INTEGRACIÓN DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN BÁSICA. UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON ALUMNOS DE 8-9 AÑOS

Marta Molina
Universidad de Granada
martamg@ugr.es

Resumen

En esta ponencia se describe la propuesta curricular Early-Álgebra – consistente en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el currículo de los dos primeros ciclos de la educación básica – y se detallan algunas de las investigaciones que se han realizado sobre la misma a nivel internacional. Posteriormente se describe en mayor profundidad un experimento de enseñanza, realizado con estudiantes de 8-9 años, que persigue indagar en el potencial de dicha propuesta y en la capacidad de estos estudiantes para trabajar en aritmética de un modo algebraico. En este estudio se centra la atención en un tipo de pensamiento algebraico, el pensamiento relacional, que se hace manifiesto en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, y que se relaciona con otros constructos de la literatura en Educación Matemática tales como el sentido estructural, el pensamiento cuasivariable y las meta-estrategias conceptuales.

Palabras-clabe: Early-Algebra, Innovación curricular, Pensamiento relacional, Experimento de enseñanza, Expresiones aritméticas.

Early-Álgebra

Desde mediados de los años noventa se han realizado a nivel internacional numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de los primeros ciclos de la educación básica. Esta propuesta, conocida con el nombre de Early-Algebra, plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar, desde los primeros cursos escolares (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput, Carraher y Blanton, 2009, Molina, 2009). En términos de Kaput (2000), se propone la "algebrización" del currículo de la educación básica.

Si se considera el currículo como un listado de contenidos, desde un punto de vista curricular esta propuesta no supone ningún cambio, pero si se ve el currículo como un conjunto de experiencias para los estudiantes, el cambio que se propone es profundo (Kilpatrick, 2011). La propuesta implica promover, en la actividad matemática de la educación básica, variadas características del pensamiento algebraico: pensar sobre lo general a partir de lo particular, pensar en patrones como reglas, pensar relacionalmente sobre cantidades, números y operaciones, pensar representacionalmente sobre relaciones en situaciones problema, y pensar conceptualmente sobre lo procedimental (Kieran, 2011). El contexto prioritario en el que integrar estos diferentes modos de pensamiento es la aritmética, con sus inherentes regularidades, equivalencias, múltiples formas de conceptualizar las relaciones numéricas, analizar y representar relaciones entre cantidades; y también con su cara funcional que incluye estudiar patrones, analizar como las cantidades varían e identificar correlaciones entre variables.

Estas ideas evidencian una visión del álgebra escolar que no se restringe al trabajo con el simbolismo algebraico. Es una concepción más amplia que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al., 2003). Dentro de estas múltiples dimensiones, el álgebra se concibe dualmente como cuerpo de conocimientos y como actividad matemática (Kaput, Carraher y Blanton, 2009). Esta multidimensionalidad del álgebra es la esencia de la innovación curricular que se propone pero no es exclusiva a esta propuesta (ver por ejemplo Da Ponte, 2006) ni es nueva en el panorama investigador (ver por ejemplo Usiskin, 1988 y Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

El objetivo del Early-Algebra no es solo facilitar el posterior estudio del álgebra, sino promover en los alumnos un aprendizaje, con comprensión, más profundo y complejo de las matemáticas escolares. Los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son considerados hábitos mentales importantes, que todos los alumnos deben de adquirir, que pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la educación básica y tienen potencial para enriquecer la actividad matemática escolar (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 1998). El objetivo que se persigue, por tanto, es múltiple:

- Anadir coherencia, profundidad y poder al currículo de la educación básica.
- Facilitar el acceso de todos los estudiantes al pensamiento y actividad algebraica favoreciendo el desarrollo de una base sólida de aprendizaje y

experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de la educación secundaria.

- Dar tiempo para el desarrollo progresivo y prolongado de los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como de los significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar.
- Eliminar la abrupta introducción del álgebra en los niveles de educación secundaria

(Kaput, Carraher y Blanton, 2009; Molina, 2009; NCTM, 2000).

La propuesta Early-Algebra no debe confundirse con otro enfoque relacionado con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra conocido como pre-álgebra. Sus finalidades son diferentes ya que la pre-álgebra sólo persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas (Carraher y Schliemann, 2007).

En el origen de la propuesta Early-Algebra se identifican diversos factores. En general, hasta principios de los 90, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y su potencial de desarrollo. Estos trabajos contribuyeron, en general, a la asunción de que es mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004). Hace un par de décadas algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva significativamente diferente al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico, incorporar las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra y sugerir que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada (Lins y Kaput, 2004)[1]. Así mismo la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de la misma, y la

[1] Existen algunos antecedentes previos (Ej., Davydov, 1962; Davis, 1985; Freudenthal, 1974; Vergnaud, 1988) a esta propuesta que, en el mismo sentido, plantean la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la Educación Primaria y argumentan la necesidad de preparar a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra.

preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes, condujeron a buscar formas más efectivas de abordar su enseñanza.

Adicionalmente un factor destacado en el desarrollo de esta propuesta ha sido la evidencia dada, en sucesivos estudios, de la capacidad de alumnos de educación básica de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos, sugiriendo que las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra pueden ser debidas, en gran parte, al tipo de enseñanza recibida. Concretamente se ha puesto de manifiesto que estos alumnos pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter, Franke y Levi, 2003); percibir y representar tanto gráfica, aritmética como pre-algebraicamente, complejos patrones lineales (Moss y Beatty, 2006); pensar sobre operaciones aritméticas como funciones, en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003); trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000); usar representaciones algebraicas, como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas, y representar y analizar problemas en los que hay involucradas cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad, utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003); por citar algunos ejemplos.

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que *"cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tiende a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida"* (Bastable y Schifter, 2007, p. 2).

Estas evidencias han conducido a que los currículos de diferentes países, en sus versiones más recientes, adelanten la edad en la que recomienda la introducción del álgebra en el currículo escolar y amplien su concepción del álgebra. Entre ellos destacamos los casos de Estados Unidos y Portugal. En la primera versión de los Estándares del NCTM (1989) se recomendaba introducir el álgebra, como generalización de la aritmética, en los dos últimos ciclos de la educación básica. Esta visión estaba más en línea con lo que se ha denominado pre-algebra. Posteriormente, en la última edición de los Estándares del NCTM (2000), se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a *"construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior"* (p. 37) y se destaca el papel de las ideas algebraicas como unificadoras del currículo.

Así mismo ha ocurrido en Portugal, según indican Canavarro (2009) y Pimentel (2010), pues tras el reajuste del currículo de matemáticas portugués para la enseñanza básica publicado en 2007 (ME-DGIDC, 2007) ya aparece en primer ciclo el álgebra recogida como forma de pensamiento matemático, si bien no como contenido, y se propone el trabajo con secuencias, relaciones entre números y entre números y operaciones, para favorecer el desarrollo de pensamiento algebraico. En el segundo ciclo se continúa en esta línea recomendándose el trabajo con patrones y relaciones (expresiones numéricas y propiedades de las operaciones, secuencias y patrones y variación) con ese mismo objetivo.

Pensamiento relacional

Los estudiantes que llegan a ver los números y las operaciones en términos de sus inherentes relaciones estructurales, esto es como objetos que pueden ser comparados relacionalmente en términos de sus componentes, y que pueden usar las propiedades fundamentales de las operaciones y de la igualdad… puede decirse que ven la aritmética con ojos algebraicos.
(Kieran, 2011, p. 584)

Desde la propuesta Early Algebra, se enfatizan la necesidad de un enfoque estructural de la aritmética que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares. En esta línea cabe destacar un tipo específico de pensamiento algebraico, el pensamiento relacional, que se hace manifiesto en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. Este tipo de pensamiento, refiere, en pocas palabras, al reconocimiento y uso de relaciones entre los elementos de expresiones numéricas y algebraicas y de propiedades fundamentales de las operaciones (Carpenter et al., 2003; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Molina, 2006; Molina y Ambrose, 2008; Stephens, 2007). Al utilizar pensamiento relacional, los estudiantes consideran las expresiones como totalidades (en lugar de como procesos a realizar paso a paso), las analizan, distinguen algunos detalles y reconocen algunas relaciones y, finalmente, aprovechan estas relaciones para construir una estrategia de solución (Molina, 2006). Por ejemplo, para determinar si las sentencias (a) $7+7+9=14+9$ y

(b) $27+48-48=27$ son verdaderas o falsas, en lugar de hacer los cálculos en ambos miembros y comparar los resultados obtenidos, hacer uso de pensamiento relacional implica atender a toda la expresión y apreciar su estructura particular (por ejemplo, hay operaciones en ambos lados del signo igual, o no hay) y utilizar las relaciones percibidas entre sus elementos (por ejemplo, 9 aparece en ambos miembros; $7+7$ en el lado izquierdo equivale a uno de los términos del miembro derecho; el mismo número se suma y resta a 27) así como el conocimiento de propiedades fundamentales de la aritmética, para determinar la verdad o falsedad de la sentencia.

Las expresiones aritméticas involucradas tienen que ser consideradas desde una perspectiva estructural y no únicamente como procedimientos a realizar. La expresión "$7+7+9$" se compara con "$14+9$" para considerar su equivalencia, en lugar de actuar en cada expresión para determinar su valor. Esto implica un cambio sutil pero importante en la atención de los estudiantes: de realizar la lectura de la sentencia de izquierda a derecha, leyendo los elementos de uno en uno, a mirar a ambos lados del signo igual y comparar las dos expresiones entre sí (Mason, Drury y Bills, 2007). No obstante el uso de relaciones entre números u operaciones puede ser más o menos sofisticado según si éstas se perciben como específicas a la situación particular considerada, haciéndose un uso implícito de propiedades de forma análoga a los teoremas en acción (Vegnaud, 1988), o bien, son reconocidas como particularizaciones de una propiedad (Molina y Mason, 2009). Este segundo uso implica el tipo de pensamiento basado en propiedades que se utiliza en el álgebra y se asocia con una comprensión profunda de la aritmética (Empson et al., 2011) o comprensión relacional en términos de Skemp (1978).

El pensamiento relacional se presenta como una acción intelectual, alternativa a la aplicación de procedimientos estándares, centrada en la consideración y exploración de la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas. La anticipación destaca aquí como una de sus componentes clave, cuya destacada importancia en la guía del razonamiento algebraico ha sido señalada por Boero (2001).

Conexiones con otros constructos

El término pensamiento relacional surge en la literatura a principios del siglo XXI en los trabajos de Carpenter y colaboradores (Carpenter y Franke, 2001; Carpenter et al., 2003). No obstante está relacionado con otros constructos ya existentes entre los que destacamos el pensamiento cuantitativo flexible, el sentido estructural, el pensamiento cuasivariable y las meta-estrategias conceptuales.

En el contexto del cálculo, el pensamiento cuantitativo flexible, en el sentido de Weaver (1957), implica el uso de estrategias o patrones de pensamiento no convencionales. Algunas de las estrategias propias del cálculo mental o del cálculo flexible son modos de cálculo que corresponden al uso de pensamiento relacional. Así ocurre en aquellos casos en los que el alumno no está utilizando estrategias aprendidas como procedimientos estándares, sino que está actuando de forma flexible, analizando la expresión a calcular como una totalidad, apreciando su estructura concreta, y haciendo uso de relaciones apreciadas para realizar el cálculo o transformarlo en otro más sencillo de resolver.

En el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, identificamos conexiones del pensamiento relacional con el sentido estructural (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004; Vega-Castro, Castro, y Molina, 2010), ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas como entidades (totalidades); un componente clave en la definición del pensamiento relacional. Adicionalmente, al examinarse dichas expresiones y apreciarse o establecerse relaciones, es necesario identificar subestructuras dentro de la totalidad de la expresión (en especial cuando las expresiones son complejas), compararlas entre sí y apreciar conexiones entre ellas. Todos éstos, componentes propios del sentido estructural.

En la aritmética, cuando se consideran sentencias numéricas que expresan relaciones numéricas ciertas para cualesquiera números, el uso de pensamiento relacional está relacionado con lo que Fujii y Stephens (2001) denominan pensamiento cuasivariable. Estos autores utilizan el término “cuasivariables” para referir al uso de los números en sentencias numéricas que indican una relación matemática la cual es cierta para todos los números (de un determinado conjunto numérico) que se consideren (ej., $23 + 5 – 5 = 23$, $42 + 0 = 42$). Este tipo de pensamiento es más específico que el pensamiento relacional ya que es aplicable sólo en sentencias numéricas en las que los números son utilizados para expresar particularizaciones de propiedades matemáticas. Además, el término pensamiento cuasivariable es más restrictivo en el modo en que las relaciones observadas han de estar siendo concebidas por el sujeto, al exigirse su apreciación como casos particulares de propiedades; ha de percibirse lo general en el caso particular que se observa.

En un contexto más amplio Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) refieren a meta-estrategias conceptuales, las cuales contraponen a las meta-estrategias procedimentales. Estas últimas se basan en la aplicación de ciertos procedimientos estándares aprendidos, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el pensamiento relacional y las meta-estrategias conceptuales hacen referencia a modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que la definen para construir la estrategia de resolución. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad.

Diseño y metodología del estudio empírico

La investigación que describimos a continuación es un experimento de enseñanza realizado con un grupo de estudiantes españoles de tercero de educación primaria (curso equivalente a tercero de la educación básica), dirigido a estudiar su uso y desarrollo de pensamiento relacional a lo largo de seis sesiones de trabajo en el aula.

La metodología de los experimentos de enseñanza se enmarca dentro del paradigma de la investigación de diseño[2]. Este tipo de investigaciones destacan por su potencial para desarrollar teorías sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje, de contenidos específicos, de una forma sensible a la complejidad y naturaleza sistémica de dicho proceso. Las claves se encuentran en la conjugación, de forma cíclica, de dos análisis:

a) el del proceso de aprendizaje y el de los elementos del diseño instruccional que sustentan dicho aprendizaje;

b) la dialéctica que se establece entre la teoría y la práctica por medio de procesos iterativos de interpretación de datos empíricos y de elaboración de modelos teóricos explicativos del fenómeno de aprendizaje (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

[2] Ver Molina, Castro, Molina y Castro (2011) para una descripción detallada de este paradigma metodológico.

De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

Siguiendo la propuesta Early-Algebra, se eligió el contexto de las igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas por su potencial para promover el uso de pensamiento relacional (Carpenter et al., 2003). La Tabla 1 muestra las relaciones y propiedades numéricas, relativas a la estructura aditiva del conjunto de los números naturales[3], que fueron consideradas en el diseño de las igualdades y sentencias utilizadas.

Tabla 1. Relaciones numéricas consideradas en el diseño de las igualdades y sentencias

Propiedad/relación aritmética	Ejemplo de sentencia considerada
Conmutatividad de la suma	$10+4=4+10$
No conmutatividad de la resta	$15-6=6-15$
Complementariedad de la suma y la resta	$100+94-94=100$
Compensación	$13+11=12+12$, $78-45=77-44$
Cero como elemento neutro de la suma y de la resta por la derecha	$0+325=326$, $125-0=125$
Elemento opuesto	$100-100=1$
Composición/descomposición	$78-16=78-10-6$
	$7+7+9=14+9$
Magnitud	$37+22=300$, $72=56-14$
Reflexividad de la igualdad	$93=93$, $5+5=5+5$.

Atendiendo a los resultados de un estudio previo (Castro y Molina, 2007; Molina y Ambrose, 2008) decidimos utilizar, con diferentes finalidades, igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas. Las igualdades abiertas fueron empleadas para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos así como identificar las estrategias empleadas y las dificultades manifestadas en la resolución de las mismas. Las sentencias verdaderas y falsas se utilizaron para favorecer y detectar el uso de

[3] Las sentencias que son verdaderas expresan una relación matemática que es cierta para todos los números que se consideren. Por tanto los números actúan en ellas como "cuasivariables", en términos de Fujii y Stephens (2001).

pensamiento relacional en la resolución[4] de las sentencias, promover el desarrollo de la comprensión del signo igual e identificar las estrategias utilizadas por los alumnos. Estas igualdades y sentencias fueron propuestas a los alumnos en el contexto de tareas escritas individuales, discusiones en gran grupo y entrevistas individuales; promoviendo la verbalización y discusión de las respuestas de los alumnos y el uso de multiplicidad de estrategias, especialmente aquellas que hacen uso de relaciones y propiedades aritméticas. Las igualdades concretas consideradas[5] se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Sentencias utilizadas en las sesiones 1, 2, 3, 4 y 6.

Sentencias de la Sesión 1	Sentencias de la Sesión 2	Sentencias de la Sesión 3		Sentencias de las Sesiones 4 y 6
8 + 4 = □ + 5	12 - 4 = 13 - □	72 = 56 - 14	7 + 7 + 9 = 14 + 9	18 - 7 = 7 - 18
□ = 25 – 12	9 - 4 = □ - 3	78 - 16 = 78 - 10 - 6	10 - 7 = 10 - 4	75 - 14 = 340
14 + □= 13 + 4	□ - 6 = 15 – 7	24 - 15 = 24 - 10 - 5	7 + 3 = 10 + 3	17 - 12 = 16 - 11
13 - 7 = □ - 6	14 - 9 = □ - 10	78 - 45 = 77 - 44	62 - 13 + 13 = 65	122 + 35- 35 = 122
□ + 4 = 5 + 7	17 - □ = 18 – 8	100 + 94 - 94 = 100	19 - 3 = 18 - 2	6 + 4 + 18 = 10 + 18
12 + 7 = 7 + □		27 - 14 + 14 = 26	13 + 11 = 12 + 12	75 + 23 = 23 + 75
		231 + 48 = 231 + 40 + 8	10 + 4 = 4 + 10	7 + 15 = 8 + 15
		13 - 5 + 5 = 13	0 + 325 = 326	53 + 41 = 54 + 40
		51 + 51 = 50 + 52	37 + 22 = 300	16 + 14 - 14 = 36
		15 - 6 = 6 - 15	125 - 0 = 125	257 - 34 = 257- 30 - 4
		27 - 14 + 14 = 26	7 = 12	
		93 = 93	100 - 100 = 1	
		24 - 24 = 0		

Trabajamos con un grupo de 26 alumnos de 8-9 años, en un total de seis sesiones a lo largo de un año. Este grupo de estudiantes fue elegido por su disponibilidad para participar en la investigación. Previamente a la experimentación no habían recibido enseñanza específica sobre el uso de pensamiento relacional ni sobre la resolución de sentencias o igualdades. Sí habían trabajado en momentos puntuales algunas estrategias de cálculo flexible como “trucos” que facilitan el cálculo.

La temporalización de las intervenciones en el aula fue intencionada, con la salvedad de los periodos vacacionales, para: a) favorecer que nuestra intervención en el aula tuviera

[4] Por resolución de las sentencias nos referimos a juzgar si la sentencia dada era verdadera o falsa dando una justificación de dicho juicio.
[5] Esta tabla no incluye las sentencias de la sesión 5, en la cual realizamos entrevistas individuales utilizando sentencias verdaderas y falsas similares a las de las sesiones 3, 4 y 6.

un efecto prolongado, b) disminuir la probabilidad de estar evaluando un aprendizaje memorístico, y c) contar con tiempo suficiente para analizar los resultados de cada intervención y tomar decisiones respecto a la siguiente intervención en el aula, como es propio de la metodología utilizada. En la Tabla 3 se muestra la distribución por sesión del tipo de tareas, así como los métodos de recogida de datos empleados, el número de alumnos asistentes y la temporalidad y duración de las sesiones.

Tabla 3. Características generales de la experimentación en el aula

Fecha (duración)	**NA**	**Actividades**	**Tipo de Igualdades/ sentencias**	**Recogida de datos**
23 Nov (30´)	26	Evaluación escrita Entrevistas a 4 alumnos Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
24 Ene (1h)	21	Evaluación escrita Discusión Actividad escrita Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
3 Feb (1h)	22	Discusión	Sentencias v/f	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
16 Feb (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
2 Mar (1h 50 = 13x8´)	(13)	Entrevistas individuales	Sentencias v/f	Grabaciones en audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente
16 Nov (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora-docente

NA.: número de alumnos

A lo largo de estas seis sesiones nuestro primer objetivo fue analizar la comprensión inicial de los alumnos sobre las igualdades propuestas así como detectar las estrategias que empleaban para resolverlas. La primera intervención fue también dirigida a que los alumnos se acostumbraran a que la investigadora-docente reemplazara a su profesor como docente y a la presencia de la videocámara en la clase. Así mismo, sirvió para que la investigadora-docente se familiarizara con los alumnos. Las siguientes sesiones estuvieron encaminadas a ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de las igualdades y sentencias, superar las dificultades manifestadas, promover el uso de estrategias variadas para resolver las sentencias, en especial aquellas que hicieran uso de pensamiento relacional, y analizar dichos procesos. En esta ponencia nos centramos en los aspectos que refieren al uso y desarrollo de pensamiento relacional dejando a un lado el análisis relativo a la comprensión del signo igual de los alumnos[6].

Se recogió una extensa colección de datos sobre el pensamiento de los alumnos mientras resolvían las sentencias numéricas propuestas. También recogimos datos del pensamiento y de las decisiones tomadas por los investigadores participantes durante las diferentes etapas del proceso de investigación, especialmente en las reuniones celebradas para discutir el diseño de cada intervención y el análisis de los datos de las sesiones previas.

Experimentación en el aula

Durante las seis sesiones del experimento de enseñanza, los estudiantes participaron activamente en las discusiones y actividades escritas desde el inicio. Sabían cómo resolver las igualdades y sentencias abiertas realizando cálculos y disfrutaban participando en las discusiones para explicar cómo lo habían pensado. La investigadora-docente les preguntó por formas diferentes en las que podían justificar sus respuestas y ellos se esforzaron por dar explicaciones diferentes a las de sus compañeros. En algunos casos cambiaron el orden en que realizaban las operaciones o buscaron formas diferentes de realizar una misma operación. Mostraron más dificultades para expresar su pensamiento, dando explicaciones menos precisas, cuando éste estaba basado en relaciones. En dichos casos la investigadora-docente “tradujo” las explicaciones al resto de estudiantes para facilitar la discusión de las mismas. Los estudiantes con menos habilidades aritméticas participaron raramente en las discusiones, mostrando poca confianza en su competencia matemática. En varias ocasiones solo expresaron su juicio sobre la veracidad de la igualdad o sentencia pero no justificaron su respuesta. Las actividades escritas y las entrevistas individuales, en las que se sentían menos cohibidos, fueron buenas oportunidades para acceder el pensamiento de estos estudiantes.

[6] Para más información sobre el diseño de las sesiones y su justificación ver Molina (2006). Para más información sobre la parte del estudio relativa a la comprensión del signo igual ver Molina (2006) o Molina, Castro y Castro (2009).

Uso de pensamiento relacional

Como era de esperar, a lo largo de las 6 sesiones al menos un 50% de las veces los estudiantes realizaron el cálculo del valor numérico de ambos miembros para concluir si la sentencia era verdadera o falsa[7]. Entre un 5 y un 6 % de las veces comenzaron a calcular, o incluso realizaron algún cálculo, pero algo de lo que dijeron o hicieron les condujo a reconocer y utilizar una relación que les permitía determinar la veracidad o falsedad de la sentencia. Entre un 25 y un 30% de las veces los estudiantes hicieron un uso explícito de pensamiento relacional sin realizar cálculo alguno. A continuación detallamos y damos ejemplos de cada uno de estos modos de actuación.

Las respuestas de los estudiantes muestran que al abordar una sentencia numérica, éstos detectan al menos los números, el signo igual y algunas operaciones. En algunos casos los estudiantes no mostraron reconocer ninguna relación. Así, por ejemplo, en la igualdad $257-34=257-30-4$ Clara utilizó el algoritmo estándar de la suma para realizar los cálculos que aparecen en cada miembro ($257-30=227$, $227-4=223$ y $257-34=223$) y explicó "verdadera porque 257–34 son 223 y 257 menos 30 menos 4 son 223". Noelia procedió de forma similar en la sentencia $125–125=13$. Calculó el valor numérico del miembro izquierdo, utilizando el algoritmo estándar para la resta, y entonces concluyó que era falsa explicando que el resultado del cálculo era cero y no trece.

En otras ocasiones, en cambio, tras iniciar o realizar un cálculo algunos estudiantes mostraron cambiar la forma en que estaban atendiendo a la sentencia. Este es el caso por ejemplo de Felipe que en su trabajo en la sentencia $51+51=50+52$ afirmó que era verdadera y explicó: "es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas, cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno, del otro, uno más, y te da cincuenta y dos". El trabajo de Maite en la sentencia $75+23=23+75$ también puso de manifiesto este cambio en la atención y actuación de la estudiante. Esta alumna escribió primero $75+23$ en formato vertical para sumarlo por columnas, pero de pronto paró y explicó: "verdadera porque es igual" no continuando con el cálculo iniciado. Otro ejemplo es el de Clara en la sentencia $7+7+9=14+9$; ella justificó la veracidad de la sentencia de dos formas diferentes. En primer lugar aludió a que las

[7]Los porcentajes que aquí se presentan no suman 100% porque algunas explicaciones de los alumnos no permiten identificar si hicieron uso o no de pensamiento relacional.

expresiones en ambos miembros tenían como resultado 23 ("Porque….porque nueve más siete son dieciséis, más siete, veintitrés, y… catorce más nueve dan veintitrés"). Una segunda explicación mostró uso de pensamiento relacional: "sumando siete más siete… sumando siete más siete que dan catorce, lo mismo que ahí, nueve lo mismo que ahí también". Tras calcular o simplemente utilizar el hecho numérico $7+7=14$ que le podía ser conocido, la presencia del 14 fue lo suficientemente fuerte como para llevar Clara a dirigir su atención hacia el lado derecho de la sentencia. De este modo detectó dos expresiones idénticas $14+9$ y $14+9$, que pueden reconocerse como iguales sin necesidad de realizar cálculo alguno.

Entre el 25% y el 30% de las veces, los estudiantes procedieron directamente a usar relaciones sin ningún intento manifiesto previo de realizar cálculos. Este es, por ejemplo, el caso de David en la sentencia $122+35-35=122$. Este estudiante no realizó ningún trabajo escrito sobre esta sentencia y explicó: "verdadera porque es [como] si le das el número y luego lo recuperas". Otro ejemplo de este uso de pensamiento relacional lo encontramos en la explicación de Carmen en la sentencia $13+11=12+12$: "he pensado que a trece le puedo quitar una y te quedan doce, y ese uno se lo he puesto al once y me sale doce más doce igual a doce más doce". Para llevar a cabo estas explicaciones, los estudiantes necesitaron considerar la sentencia como un todo, discernir y atender a los números y operaciones involucradas, y reconocer relaciones entre ellos. Su atención habría estado dominada por el reconocimiento de relaciones.

¿Qué motivó que los alumnos actuaran de una u otra forma en una determinada sentencia? Para dar respuesta a esta cuestión analizamos a continuación los diferentes modos de actuación de cada estudiante en un grupo de sentencias trabajadas en una misma sesión y la evolución del uso de pensamiento relacional que se detecta a lo largo de las seis sesiones.

Cambios de actuación en una misma sesión

En una misma sesión de trabajo en el aula los estudiantes mostraron diferentes modos de actuación según la sentencia con la que estuvieran trabajando. Para dar muestra de ello comparamos la resolución de varios estudiantes a la evaluación escrita propuesta en la sesión 4. En primer lugar consideramos el trabajo de José en dicha tarea (ver tabla 4).

Aunque su pensamiento no es claro en algunos casos, debido a la falta de detalle de sus explicaciones, algunas de sus respuestas sugieren diferencias en la forma que aborda diferentes sentencias. José procedió de forma relacional en las sentencias $75-14=340$ y $6+4+18=10+18$. En la primera de ellas compara el tamaño relativo de los números en ambos miembros y concluye que la igualdad es imposible, es decir, es falsa. En la otra sentencia reconoce la equivalencia de ambos miembros realizando el cálculo $6+4=10$ y reconociendo mismidad[8] entre ambos miembros, la cuál expresó escribiendo $10+18=10+18$. Sin embargo, en las sentencias $122+35-35=122$ y $16+14-14=36$ opera las expresiones del miembro izquierdo, procediendo de izquierda a derecha, y compara los valores numéricos obtenidos con el número que aparece en el miembro derecho de la sentencia. La atención de José pudo haber estado influenciada por el tipo de sentencia: con operaciones en ambos lados del signo igual o sólo en uno de ellos. Su enfoque tendió a ser computacional a la hora de abordar el segundo tipo de sentencias y relacional en el primer tipo, con algunas excepciones.

En las respuestas de otros estudiantes a la misma tarea observamos diferentes patrones en los cambios manifestados en su manera de abordar unas sentencias y otras. David calcula el valor numérico de ambos miembros en todas la sentencias salvo en $18-7=7-18$ y $122+35-35=122$. El pensamiento de David es principalmente computacional pero en la sentencia $122+35-35=122$, sin hacer ningún cálculo explicó: "verdadera porque es [como] si le das el número y luego lo recuperas". En este caso conjeturamos que los números más grandes pudieron inducirlo a atender a relaciones entre los términos que no reconoció después en la sentencia $16+14-14=36$ donde su pensamiento pudo ser más concreto y computacional debido a su familiaridad con estos números más pequeños. Aunque para algunos estudiantes los números grandes son obstáculos, pueden favorecer que la atención sea dirigida a la estructura de las sentencias movidos por la motivación de evitar cálculos engorrosos. Zazkis (2001) utiliza esta idea como una herramienta pedagógica para ayudar a los estudiantes a ver el general en lo particular y centrarse en apreciar la estructura, razonar en base a ella y expresarla. En términos de Fujii y Stephens (2001), los números grandes tienden a ser considerados más fácilmente como cuasivariables.

[8] Utilizamos el término mismidad, en vez de igualdad, para referir a la relación de igualdad/equivalencia matemática, reservando el término igualdad para la representación de dicha relación, es decir, para referir a expresiones aritméticas o algebraicas que contienen el signo igual y expresan una relación verdadera.

Tabla 4. Respuestas de José a la evaluación escrita de la sesión 4

Sentencia	Explicación
18 – 7 = 7 – 18	Verdadera porque 18 – 7 es = 7 – 18 es lo mismo
75 – 14 = 340	Falsa porque 75–14 no puede dar 340
17 – 12 = 16 – 11	Verdadera porque 17 – 12 es = que 16 – 11
122 + 35 – 35 = 122	Falsa porque 122 + 35 = 175 175 – 35 = 140 por eso no da 122 (calcula mediante el algoritmo de la resta 175 – 35= 140)
6 + 4 + 18 = 10 + 18	Verdadera porque 6 + 4 = 10 + 18 = 10 + 18 es lo mismo en las dos cuentas
75 + 23 = 23 + 75	Verdadera porque 75 + 23 es lo mismo que 23 + 75
7 + 15 = 8 + 15	Falsa porque 7 + 15 son 22 y 8 + 15 son 23
53 + 41 = 54 + 40	Verdadera porque 53 + 41 son 91 y 54 + 40 son 94
16 + 14 – 14 = 36	Falsa porque 16 + 14 son 30 – 14 son 20
257 – 34 = 257 – 30 – 4	Verdadera porque 257 –34 son 223 y 257 – 30 – 4 son 223

En el caso de Elena se detecta un comportamiento diferente al poner de manifiesto pensamiento relacional cuando trabaja en la mayoría de las sentencias de dicha evaluación. Calculó los valores numéricos de ambos miembros para resolver la sentencia $17-12=16-11$ pero después de hacer lo mismo en la sentencia $53+41=54+40$ explicó: "verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40, te da lo mismo”. En la sentencia $7+15=8+15$ también hizo el cálculo antes de expresar que no podía ser verdadera debido a una diferencia de magnitud entre las expresiones a ambos lados del signo igual. Elena prestó atención a las relaciones posteriormente a realizar el cálculo. En su caso, el tamaño de los números no pareció influir su enfoque pero sí las relaciones involucradas en el diseño de las sentencias, siendo la relación de compensación la que le resultó más difícil de reconocer.

En la misma tarea, Maite mostró utilizar pensamiento relacional en las siguientes sentencias que incluyen operaciones y términos iguales en ambos lados: $75+23=23+75$, $7+15=8+15$ y $18-7=7-18$. En el resto de las sentencias calculó y comparó el valor numérico de ambos miembros pero en estas tres sentencias, tras iniciar el cálculo o la escritura de los números en vertical para operar por columnas, reconoció mismidad o “casi mismidad” entre las expresiones a ambos lados del signo igual y utilizó esta relación para concluir su respuesta (ver tabla 5). Con su comportamiento Maite muestra una tendencia a calcular como primera reacción al abordar la resolución de una sentencia, pero muestra que en algunas de las sentencias su atención no estaba completamente tomada por los cálculos, lo que le permite reconocer algunas relaciones básicas entre las expresiones en ambos miembros. La principal diferencia entre la actuación de Maite y de Elena en la evaluación escrita de la sesión 4, fue las relaciones que utilizaron para argumentar sus respuestas en los casos en que hicieron uso de pensamiento relacional. Mientras que Elena expresó relaciones relativas a diferencias de magnitud entre términos, a la compensación de ciertas modificaciones en los términos que dan igual resultado, entre otras, las relaciones expresadas por Maite fueron únicamente de mismidad o no mismidad de términos, lo que la condujo a realizar una afirmación incorrecta en la sentencia $18-7=7-18$ (ver Tabla 5).

Tabla 5. Respuestas de Maite a la evaluación escrita de la sesión 4 en las que muestra uso de pensamiento relacional

Sentencia	Explicación
18 – 7 = 7 – 18	Verdadera porque los dos son iguales (calcula mediante el algoritmo de la resta 18 – 7 = 01)
75 + 23 = 23 + 75	Verdadera porque es igual (comienza a escribir verticalmente 75 + 23)
7 + 15 = 8 + 15	Falsa porque es casi igual pero no es igual (calcula mediante el algoritmo de la suma 15 + 7 = 22)

Estos ejemplos ilustran un cambio detectable en el modo de resolver y atender a las sentencias cuando los estudiantes trabajaron individualmente en un grupo de sentencias. Estos cambios parecen deberse a una variedad de influencias:

a) la presencia de operaciones en ambos lados del signo igual en vez de en uno sólo (es decir, la estructura de la sentencia),
b) la magnitud de los números involucrados,
c) la mayor o menor tendencia computacional del estudiante,
d) la carga cognitiva de la tarea para el estudiante, lo que condiciona la atención libre del mismo para percibir relaciones, y
e) el tipo de relación que podía detectarse en la sentencia para juzgar su veracidad.

En relación a este último factor se observó que algunas relaciones (ej., mismidad) fueron más fácilmente reconocidas por los estudiantes que otras (ej., compensación). Incluso aquellos estudiantes que eran más tendentes al cálculo tendían a no operar en las sentencias que incluían relaciones relativas al cero ($a+0=a$; $a-0=a$; $a-a=0$). Las sentencias que involucran la propiedad conmutativa también promovieron más frecuentemente el uso de pensamiento relacional. En la sesión 3, ninguno de los estudiantes que participaron en la discusión sobre la sentencia $10+4=4+10$ realizaron cálculos. En las sesiones 4 y 6, sólo 5 y 8 estudiantes, respectivamente, resolvieron la sentencia $75+23=23+75$ mediante el cálculo del valor numérico de ambos miembros. En las sentencias basadas en la relación de composición/descomposición, así como sobre la relación complementaria de la suma y la resta, la mitad de los estudiantes precedieron computacionalmente y la otra mitad relacionalmente. En ese último caso se detectó un mayor uso de métodos computacionales cuando intervenían números pequeños. En las sentencias basadas en la relación denominada magnitud (ver tabla 1), durante la discusión de la sesión 3 los estudiantes mostraron el uso de ambos tipos de métodos, pero el enfoque computacional se hizo más frecuente en las sesiones 4 y 6. Esta tendencia se aprecia especialmente en las sentencias que incluían operaciones sólo en uno de los miembros. Conjeturamos que esto puede ser resultado del hecho de que estas sentencias no incluirán números iguales en ambos miembros, mientras que las otras sí lo hacían. Las sentencias basadas en la relación de compensación fueron las que menos frecuentemente se abordaron utilizando pensamiento relacional, en especial las que involucraban restas.

Desarrollo de pensamiento relacional a lo largo de las sesiones

En un principio, en las sesiones 1 y 2, el cálculo y comparación de los valores numéricos de cada miembro de la sentencia fue la estrategia más común. Cuando se le preguntó por formas diferentes de resolver una misma sentencia, los estudiantes tendieron a proponer un orden diferente en el que realizar los cálculos. Sólo tres estudiantes de manera espontánea mostraron uso de pensamiento relacional, concretamente en las sentencias $12+7=7+\square$, $9-4=\square-3$, $12-4=13-\square$ y $15-15=0-0$. Sin embargo, a partir de la sesión 3, cuando comenzó a promoverse explícitamente el uso de pensamiento relacional pidiéndoles a los estudiantes que intentaran resolver las sentencias sin realizar los cálculos, más estudiantes y más frecuentemente reconocieron relaciones que utilizaron para resolver las sentencias. En total 14 de 18, 19 de 24, 11 de 13 y 17 de 24 estudiantes, respectivamente, pusieron de manifiesto uso de pensamiento relacional en las últimas cuatro sesiones (ver Tabla 6).

Tabla 6. Evidencias de pensamiento relacional por sesión

			Evidencian pensamiento relacional	
Sesión	Asisten	Participan	Mínimo	Máximo
1	26	26	1	1
2	21	21	2	3
3	22	18	12	14
4	25	24	17	19
5	13	13	10	11
6	24	24	13	17

Todos salvo dos o tres estudiantes resolvieron las sentencias por lo menos una vez utilizando pensamiento relacional en vez del cálculo y la comparación de los valores numéricos de ambos miembros. Curiosamente, tres estudiantes dieron evidencia de pensamiento relacional sólo durante la entrevista. Por ejemplo Roberto lo utilizó al ofrecer las siguientes explicaciones en las sentencias $13+5=5+13$ y $26-8=100$: “[verdadera] porque es lo mismo, sólo que del revés” y “falsa… porque si fuese… es veintiséis menos ocho y es igual a cien y entonces como es menos, es quitar, y tiene que ser hasta cien. Porque el cien es mayor que…que ese, que la resta esa”. Este estudiante no dio muestras de pensamiento relacional en las sesiones previas, pero tampoco mostró ninguna dificultad especial en las tareas propuestas. En las entrevistas de la sesión 5 cinco de los trece entrevistados mostraron un uso más frecuente de pensamiento relacional que en sesiones anteriores. Por ejemplo, David había mostrado sólo un uso aislado de pensamiento relacional en una sesión previa (en la sentencia $122+35-35=122$), pero en la entrevista utilizó pensamiento relacional en todas las sentencias que se le presentaron: $13+5=5+13$, $26-8=100$, $8+6=4+4+6$, $11-6=10-5$, $11+7=10+8$, $19-13=9-3$.

A partir de estos resultados conjeturamos que el pensamiento relacional puede no hacerse evidente a menos que los estudiantes están inmersos en una cultura que explícitamente valore el reconocimiento de relaciones y la percepción de propiedades de las cuales son casos particulares. No es que los estudiantes no puedan o no piensen en relaciones, sino más bien depende de lo que es promovido en las aulas.

Discusión y conclusiones

Los resultados del experimento de enseñanza presentados evidencian parte del potencial del cambio curricular que propone el Early-Algebra, así como un modo factible de ponerlo en práctica, en un contexto muy concreto, utilizándose el pensamiento relacional como un constructo clave en la operativización de esta propuesta. Permite, además, mostrar la capacidad de alumnos de 8-9 años para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

En dicho contexto de aula, se ha mostrado que desde el primer momento en que el uso de pensamiento relacional fue promovido en el aula, éste fue puesto de manifiesto. Este hecho evidencia que es un tipo de pensamiento que los alumnos desarrollan a partir de su aprendizaje y experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza. El uso de pensamiento relacional presenta una importante componente individual, manifestándose como un tipo de pensamiento que los alumnos no desarrollan o manifiestan de forma semejante como resultado de la enseñanza aritmética recibida. Algunos alumnos muestran no prestar atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de ésta, evidenciando cierta rigidez al abordar la resolución de las sentencias considerando las expresiones que componen ambos miembros como cadenas de operaciones a realizar. Son variables tanto la frecuencia de uso del pensamiento relacional como los factores que lo condicionan. Al listado de factores ya mencionados, añadimos dos más generales: el conocimiento aritmético previo de los estudiantes y la cultura del aula. El primero de ellos determina, por ejemplo, el modo en que los estudiantes conciben los números, los hechos numéricos que conocen y el conocimiento ya sea implícito o explicito de las propiedades aritméticas. Respecto a la cultura del aula, los resultados apoyan la argumentación de Arcavi (2006) sobre la influencia de ésta en lo que se aprende y lo que se desarrolla y en romper la rutina automática, en este caso, la rutina computacional.

Conclusiones Generales

Recientes publicaciones en la línea de la propuesta Early-Algebra evidencian un acuerdo cada vez más general en la comunidad investigadora internacional en que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la educación básica; acuerdo que ya se está viendo reflejado en las propuestas curriculares de algunos países. A partir de experiencias locales focalizadas en aspectos diversos del pensamiento algebraico, se ha puesto de manifiesto la potencialidad de la algebrización del currículo para enriquecer la enseñanza tradicional de las matemáticas, en todos los niveles educativos, facilitando el desarrollo de un aprendizaje más profundo e integrado de la aritmética y el álgebra, así como la viabilidad de esta propuesta desde los primeros niveles de la educación básica. Estas investigaciones dan muestra de tareas que pueden integrarse en la actividad matemática de la educación básica para promover el uso y desarrollo de pensamiento algebraico[9] y describen su puesta en práctica en contextos concretos. Llegados a este punto, se hace necesario dirigir la atención a la aplicación de esta propuesta a mayor escala para que los cambios curriculares que ya se están produciendo tengan el deseado impacto en la práctica escolar. Así mismo, interesa profundizar en la influencia de este cambio curricular en la enseñanza de las matemáticas, y particularmente del álgebra, en los niveles educativos superiores y en la integración de esta propuesta en los planes de formación de docentes de educación básica. En esta línea, trabajos como la tesis doctoral de Pimentel (2010) en el que analiza el desarrollo de conocimiento matemático y didáctico, relacionado con el pensamiento algebraico, de varios profesores en el marco de un Programa de Formación Continua en Matemáticas para Profesores de 1º Ciclo de la Enseñanza Básica, implantado a nivel nacional en Portugal en 2005, son un primer avance.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2008-2011 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

[9] Consultar Canavarro (2009) para ver una recopilación de algunas de estas tareas.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de profesores* (pp. 29-47). Caminha, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portugesa de Ciências da Educação.

Bastable, V., y Schifter, D. (2007). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. En R. Sutherland (Ed.), *Algebraic processes and structur*es (pp. 99–119). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Brizuela, B. M., y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2 (pp. 137-144). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Canavarro, A. P. (2009). El pensamiento algebraico en el aprendizaje de la Matemática los primeros años. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Carpenter, T. P., y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.155-162). Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000, octubre). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tucson, Arizona.

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2), 67-94.

Da Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de profesores (pp. 5-27). Caminha, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portugesa de Ciências da Educação.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 195-208.

Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

Empson, S. B., Levi, L., y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 5,* 391-412.

Fujii, T., y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 258-264). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hejny, M., Jirotkova, D., y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME Program Committee.

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: ERME.

Hoch, M., y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J., Carraher, D.W., y Blanton, M. L. (2009). *Algebra in the Early Grades.* Taylor & Francis Group.

Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Drury, H., y Bills, E. (2007). Explorations in the zone of proximal awareness. En J. Watson y K. Beswick (Eds.) *Mathematics: Essential Research, Essential Practice: Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 1, pp. 42-58). Adelaide: MERGA.

Ministério da Educação–Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (ME-DGIDC) (2007). Proposta de reajustamento do programa de matemática do Ensino Básico.

Moss, J., y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441–465

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/544

Molina, M., y Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61–80.

Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17,* 7(1), 341-368.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Molina, M., y Mason, J. (2009). Justifications-on-demand as a device to promote shifts of attention associated with relational thinking in elementary arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(4), 224-242.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

Pimentel, T. (2010). O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?. Tesis doctoral. Braga, Portugal: Universidade do Minho.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Steffe, L., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Stephens, M. (2007). Students' emerging algebraic thinking in primary and middle school years. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 678-687). Adelaide, Australia: MERGA Inc.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.

Vega-Castro, D., Castro, E., y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. Comunicación presentada en el *Seminario del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico en el XIV simposio de la SEIEM* (7-10 Septiembre 2010). Lérida, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1555/

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.

Weaver, J. F. (1957). Developing flexibility of thinking and performance. *Arithmetic Teacher, 4*(4), 184-188.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 676–681). Melbourne, Australia: University of Melbourne.