EL ESTUDIO DE LA TASA DE VARIACIÓN COMO UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA

Jhony Alexander Villa Ochoa
Universidad de Antioquia, Colombia.
javo@une.net.co

Resumen: En este artículo describo un estudio de casos en el cual un conjunto de cuatro estudiantes se aproximaron al concepto de derivada a partir de la comprensión de la tasa de variación. Particularmente presento algunos episodios en los cuales a través del uso de los software dinámicos GeoGebra y Modellus las estudiantes observaron la tasa de variación media y produjeron algunas ideas asociadas a la derivada como una tasa de instantánea. Los resultados de este investigación resaltan la importancia del estudio de las derivada a través de contextos en los cuales observen la necesidad de correlacionar variables y la manera como ellas covarían. Finalmente presento una valoración sobre la pertinencia de abordar dicho estudio a través de la interacción de diferentes contextos y medios, y exhibo algunas reflexiones relativas algunos aspectos que intervienen en comprensión de la derivada desde una aproximación variacional.

Palabras clave: Tasa de variación, derivada, tecnología.

1. La variación para el estudio de la derivada

Desde la literatura internacional puede observarse un llamado para abordar el estudio de la tasa de variación como una componente trascendental en la interpretación de la derivada (Dall'anese, 2006; Tall, 2009; Dolores, 2007). De la misma manera, a pesar de existir una amplia gama de investigaciones y perspectivas en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos del cálculo; también se muestra que todos estos esfuerzos son insuficientes para dar cuenta de la complejidad del fenómeno de comprensión de tales conceptos (Sánchez-Matamorros, Garcia y Llinares, 2008).

Artigue (1995, citada por Sánchez-Matamoros et al., 2008) afirma que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de la derivada y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de análisis matemático. Dichas dificultades se manifiestan en el significado de la noción de derivada como límite de un cociente incremental (representación analítica; $\lim\limits_{\triangle x \to a} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ ó $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) o en su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente.

Para Sánchez-Matamoros et al. (2008), la construcción de un significado parcial de la derivada puede conducir a dificultades para su desempeño en los cursos de cálculo. Ello genera la necesidad de conocer los procesos mediante los cuales, los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada; por tanto, la investigación en este campo se hace bastante pertinente.

Otras de las dificultades, en lo relativo a la comprensión de la derivada, están asociadas con la representación de algunos de los aspectos variacionales que emergen en situaciones, en las cuales, conceptos como la velocidad o la rapidez tienen lugar. En este aspecto, Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) presentan los resultados de una investigación que explora las representaciones gráficas que hacen los estudiantes sobre la rapidez. Estos autores afirman que, convencionalmente, la rapidez está asociada a la razón de dos magnitudes y vinculada, gráficamente, a la pendiente de la recta tangente a una curva que representa la función de dichas magnitudes; sin embargo, estos investigadores pudieron encontrar otro tipo de representaciones que son usadas por los estudiantes, en las cuales se presentaron características de cinco tipos: rectas, columnas, puntos, pictóricas y curvas.

De otro modo, Sanchez-Matamorros y colaboradores. (2008) puntualiza uno de los enfoques relativos al estudio de la derivada, es la comprensión de la tasa de variación, en ese sentido señala que:

> Si se considera que la derivada en un punto indica la velocidad de cambio, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de x en relación al de y (p.272).

Sánchez-Matamoros y sus colaboradores observaron en los trabajos de Orton (1983) y Hart (1981) cómo la comprensión de la razón de cambio dependía del tipo de función utilizada. Así mismo, señalan que Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función, sea ésta lineal o cuadrática, podían tener su origen en una comprensión débil del concepto de función.

En este artículo presento algunos resultados de una investigación más amplia que abordó la pregunta *¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?* La investigación se desarrolló en el programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia en Colombia.

2. El estudio de casos como método de investigación

Abordar una investigación que dé cuenta de "*cómo se desarrolla un proceso...*" demandó por parte del investigador una inmersión detallada y profunda en el estudio del fenómeno de comprensión. De ese modo, seleccioné el *estudio de casos* como método de investigación, ya que en palabras de Goldenberd, a través de una inmersión profunda y exhaustiva de un objeto delimitado, el estudio de caso posibilita la penetración en la realidad social no necesariamente lograda con un análisis estadístico.

De otro modo, Yin puntualiza que aunque no existe una fórmula que permita elegir el estudio de casos como método de investigación; dicha elección está en coherencia con la(s) pregunta(s) de investigación. Este investigador agrega que las preguntas que se enfocan en el "cómo" o el "por qué" de un fenómeno social son especialmente un indicador para optar por el estudio de casos como método de investigación.

2.1 El contexto

En un estudio de casos las *unidades de análisis* son una componente que está estrechamente imbricada con el problema fundamental de establecer el caso a estudiar (Yin, 2009). Con base en estas ideas se seleccionó como *unidades de análisis* las comprensiones de cuatro estudiantes de primer año de un programa de ingeniería quienes estaban cursando una asignatura de pre cálculo. Las cuatro estudiantes fueron designadas con los seudónimos de Cristina, Marcela, Estefanía y Alexandra las cuales decidieron participar voluntariamente del estudio. Las estudiantes se implicaron, durante ocho sesiones de dos horas cada una, en el estudio de algunas situaciones que involucraron fenómenos de covariación entre algunas cantidades; tales situaciones les exigía observar la función matemática abordada en el contexto, pero también la manera en cómo se describía la tasa de variación y el cambio de esta misma. Las situaciones usadas en este estudio se describen en el siguiente apartado.

2.2 Las situaciones

A continuación presento una descripción general de cada una de las cuatro situaciones diseñadas para este estudio.

Situación 1. Rectángulo inscrito: En esta situación usé el software GeoGebra para presentar una nueva versión del trabajo: "Rectángulo Inscrito" presentado en Villa-Ochoa (2012). Para analizar la tasa de variación de las cantidades que se incluían en la situación, usé la opción "herramienta" para construir una que permitiera la visualización dinámica de la tasa de variación media, y en la que simultáneamente intervinieran sus registros gráficos, numéricos y algebraicos. La "herramienta" construida, permitió una aproximación desde la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea mediante la determinación de intervalos de variación cada vez más pequeños. En la figura 1, se recrea el ambiente en el que se desarrolló la situación "rectángulo inscrito".

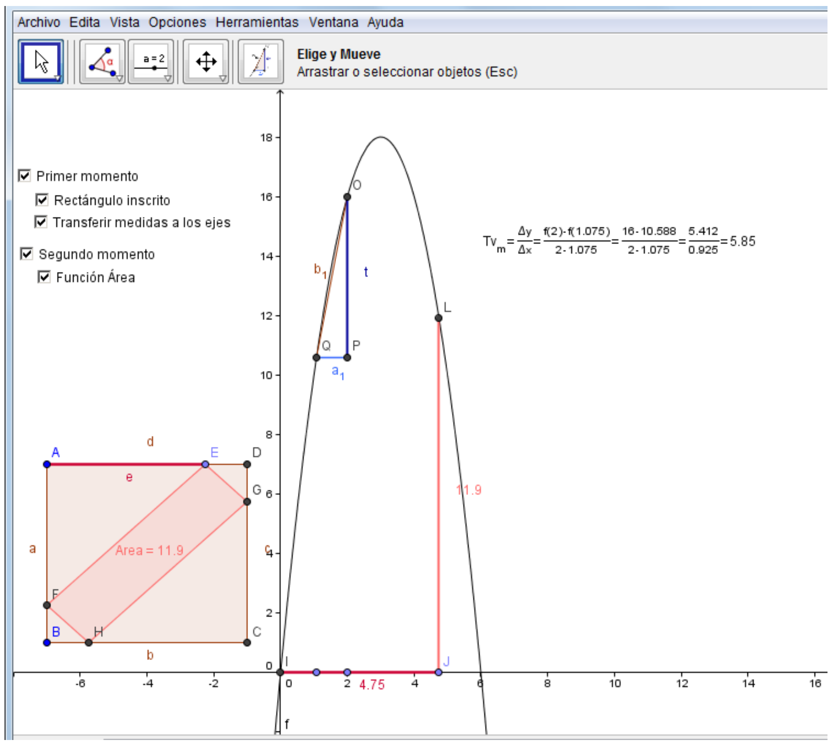


Figura 1. Ambiente de la situación 1.

Situación 2. La velocidad y la aceleración: Fueron un conjunto de actividades que surgieron desde la necesidad que se hizo explícita en la situación 1, en la cual las estudiantes se aproximaron a la noción de tasa de variación instantánea como el límite de la tasa de variación media, pero consideraban dicho valor como una "suposición" o inferencia y no aceptaban su existencia. Las actividades diseñadas para esta situación estuvieron basadas en la simulación de movimiento uniforme y acelerado a través del software "Modellus" versión 4.01. En la situación usé las opciones gráfico, tabla y modelo, para establecer relaciones entre la simulación del movimiento y las representaciones matemáticas de la misma. Otras gráficas se construyeron en el desarrollo la situación para validar las inferencias de las estudiantes con respecto a la aceleración. En la figura 2, se muestra el ambiente de la simulación.

Figura 2. Simulación de un movimiento con el software Modellus.

Situación 3. Análisis de la función tasa de variación: En esta situación desarrollé una "herramienta" en el software GeoGebra; con dicha herramienta es posible observar múltiples triángulos que permiten dar la idea de la tasa de variación como una función. La herramienta fue usada para analizar el comportamiento de la tasa de variación de varias funciones. En la figura 3, se muestra una de ellas.

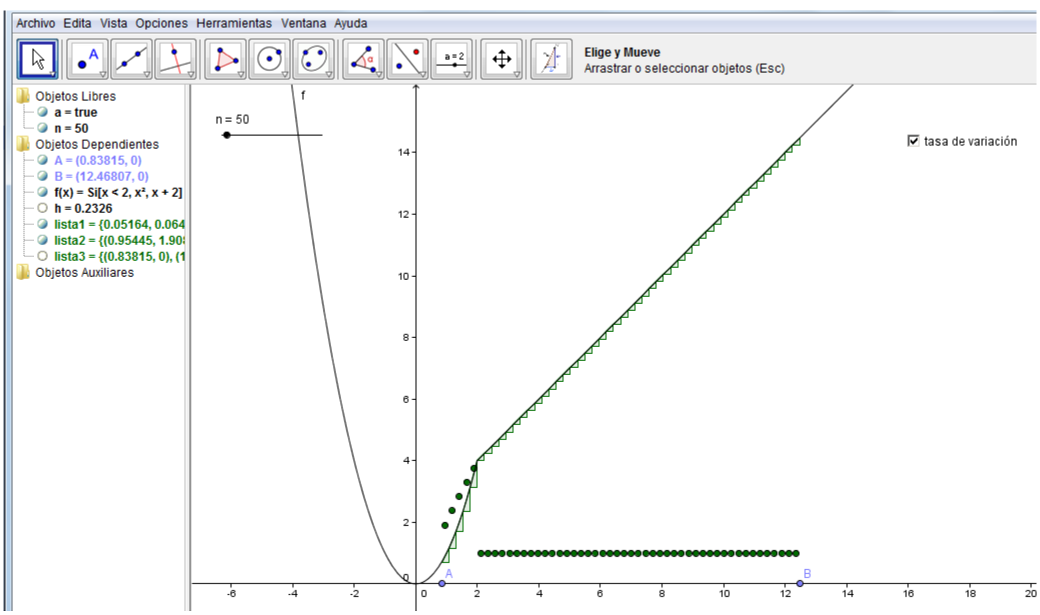


Figura 3. Ambiente de la herramienta para estudiar la función tasa de variación.

La figura 3, presenta una función definida en dos tramos y los triángulos que se muestran se forman en el intervalo definido por los puntos A y B de acuerdo al valor del deslizador n. Los puntos que se muestran en dicha ilustración representan los valores de la tasa de variación de cada uno de los triángulos.

Situación 4. Descarga de un archivo: En esta situación se usa la grabación de la manera en que se descarga un archivo, para indagar por la forma como las estudiantes comprenden las tasas de variación que se involucran en ella. La grabación se hizo con el software Camtasia cuando se estaba descargando un archivo de internet con el software VDownloader cuyo fin fue identificar y estudiar la "tasa de transferencia" o velocidad con la cual se descarga el archivo, así como los cambios de ésta misma (aceleración). En la figura 4, se presenta el ambiente de la situación.

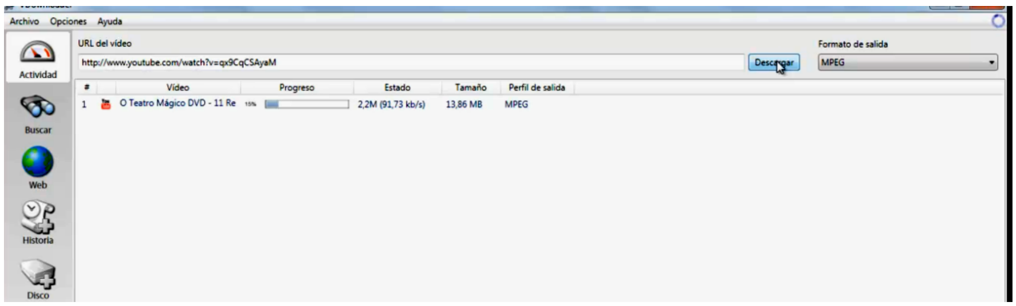


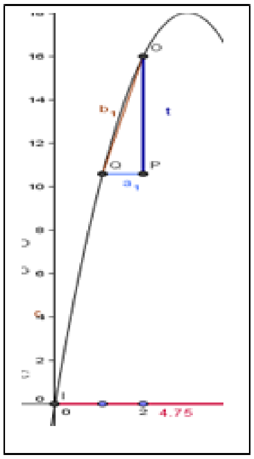
Figura 4. Ambiente de la situación: descarga de un archivo.

3. La tasa de variación como producto de la interacción entre diversos contextos y medios

Es este artículo me centraré en algunos resultados relativos a la aproximación a la derivada a través del estudio de la tasa de variación. Las ideas que produjeron las estudiantes estuvieron en relación con las situaciones 1 y 2 descritas en el apartado anterior.

En el primer contacto que las estudiantes tuvieron con la situación 1 se comprometieron con el reconocimiento de las cantidades que intervenía en ese contexto (ie. Área del rectángulo, área del cuadrado, longitudes de los lados, etc.) y cuáles de ellas eran variables y cuáles no. Seguidamente se propone hacer una descripción de las variables que covarían y la manera como lo están haciendo. Las descripciones que las estudiantes hacían de esta tarea evidencian el reconocimiento de algunas características de la covariación de manera cualitativa, (i.e. él área aumenta y luego disminuye).

El trabajo posterior se centró no sólo en la manera en que covarían las cantidades sino en la manera como podrían cuantificarse tal cambio. Para ello, se construyó una herramienta de Geogebra que permitiera simplificar algunos cálculos aritméticos para dar cuenta de la tasa de variación según el intervalo deseado (ver figura 5).



$$Tv_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)\text{-}f(1.075)}{2\text{-}1.075} = \frac{16\text{-}10.588}{2\text{-}1.075} = \frac{5.412}{0.925} = 5.85$$

Figura 5.Herramienta construida para dar cuenta de la tasa de variación aritmética y gráficamente.

Con el apoyo del texto dinámico del GeoGebra, el investigador cuestiona a las estudiantes frente a los valores de la tasa de variación que se presenta entre el área del rectángulo inscrito y la longitud del segmento AE (ver figura 1). Algunos de los intervalos que propusieron fueron [1.5, 2], [1.7, 2], [1.9, 2], [1.99, 2], de allí surgió el siguiente diálogo entre Marcela y Cristina quienes expresaron que la tasa de variación en cada intervalo decrecía:

Investigador : *¿Cómo se está comportando ese resultado?*
Cristina : *Baja*
Marcela : *Decrece, ¿no?* [Simultáneamente]
Investigador : *¿Hasta dónde decrece?*
Estefanía : *Hasta uno*
Investigador : *¿Seguras?*

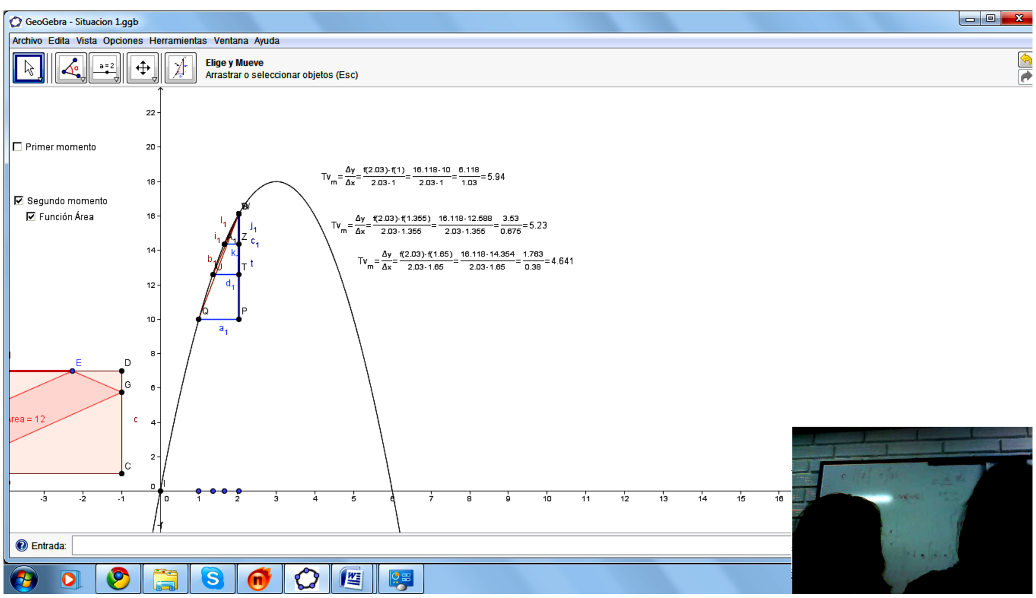


Figura 6. Tasa de variación media en la situación N.1.

Las estudiantes continúan usando la herramienta "*tasa de variación en intervalo*" para calcular los valores de la tasa en intervalos cada vez más pequeños (con el valor $x = 2$ en el extremo derecho del intervalo). El investigador preguntó de nuevo: ¿seguras que decrece hasta uno? A lo que las Cristina y Estefanía respondieron con gestos que indicaban su respuesta negativa. Seguidamente el profesor preguntó: ¿*Entonces, cuál es el valor al que nos acercamos cuando el punto se acerca a 2*? Simultáneamente las cuatro estudiantes respondieron "*cuatro*". Este hecho se convierte en evidencia de la presencia de una imagen del concepto de límite, el cual fue observado como "tendencia". Hasta este punto las estudiantes habían conjeturado el valor del límite apoyándose en los valores que el software presentaba; sin embargo, continuando con el movimiento del punto en el software ocurrió el caso en el cual los dos puntos se superpusieron generando que la expresión en el *texto dinámico* generara $\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{0}{0} =?$ (ver figura 7). Este hecho propició en Marcela la creación de una idea de límite como "*una tendencia*", de ese modo el límite adquirió un estatus de "*supuesto*" pero no de "*existencia*". Para ilustrar este hecho, transcribo el siguiente diálogo:

Investigador : *Entones, ¿cuál es la tasa de tasa de variación en 2?*
Marcela : *No existe!*
Investigador : *¿Por qué no existe?*
Marcela : *Porque cero sobre cero no existe!*
Estefanía : *Es indeterminado!*
Investigador : *Y entonces, ¿qué significa ese cuatro que encontraron?* [refiriéndose al valor del límite inferido por medio de la aproximación].
Marcela : *Pero dijimos que daba cuatro porque nos aproximábamos, pero no es cuatro, porque en dos se anula.*

Las demás compañeras se limitaron a escuchar y observar la pantalla del computador evidenciado una actitud de extrañeza.

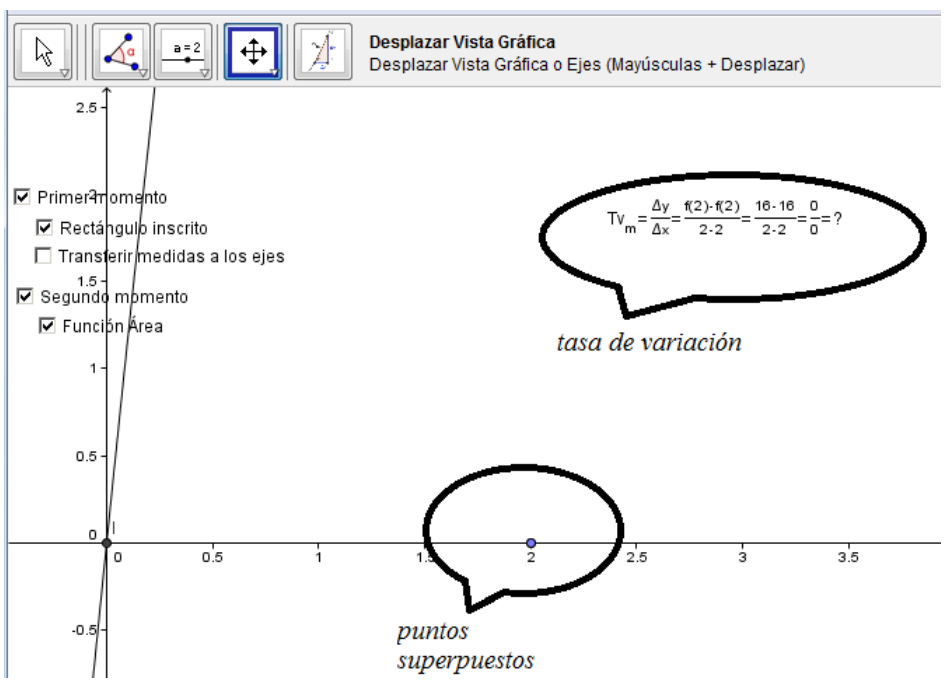


Figura 7. Estrategia para el cálculo de la tasa de variación instantánea realizada por Marcela.

Del diálogo se observa que la idea de límite parece haber sido producto de la interacción de las estudiantes con el software y del hecho que ellas estaban "descansando su razonamiento" en los resultados que se mostraba el texto dinámico, por tanto, al software no indicar un resultado de la expresión en $x = 2$, las estudiantes asumieron el valor del límite como "supuesto" pero no como un valor a alcanzar.

Para profundizar en esta observación, me propuse realizar una entrevista individual con cada una de las participantes. En dicha entrevista, el investigador retoma la experiencia de cálculo del límite de la situación "*rectángulo inscrito*"; en el caso de Marcela se presenta el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Entonces vamos nuevamente a mirar aquí la pregunta que de la situación de la clase pasada. ¿Cuánto fue que nos dio en 2?*
Marcela	:	*¿En dos?...*
Investigador	:	*La variable en 2, exactamente en 2*
[*]Marcela	:	*De 2 a...* [evocó nuevamente la imagen de la tasa de variación media]
Investigador	:	*No, en 2!*
Marcela		*Ahhhhh*, en 2!
Investigador	:	*Esa fue la pregunta que...* [Marcela de inmediato respondió dejando el comentario del investigador inconcluso]
Marcela	:	*Ahh, en 2 daba infinito, daba indeterminado*
Investigador	:	*¿Daba indeterminado?*
Marcela	:	*Pues, cuando yo lo pongo directo,... Los dos puntos en 2.*
Investigador	:	*ujum... Daba indeterminado ¿ por qué era que te daba indeterminado?*
[**] Marcela	:	*Porque.... Porque por estas restas daba 0 sobre 0. Porque cuando el área está,..., el área es,..., porque cuando el segmento está en 2, el área es 16 y si lo vamos a comparar, pues, si...no me acuerdo!* [silencio] *Daba indeterminada, porque este segmento...* [señalando el segmento variable del cuadrado. Hay un momento de silencio]

Se observa en la línea marcada con [*] en el diálogo anterior cómo Marcela, a pesar de haber usado la noción de límite como tendencia, evoca nuevamente la idea de la tasa de variación en intervalo tal y como fue usada en el software. En la línea marcada con [**] Marcela evidencia a través de sus dos momentos de silencio, que no alcanza a determinar argumentos para justificar, desde el contexto del rectángulo inscrito, por qué la tasa de variación en dicho punto es "indeterminada".

Continuando con el diálogo, el investigador le dice a la estudiante "*O sea que yo no puedo decir ¿cómo cambió el área cuando cambió el segmento*?", a lo cual la estudiante responde: "*Noooo pues el área es 16, puede decir eso, pero no lo puedo comparar con otro punto*"

Las respuestas de Marcela crean la necesidad generar experiencias en las estudiantes que posibilite una transición de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea y para ello, se hace necesario superar la imagen de asociada a los extremos de un intervalo así como avanzar en las ideas de límite como "*tendencia*", "*valor supuesto*" o "*tendencia sin llegar*". Ante la necesidad de generar otras experiencias para trascender en las ideas construidas, se diseñó y aplicó la *situación 2* haciendo uso del software Modellus. Al igual que en la situación 1, el estudio comenzó con el reconocimiento de las cantidades que intervenían en el movimiento del vehículo, a través de un diálogo se promueve el reconocimiento de la velocidad y hacer la descripción gráfica de la misma. En trabajo posterior el investigador promovió una comparación de los elementos de las situaciones: "*rectángulo inscrito*" y "*movimiento de un vehículo*". Los hallazgos en este aspecto muestran que, a pesar de que en ambos casos se abordó la misma función matemática y se hizo un análisis de la tasa de variación de forma semejantes, las estudiantes no hicieron una "correspondencia automática" de las características de una situación a otra; así por ejemplo, al preguntarles por lo que significaba la cantidad A (área del rectángulo inscrito) en la situación Nº 1 y X en la simulación del movimiento del vehículo, ellas no conseguían identificar la misma variables para ambos contextos. Intentando hacer una analogía entre ambos contexto, Estefanía afirma que: "*en el problema, mientras crece el segmento el área crecía o disminuía*" y estuvo de acuerdo cuando el investigador señaló que el comportamiento de las cantidades era semejante en ambos casos.

Investigador	:	*Lo que allá era el segmento* [refiriéndose a la situación Nº1] ¿qué es aquí?
Estefanía	:	*La distancia*
Alexandra	:	*El...* [interrumpe Marcela y dice que el movimiento del carro] movimiento del carro
Cristina	:	*El movimiento del carro*
Investigador	:	*El movimiento del carro... ¿Seguras?*
Estefanía y Alexandra	:	*Si!*
Investigador	:	*Y lo que allá era el área, ¿qué es aquí?*
Estefanía y Alexandra	:	*La velocidad*
Investigador	:	*Seguras*
Cristina	:	*La distancia*
Investigador	:	*ujum... Daba indeterminado ¿ por qué era que te daba indeterminado?*
Alexandra	:	*A mí me parece que es la velocidad, ¿no?*

En vista que la respuesta de Cristina estaba en coherencia con los dos valores, se le cuestionó sobre el porqué de su respuesta; pero no dio justificación alguna. Ante este panorama, el investigador escribió en el tablero las ecuaciones:

$A = 2x\,(6-x)$	$X = 2t\,(6-t)$
para la situación Nº1. Rectángulo	para la situación de movimiento del vehículo

El investigador cuestionó de nuevo, ¿*Son iguales estas ecuaciones*? A lo que simultáneamente las estudiantes respondieron: "*sí*". Y partiendo de la comparación entre A y X; x y t, ellas, con excepción de Cristina, lograron concluir que:

> *El incremento de A sobre incremento de x*, [en la situación "rectángulo inscrito"] *es análoga a "triangulito* [incremento] *de x sobre incremento de t"*. Simultáneamente el investigador escribió en el tablero la ecuación $\frac{\triangle x}{\triangle t}$.

Ante esta respuesta, mientras el investigador señalaba el cociente incremental escrito en el tablero, preguntó: *¿qué sería el cambio de la distancia con respecto al cambio del tiempo?* A lo que simultáneamente, Alexandra y Marcela respondieron: *"la velocidad"*. Nuevamente el investigador replica *¿Qué es la velocidad?* Y Marcela responde: "la relación entre la velocidad y el tiempo"; Alexandra complementa diciendo *"la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo"*. Las evidencias presentadas en este apartado muestran que tanto Estefanía, como Alexandra y Marcela establecieron conexiones entre las *imágenes* construidas en las dos situaciones. Así mismo, tal y como había mencionado en los apartados anteriores, aunque en la situación: "rectángulo inscrito" las estudiantes reconocieron la noción de límite como una tendencia, ellas no consiguieron aceptar su existencia, en parte, por el valor de 0/0 que se presenta en el momento. En este aspecto, la simulación del movimiento de un vehículo, a través del software *Modellus*, se mostró como un elemento fundamental para la que las estudiantes consiguieran aceptar la existencia de dicho límite. Para iniciar en el reconocimiento de la tasa variación instantánea, el investigador formula la pregunta: *¿Cuál es la velocidad en dos?* Y, aunque se esperaba que las estudiantes respondiera de inmediato "cuatro", fueron diversas las aproximaciones en cada una de ellas, por ejemplo: Estefanía se mostró pensativa y respondió "16" mostrando así que estaba focalizada en la posición y no en la velocidad. Por su parte, Alexandra señaló que era necesario hacer los cálculos nuevamente con los triangulitos o sacar el límite; después de unos segundos, la estudiante dice con sorpresa, *"ey, no sería también cuatro"*; ante esto el investigador pregunta: *¿Porqué cuatro?* Y de inmediato, Estefanía y Marcela argumentaron que porque era la misma ecuación y la misma tendencia. Esto se convierte en evidencia de un movimiento en las ideas construidas en el cual las estudiantes establecen ciertas conclusiones como:

> *En la situación Nº 1, cuando x (el segmento) se acercaba a dos, cociente incremental del área con respecto al segmento se acercaba a cuatro. Es análogo a que, en la situación actual, cuando el tiempo se acerca a dos, la velocidad se acerca a cuatro.*

En este momento, el profesor les recordó a las estudiantes que en una sesión anterior, ellas afirmaban que la tasa de variación cerca de dos era cuatro, pero que exactamente en dos, ellas decían que no existía porque les daba cero sobre cero. En este momento, el investigador retoma la analogía del problema del movimiento del vehículo y genera el siguiente diálogo:

Investigador	:	*Yo puedo preguntar: ¿cuál es la velocidad que lleva el carro en dos?*
Alexandra	:	*Si.*

Ante el silencio de las otras tres compañeras, el investigador simula con su cuerpo el movimiento del vehículo, cuenta el tiempo y para cuando dice "dos". Luego pregunta:

Investigador	:	*Exactamente en dos, ¿Cuál es la velocidad?*
Simultáneamente		
Marcela y Alexandra responde	:	*Ocho* [mientras sus compañeras responden, Estefanía se muestra preocupada, y pensando]
Investigador	:	*¿Por qué ocho?*
Marcela	:	*Porque son 16 centímetros digamos, en 2 segundos!* [Estefanía sigue en la actitud pensativa]
Investigador	:	*¿Pero ahí no tendríamos un supuesto?*
Marcela	:	*Pero, ¿usted no nos lo está preguntando en ese punto?*
Investigador	:	*Sí, les estoy preguntando por la velocidad exactamente en dos!*
Estefanía	:	*¡Cuatro!* [La estudiante rompió su silencio y ofreció esta respuesta con ahínco]
Alexandra	:	*¿Si sería cuatro?*
Investigador	:	*¿Por qué cuatro?*
Estefanía	:	*No sé.*

Se observa que tanto en Marcela como en Alexandra evocaron imágenes de la relación de proporcionalidad directa entre la posición y el tiempo, la cual fue revisada una vez que el investigador afirmó que eso implicaba un supuesto. Unos segundos después de diálogo anterior, Alexandra tuvo ciertos insightque fueron evidenciados en el tono enérgico con el que verbalizó "*si, es que es la tendencia*". Y argumentó en el acercamiento por medio de intervalos.Sin embargo, Marcela no alcanzó a entender lo que Alexandra afirmó y replicó: *¿O sea que es cuatro? ¿Siempre va a ser cuatro?* A lo que Alexandra le contestó: *"Cuando se acerca a dos, es cuatro; ya en otro punto sería otro valor"*.

Para apoyar las conclusiones de Alexandra, el investigador propuso que analizar la el cociente incremental a través del software y registrar su comportamiento en la tabla (ver figura 6).

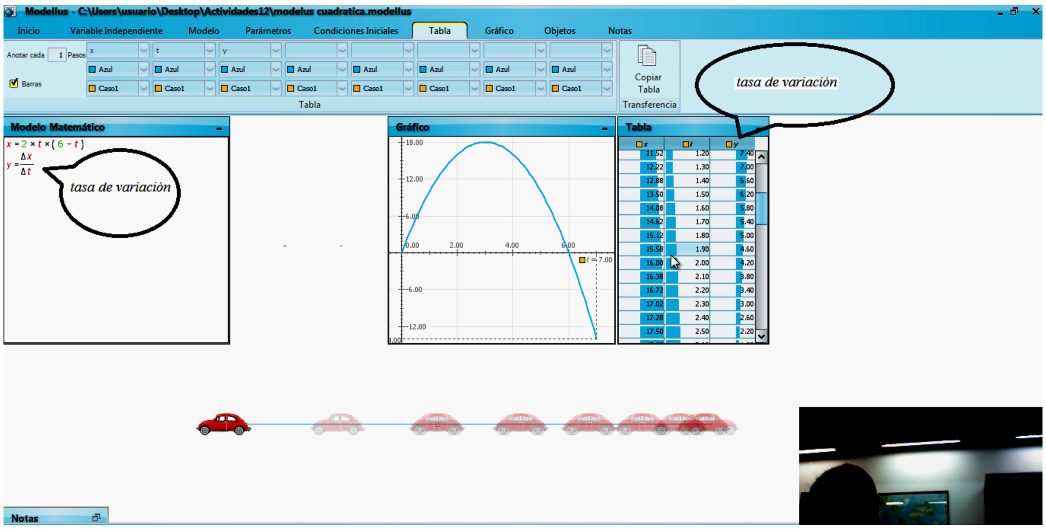


Figura 8. Tasa de variación en el software Modellus.

Esta experiencia con el software, fue determinante para que las estudiantes, en particular Marcela y Cristina, pudieran visualizar nuevamente la tendencia de la velocidad en el tiempo: 2 segundos (ver figura 7).

Tabla

x	t	y
14.62	1.70	5.40
15.12	1.80	5.00
15.58	1.90	4.60
16.00	2.00	4.20
16.38	2.10	3.80
16.72	2.20	3.40
17.02	2.30	3.00
17.28	2.40	2.60
17.50	2.50	2.20
17.68	2.60	1.80
17.82	2.70	1.40
17.92	2.80	1.00
17.98	2.90	0.60
18.00	3.00	0.20

Figura 9. Tabla de la tasa de variación en el software *Modellus*.

En el trabajo a seguir, se verifican algunos valores cercanos a $t = 2$ y cómo la tasa de variación está cada vez más cerca de cuatro, confirmando así lo que se presenta en la tabla de valores.

Nuevamente, la imagen del límite como una tendencia apareció cuando las estudiantes verbalizaron: "*mientras más me acerco a dos, la velocidad está más cerca de cuatro*". Pero en esta oportunidad, la pregunta por la velocidad en dos, ofrecía como respuesta cuatro, contrario a lo que acontecía en el mismo caso, en la situación "rectángulo inscrito" cuando ante la misma pregunta, las estudiantes respondía: "no existe". El siguiente diálogo se convierte en evidencia de este hecho:

Investigador	:	*Cuando el tiempo está cerquita de dos, la velocidad va estar cerquita de:*
Estudiantes	:	*Cuatro.*
Investigador	:	*Y exactamente en dos, ¿Cuál va a ser la velocidad?*
Alexandra, *Marcela, y Estefanía*	:	*Cuatro.*
Investigador	:	*¿Tiene sentido hablar de cuatro?*
Estefanía y Alexandra	:	*Sí.*
Investigador	:	*Hay algún problema si yo, con GeoGebra montara* [superpusiera] *el punto y me diera cero sobre cero?*
Estefanía	:	*No!*
Alexandra	:	*No, porque se puede calcular por límites!*
Estefanía	:	*¡Cuatro!* [La estudiante rompió su silencio y ofreció esta respuesta con ahínco]
Alexandra	:	*¿Si sería cuatro?*
Estefanía	:	*Se pueda hallar por límites.*
Estefanía	:	*No sé.*

En este punto, el investigador hace la reflexión con las estudiantes sobre "su resistencia a aceptar la existencia del límite, y que para ellas solo era una suposición". Ante lo cual las estudiantes señalaron que "*sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad*" y es claro que sí la tiene.

Es evidente en estos episodios que las estudiantes Alexandra, Estefanía y Marcela consiguieron abstraer la existencia del límite, a partir de la abstracción de diferentes imágenes de la tasa de variación media. Este tipo de abstracciones les permitió a las estudiantes reconocer la propiedad:

$$Tv_{instant\acute{a}nea} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

4. Discusión y conclusiones

En la evolución de la idea de límite como "supuesto" por parte de algunas de las estudiantes hubo al menos dos aspectos que vale la pena reconocer y discutir, a saber:

- El uso de una cantidad de magnitud como la velocidad para interpretar la tasa de variación (desde el contexto de la física) mostró un factor que potenció la existencia del límite. Verbalizaciones como "*sería como decir que en dos, el carro no tendría velocidad*" se convierten en evidencia de la necesidad de involucrar ciertos contextos en el estudio de conceptos matemáticos. La tasa de variación instantánea en la situación del rectángulo inscrito, no se mostró natural, ni fácil de entender para los estudiantes, quizás porque la cantidad que se obtenía por medio de la tasa de variación " $\frac{cm^2}{cm}$" no es una magnitud físicamente tangible, ni cotidianamente perceptible, contrario a ello, es un poco artificiosa, más aun, cuando en la muchos casos, los contextos de área y perímetro, son usados para determinar máximos y mínimos, pero pocas veces, para determinar tasas de variación.

- El papel del software *Modellus* fue fundamental, no sólo para recrear el ambiente de un movimiento uniforme y acelerado, sino también porque mediante su manipulación, las estudiantes pudieron observar diferentes registros de representación de manera simultánea y así poder aproximarse a una comprensión de la tasa de variación instantánea.

Durante toda la investigación pudo observarse diferentes momentos conceptuales por los cuales atravesó la tasa de variación, a saber:

- *Momento 1. La tasa de variación y tasa de variación media.* En este momento otros conceptos como los de proporcionalidad, variable, función estuvieron presente, de igual manera, la noción de tasa de variación se observó como la "comparación de dos estados" en cuya representación bajo el mecanismo de triángulo jogó un papel fundamental en su compresión. Así mismo, pudo observarse que el uso de descripciones cualitativas, comparación aritmética de dos estados, cantidad magnitud que describe el cambio promedio de una cantidad por unidad de cambio de la otra unidad.

- *Momento 2. La tasa de variación instantánea.* Para desarrollar la idea de tasa de variación instantánea se observó que la situación 1 no fue suficiente; sin embargo, en la comparación de los contextos, el estudio de un "fenómeno cotidiano" como el movimiento se hizo que las ideas sobre el concepto no se produjeran solo desde las acciones del software sino también que se lograra hacer ciertas abstraciones sobre tales acciones. Desde este estudio puede observarse la comprensión de la tasa de variación instantánea demanda por parte del estudiante:

  - Superar la idea de limite como supuesto.
  - "Comparación o "transferencia" entre contextos.
  - Tasa de variación como una cantidad asociada a una magnitud en "contexto".

Hubo un tercer momento denominado de la *función tasa de variación a la función derivada*, sin embargo su analisis escapa al proposito de este documento. El lector interesado puede remitirse al documento Villa-Ochoa (2011b) para ampliar en este aspecto.

Agradecimientos

Al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación-Colciencias por el apoyo a la realización de la investigación "*La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*"a través de la convocatoria Créditos Condonables 2007. También agradezco a los doctores Carlos Mario Jaramillo y Pedro Vicente Esteban por sus continuas revisiones y valoraciones a este trabajo.

Referencias

Dall'anese, C. (2006). Argumentos e Metáforas conceituais para a taxa de variação. Tese de doutorado nãopublicada, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., & Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñazan de la matemática. UNON. Revista iberoamericana de Educación Matemática (18), 41-57.

Goldenberd, M. (2007). A arte de pesquisar.Como fazer pesquisa qualitativa en Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record.

Sánchez-Matamorros, G., Garcia, M., & Llinares, S. (2008). La compresión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 11 (2), 267-296.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM. Mathematics Education, 41 (4), 481-492.

Villa-Ochoa, J. A. (2011b). La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín.

Villa-Ochoa, J. A. (2011a). Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: Comité Interamercano de Educação Matemática.

Yin, R. (2009). Case study research, Design and methods. Thounsand Oaks, California: Sage Publications, Inc.