedimientos de búsqueda de soluciones cuando no se conocen reglas para la resolución de un problema (Pólya, 1945).

El proceso de resolución de problemas es *la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea* (Puig y Cerdán, 1988, p. 21). Puig (1996) considera que la resolución del problema es todo aquello que conduce desde el planteamiento a la conclusión.

La preocupación por la enseñanza de la resolución de problemas llevó a Pólya a plantearse la identificación de fases que siguen las personas en el proceso. Diversos autores (Kilpatrick, 1985; Lester, 1980; Schoenfeld, 1992) muestran una visión de la evolución de la resolución de problemas como tema de investigación en educación matemática desde sus inicios en los años 70. En esta evolución, se destaca el aumento del interés por conocer el proceso de los estudiantes en la resolución de problemas, que va más allá del resultado obtenido en el mismo. Desde diferentes perspectivas, destacamos en España los trabajos de Carrillo (1994), Carrillo (1998), Castro (1995), Castro (2002), Castro, Morcillo y Castro (1999), Cañadas (2007), Cruz y Carrillo (2004), Espinosa (2005), Fernández (1997), Puig (1996), Socas, Hernández y Noda (1998) y Rico (1988).

Uso del término «problema»

Una situación se considera problema cuando un individuo o resolutor no conoce *a priori* algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata. El resolutor es, por tanto, un elemento fundamental para caracterizar un problema. Schoenfeld (1985, p. 74) considera que *ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona*. Siguiendo esta línea, tenemos en cuenta las dos características que considera Yevdokimov (2003) para poder decir que una tarea es un problema:

– que el resolutor no pueda resolver el problema mediante la aplicación de un algoritmo aprendido anteriormente, y

– que es posible para el resolutor encontrar una solución, basada en su conocimiento previo (AFKS, Yevdokimov, 2003). Esta característica es importante para excluir tareas imposibles de la condición de problema. Por ejemplo, encontrar el área limitada por dos parábolas que se cruzan es un problema imposible para un estudiante de seis años, porque su conocimiento previo es limitado en relación con la tarea.

Partiremos de la distinción de Yevdokimov (2005) entre problemas «abiertos» o «cerrados», considerando que un problema es cerrado cuando, dados dos tipos de propiedades, el problema consiste en demostrar que un tipo de propiedades es una consecuencia de la otra. Diremos que un problema es abierto cuando se da una de las tres situaciones siguientes: *a*) dadas las propiedades iniciales, el problema consiste en encontrar las consecuencias de ellas, *b*) dadas las propiedades finales, el problema consiste en encontrar las propiedades iniciales de las cuales son consecuencia, o *c*) sin dar ninguna propiedad, el problema consiste en encontrar las propiedades que están relacionadas. La distinción de Yevdokimov es similar a la que hace Pólya (1945) entre problemas de demostración y problemas de construcción.

El objetivo de un problema cerrado es concluir si una proposición concreta, indicada sin ninguna ambigüedad, es verdadera o falsa. Tal proposición tiene dos partes: *a*) la hipótesis, por lo general introducida por «si» y *b*) la conclusión, por lo general introducida por «entonces». Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente:

Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180 grados.

Que es equivalente a demostrar la proposición siguiente:

SI un polígono es un triángulo, ENTONCES la suma de sus ángulos interiores es 180 grados.

El propósito de los problemas abiertos es encontrar ciertos elementos que satisfagan las condiciones del problema a través de la conexión entre datos e incógnitas. El problema del ejemplo anterior podría transformarse en un problema abierto:

Si la suma de los ángulos interiores de una figura geométrica es de 180 grados, ¿se trata necesariamente de un triángulo?

O de manera más general:

¿Existe algún tipo de dependencia entre el número de los ángulos interiores de una figura geométrica y la suma total de sus ángulos interiores? ¿Deben ser consideradas otras condiciones adicionales de una figura geométrica?

Los problemas abiertos promueven el descubrimiento e invitan a los estudiantes a comenzar sin demora con el proceso de resolución. El enunciado de este tipo de problemas no sugiere su solución ni el método de resolución, de modo que se estimula la formulación de conjeturas (Arsac, Germain y Mante, 1988).

Resolución de problemas y tipos de razonamiento

La resolución de problemas es considerada en la educación matemática una actividad altamente formativa que pone de manifiesto distintos modos de razonamiento (Segovia y Rico, 2001).

Usualmente se suele distinguir entre el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo. Esta distinción proviene de la filosofía clásica, en la que pueden establecerse fronteras claras entre lo inductivo y lo deductivo.

Sin embargo, desde el punto de vista funcional, la diferenciación entre ambos tipos de razonamiento se torna más compleja (Ibañes, 2001). Esta dificultad práctica de distinguir entre los dos se atribuye a que ambos tipos de razonamiento participan de procesos cognitivos comunes (Duval, 1999; Santamaría, 1995).

El razonamiento analógico ha tenido un papel destacado en matemáticas (Pask, 2003) y en la resolución de problemas (Novick y Basokk, 2005), ya que permite comprender un dominio de conocimiento parcial o totalmente desconocido, en función de un dominio conocido o familiar (Espino, 2004; Holyoak, 2005). La relevancia de la analogía en la investigación del proceso de elaboración de conjeturas, desde la perspectiva de la educación matemática, podría ser discutida. Sin embargo, es claro que conjeturar implica analogía y que la analogía, en general, es importante en el ejercicio profesional de las matemáticas (Banach, 1932; Pólya, 1954).

Diversos autores, retomando el razonamiento abductivo sugerido por Peirce, lo han relacionado con la construcción del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas (Burton, 1994; Cifarelli, 1997; Mason, 1995). Sin embargo, tanto Mason como Anderson (1995) señalan su dificultad para promoverlo en los estudiantes. Dentro de una interpretación más general de la abducción, Pedemonte (2001) considera la abducción como un proceso natural que surge en los alumnos durante la formulación de conjeturas.

Formulación de conjeturas y construcción del conocimiento matemático

Una conjetura es una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a examen. Este examen puede tener como resultado su aceptación o su rechazo (Lakatos, 1978; Pólya, 1945). En caso de presentarse un ejemplo para el que la conjetura no sea válida, la conjetura se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta. En caso de demostrar que la conjetura es válida para todos los casos, la conjetura se considera válida.

Por tanto, es lógico que la formulación de conjeturas se considere un aspecto crucial para el avance del conocimiento matemático (García y Carretero, 1986; Pólya, 1966). Según esta concepción, la evidencia inductiva juega un papel primordial en el descubrimiento de leyes generales, por lo que se considera muy relacionada con la inducción[1] (Neubert y Binko, 1992; Pólya, 1945, 1962-1965, 1966). Vislumbrar más allá de lo que se percibe, ver alguna regularidad y plantear conjeturas es el «corazón» de la inducción, *hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 60).

METODOLOGÍA

El enfoque de nuestro trabajo es cualitativo y de carácter descriptivo. El marco metodológico no responde al diseño de una única investigación, sino que recoge los resultados de diversas investigaciones (Cañadas, 2002; Cañadas y Castro, 2007; Figueiras y Deulofeu, 2005a; 2005b; Reid, 2001; 2005 y Yevdokimov, 2003; 2005). Estos trabajos se han llevado a cabo en contextos geográficos diferentes y con unos marcos metodológicos particulares que comparten algunos elementos comunes que nos han permitido avanzar en el análisis del proceso de formulación de conjeturas en el contexto de resolución de problemas.

La recogida de información se ha realizado en momentos concretos y han participado estudiantes cuyos niveles educativos abarcan desde la Educación Secundaria Obligatoria hasta los niveles universitarios. Los diferentes problemas propuestos a los estudiantes en las diferentes investigaciones han sido resueltos en el aula. El proceso de recogida de los datos ha sido llevado a cabo mediante instrumentos distintos, en coherencia con los objetivos de investigación específicos de cada trabajo: grabación en vídeo, entrevistas y protocolos de resolución de los problemas.

Los nuevos resultados que ofrecemos en este artículo toman como punto de partida los resultados, debidamente justificados y evaluados en las referencias anteriores, así como ejemplos particulares de problemas que ilustran las categorías que se presentan. Las categorías que ofrecemos, por tanto, tienen valor como instrumento teórico para la interpretación del proceso de conjeturar y no son generalizables en un contexto o grupo de edad particular.

Por lo mencionado en este apartado, los resultados que exponemos a continuación no deben entenderse bajo la lógica de un único estudio de investigación.

RESULTADOS

Tipos de conjeturas

A partir de las investigaciones referenciadas en el apartado anterior, hemos caracterizado cinco tipos de conjeturas que, si bien son conocidos en la investigación en educación matemática, hasta ahora no habían sido comparados ni considerados sistemáticamente. Estos tipos son: *a*) la inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, *b*) la inducción empírica a partir de casos dinámicos, *c*) la analogía, *d*) la abducción y *e*) la conjetura basada en la percepción. Describimos a continuación cada uno de ellos.

Tipo 1: Inducción empírica a partir de número finito de casos discretos

La formulación de una conjetura se puede realizar a partir de la observación de un número finito de casos discretos, en los cuales se pueda detectar un patrón constante. Este tipo de conjetura aparece con frecuencia al resolver problemas que implican propiedades numéricas.

En muchas situaciones, pero no siempre, este tipo de conjetura puede ser demostrada por inducción matemática una vez identificada la regla general.

Problema 1

En un contexto de un juego matemático, un profesor de educación secundaria preguntó a sus estudiantes si podrían encontrar una relación entre los números pares mayores que 4 y las sumas de dos números primos impares. A continuación presentamos algunas de las relaciones que descubrieron los estudiantes:

$6 = 3 + 3$	$16 = 3 + 13 = 5 + 11$
$8 = 3 + 5$	$18 = 5 + 13 = 7 + 11$
$10 = 3 + 7 = 5 + 5$	$20 = 3 + 17 = 7 + 13$
$12 = 5 + 7$	....
$14 = 3 + 11 = 7 + 7$	$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$

Después de trabajar en este problema, uno de ellos exclamó: «esto podría continuar siempre. Nunca se acaba» (Smith y Henderson, 1959, p. 123).

Esto es el término utilizado por el alumno para referirse a la conjetura de Goldbach: todo número par mayor que 4 puede ser escrito como la suma de dos primos impares. El profesor ha planteado el problema como un problema abierto para impulsar la participación de los estudiantes. Ante este tipo de conjeturas, es importante apreciar las implicaciones didácticas que se derivan de un estudio crítico de casos particulares, eligiendo problemas que enfatizan la necesidad de ser cautelosos cuando se generaliza a partir de varias experiencias. Consideremos el siguiente problema:

Determinar cuántos segmentos de longitudes diferentes pueden trazarse para conectar los clavos de un geoplano cuadrado de 5 x 5.

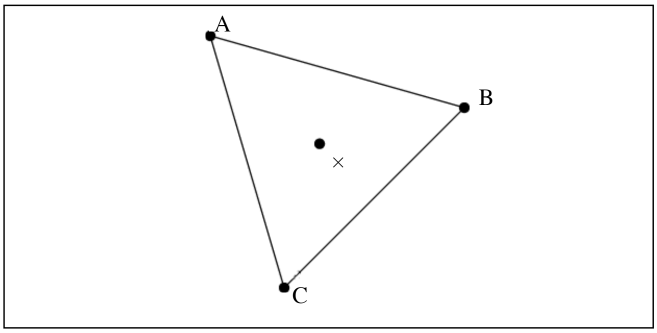
Hay alumnos que enfocan el trabajo aumentando sucesivamente el número de segmentos en geoplanos de tamaños 1×1, 2×2, 3×3, y llegan a la conclusión de que el resultado para un geoplano $n \times n$ es $2 + 3 + \ldots + n + 1$. Sin embargo, el resultado para el caso del geoplano 5×5 es 19, y no 20 (National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

Tipo 2: Inducción empírica a partir de casos dinámicos

La base para establecer una conjetura de este tipo es un número infinito de acontecimientos continuos, que son sólo un subconjunto del número infinito de acontecimientos posibles. A partir de ellos se conjetura una regla general, que describe la naturaleza de un conjunto de acontecimientos dinámicamente relacionados.

Por ejemplo, en la figura 1 se recoge una representación en la que se pide a los estudiantes que manipulen el triángulo ABC con un programa de geometría dinámica y que observen cómo varía el punto X para determinar cómo se ha construido (Knipping y Reid, en prensa). El punto X del interior del triángulo es la intersección de las medianas, pero esto no es conocido *a priori*.

Figura 1
Problema de la caja negra.



Una de las primeras conjeturas que formulan los estudiantes es que el punto X nunca puede estar fuera del triángulo.

Tipo 3: *Analogía*

Se puede establecer una conjetura por analogía sobre algún hecho particular ya conocido, o incluso conjeturar una regla general sobre la base de otra regla general ya conocida.

Problema 2
Dado un triángulo ABC y un punto P dentro del triángulo, construye las tres líneas desde cada vértice A, B, C al punto P. ¿Qué puedes decir sobre las relaciones entre las líneas y los lados del triángulo?

Uno de los razonamientos que siguen al planteamiento del problema es el siguiente:

Sé que si dos líneas cortan los lados en el punto medio, entonces la tercera línea también lo hará, porque las medianas se encuentran en un punto. Estoy seguro de que si dos líneas cortan los lados con una razón de 2:1, la tercera también lo hará (Knipping y Reid, 2005).

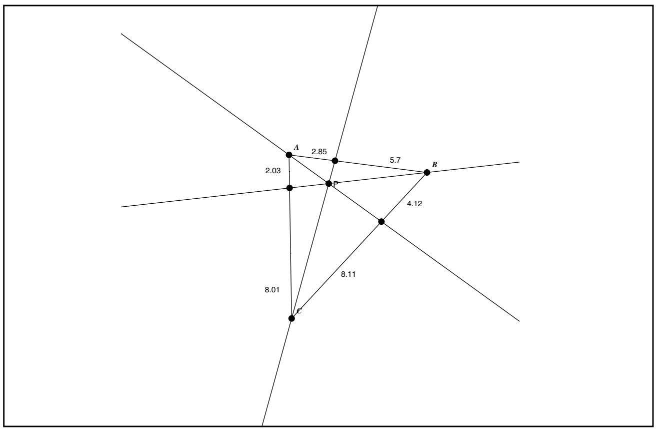
Aunque la conjetura sea falsa en este caso, este tipo de conjeturas resultan realmente productivas para la resolución del problema, ya que fomenta la utilización de estrategias comunes como son: *a*) reducir el problema a uno más simple, *b*) distinguir casos, y *c*) la observación de simetrías y otras propiedades geométricas (Knipping y Reid, 2005).

Llegado este punto, vale la pena recordar que, a menudo, en la literatura de educación matemática, las preguntas son planteadas sobre la compatibilidad o el uso apropiado de conceptos similares descritos con los mismos nombres, por un lado en el área de la educación matemática, y por otro lado en la investigación de los matemáticos. Aunque estas diferencias existan, hay también semejanzas importantes que nos conducen a incluir aquí la analogía como un tipo de conjetura relevante en el contexto de la educación matemática.

Tipo 4: Abducción

Este tipo de conjetura se establece sobre la base de un solo caso, ejemplo o acontecimiento. La conjetura surge como una regla general que permite explicar un acontecimiento inexplicable de otra manera. Éste es uno de los significados que Peirce atribuye a la abducción (Reid, 2003).

Figura 2
Razones en triángulos.



Por ejemplo, al intentar demostrar la conjetura formulada por analogía en el problema 2: «Si dos líneas cortan los lados en una razón de 2:1, la tercera también lo hará», se llega a una situación semejante a la mostrada en la figura 2. Se observa que la tercera razón en realidad es casi 1:4, lo cual representa una coincidencia sorprendente. Por tanto, se podría conjeturar que, en general, «si dos líneas cortan los lados en una razón de 2:1, entonces la tercera línea cortará el lado en una razón de 1:4». Si este resultado fuera cierto, el hecho de que haya ocurrido en este caso no resultaría sorprendente.

La regla general conjeturada puede ser una nueva (como en el ejemplo anterior) o puede ser escogida de un conjunto de reglas ya conocidas. En ambos casos, alguna verificación de la regla escogida debe realizarse para que sea considerada válida. Por ejemplo, considerando el siguiente problema, los estudiantes podrían conjeturar que la función les resulta familiar.

Problema 3
Encuentra el patrón que sigue la siguiente sucesión de números naturales y exprésala como una función: 3, 7, 13, 21…

Si los estudiantes han trabajado con progresiones aritméticas, pueden pensar en aplicar la fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$, siendo a_n el término enésimo de la sucesión y d la diferencia entre dos números consecutivos. Sin embargo, rápidamente encuentran la dificultad de decidir un valor para d (Cañadas, 2002), porque la sucesión dada es cuadrática. Una conjetura falsa de este tipo les ayuda a descubrir que hay una relación funcional entre cada término y su posición dentro de la sucesión, lo cual representa un avance para encontrar la expresión general del patrón y la comprensión misma del concepto de sucesión.

Tipo 5: Conjeturas basadas en la percepción

Una conjetura puede ser establecida a partir de una representación visual de un problema, o de una traducción perceptual de su planteamiento. La base de este tipo de conjeturas es una cuidadosa representación del contenido del problema como una imagen mental. No hay una atención inmediata a las relaciones que existen entre los elementos del problema porque el foco inicial está en la creación de una nueva representación del problema. Una vez que esta representación existe, es a menudo bastante adecuada para reproducir las relaciones entre los elementos matemáticos que aparecen. De Guzmán (1996) propone el siguiente problema que tomamos aquí como ejemplo para ilustrar cómo la experiencia perceptual puede ser un componente importante en el estímulo de la conjetura. Se trata de un problema cerrado que, sin embargo, potencia de manera evidente la utilización de procesos visuales para conjeturar.

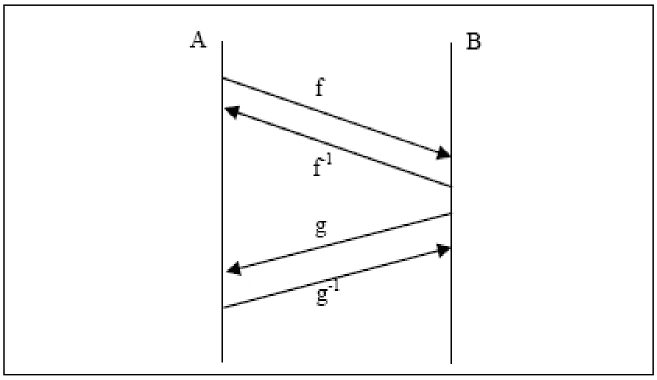
Problema 4: El problema de Schroeder-Bernstein

Sean A y B dos conjuntos. Supongamos que existe una función *f* uno a uno de A hasta B, y otra función *g* uno a uno de B hasta A. Demostrar que entonces existe una biyección *h* de A hasta B.

Podemos hacer la siguiente representación del problema: *A* y *B* son representados por dos líneas, y *f* y *g* por dos flechas descendentes (Figura 3). Las flechas crecientes representan las funciones inversas f^{1} y g^{-1}.

Figura 3

Una representación del teorema de Schroeder-Bernstein.



Ahora podemos considerar las cadenas de flechas ascendentes que representan estas funciones, y clasificarlas así:

– Clase 1: la cadena termina sobre A.

– Clase 2: la cadena termina sobre B.

– Clase 3: la cadena no tiene ningún final, porque tiene un número infinito de pasos, o sólo uno.

Esta partición también permite hacer una partición de los elementos de A en tres conjuntos disjuntos, y así tener una intuición de que la biyección *h* es: Si *x* en A está en una cadena de clase 1, entonces $h(x) = f(x)$. Si *x* está una cadena de clase 2, entonces $h(x) = g^{-1}(x)$, y si x está en una cadena de clase 3, entonces $h(x) = f(x)$. Ahora el problema es demostrar que *h* es una biyección, lo cual es cierto.

La representación hecha en este ejemplo de los conjuntos A y B, y la representación de flechas descendentes o ascendentes no es lo mismo que los conceptos matemáticos que representan, pero son suficientemente claras para construir la función *h* que soluciona el problema.

Tipos de conjeturas y pasos

Para el análisis de las conjeturas es útil dividir el proceso en diferentes pasos. Estos pasos han sido desarrollados con detalle, para las conjeturas de tipo 1, por Reid (2001), por Cañadas (2002) y Cañadas y Castro (2007). En esta sección nos referiremos a los pasos para las conjeturas de tipo 1 y sugeriremos los pasos relacionados para los otros tipos de conjeturas identificados.

Pasos en conjeturas de tipo 1

Reid (2001) considera los siguientes pasos para la inducción a partir de un número finito de casos particulares:

– Observar un patrón.

– Conjeturar (con duda) que el patrón se aplica generalmente.

– Poner a prueba la conjetura.

– Generalizar la conjetura.

Cañadas (2002) y Cañadas y Castro (2007) ofrecen siete pasos más detallados para describir este tipo de conjeturas:

– Observación de casos.

– Organización de casos.

– Búsqueda y predicción de patrones.

– Formulación de una conjetura.

– Validez de la conjetura.

– Generalización de la conjetura.

– Justificación de la generalización (demostración).

Cuando *se observan* casos particulares, el punto de partida son experiencias con casos particulares del problema planteado. Para el problema 1 presentado, el primer paso debería estar limitado a la observación de uno o dos casos: 8 = 3 + 5; 18 = 7 + 11.

La organización de casos particulares implica el empleo de algunas estrategias para sistematizar y facilitar la tarea de identificación de patrones a partir de los casos particulares. La estrategia usada de manera habitual es la organización de casos particulares mediante listas o tablas (Allen, 2001). En el problema 1, el hecho de que los estudiantes enumeren sus sumas en orden creciente corresponde a esta etapa.

La búsqueda y la predicción del patrón es similar al proceso de conjeturar (con duda) de Reid (2001). Cuando se observa una situación repetida y constante, se imagina de manera natural que el patrón podría aplicarse a los siguientes casos desconocidos. Esto es diferente a conjeturar que la regla podría aplicarse para todos los casos. En el problema 1, el patrón observado es «todos *estos* números pares pueden ser expresados como la suma de dos números primos». Una predicción sería «32 también puede ser expresado como la suma de dos números primos».

La formulación de una conjetura consiste en hacer una declaración sobre todos los posibles casos, basados en hechos empíricos, pero con algún elemento de duda. Diciendo «tal vez todos los números pares pueden ser expresados como la suma de dos números primos», se está formulando una conjetura para el ejemplo Goldbach.

Validar la conjetura, como señala Reid (2001), es poner a prueba. Esto lleva a verificar una predicción para nuevos casos particulares y/o a falsar una conjetura que no sea válida. Esto establece la validez de la conjetura para nuevos casos específicos, pero no en general. Para el problema 1, la predicción que «32 también puede ser expresado como la suma de dos números primos» puede ser comprobado buscando dos números primos (por ejemplo, 3 + 29) cuya suma es 32.

Generalización de la conjetura implica un cambio, que Duval (1990) llamaría «valor epistémico», desde una posible conjetura a una regla generalmente aceptada. Este es un cambio respecto a las creencias sobre la afirmación. Si se cree (como el estudiante en el ejemplo) que la conjetura de Goldbach es verdadera en general, entonces se ha generalizado. Si no, se queda en una conjetura basada en casos particulares.

Estudiar casos particulares adicionales no es suficiente para justificar una generalización. La justificación de la conjetura generalizada implica dar razones que explican la conjetura, quizás con la intención de convencer a otra persona de que la generalización es justificada. Si es necesario, se podría realizar una prueba matemática como la justificación que garantiza la verdad de la conjetura. Hasta ahora, nadie ha logrado justificar la conjetura de Goldbach.

Por un lado, todos estos pasos no tienen que darse con cada conjetura ni tienen que sucederse en el orden presentado (Cañadas, 2007). Por otro lado, estos pasos pueden ser aplicados, con algunas modificaciones, a otros tipos de conjeturas, como describiremos en las cuatro secciones siguientes.

Pasos en conjeturas de tipo 2

Conjeturar por inducción empírica de casos dinámicos (tipo 2) podría proceder a través de los siguientes pasos:

– Manipulación de una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos.

– Observación de una propiedad invariante en la situación.

– Formulación de una conjetura que la propiedad sostiene en otros casos.

– Validez de la conjetura.

– Generalización de la conjetura.

– Justificación de la generalización.

Se aprecia que los primeros pasos considerados son específicos para este tipo de conjeturas, pero los siguientes también estaban presentes en las conjeturas tipo 1. En el problema planteado en la figura 1, el paso de manipular una situación dinámicamente por medio de la continuidad de casos corresponde a la manipulación del triángulo ABC y a la observación del punto X. Cuando se observa que el punto X no se mueve fuera del triángulo durante estas manipulaciones, tiene lugar el segundo paso. Una vez que es establecida la conjetura de que el punto X *nunca* puede estar fuera del triángulo, tienen lugar más manipulaciones, enfocadas a validar la conjetura. En contraste con las manipulaciones más tempranas, éstas se centran en intentar mover X fuera del triángulo, y entonces podrían considerarse los casos extremos, algo que no se hacía al comienzo. Cuando se observa que el punto X sigue dentro del triángulo, incluso en estos casos extremos, la conjetura podría ser generalizada. La justificación de generalizaciones en el contexto de este tipo de problemas, en los que se trata de reencontrar un proceso que ha sido borrado, no suele ser posible. Sin embargo, lo que *oculta* el problema es la base para la conjetura, y es que *efectivamente* el punto no puede estar fuera del triángulo (porque ha sido construido como la intersección de las medianas). Este hecho convierte al problema en uno especialmente interesante desde el punto de vista didáctico. Podríamos llegar a conjeturar de manera remota que X es la intersección de las medianas, lo cual justificaría la generalización de la conjetura inicial y tal conjetura correspondería a una del tipo 4 (*abducción*), ya que la regla general es supuesta para explicar un hecho inexplicable de otra manera.

Pasos en conjeturas de tipo 3

Conjeturar por analogía (tipo 3) podría proceder a través de los siguientes pasos:

– Observación de dos casos.

– Búsqueda de semejanzas entre los casos.

– Formulación de una conjetura basada en la semejanza.

– Validación de la conjetura.

– Generalización de la conjetura.

– Justificación de la generalización.

Recordemos el ejemplo presentado:

Sé que si dos líneas cortan los lados en el punto medio, entonces la tercera línea también lo hará, porque las medianas se encuentran en un punto. Estoy seguro de que si dos líneas cortan los lados en una razón 2:1, la tercera también lo hará.

Los dos casos observados corresponden respectivamente a las medianas de un triángulo y a las líneas que cortan dos lados en una razón de 2:1. Estos casos son similares en algunos aspectos como, por ejemplo, que las líneas consideradas pasan por los vértices y por los lados opuestos del triángulo; que los lados opuestos son cortados según una razón específica; que las líneas consideradas son secantes, etc. En el caso de las medianas es conocida otra característica: que las tres se encuentran en un único punto o, dicho de otra manera, que la línea que une el tercer vértice con la intersección de las dos primeras medianas es también una mediana. Esta característica puede ser usada como la base para formular una conjetura asociada a la observación del primer caso, y es que en el caso de líneas que cortan dos lados en una razón de 2:1, la recta que pasa por el tercer vértice y la intersección de las otras dos también corta el lado opuesto en una razón de 2:1. Al igual que en los tipos anteriores, esta conjetura sería entonces validada, generalizada y justificada. Sin embargo, en este ejemplo específico no es posible porque la conjetura no es cierta. Como contrapartida, la refutación de la conjetura da lugar a una situación especialmente interesante que conduce a una conjetura de tipo 4.

Pasos en conjeturas de tipo 4

Conjeturar por abducción (tipo 4) podría proceder por medio de estos niveles:

– Observación de un caso.

– Observación de cierta característica significativa del caso.

– Formulación de una conjetura en que la característica se aplica a otros casos.

– Validez de la conjetura.

– Generalización de la conjetura.

– Justificación de la generalización.

En el ejemplo de la figura 2, se presenta el caso observado. La razón 1:4 corresponde a una característica asombrosa, y en un contexto de geometría dinámica inmediatamente podría validarse la conjetura que, en general, «si dos líneas cortan los lados en una razón de 2:1, entonces la tercera línea cortará su lado en una razón de 1:4» por arrastre de la figura. Una vez que la conjetura es validada, puede ser generalizada y los métodos tradicionales de prueba geométrica podrían ser usados para justificar la generalización.

Pasos en conjeturas de tipo 5

La percepción basada en conjeturas (tipo 5) podría proceder por medio de estos pasos:

– Traducción del problema en una representación basada en la percepción individual del problema.

– Construcción de una representación mental de los elementos matemáticos involucrados.

– Observación de las características especiales de la representación, basada en la percepción individual del problema.

– Formulación de una conjetura basada en las características especiales de la representación.

– Justificación o formalización de la traducción.

– Generalización de la conjetura.

– Justificación de la generalización.

El paso de la justificación o formalización de la traducción constituye, en este tipo de conjeturas, la validación empírica de la conjetura. Es necesario mostrar que las características especiales de la representación están de hecho directamente relacionadas con las características análogas especiales en el problema. En el problema 4, las cadenas ascendentes de flechas y su clasificación pueden ser imaginadas e ilustradas según el diagrama. Sin embargo, es necesario un esfuerzo adicional para mostrar que estas características de la representación también existen en la situación matemática de los dos conjuntos. Una vez que está justificada la traducción de la representación, la conjetura puede ser generalizada dentro del contexto del problema original.

Contextos y sistemas de representación

En el trabajo llevado a cabo sobre los diferentes tipos de conjeturas y los pasos, hemos identificado la importancia y las implicaciones que puede llevar el considerar diferentes contextos para un mismo problema. Varios problemas que son idénticos en su estructura matemática pueden ser planteados en contextos muy diferentes:

Problema 5a: El problema del apretón de manos
n personas se reúnen en una celebración y cada uno estrecha la mano a todos los demás. ¿Cuántos apretones de manos se dieron en la celebración?

Por lo general, este problema es más fácil para los estudiantes si es planteado en los siguientes términos.

Problema 5b: El problema de diagonales
Dado un polígono con *n* vértices, ¿cuántas diagonales (líneas que unen dos vértices) pueden dibujarse?

El problema 5a en la mayoría de las ocasiones es traducido a un lenguaje aritmético o algebraico, de manera que pueda abordarse matemáticamente. El problema 5b ya está expresado en un lenguaje matemático, por lo que no es necesaria ninguna traducción y sugiere un método implícito de solución. Estas dos formas de presentar el problema pueden conducir a conjeturas diferentes: la forma aritmético/algebraica da lugar a una conjetura tipo 1, mientras que la forma geométrica da lugar a una conjetura tipo 5 (Cañadas, 2002).

Consideremos otro ejemplo de problema cuyo contexto puede dar lugar a dos tipos de conjeturas diferentes:

Problema 6

Algunos problemas naturales pueden ser expresados como la suma de dos o más números consecutivos. Por ejemplo 7 = 3 + 4; 10 = 1 + 2 + 3 + 4; 12 = 3 + 4 + 5, etc. ¿Qué números pueden ser expresados de este modo?

A los estudiantes que intentan encontrar una regla general pensando en casos particulares por lo general les resulta difícil hacer una buena conjetura. Muchos sugieren «todos los números impares» o «todos los múltiplos de tres» (Cañadas, 2002).

Si el problema es traducido en una representación visual, sin embargo, se hace posible ver la suma de dos o más números consecutivos como «número en escalera», que puede ser descompuesto en dos partes: un número triangular sobre la cima de un número rectangular. Esto conduce a una regla como $(n^2 + n \div 2) + kn$. Esto les da a los estudiantes una aproximación sobre la construcción de tales números, aunque no son capaces de saber si un número dado es susceptible de ser expresado de esa forma.

Problemas y conjeturas: implicaciones en el ámbito educativo

Un problema puede dar lugar a conjeturas diversas, no todas del mismo tipo. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

Problema 7. El problema de Heron

Sea *s* una línea y A y B dos puntos en el mismo plano que *s*. ¿Para qué punto P en *s*, AP + PB es el camino más corto para unir A y B?

Las posibles conjeturas serían:

– Conjetura 1: Sea C el punto simétrico a A con respecto a la línea *s*, de manera que el segmento AC sea perpendicular a *s*. La línea que une B y C intersecta *s* en P, el cual es el punto que buscamos (Figura 4, de Figueras y Deulofeu, 2005).

– Conjetura 2: P es la intersección entre *s* la mediatriz de AB (Figura 5).

– Conjetura 3: P es la intersección entre *s* y su perpendicular que pasa por el punto medio de AB (Figura 6).

– Conjetura 4: *r* es perpendicular a BD por A; O representa la intersección entre *r* y BE; y P es la intersección entre *s* y su perpendicular por O (Figura7).

– Conjetura 5: O es la intersección entre AD y BE. P es la intersección entre *s* y su perpendicular por O (Figura 8).

– Conjetura 6: P es el punto encontrado empíricamente al mover el punto a lo largo del segmento DE hasta que la distancia medida sea mínima.

La primera conjetura parece no encajar con ninguno de los tipos propuestos en este artículo. Sugerimos la necesidad de realizar un análisis del estilo al señalado por Figueiras y Deulofeu (2005). Las conjeturas 2 a 5 están relacionadas (como serán analizadas debajo) e implicarán abducciones. La conjetura 6 es de tipo 2.

Figura 4

Conjetura 1.

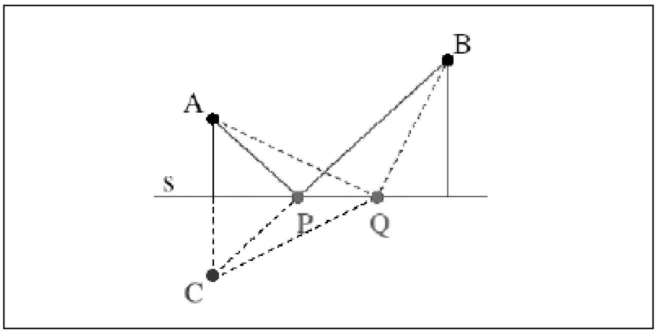


Figura 5

Conjetura 2.

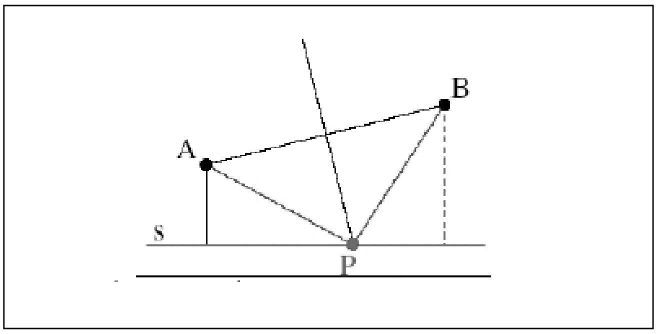


Figura 5a

Contraejemplo para conjetura 2.

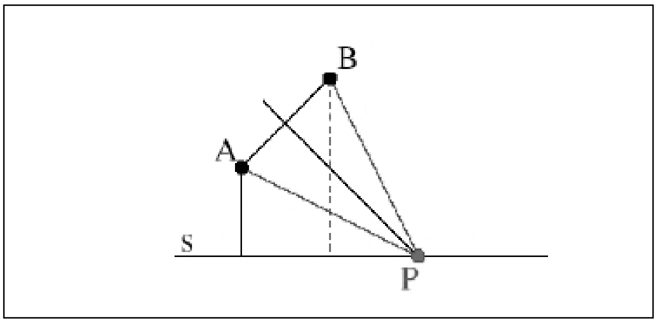


Figura 6
Conjetura 3.

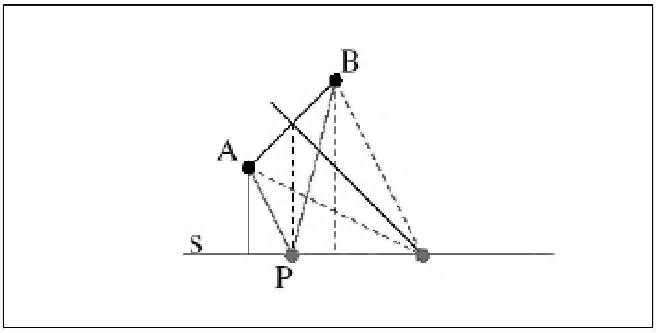


Figura 6a
Contraejemplo para conjetura 3.

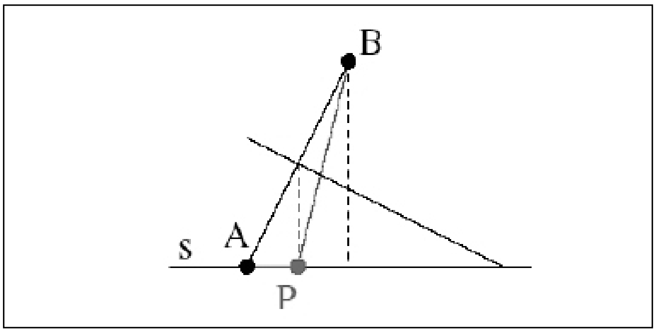


Figura 7
Contraejemplo 4.

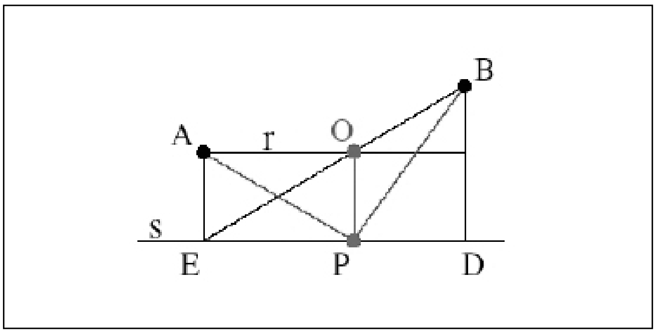


Figura 7a
Contraejemplo para conjetura 4.

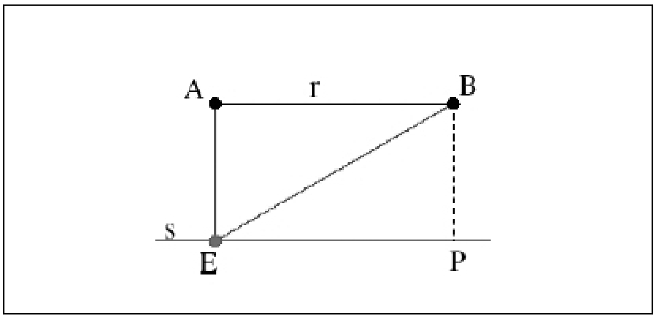
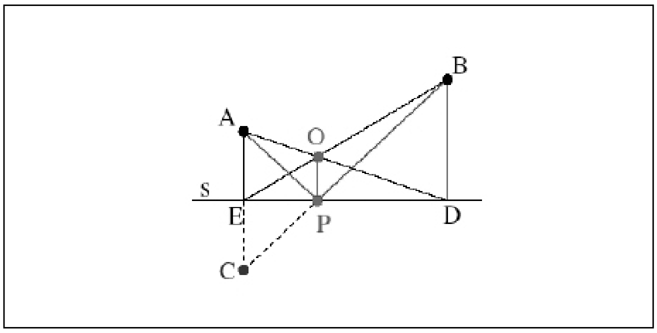


Figura 8
Conjetura 5.



La tarea es encontrar la distancia más corta entre los puntos A y B pasando por la recta *s*. ¿Cuál es el Fondo Activo de Conocimiento del Estudiante (AFKS) en esta área de las matemáticas? AFKS incluye la comprensión, por parte del estudiante, de las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos de esta área, y las habilidades para usar este conocimiento. En otras palabras, ¿qué saben los estudiantes de distancias?

A partir de sus conjeturas, observamos que ellos saben que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta y que la mediatriz es el lugar de equidistancia entre dos puntos. Los estudiantes que formularon la conjetura 1 tuvieron la idea de aplicar su conocimiento de que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Hacer eso no es trivial, ya que debe entrar en juego otro conocimiento relacionado con la conservación de distancia bajo la reflexión.

Para las conjeturas 2 a 5, las propiedades especiales de cada diagrama influyen en el proceso de conjeturar y se busca una solución observando directamente el diagrama específico.

Consideremos el diagrama mostrado en la figura 4a. En este caso especial la posición de P está en el centro, algo que se sugirió en la conjetura 2: P es la intersección entre *s* y la mediatriz de AB (Figura 5). Es posible que los estudiantes que establecieron la conjetura 2 usaran su conocimiento de que la mediatriz corresponde al lugar de equidistancia entre dos puntos. Pero no es evidente que este conocimiento particular fuera activo para estos estudiantes y quizás la explicación sea que habían solucionado recientemente otro problema en el cual era importante. Por otra parte, es razonable hacer uso de este conocimiento.

Los estudiantes consideran una estrategia en que se consideran los dos tramos AP y PB. Al no saber cómo reducir al mínimo la distancia total, ellos podrían haber considerado el problema más fácil de reducir al mínimo la parte más larga. Si la distancia total fuera fija, entonces el tramo más largo es mínimo cuando los dos tramos son iguales, lo que ocurre al trazar por P la mediatriz de AB (Figura 5). Desafortunadamente, la distancia total no es fija (ya que se está intentando minimizar), así que el razonamiento es refutado y puede encontrarse un contraejemplo cuando la distancia horizontal entre A y B es pequeña en comparación con la distancia vertical entre ellas (Figura 6). Las conjeturas 2 y 3 ilustran una confusión interesante al desarrollar la solución de estos problemas: que las distancias iguales a menudo son confundidas con las distancias más cortas.

La figura 6 se puede relacionar con la conjetura 3. El problema que esto revela es que el punto P debería quedarse sobre el segmento ED, que es la proyección de AB en *s*. Esta imposición, combinada con la consideración anterior de intentar igualar las distancias, sugiere que el punto medio de ED, o bien la proyección del punto medio de AB en *s*, es el punto P. Esta nueva construcción también es adecuada para explicar el caso especial mostrado en la figura 5a, ya conocido. Sin embargo, si A está sobre *s*, se genera un nuevo contraejemplo (Figura 6a). Este diagrama muestra claramente la solución correcta en otro caso específico: «Cuando A está sobre *s* entonces el camino más corto es el segmento AB». Todos estos cambios para sugerir una definición para el punto *P* conducen a que pueda ser visto como una transformación continua desde esta situación inicial y sugiere el siguiente razonamiento: «Cuando A se mueve, P debe moverse a la derecha. El segmento EB proporciona un mecanismo para producir este movimiento: A es proyectado horizontalmente en EB al punto O, y luego O es proyectado verticalmente en *s* al punto P» (Figura 7). Pero, de nuevo, no es difícil encontrar un contraejemplo (Figura 7a), porque esta construcción no funciona en el caso especial original, cuando EA = DB.

La combinación de los dos casos especiales (y la imagen especular de la segunda) produce el diagrama mostrado en la figura 8a, que inmediatamente sugiere la conjetura 5: O es la intersección entre el AD y BE. P es la intersección entre *s* y su perpendicular por O (Figura 8). Así, por medio de una secuencia de conjeturas, cada una basada en un solo caso especial (excepto el último, que está basado en dos casos especiales), se llega a una conjetura correcta. En este caso, la elaboración de la conjetura no produce una prueba inmediata, pero tampoco ninguna se separa completamente del proceso de demostración (como en la conjetura 6) y proporciona pistas para el proceso de prueba.

REFLEXIONES FINALES

Los documentos curriculares, en diversos países, promueven una aproximación a las matemáticas a través de preguntas en las cuales los estudiantes formulan conjeturas, resuelven problemas y justifican sus conclusiones. Sin embargo, tal acercamiento plantea a los profesores muchos desafíos, entre los cuales se encuentra la necesidad de seleccionar problemas que puedan, probablemente, dar lugar a las conjeturas, para luego conducir a los estudiantes a justificaciones matemáticas apropiadas. Este proceso de selección no puede ser dejado al ensayo y error. No hay una estructura sistemática para analizar problemas con sus potenciales conjeturas y describir las conjeturas de los estudiantes en términos de su progreso hacia las justificaciones matemáticas. De esta manera, en este artículo hemos intentado comenzar a llenar este espacio en el marco teórico de la investigación que tiene como objetivo el análisis del proceso de elaborar conjeturas, así como su relación con la enseñanza.

El valor de las aportaciones de este artículo ha de contemplarse desde los resultados obtenidos en investigaciones independientes llevadas a cabo por un equipo internacional de investigadores con un objetivo común, que es el análisis del proceso de conjetura en un contexto de resolución de problemas. El hecho de poner en común para su análisis conjunto tales investigaciones ha permitido resaltar, entre otros aspectos, la conexión entre los problemas que se proponen y el tipo de conjeturas que se enfatizan. De manera independiente, estas investigaciones resaltan aspectos concretos del proceso de conjeturar. El análisis y la reflexión sobre los resultados, de manera conjunta, hace emerger la categorización que ofrecemos en este artículo. En ningún caso se pretende una relación exhaustiva de categorías. El valor fundamental del análisis conjunto es la detección de diferentes tipos de conjeturas, así como la secuencia sistemática para cada una de ellas de los pasos que las caracterizan.

NOTA

1. Hacemos referencia a la «inducción» en el sentido que considera Pólya (1966), como proceso que permite llegar a la generalización a partir del trabajo con casos particulares, equivalente a lo que algunos autores llaman «razonamiento inductivo» (Cañadas, 2007). Destacamos la diferencia entre esta inducción y la «inducción matemática» o «inducción completa», donde el razonamiento deductivo es el predominante.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, L.G. (2001). Teaching mathematical induction: An alternative approach. *Mathematics Teacher,* 94, pp. 500-504.

ANDERSON, M. (1995). *Abduction*. Trabajo presentado en el Mathematics Education Colloquium Series en la University of North Carolina. Charlotte, North Carolina.

ARSAC, G., GERMAIN, G. y MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Villeurbanne: IREM.

ARZARELLO, F., GALLINO, G., MICHELETTI, C., OLIVERO, F., PAOLA, D. y ROBUTTI, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, en Olivier, A. y Newstead, K. (eds.). *Proceedings of the Twenty-second Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 32-39. Stellenbosch, South Africa.

BANACH, S. (1932). *Theorie des opérations lineaires*. Warsaw. Citado en Morrison (2001).

BERGQVIST, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 8, pp. 171-191.

BURTON, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15(1), pp. 35-49.

CAÑADAS, M.C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.

CAÑADAS, M.C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

CAÑADAS, M.C. y CASTRO, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA,* 1(2), pp. 67-78. (Versión disponible en <www.pna.es>).

CARRILLO, J. (1994). Resolución de problemas: clave del desarrollo profesional. *Epsilon*, 30, pp. 27-38.

CARRILLO, J. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon*, 40, pp. 15-26.

CASTRO, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

CASTRO, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática, en Cardeñoso, J.M., Castro, E., Moreno, A.J. y Peñas, M. (eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas,* pp. 13-30. Granada: SAEM THALES y Dpto. Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

CASTRO, E., MORCILLO, N. y CASTRO, E. (1999). Representations produced by secondary education pupils in mathematical problem solving, en Hitt, F. y Santos, M. (eds.). *Actas del XXI Annual Meeting North American Chapter of the International Group of the PME*, 2, pp. 547-558. México: Centro de Investigación de Estudios Avanzados – IPN.

CIFARELLI, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

CRUZ, J. y CARRILLO, J. (2004). ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años, en Castro, E. y de la Torre, E. (eds.). *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 195-205. A Coruña: Universidad de A Coruña.

DE GUZMÁN, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

DUVAL, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 3, pp. 195-221.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. México DC: Universidad del Valle.

ESPINO, O.G. (2004). *Pensamiento y razonamiento*. Madrid: Pirámide.

ESPINOSA, M.E. (2005). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada

FERNÁNDEZ, F. (1997). *Evaluación en competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

FIGUEIRAS, L. y DEULOFEU, J. (2005a). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias,* 23(2), pp. 217-226.

FIGUEIRAS, L. y DEULOFEU, J. (2005b). Visualising and conjecturing solutions for Heron's problem, en Bosch, M. (ed.). *Proceedings of the CERME 4 International Conference*, pp. 420-427. Fundemi: Sant Feliu de Guíxols. Disponible en <http://ermeweb.free.fr/CERME4/>.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

FURINGHETTI, F. y PAOLA, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study, en Pateman, N.A., Doherty, B.J. y Zilliox, J. (eds.). *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, pp. 397-404. Honolulu, USA.

GARCÍA, J. A. y CARRETERO, M. (1986). Estrategias en el razonamiento humano: tareas lógicas y probabilísticas, en Peralta, H. (coord.). *Psicología cognitiva y ciencia cognitiva*, pp. 171-204. Madrid: UNED.

GOLDIN, G. A. y SHTEINGOLD, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts, en Cuoco, A. y Curcio, F.R. (eds.). *The Roles of Representation in School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics 2001 Yearbook*, pp. 1-23. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

HOLYOAK, K.J. (2005). Analogy, en Holyoak, K.J. y Morrison, R.G. (eds.). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*, pp. 117-142. Cambridge: Cambridge University Press.

IBAÑES, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerat*o. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

KILPATRICK, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving, en Silver, E.A. (ed.). *Teaching and learn-*

ing mathematical problem solving, pp. 1-16. Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

KNIPPING, C. y REID, D. (en prensa). Scaffolding investigations with black boxes.

LAKATOS, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*, 2. Cambridge: University Press. (Traducción al castellano: D. Ribes, 1981, Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.)

LESTER, F.K. (1980). Research on mathematical problem solving, en Shumway, R.J. (ed.). *Research in mathematics education*, pp. 286-323. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MASON, J. (1995). *Abduction at the heart of mathematical being*. Trabajo presentado en honor de David Tall en el Centre for Mathematics Education of the Open University, Milton Keynes.

MASON, J. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers, en Haggerty, L. (ed.). *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice,* pp. 105-120. Londres: RoutledgeFalmer.

MAYER, R.E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

MORRISON, T.J. (2001). *Functional analysis: an introduction to Banach space theory*. Nueva York: J. Wiley.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Autor y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NEUBERT, G.A. y BINKO, J.B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, DC: National Education Association.

NEWELL, A. y SIMON, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

NOVICK, L.R. y BASOKK, M. (2005). Problem solving, en Holyoak, K.J. y Morrison, R.G. (eds.). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*, pp. 321-350. Cambridge: Cambridge University Press.

PASK, C. (2003). Mathematics and the science of analogies. *American Journal of Physics,* 71, pp. 526-534.

PEDEMONTE, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics, en Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, pp. 33-40. Utrecht: Utrecht University.

PÓLYA, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton NJ: Princeton University Press.

PÓLYA, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton NJ: Princeton University Press.

PÓLYA, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. Nueva York: John Wiley and Sons.

PÓLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

POPPER, K. (1967). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Tesis doctoral. Granada: Comares.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

REID, D.A. (2001). Conjectures and refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(1), pp. 5-29.

REID, D.A. (2003). Forms and uses of abduction. *Proceedings of the CERME 3 international conference* <http://wwwdidactique.imag.fr/preuve/CERME%203%20papers/TG4-Reid.pdf>.

REID, D.A. (2005). The meaning of proof in mathemamtics education, en Bosch, M. (ed.). *Proceedings of the CERME 4 International Conference,* pp. 458-468. Fundemi: Sant Feliu de Guíxols. Disponible en <http://ermeweb.free.fr/CERME4/>.

RICO, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

SANTAMARÍA, C. (1995). Un análisis del razonamiento, en Carretero, M., Almaraz, J. y Fernández, P. (eds.). *Razonamiento y comprensión*, pp. 13-45. Madrid: Trotta.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academia Press.

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, en Grouws, D.A. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334-371. Nueva York: MacMillan.

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores, en Castro, E. (ed.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*, pp. 83-104. Madrid: Síntesis.

SMITH, E.P. y HENDERSON, K.B. (1959). Proof, en Fawcett, H., Hach, A., Junge, C., Syer, H., van Engen, H. y Jones, P. (eds.). *The growth of mathematical ideas K-12*. *Twenty-fourth yearbook*, pp.111-181. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

SOCAS, M.M., HERNÁNDEZ, J. y NODA, A. (1998). Clasificación de los problemas aritméticos de estructura verbal aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas, en Rico, L. y Sierra, M. (eds.). *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 51-67. Salamanca: Universidad de Salamanca.

YEVDOKIMOV, O. (2003). Intuitive proofs as a tool for development of student's creative abilities while solving and proving. Short Oral presentation, en Pateman, N.A., Doherty, B.J. y Zilliox, J. (eds.). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, p. 264. Honolulu, USA: PME.

YEVDOKIMOV, O. (2005). About a constructivist approach for stimulating students' thinking to produce conjectures and their proving in active learning of geometry, en Bosch, M. (ed.). *Proceedings of the CERME 4 International Conference,* pp. 469-480. Fundemi: Sant Feliu de Guíxols. Disponible en <http://ermeweb.free.fr/CERME4/>.

[Artículo recibido en octubre de 2007 y aceptado en mayo de 2008]

Theoretical perspectives in the process of producing conjectures and implications for practice: types and steps

Cañadas, María Consuelo[1]; **Deulofeu, Jordi**[2]; **Figueiras, Lourdes**[2]; **Reid, David A.**[3] y **Yevdokimov, Oleksiy**[4]
[1] Universidad de Zaragoza, España
[2] Universitat Autònoma de Barcelona, España
[3] Acadia University, Canada
[4] University of Southern Queensland, Australia
mconsu@unizar.es
jordi.deulofeu@uab.es
lourdes.figueiras@uab.es
david.reid@acadiau.ca
yevdokim@usq.edu.au

Abstract

Educational standards in many parts of the world promote inquiry approaches in which students solve problems, make conjectures and justify their conclusions. However, such an approach presents teachers with many challenges. Among these is the need to select problems that can are likely to give rise to conjecturing, and then to guide students' conjecturing in ways that lead to mathematical justifications. This selection process cannot be left to trial and error, and yet there is no generally recognised systematic structure in which to analyze problems for their conjecturing potential and to describe students' conjecturing in terms of its progress towards mathematical justifications. In this article we have attempt to begin filling this gap in the theoretical background of research and teaching focused on conjecturing. To do that, we analyze different types and stages of the conjecturing process. Results from a number of research studies are used to identify and investigate a number of questions related to the theoretical background of conjecturing as well as practical implications in the learning process. Finally, a classification of conjectures is discussed and a variety of problems that could lead to conjectures are considered from the didactical point of view.