# SOBRE LA EQUIVALENCIA ENTRE SUCESIONES CON LÍMITE FINITO Y SUCESIONES DE CAUCHY

Francisco Javier Claros Mellado, María Teresa Sánchez Compaña, Moisés Coriat Benarroch

Universidad de Granada

*RESUMEN*

*Estudiamos, desde perspectivas simbólica y fenomenológica, diferencias y analogías existentes entre dos definiciones: la de límite finito de una sucesión y la de sucesión de Cauchy. Las diferencias entre una y otra definición parecen acentuarse en el aspecto fenomenológico, ya que observamos fenómenos distintos en cada una de ellas.*

*ABSTRACT*

*We study, from symbolic and phenomenological points of view, those definitions for (1) the limit of a finite set, and (2) a Cauchy set. The differences between both definitions seem to become more noticeable from the phenomenological perspective, as we observe different phenomena in either one or another.*

Claros Mellado, F.J., Sánchez Compaña, M.T., Coriat Benarroch, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 197-209). Santander: SEIEM.

## INTRODUCCIÓN

El concepto de límite es uno de los términos más investigados en el campo de la didáctica de las matemáticas.

Se tiene constancia de varios intentos de clasificar los trabajos relativos al concepto de límite (Blázquez (2000) ó Williams (2001)). Éste estudió la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite y clasificó las investigaciones relativas al concepto de límite en tres grandes áreas: (1) Investigaciones que hacen uso de las nociones *concept image* y *concept definition,* propuestas por Tall y Vinner (1981), y analizan las relaciones entre una definición informal y una definición formal. (2) Investigaciones que se centran en los obstáculos de aprendizaje (dificultades de aprendizaje), tengan éstos su origen en los alumnos, el contexto social, la instrucción o en del propio concepto; en esta línea se sitúan también los trabajos de Cornu (1991) y de Brousseau (1983); Brousseau, en particular, usó el término obstáculo epistemológico para referirse a las dificultades que surgen debido a la propia naturaleza del concepto. (3) Trabajos, principalmente debidos a Dubinsky (1991) y Cottril y otros (1996), que se apoyan en un esquema (una colección más o menos coherente de objetos y procesos), donde los objetos son comprendidos básicamente como objetos mentales y físicos y los procesos como acciones mentales realizadas sobre los objetos.

Por su parte, Blázquez (2000) estableció los siguientes campos de interés: (1) *Investigaciones sobre concepciones del concepto de límite*. Se trata de trabajos que tratan de estudiar las concepciones que tienen los alumnos en torno al límite funcional. El término *concepción* se toma en el sentido señalado por Vinner y Tall(1981) en su teoría de la imagen conceptual. *(2) Investigaciones sobre errores y dificultades del concepto de límite*. En este apartado sitúa investigaciones que se centran en el análisis de errores (causas y clasificaciones, métodos de análisis), su tratamiento curricular o la formación de los profesores en cuanto a observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los alumnos. *(3) Investigaciones sobre el concepto de límite en los manuales.* En este tipo de trabajo sitúa la investigaciones que han estudiado cómo se ha presentado el concepto de límite en los manuales de texto (tipos de definiciones de límites o uso de ejemplos, entre otras posibilidades). *(4) Investigaciones sobre la enseñanza del concepto de límite.* En este apartado trata los trabajos que se han centrado en la detección de errores y obstáculos en torno al límite y en el posterior desarrollo de una secuencia didáctica que mejore su comprensión por parte de los alumnos.

Aunque Blázquez (2000) aborda el concepto de límite finito de una función en un punto, en su tesis recoge investigaciones relativas al concepto de límite de una sucesión e incluso considera como hipótesis de trabajo la idea de que el enfoque en términos de tendencias, con sucesiones, ayuda a mejorar la comprensión del límite funcional. Por ello Blázquez y Ortega (2000) y Blázquez y Ortega (2002) proponen una nueva definición de límite finito de una función en un punto, en términos de tendencias. La definición que proponen es la siguiente:

*Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a" y se escribe lim x→a f(x)=L, si cuando "x" se acerca al número "a", sus imágenes f(x) se acercan a "L", más que cualquier otro número. (pag.4)*

Estos autores señalan que en la investigación que han llevado a cabo se ha constatado que esta definición, menos formal pero no menos precisa, ha resultado ser en la práctica más ventajosa respecto a las utilizadas hasta el momento en los procesos de enseñanza-aprendizaje con alumnos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales y abre un camino a un nuevo tratamiento de los tópicos de análisis.

Muchas investigaciones se ocupan del estudio del límite en general (sucesión y función) a pesar de que señalen la existencia de diferencias entre los distintos tipos de límite. Esto lo observamos, por ejemplo, en el estudio de los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite realizado por Sierpinska (1985, 1987 y 1990), que incluye secuencias didácticas destinadas a superar estos obstáculos. En esta extensa investigación no se estudian de manera particular los diferentes tipos de límites.

Nuestro trabajo sobre el concepto de límite se inició en el año 2000. Durante este tiempo hemos dedicado una especial atención al estudio de dos tipos de límite: el límite finito de una sucesión monótona creciente o decreciente y el límite finito de una función en un punto. La restricción que llevó a estudiar estos dos tipos, prefiriéndolos frente a otros (como el concepto de límite infinito de una sucesión o el límite finito de una función en el infinito), se hizo porque son los tipos de límite más trabajados en Secundaria y sobre todo por la enorme "diferencia" que observamos entre ellos; así, en Claros, Sánchez y Coriat (2006) y Sánchez, Claros y Coriat (2007) se observaron diferencias simbólicas y se establecieron diferencias fenomenológicas que consideramos determinantes. El estudio, desde un punto de vista fenomenológico, de las definiciones correspondientes a estos dos tipos de límites, permitió poner de manifiesto lo siguiente:

(1º) La definición de límite finito de una sucesión organiza al menos dos fenómenos: la aproximación simple intuitiva (abreviado a.s.i) y la retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (abreviado i.v.s).

(2º) La definición de límite finito de una función en un punto organiza también dos fenómenos: la aproximación doble intuitiva (abreviado a.d.i) y la retroalimentación o ida y vuelta en funciones (abreviado i.v.f).

Estos dos pares de fenómenos explican, por sí solos, las diferencias que establecimos en su momento entre ambas definiciones. Véase el Anexo.

En los últimos dos años venimos preguntándonos si la definición de límite organiza otros fenómenos, además de los descritos. En concreto la definición de límite finito de una sucesión debe ser capaz de organizar la aproximación relativa creciente que se observa entre los términos de una sucesión de Cauchy. Como toda sucesión de Cauchy es matemáticamente equivalente a una sucesión con límite finito, nos hemos preguntado si hay una manera de organizar los respectivos fenómenos usando una sola de las definiciones matemáticas implicadas. Por ello, nuestro interés se ha centrado en el análisis simbólico y fenomenológico de la definición de sucesión de Cauchy, para establecer analogías y diferencias entre ésta y la definición de límite finito de una sucesión.

En este trabajo analizamos las dos definiciones indicadas desde un punto de vista simbólico y desde un punto de vista fenomenológico. El punto de vista simbólico se centra, sobre todo, en la acotación, los procesos infinitos y los tipos de infinitos, mientras que, desde la otra perspectiva, caracterizamos nuevos fenómenos que observamos en la definición de sucesión de Cauchy y exhibimos modelos en los que la observación de tales fenómenos es cómoda.

Dedicamos también dos apartados a estudiar las analogías y diferencias entre los fenómenos observados en la definición de sucesión de Cauchy y los fenómenos observados en la definición de límite finito de una sucesión. Concluimos anotando la necesidad de abordar cada tipo de límite de manera diferenciada.

## DEFINICIONES SELECCIONADAS

Las definiciones que hemos seleccionado para realizar el estudio comparativo son:

Definición de límite finito de una sucesión. (Spivak, 1991, p. 615.)

> *Una sucesión $\{a_n\}$ converge hacia l (en símbolos $\lim_{n\to\infty} a_n=l$) si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n> N entonces $|a_n - l|<\varepsilon$.*

Definición de sucesión de Cauchy. (Spivak, 1991, p. 624.)

> *Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces $|a_n-a_m|<\varepsilon$.*
>
> *(Esta condición se escribe generalmente lim m,n→∞ $|a_n-a_m|=0$)*

Las dos definiciones son matemáticamente equivalentes. Esto se demuestra con ayuda del teorema de Bolzano–Weirestrasss, que afirma que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente (Véase Spivak, 1991, página 623 y 624).

En lo sucesivo, nos referimos a la definición de límite finito de una sucesión con la abreviatura Def-L, y a la definición de sucesión de Cauchy con la abreviatura Def-C.

Ambas definiciones tienen un aspecto formal. Su elección está argumentada de la siguiente manera; Def-L, o "definición epsilon-N", que fue tomada de Spivak (1991), fue la definición más aceptada, entre ocho definiciones de límite finito de una sucesión que se presentaron en un cuestionario que se administró a siete profesores de la universidad de Málaga en el año 2000. Estos profesores desarrollaban su labor como matemáticos en la Facultad de Ciencias y en la ETS de Ingeniera Informática. Por su parte, Def-C se eligió teniendo en cuenta su equivalencia formal con la anterior.

## DIFERENCIAS SIMBÓLICAS

En un estudio anterior en el que se comparaba el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto (véase Claros, Sánchez y Coriat, 2006), después de analizar la dos definiciones de manera minuciosa se concluyó que los aspectos a comparar deberían ser: dependencia, orden, valor absoluto y cota, procesos infinitos y tipos de infinitos. Con estos aspectos pretendíamos cubrir todos los conceptos que están presentes en ambas definiciones. Las revisiones sucesivas que se hicieron de aquel documento llevaron a simplificar los términos a estudiar, porque algunos conceptos quedaban recogidos dentro de otros. Esto ocurrió con la dependencia que en sucesiones ($n$-$a_n$) y en funciones ($x$-$f(x)$) es distinta, pero que puede observarse mejor cuando se estudia el apartado dedicado a los tipos de infinito; el infinito actual en el caso de las sucesiones es numerable y en el caso de las funciones es no numerable. El concepto de orden, fue obviado porque trabajamos con números reales tanto en sucesiones como en funciones, y en R tenemos una relación de orden total compatible con la adición y la multiplicación. El valor absoluto también se eliminó de la comparación, ya que el concepto de acotación puede abarcarlo.

Teniendo en cuenta esto, y siguiendo la técnica de análisis del texto citado, compararemos simbólicamente las definiciones de límite finito de una sucesión y de sucesión de Cauchy, estudiando tres aspectos: acotación, procesos infinitos y tipos de infinitos.

## Acotación

*"Un conjunto A de números reales se dice que es acotado superiormente si existe un número x tal que x≥a para todo a de A. Un número x con esta propiedad se dice que es una cota superior de A".* (Spivak, 1991, p. 171)

*"Un conjunto A de números reales se dice que es acotado inferiormente si existe un número x tal que x≤a para todo a de A. Un tal número x recibe el nombre de cota inferior de A"* (Spivak, 1991, p. 173)

Cuando un conjunto está acotado superiormente e inferiormente diremos únicamente que es un conjunto acotado.

Si analizamos la primera definición, podemos deducir que una sucesión que tiene límite está acotada. De hecho el concepto de acotación es necesario para comprobar que un candidato, seleccionado como límite, lo es o no. Si una sucesión no está acotada entonces no tendrá como límite un número real.

La acotación de la sucesión se muestra en el hecho siguiente: si una sucesión tiene límite, a partir de un cierto n en adelante todos los términos de la sucesión cumplen que $a-\varepsilon< x_n<a+\varepsilon$. Con esta condición observamos que todos los valores de la sucesión quedan, a excepción de un número finito, dentro del entorno de centro a y radio ε.

El concepto de acotación también se da en las sucesiones de Cauchy. La demostración de que una sucesión de Cauchy es acotada puede verse en Spivak (1991, p. 624).

Observamos por tanto en las dos definiciones que de las dos variables que manejamos n y $a_n$, solo la variable dependiente está acotada ($a_n$). La variable independiente no está acotada ya que n crece indefinidamente.

## Procesos infinitos

En def-L, se manejan dos procesos infinitos. El primero, se refiere a la variable independiente, se expresa matemáticamente con la frase $n\to\infty$ y se apoya en la noción primitiva de sucesor. Un segundo proceso infinito se genera al construir el valor de los términos de la sucesión. A cada valor de n le hacemos corresponde un valor de $a_n$.

En def-C, se manejan también dos procesos infinitos. El primer proceso, referido a la variable independiente, es idéntico al de la primera definición. El segundo proceso se genera, también, al construir el valor de los términos de la sucesión pero en este caso, se seleccionan dos valores n y m, a los que asociamos sus correspondientes valores $a_n$ y $a_m$.

Las diferencias, en este segundo proceso infinito, se producen porque, en el caso de def-L, los valores de la sucesión se acercan a un determinado valor denominado límite, mientras que en el segundo caso, los valores de la sucesión se acercan entre sí.

## Tipos de infinitos

Ortiz (1994) realiza un recorrido histórico sobre autores que se han ocupado del estudio del infinito y estudia la posición que mantuvieron, al respecto, Aristóteles, Cantor o Bolzano, entre otros.

En el libro III de la Física de Aristóteles, hallamos evidencia del rechazo que Aristóteles muestra ante el infinito actual. En el fondo de este rechazo encontramos el carácter finito que Aristóteles empleaba en todos sus razonamientos. Aristóteles distinguió dos tipos de infinitos: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. Respectivamente, reciben las denominaciones de infinito potencial e infinito actual. Aristóteles refuta la existencia del infinito actual, apoyándose en que, aunque el tiempo y el movimiento son procesos potencialmente infinitos, nunca están dados como una totalidad infinita.

Ortiz (1994), señala que la noción de infinito potencial se basa en las operaciones reiteradas e interminables; por muy grande que sea n siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente.

En Def-L, el infinito potencial se usa en el fragmento:

*"si para todo $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n> N "*

"N" depende del epsilon que tomemos, y permitirá avanzar en la comprobación de las condiciones de la definición.

En Def-C, el infinito potencial se usa en el fragmento:

*"si para $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N"*

El papel de "N" es el mismo en ambas definiciones, aunque, de una a otra, cambie la condición que debe estudiarse.

Respecto al infinito actual, Ortiz(1994) recuerda que la idea de infinito actual sirvió de base para la formalización del cálculo infinitesimal.

Cantor rechazó la negativa de Aristóteles a considerar el infinito actual como objeto de una argumentación. Cantor, siguiendo a Bolzano, consideró la biyección como el principio básico para demostrar que dos conjuntos son equipotentes; de éstos surge la cardinalidad. Pudo así definir un conjunto infinito como un conjunto equipotente a uno de sus subconjuntos propios. Para Cantor, la mente puede aprehender el infinito en abstracto; cuando lo hace en relación con el número o el tipo de orden, llega a la idea de lo transfinito.

Dedekind demostró que en una línea recta hay más puntos que en el conjunto de los números racionales; esto dio lugar a, al menos, dos tamaños de infinito actual: el infinito discreto y el infinito continuo.

Todos los procesos infinitos que hemos observado en Def-L y en Def-C son discretos, ya que el cardinal de los conjuntos que manejamos tanto en la variable independiente como en la variable dependiente es $\aleph_0$.

Merece la pena, no obstante, reseñar una diferencia: en el caso Def-L, al conjunto de valores de la sucesión se añade un nuevo elemento, externo a ella: su límite. Esto, por supuesto, no modifica la cardinalidad de los conjuntos infinitos implicados, pero sin embargo si sirve para reseñar una diferencia entre Def-L y Def-C, y es que en la primera el límite es conocido pero en la segunda es desconocido.

Las analogías y diferencias simbólicas halladas se concretan en la siguiente tabla.

| Analogías y diferencias | **Def-L**<br>**(LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN)** | **Def-C**<br>**(SUCESIÓN DE CAUCHY** |
|---|---|---|
| **Acotación** | -Variable independiente no acotada.<br>- Variable dependiente acotada. | -Variable independiente no acotada.<br>- Variable dependiente acotada. |
| **Procesos infinitos** | - Aproximación unilateral en la variable independiente.<br>- Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores.<br>-procesos infinitos discretos | - Aproximación unilateral en la variable independiente.<br>- Las diferencias entre dos términos cualesquiera de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeñas.<br>- procesos infinitos discretos |
| **Infinito potencial** | - Sucesor de n<br>- *"existe un número natural N tal que si n >N."* | -Sucesor de n<br>- *"existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N"* |
| **Infinito actual ($\aleph_0$)** | Los valores de la sucesión y el límite l de ésta: $\{a_n\}\cup\{l\}$. | Los valores de la sucesión |
| **Límite** | Conocido | Desconocido |

Tabla 1

FENÓMENOS ORGANIZADOS POR LA DEFINICIÓN DE SUCESIÓN DE CAUCHY

Cuando hablemos de fenómenos y de fenomenología lo haremos en el sentido de Freudenthal (1983); véase también Puig (1997). Antes de establecer las diferencias fenomenológicas tenemos que establecer los fenómenos con los que hemos trabajado. Los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión se establecieron en Claros, Sánchez y Coriat (2006 y 2007), se describen con más detalle en el Anexo y se han indicado también en la Introducción de esta comunicación. En este apartado establecemos los fenómenos organizados por la definición de sucesión de Cauchy y los caracterizamos mediante un modelo. Def-C se presentó en el Apartado 2.

La condición de Cauchy afirma que una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy. En la definición de sucesión de Cauchy elegida, establecemos la presencia de al menos dos fenómenos: Aproximación Simple Intuitiva de Cauchy y Fenómeno de Cauchy en sucesiones.

**Aproximación simple intuitiva de Cauchy (ASIC)**

Dados $k$ términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $|a_n - a_m|$ "parece acercarse" a cero. Es decir a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.

*Modelo*: En la sucesión $(1,1), (2,1/2), (3,1/3),\ldots,$ las diferencias $|1/n - 1/m|$, parecen acercarse a 0 a medida que *n y m* crecen.

Si calculamos las diferencias entre los términos consecutivos podemos observar que en la sucesión anterior las diferencias entre los términos se van haciendo cada vez más pequeñas: $|1/2 - 1| < |1/3 - 1/2| < |1/4 - 1/3| < \ldots$

**Fenómeno de Cauchy (IVSC)**

En la definición de sucesión de Cauchy se dan dos procesos:

Si $\varepsilon > 0$ existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales (Primer proceso)

Si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$ (Segundo proceso).

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de Cauchy, que definimos de manera precisa a continuación.

El fenómeno de Cauchy se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición de sucesión de Cauchy desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función ε-N. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de Cauchy corresponde a un proceso de ida-vuelta; este fenómeno es distinto del proceso de ida-vuelta implicado en la retroalimentación o i.v.s organizado por Def-L.

En el fenómeno de Cauchy se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición de sucesión de Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada. Esta nueva función emergente, en el caso de las sucesiones de Cauchy, resulta ser una función natural de variable real $(\varepsilon, N(\varepsilon))$.

*Modelo:* Partiendo de la sucesión $(n, 1/n)$ se construye la función $(\varepsilon, E(1/\varepsilon) + 1)$ donde E designa la función parte entera. Detallemos un poco más cómo obtenemos el valor $N = E(1/\varepsilon) + 1$

Si fijamos ε, tenemos que determinar N de manera que si n, m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$ .

Sabemos que $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n}$ es una desigualdad que se cumple para todo n,m ≥ 1 y n<m pero además se cumple que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , por la propiedad arquimediana. Entonces tomando N= E(1/ε) + 1 tenemos asegurado que $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$ .

DIFERENCIAS FENOMENOLÓGICAS

La Tabla 2 resume las definiciones que manejamos, definidas en el Apartado 2, y los fenómenos respectivamente organizados por cada una de ellas.

| Definición de límite l de una sucesión. (Véase Anexo) | Definición de Cauchy (Apartado 4) |
|---|---|
| a.s.i (aproximación simple intuitiva términos-límite) | a.s.i..c (aproximación simple intuitiva términos entre sí) |
| i.v.s (retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones) | i.v.s.c (fenómeno de Cauchy o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy) |

Tabla 2

En este apartado realizamos una comparación entre Def-L y Def-C desde un punto de vista fenomenológico; buscaremos diferencias y analogías existentes, por un lado, entre los fenómenos de aproximación intuitiva (fenómeno a.s.i y fenómeno a.s.i.c) y por otro lado entre los fenómenos de retroalimentación (ida-vuelta en sucesiones y fenómeno de Cauchy o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy). Para realizar este estudio tomaremos como idea directriz el hecho de que en Def-L es necesario conocer el límite, mientras que en Def-C dicha información no es necesaria.

**Comparación entre la aproximación simple intuitiva (ASI) y la aproximación simple intutiva de Cauchy (ASIC)**

En los dos fenómenos se da una sola aproximación; la consideramos “simple” por afectar solamente a la variable dependiente. Analicemos las diferencias entre ambas aproximaciones:

- En la aproximación simple intuitiva, la aproximación es de los valores de la sucesión a su límite; el valor al que se acerquen los términos de una sucesión cuando estudiamos el fenómeno a.s.i, puede ser positivo, negativo o cero.

- En la aproximación simple intuitiva de Cauchy la aproximación es de la diferencia de los valores a cero.

Este fenómeno a.s.i.c puede presentarse de dos maneras diferentes:

- Calculamos diferencias entre valores cualesquiera de la sucesión y observamos si estas diferencias se van haciendo cada vez más pequeñas a medida que n crece.
- Calculamos diferencias entre valores consecutivos y observamos si estas diferencias se van haciendo también más pequeñas a medida que n crece

El acercamiento a cero de las sucesiones construidas de ambas maneras da una primera información sobre si la sucesión es de Cauchy. Este hecho solo podrá establecerse usando la definición formal de sucesión de Cauchy.

**Diferencias y analogías entre la retroalimentación (IVS) y el fenómeno de Cauchy (IVSC)**

En cada fenómeno de ida y vuelta se dan dos procesos, pero el segundo proceso toma un aspecto distinto en cada uno de ellos.

***Estudio de diferencias***

- En la retroalimentación de Def-L, el segundo proceso (si $n > N$ entonces $|a_n - l| < \varepsilon$) implica una diferencia entre los valores de la sucesión y el candidato a límite. Si dicha diferencia puede hacerse tan pequeña como queramos, es decir, si se cumple que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon$, entonces la sucesión $a_n$ tiene límite l.

- En el fenómeno de Cauchy el segundo proceso (si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$) implica una diferencia entre dos valores de la sucesión. En este caso no es necesario tener un candidato a límite. La comprobación de la desigualdad $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon$, asegurará que la sucesión estudiada tiene límite, pero no cuál es el límite de la sucesión. El candidato a límite tendrá que salir de la observación directa de la sucesión; es decir tendremos que observar hacia dónde se acercan sus términos.

***Estudio de funciones "épsilon-N" y entornos asociados***

- Con ambas definiciones se construyen funciones *$(\varepsilon, N(\varepsilon))$*, que dependeran de la sucesión $a_n$ que estemos manejando.

- En Def-L, explícitamente o no, se maneja un entorno de centro el límite l y radio $\varepsilon$.

- En Def-C no conocemos el límite de la sucesión y no podemos apoyarnos en un candidato para construir un entorno: en su lugar, construimos algo así como una sucesión doble, calculando las diferencias entre dos valores de la sucesión dada; obviamente, estas diferencias permanecen en un entorno de centro 0 y radio $\varepsilon$.

CONCLUSIONES

(1) Hemos puesto de manifiesto que la equivalencia matemática entre Def-L y Def-C no tiene una contrapartida fenomenológica. Hemos observado que los fenómenos asociados a cada una de las definiciones seleccionadas no son equivalentes. En el caso de los fenómenos de aproximación, los fenómenos a.s.i y a.s.i.c presentan diferencias notables: en el primer caso los valores de la sucesión se aproximan al candidato a límite (que puede ser un número negativo, cero o positivo), mientras que en el segundo caso,

son las diferencias entre los valores de la sucesión las que se aproximan a un único valor que tiene que ser cero para toda sucesión convergente

También hay algunas diferencias simbólicas notables entre Def-L y Def-C. En el primer caso hay un proceso infinito que asocia a cada valor de n un $a_n$, mientras que en el segundo caso hay un proceso infinito que asocia a cada valor de n y m, dos valores $a_n$ y $a_m$. Este proceso infinito genera una sucesión que podríamos llamar doble, ya que exige que se generen dos términos de la sucesión.

(2) La presencia de los fenómenos organizados por cada una de las definiciones no descarta que existan más fenómenos que sean organizados por Def-L o Def-C. Quedaría para un trabajo posterior la posibilidad de categorizar todos los fenómenos que son organizados por cada definición.

(3) La presencia de fenómenos diferentes en Def-L y Def-C abre un camino para el estudio diferenciado de cada una de las definiciones de límite de sucesiones que conocemos, así como el estudio de cada una de las definiciones de límite de funciones (límite finito de una función en un punto, límite infinito de una función en un punto, etc), ya que como creemos haber establecido, cada definición de límite organiza fenómenos diferentes.

*Agradecimientos:* Agradecemos a los anónimos lectores externos de este trabajo las matizaciones formuladas que, en nuestra opinión, mejoran la legibilidad y claridad del trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

Blázquez, S. (2000). Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid

Blázquez, S., Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *En el futuro del calculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamerica. México.

Blázquez, S., Ortega. T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*. Vol 30, pp. 67-82. Graó. Barcelona

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 4.2, 165-198.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds*.), Actas del X simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.* Huesca: Universidad de Zaragoza.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166).Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C., Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematocal thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123).Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana.* Vol I, nº 2, 59-81

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., Coriat, M. (2006). Fenómenos relacionados con el límite finito. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación 2006, Monografía IV, pp. 105-114.*

Sánchez, M. T., Claros, F. J., Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación 2007, Monografía IX,pp. 49-68.*

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 6.1, 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol 10.3, 24-36.

Spivak, M. (1991). *Calculus*. Editorial Reverté.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* vol 12, 151-169.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. Journal for Research in Mathematics Education, 32(4), 341-367.

ANEXO

*Aproximación simple intuitiva (ASI)*

Dados *k* términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., $(k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1$, $a_2$,. .., $a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo.

***Modelo***: En la sucesión *(1,1), (1,1/2), (1,1/3),...,* los términos *1/n,* parecen acercarse a 0 a medida que *n* crece.

*Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones: (IVS)*

El análisis de la definición métrica seleccionada da lugar a la observación de dos procesos:

- El primer proceso denominado de ida que se produce cuando en la definición aparece la expresión:

"*para cada ε>0, existe un número natural N"*

- El segundo proceso denominado de vuelta que se produce cuando en la definición aparece la expresión:

*"si n ≥ N se cumple que* $|a_n-l|<\varepsilon$*"*

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones, que definimos de manera precisa a continuación.

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε-n para sucesiones). Dicho en términos coloquiales y gráficos, la retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el **ε** dado "vamos" desde éste hacia la variable natural para determinar el correspondiente n asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite para comprobar que las imágenes así obtenidas pertenecen al entorno considerado.

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición formal de límite finito de una sucesión induce, la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada.

Esta nueva función emergente, en el caso de las sucesiones, resulta una función natural de variable real ***(ε, n(ε))***, hablamos del fenómeno de *idea y vuelta en sucesiones (IVS)*.

***Modelo ivs***: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera.