II JORNADAS DE INNOVACIÓN DOCENTE, TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y DE LA COMUNICACIÓN E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA EN LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA 2008

DISEÑO DE PRÁCTICAS EN LA GEOMETRÍA PARA MAESTROS

Pilar Bolea, María Consuelo Cañadas, Eva Cid, Rafael Escolano, José María Gairín, Raquel Ibáñez, José María Muñoz, Julio Sancho

Síntesis:

En este trabajo se describe un proyecto de innovación docente implementado durante el curso 2006-07 y subvencionado en la convocatoria de ayudas PIIDUZ/2006 de la Universidad de Zaragoza. El ámbito docente del proyecto fueron las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica II de las distintas diplomaturas de Maestro. En la experiencia intervinieron profesores del área de Didáctica de las Matemáticas de las Facultades de Huesca, Teruel y Zaragoza en las que se imparten estas asignaturas. El objetivo del trabajo es diseñar, implementar y evaluar las prácticas de estas asignaturas con la finalidad de que los futuros maestros alcancen una mayor competencia en su tarea de enseñar geometría en la educación primaria. De este modo, continuamos la labor de diversificación y adecuación al EEES de nuestra práctica docente, tratando de hacerla más compatible con los procesos de aprendizaje del estudiante, futuro maestro.

Palabras clave

Formación inicial de maestros, educación primaria, geometría elemental, didáctica de la geometría, adecuación metodológica al EEES.

1. Introducción

Las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica I y Matemáticas y su Didáctica II forman parte de los planes de estudio de todas las titulaciones de Maestro que se cursan en la Universidad de Zaragoza. Son asignaturas obligatorias de cuatro créditos que se imparten en primer curso. En la primera se estudia la aritmética elemental y su didáctica y en la segunda, la geometría elemental y su didáctica, y su objetivo es contribuir a la formación del maestro generalista, objetivo que se contempla en todas las especialidades pues, según la legislación vigente, el título de Maestro capacita para enseñar las materias generalistas (lengua, matemáticas, conocimiento del medio social y natural y plástica) en la Educación Primaria, independientemente de la especialidad cursada.

Con este trabajo pretendemos iniciar en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica II la diversificación metodológica y adecuación al EEES ya realizada anteriormente en Matemáticas y su Didáctica I. Para ello, empezaremos por diseñar las prácticas de la asignatura, entendiendo por tal, sesiones presenciales de dos horas de duración en las que los estudiantes, organizados en pequeños grupos y atendidos por dos profesores, llevan a cabo distintas experiencias manipulando materiales didácticos, al objeto de contestar a las preguntas que se les plantean en el guión de prácticas.

La puesta en marcha de estas prácticas, no sólo responde a las razones de adecuación y diversificación metodológica ya comentadas, sino que las consideramos un medio didáctico fundamental para ayudar a nuestros estudiantes a mejorar sus concepciones sobre la geometría y sobre la enseñanza de la geometría y a familiarizarse con diferentes recursos didácticos que como futuros maestros deben conocer, lo que está muy lejos de conseguirse con la clase tradicional.

Pero, además, nos mueve el deseo de coordinar la docencia de asignaturas que, aun perteneciendo a distintas especialidades de Maestro e impartiéndose en diferentes Centros, responden a unos mismos objetivos didácticos, razón por la que se han incorporado al proyecto profesores de las tres Facultades que imparten las diplomaturas de Maestro en la Universidad de Zaragoza. Creemos que esto puede contribuir a mejorar la docencia de esta asignatura y a homogeneizarla en las distintas especialidades y centros.

2. Objetivos de la experiencia

Los objetivos de la experiencia son los siguientes:

- Consolidar un grupo de innovación docente en el área de Didáctica de las Matemáticas en el que participen profesores con destino en las tres facultades que imparten las titulaciones de Maestro.
- Coordinar las enseñanzas de las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica II de las distintas especialidades de las diplomaturas de Maestro impartidas en los tres centros.
- Iniciar la diversificación y adecuación metodológica al EEES de las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica II mediante el diseño de sesiones de prácticas.

- Ayudar a los futuros maestros a mejorar sus concepciones sobre la geometría y sobre la enseñanza de la geometría para que pueden desarrollar su tarea profesional con mayor pertinencia y eficacia.
- Dar a los futuros maestros la oportunidad de familiarizarse con los distintos materiales didácticos que pueden utilizarse para la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria.
- Fomentar la relación personal de los estudiantes de Magisterio entre ellos y con los profesores para motivar su aprendizaje.

3. Análisis del contexto

La asignatura Matemáticas y su Didáctica II tiene la responsabilidad de la formación en geometría del futuro maestro, tanto en su vertiente de conocimiento matemático como de conocimiento didáctico. Por consiguiente, sus objetivos y contenidos vienen fuertemente determinados por el conocimiento geométrico que se pretende enseñar en la Educación Primaria y las consideraciones metodológicas al respecto.

Si analizamos el "Real decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación Primaria" y el currículo de la Educación Primaria de Aragón, nos encontramos con un fuerte énfasis en la construcción social y experiencial del conocimiento matemático, siendo la resolución de problemas el eje vertebrador del aprendizaje. Según estos documentos, los contenidos matemáticos deben presentarse tomando como referencia lo que resulta familiar y cercano al niño y abordarse en contextos de resolución de problemas. El niño construye el conocimiento nuevo y afianza lo ya conocido buscando estrategias que solucionen los problemas, a través de la manipulación del entorno físico y de la interacción social con el maestro y con sus compañeros,. De esta manera, se dota de significado al conocimiento y se pone de manifiesto su funcionalidad, al mismo tiempo que se desarrollan competencias de comunicación y razonamiento.

Si nos referimos en particular al aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, los documentos arriba mencionados hablan de que el niño debe ser capaz de observar, dibujar, construir, reconocer, describir, comparar, clasificar, relacionar, desplazar, medir y desarrollar objetos geométricos, así como, de conjeturar, comunicar y verificar propiedades y de aplicar el conocimiento geométrico a situaciones problemáticas de su entorno familiar o escolar.

Sin embargo, nuestra experiencia profesional nos dice que los futuros maestros están muy poco preparados para asumir el papel que la administración educativa les adjudica en el ámbito de la enseñanza de la geometría. En general, se podría decir que mayoritariamente tienen una concepción de la geometría y su didáctica caracterizada de la siguiente manera:

- Entienden la geometría como un conocimiento no problematizado; para ellos es simplemente una taxonomía de objetos que hay que memorizar. En consecuencia, enseñar geometría es mostrar unos pocos objetos geométricos, nombrarlos y describirlos someramente. No conocen ni saben construir situaciones problemáticas en las que intervengan dichos objetos y la única tarea que consideran oportuno encomendar a los niños es que los reconozcan a partir de un dibujo estereotipado y memoricen su nombre y algunas de sus propiedades.

- Es una geometría fuertemente aritmetizada o algebraizada. No conciben que se pueda hacer geometría sin medida y llegan a confundir los objetos geométricos con su medida, de manera que, por ejemplo, no "ven" la altura de un triángulo como un segmento, sino como un número. Esto les lleva a confundir también la enseñanza de un objeto geométrico con la enseñanza de la magnitud que mejor lo caracteriza: la longitud en el caso de los segmentos, la amplitud en el caso de los ángulos, etc.

  Por otra parte, los únicos problemas geométricos que conocen son los referentes a longitudes, áreas y volúmenes y a la semejanza y las relaciones métricas en el triángulo. Es decir, problemas cuya solución viene dada por una sucesión de operaciones aritméticas o de cálculos algebraicos y que muchas veces no son más que pretextos para seguir ejercitando la aritmética o el álgebra antes que la geometría.

- El conocimiento que poseen de los objetos geométricos es bastante pobre. Desconocen muchas de sus propiedades elementales y de las relaciones entre ellos. Si se representa una misma figura geométrica en dos posiciones distintas tienen dificultades para entender que son iguales, es decir, no tienen asumida la invarianza de las figuras por los movimientos. Están acostumbrados a representaciones gráficas muy estereotipadas, constituidas por figuras cuasirregulares puestas siempre en las mismas posiciones y con determinadas dimensiones, y si se les muestra un dibujo en el que cambia alguno de esos aspectos ya no reconocen el objeto geométrico que representa. De la misma manera, si se les pide que dibujen una figura tienden siempre a hacerlo siguiendo esos mismos criterios; por ejemplo, ante la petición de que dibujen un cuadrilátero, dibujan un cuadrado.

– Aun cuando la geometría que manejan es básicamente una geometría métrica, no están realmente familiarizados con los procesos de medida ni con las magnitudes. Conocen las unidades del Sistema Métrico Decimal y el paso de unas unidades a otras, pero no están acostumbrados a medir, a elegir la unidad más adecuada en cada caso, a utilizar unidades no convencionales, a aproximar la medida y decidir cuándo el error es despreciable, ni a medir a través de representaciones hechas a escala. En el caso del área y el volumen, ni siquiera están familiarizados con la medida directa de estas magnitudes y piensan que la única forma de medirlas es utilizando las fórmulas de las áreas y volúmenes.

  En consonancia con esta forma de entender la magnitud y la medida, confunden la enseñanza del área y el volumen con la enseñanza de las fórmulas correspondientes, sin tener en cuenta la necesidad de que el niño le dé sentido a la magnitud a través de comparaciones y procesos de medida directos.

– No tienen buenas técnicas de construcción de figuras planas con regla y compás o de cuerpos en el espacio con diversos materiales. También se encuentran con muchas dificultades a la hora de hacer representaciones planas de cuerpos en el espacio o de construir un objeto en tres dimensiones a partir de su representación plana, y de representar o reproducir objetos geométricos hechos a escala.

– Consideran que definir consiste en amalgamar todas las propiedades que conocen del objeto geométrico, en vez de elegir el menor conjunto de propiedades necesario para poder deducir, a partir de él, todas las demás. Tampoco asumen que un mismo objeto geométrico pueda tener definiciones diferentes, según que se recurra a unas u otras de las propiedades que lo caracterizan.

– Desde el momento que viven una geometría no problematizada, el razonamiento lógico relativo a este ámbito no es necesario y no lo han desarrollado. Como consecuencia, cuando se encuentran ante una situación problemática se observan sus dificultades para conjeturar, encontrar contraejemplos, generalizar, determinar el campo de validez de una proposición, clasificar siguiendo un criterio, encadenar un razonamiento deductivo sencillo, etc. Además muestran una actitud de fuerte rechazo ante la demostración geométrica: no entienden su necesidad, ni el papel que juega la representación gráfica, ni la obligación de basar la deducción en axiomas o propiedades anteriormente demostradas, ni que en el encadenamiento lógico deductivo que lleva de la hipótesis a la tesis no se puede usar esta última.

– Por último, desconocen en buena medida la utilidad social de la geometría y, por tanto, los recursos didácticos y aplicaciones que ofrece el mundo físico para su enseñanza. Tampoco saben de los muchos materiales manipulativos y software informático que hoy en día pueden ser utilizados con bastante provecho en el aula.

Por tanto, el diseño de la asignatura en general y de sus prácticas en particular debe contemplar e intentar acortar la distancia entre la situación inicial de los alumnos aquí descrita y lo que la administración educativa espera de ellos en su futuro quehacer profesional.

4. Competencias a desarrollar en la asignatura

Con la enseñanza de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica II pretendemos que los maestros en formación desarrollen las siguientes competencias disciplinares y profesionales:

Competencias disciplinares en el ámbito de la geometría

– *De visualización*: reconocer las figuras planas, las relaciones entre ellas, los elementos que las componen y sus regularidades, a través de sus representaciones gráficas o sus reproducciones con algún material; reconocer los cuerpos en el espacio, las relaciones entre ellos, los elementos que los componen y sus regularidades, a partir de sus reproducciones materiales en tres dimensiones o de sus representaciones gráficas en dos dimensiones; reconocer formas semejantes; reconocer las secciones de las formas geométricas; reconocer formas geométricas en los objetos del mundo sensible; reconocer el movimiento de las formas geométricas y su deformación topológica; establecer las posiciones relativas de los objetos a partir de mapas.

– *De construcción*: representar gráficamente mediante distintos útiles de dibujo o mediante software informático, o construir mediante diferentes materiales, figuras planas que cumplan propiedades establecidas de antemano; representar gráficamente en dos dimensiones, o construir en tres dimensiones, cuerpos espaciales que cumplan propiedades establecidas de antemano; pasar de la representación tridimensional a la bidimensional y viceversa; construir formas geométricas a partir de modelos; representar gráficamente el movimiento de las formas geométricas y su deformación topológica; seccionar cuerpos geométricos para obtener figuras planas determinadas de antemano; trazar mapas que indiquen las posiciones relativas de diferentes objetos.

– *De medida*: discriminar las distintas magnitudes geométricas; comparar diferentes cantidades de magnitud sin utilizar la medida; medir directamente con unidades de medida convencionales y no convencionales; construir instrumentos de medida; aproximar la medida; pasar de unas unidades a otras; medir mediante procedimientos indirectos; representar gráficamente o construir objetos geométricos que tengan determinadas medidas; encontrar la razón de semejanza de formas semejantes y construir formas geométricas con una razón de semejanza dada; utilizar escalas; localizar posiciones a partir de mapas hechos a escala; trazar mapas a escala.

– *De comunicación*: leer e interpretar información geométrica presentada en diferentes formatos; comunicar oralmente o por escrito información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando tanto el lenguaje natural como el simbólico; describir los objetos geométricos, sus propiedades y relaciones, y explicar y argumentar con precisión y concisión.

– *De razonamiento*: inferir un objeto geométrico a partir de sus propiedades; identificar el conjunto mínimo de propiedades que definen un objeto; clasificar objetos geométricos siguiendo uno o varios criterios; descubrir regularidades, relaciones y analogías; conjeturar propiedades generales a partir de casos particulares; establecer el campo de validez de una propiedad; formular contraejemplos; construir razonamientos deductivos informales utilizando diferentes representaciones; seguir razonamientos deductivos formales; completar argumentos deductivos formales; reconocer inconsistencias en un razonamiento deductivo formal.

– *De modelización*: utilizar el conocimiento geométrico para dar respuesta a situaciones problemáticas del mundo sensible; utilizar el conocimiento aritmético y algebraico para resolver problemas geométricos.

Competencias profesionales en el ámbito de la enseñanza de la geometría

– Promover el aprendizaje autónomo de los niños a través de situaciones de resolución de problemas, desarrollando estrategias didácticas que eviten la exclusión y la discriminación.

– Analizar y cuestionar las directrices curriculares de la administración educativa y las propuestas de enseñanza de los libros de texto.

– Elaborar unidades didácticas de geometría que sean correctas desde el punto de vista del saber geométrico y adecuadas al nivel de conocimiento de los niños.

– Seleccionar o construir materiales didácticos que aporten a los niños la base experiencial necesaria para aprender geometría.

– Evaluar el grado de pertinencia de las secuencias didácticas utilizadas para enseñar la geometría y el del aprendizaje producido en los niños.

– Mejorar las secuencias didácticas utilizadas para enseñar la geometría de acuerdo con la información obtenida en el proceso de evaluación.

5. Objetivos y contenidos de la asignatura

Los objetivos de la asignatura son:

– Modificar las concepciones geométricas de los alumnos acercándolas a las de los matemáticos e incorporando elementos epistemológicos, fenomenológicos e institucionales necesarios para la enseñanza de la geometría.

– Desarrollar las competencias disciplinares y profesionales comentadas en el apartado anterior.

En cuanto a los contenidos, dado el escaso número de créditos de la asignatura, se tomó la decisión de limitar el contenido geométrico al que se imparte en la Educación

Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria, con exclusión de la trigonometría. Además, el deseo de romper con la concepción fuertemente aritmetizada que nuestros alumnos tienen de la geometría, nos llevó a definir un primer tema de geometría sin medida, para hacerles ver que la geometría elemental es un mundo muy rico y que no se limita al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Por estas razones, los contenidos de la asignatura se articulan en tres bloques temáticos:

1. Geometría de las formas
2. Geometría de los tamaños
3. Geometría de las posiciones

En cada bloque se trabaja primero la parte matemática y después la parte didáctica. Cada bloque va acompañado de una hoja de problemas de geometría y otra de casos prácticos de enseñanza de la geometría con sus correspondientes soluciones. Todo este material se ha puesto a disposición de los estudiantes.

El desglose temático de cada bloque es el siguiente:

1. *Geometría de las formas*: epistemología y fenomenología de las figuras y cuerpos geométricos; puntos, rectas y planos; movimientos e igualdad de figuras y cuerpos; segmentos y ángulos en el plano y en el espacio; polígonos; circunferencia y círculo; poliedros; cuerpos de revolución; desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje; orientaciones curriculares; secuencias y recursos didácticos.

2. *Geometría de los tamaños*: epistemología y fenomenología de las magnitudes geométricas; longitud de segmentos; amplitud de ángulos; área y perímetro de las figuras planas; proporcionalidad y semejanza; relaciones métricas en el triángulo; volumen y superficie de los cuerpos en el espacio; desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje; orientaciones curriculares; secuencias y recursos didácticos.

3. *Geometría de las posiciones*: epistemología y fenomenología de las posiciones en el plano y en el espacio; distancias; sistemas de referencia; longitud y latitud terrestres; localización y determinación y de posiciones; mapas; escalas; desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje; orientaciones curriculares; secuencias y recursos didácticos.

Ahora bien, la implementación de esta experiencia nos ha mostrado que si se quiere cambiar la metodología, haciéndola más diversificada y centrada en la actividad del estudiante, no hay tiempo para desarrollar esos tres bloques por lo que en la ficha ECTS figuran sólo los dos primeros. Se necesitarían seis créditos y no los cuatro de que disponemos en la actualidad, para poder completar el temario.

6. Metodología docente y evaluación del aprendizaje

Si queremos que los alumnos de magisterio desarrollen en su futuro profesional una acción didáctica centrada en la resolución de problemas y en la interacción del niño con su entorno material y social, tendremos que ofrecerle una enseñanza basada en los mismos principios. Por consiguiente, en nuestra metodología, la clase magistral ya no tiene la función tradicional de presentación secuenciada del saber, sino que cumple una función de institucionalización de los contenidos, tanto geométricos como didácticos, que han aparecido previamente en las clases prácticas, alrededor de las tareas de resolución de problemas. De esta manera, y con el apoyo de los apuntes que se ofrecen a los alumnos, el número de clases magistrales su reduce bastante.

Las clases prácticas, más numerosas que antes, son de dos tipos: clases de problemas y estudio de casos (no las llamamos seminarios, aunque deberían serlo, porque, por razones de organización académica, se trabaja en gran grupo) y prácticas de laboratorio. En las primeras, o bien se proponen tareas problemáticas a los alumnos, se les deja un tiempo para que resuelvan y se hace una puesta en común, o bien se discuten y corrigen tareas que han sido propuestas para casa y entregadas posteriormente al profesor.

En cuanto a las prácticas de laboratorio, contribuyen como el resto de la docencia a cubrir los objetivos definidos para la asignatura. Sin embargo, consideramos que su función principal es la de familiarizar al futuro maestro con distintas situaciones y recursos didácticos que pueden utilizarse en la Educación Primaria para enseñar la geometría. Para ello, se ha elegido una organización basada en la realización de tareas problemáticas en pequeño grupo con ayuda del profesor, para dar a nuestros alumnos la oportunidad de valorar el papel que juega la interacción social en el aprendizaje. Esas tareas se refieren a conocimientos geométricos que no han sido presentados previamente en una clase magistral de la asignatura, para que los alumnos pasen por situaciones de construcción de conocimiento en el seno de la resolución de problemas y puedan así tener experiencia en la gestión didáctica de esos procesos. Además, estas tareas se organizan alrededor de distintos materiales didácticos, lo que fuerza a los alumnos a entrar en contacto con ellos y estudiarlos, pues entendemos que es mucho más fácil que estén dispuestos a usar materiales manipulativos en su futura docencia si los han manejado anteriormente y conocen sus posibilidades didácticas.

Por último, en la evaluación del aprendizaje del alumno se ha tenido en cuenta la asistencia a las prácticas, los guiones de prácticas y trabajos para casa entregados y el examen de la asignatura.

7. Cómputo en créditos ECTS de la asignatura

Después de esta experiencia, y dando por supuesto que un crédito ECTS equivale a 25 horas de trabajo del alumno, de las cuales 10 son lectivas, consideramos que la organización horaria en créditos ECTS de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, de 4 créditos, podría ser aproximadamente como sigue:

Horas presenciales: 40

	Bloque 1	Bloque 2	Total
Clase magistral	6	6	12
Problemas y casos	6	6	12
Prácticas	8	8	16
Total horas presenciales	20	20	40

Horas no presenciales: 60

	Bloque 1	Bloque 2	Total
Trabajo para casa individual	5	5	10
Resolución hojas de problemas	10	10	20
Estudio de la asignatura	15	15	30
Total horas no presenciales	30	30	60

En el cómputo horario no está considerada la docencia del tercer bloque temático definido en los contenidos de la asignatura porque los tres bloques no caben en 4 créditos. Se necesitarían al menos 6 créditos para poder incluir ese tercer bloque que, por otra parte, consideramos importante para la formación del maestro de primaria.

8. Organización e implementación de las prácticas

Las prácticas se organizan de la siguiente manera:

- Cada sesión de prácticas tiene una duración de dos horas.
- La clase se divide en dos grupos y cada uno de ellos ocupa un aula distinta y está tutelado por un profesor diferente.
- Cada uno de estos grupos se subdivide en seis o siete grupos de trabajo formados por cuatro o cinco estudiantes.
- Cada estudiante recibe el guión de la práctica y a cada grupo de trabajo se le entrega el material necesario para la práctica y una hoja de respuestas.
- Uno de los estudiantes se encarga de hacer de secretario del grupo de trabajo y controla la redacción de la hoja de respuestas, que debe ser entregada al profesor al finalizar la práctica con los nombres de los estudiantes que forman el grupo.
- Los estudiantes reflexionan en grupo y con el apoyo del material correspondiente para dar respuesta a las preguntas que se les hacen en el guión de prácticas, y reciben la ayuda del profesor cuando así lo solicitan.
- Las intervenciones del profesor son muy medidas: nunca se dirige en común a toda la clase, salvo para referirse a cuestiones de organización de la misma. Sólo interviene a demanda de un grupo de trabajo, contestando a las preguntas que se le hacen, siempre que su contestación no implique resolver el problema en lugar de los estudiantes. También interviene haciendo sugerencias y reorientando el trabajo de un grupo cuando observa que lleva tiempo utilizando estrategias de resolución poco apropiadas.
- Los estudiantes se responsabilizan de la corrección de sus respuestas. En caso de duda, pueden preguntar al profesor. Si una hoja de respuestas contiene serias incorrecciones no se contabiliza esa práctica al grupo de trabajo correspondiente hasta que no la corrijan.
- Después de cada práctica, en las clases teóricas, el profesor institucionaliza aquellos aspectos de la misma que considera más relevantes.

No todas las prácticas han podido implementarse en los tres grupos de docencia previstos, pero todas ellas se han experimentado en un grupo al menos y bastantes de ellas en dos grupos al menos. En alguna Facultad la organización docente no contemplaba un periodo de dos horas seguidas de clase, por lo que hubo que reajustar las prácticas a sesiones de una hora.

9. Descripción de las prácticas

Se han diseñado ocho sesiones de prácticas cuyos guiones se presentan en las páginas siguientes y que pasamos a describir brevemente:

Práctica 1. Analiza los movimientos en el plano (simetría, traslación y giro) y su relación con la igualdad de figuras. Se pone de manifiesto la versatilidad del juego informático Tetris como recurso didáctico para la enseñanza de los movimientos.

Práctica 2. Propone la construcción, con regla sin graduar y compás, de varios triángulos a partir de lados y ángulos dados. Este trabajo permite a los alumnos conjeturar las condiciones que tienen que cumplir lados y ángulos para que se pueda construir un triángulo y los criterios de igualdad de triángulos. Al mismo tiempo, se ejercitan en la técnica de dibujo con regla y compás.

Práctica 3. Estudia las condiciones que debe cumplir un enunciado para poder aceptarlo como definición de un objeto geométrico. También se analizan las propiedades de los cuadriláteros referidas a lados, ángulos interiores y diagonales y se utilizan para establecer la clasificación de los cuadriláteros en función de distintos criterios.

Práctica 4. Propone la construcción de figuras planas con regla sin graduar y compás. Intervienen circunferencias, triángulos y cuadriláteros y hay que explicar las construcciones realizadas indicando las propiedades en las que se basan.

Práctica 5. Propone la construcción de poliedros regulares y semirregulares utilizando el “PLOT” y el “CREATOR”. Los alumnos se familiarizan con esos materiales didácticos. Además, la práctica permite comprobar que sólo hay cinco poliedros regulares y algunas condiciones de construcción de poliedros semirregulares.

Práctica 6. Desarrolla técnicas de medida de áreas de polígonos dibujados sobre una cuadrícula y ofrece pautas, exploratorias y de razonamiento inductivo, para establecer una conjetura que relaciona los puntos de la cuadrícula interiores y en la frontera del polígono con su área (teorema de Pick).

Práctica 7. Estudia la demostración en geometría. Los alumnos reciben indicaciones para demostrar una propiedad geométrica y su corolario y se ponen de manifiesto algunas de las peculiaridades del razonamiento lógico-deductivo.

Práctica 8. Estudia las secciones obtenidas al cortar un cubo mediante un corte plano. Los alumnos deben imaginar qué sección se obtendrá al cortar el cubo por un plano que pasa por determinados puntos y validar su respuesta utilizando cubos de porespan. Recíprocamente, tienen que conjeturar por qué puntos ha de pasar el plano que secciona el cubo para obtener una figura geométrica determinada.

10. Valoración de la experiencia

Los profesores que han implementado las sesiones de prácticas en sus grupos de docencia han quedado bastante satisfechos de los resultados obtenidos, aunque, dado que es la primera vez que estas prácticas se experimentan, se han detectado algunos desajustes temporales, temáticos y de adecuación de las tareas al nivel de cognitivo de los alumnos. Más precisamente:

– Los tiempos de respuesta de los estudiantes han resultado ser distintos de los que esperábamos, lo que nos obligará en el futuro a acortar o alargar algunos de los guiones de prácticas.

– Se echan en falta tareas de medida que, sobre todo, pongan en juego aspectos relacionados con la semejanza geométrica, por lo que habrá que llevar a cabo una reorganización temática de las prácticas.

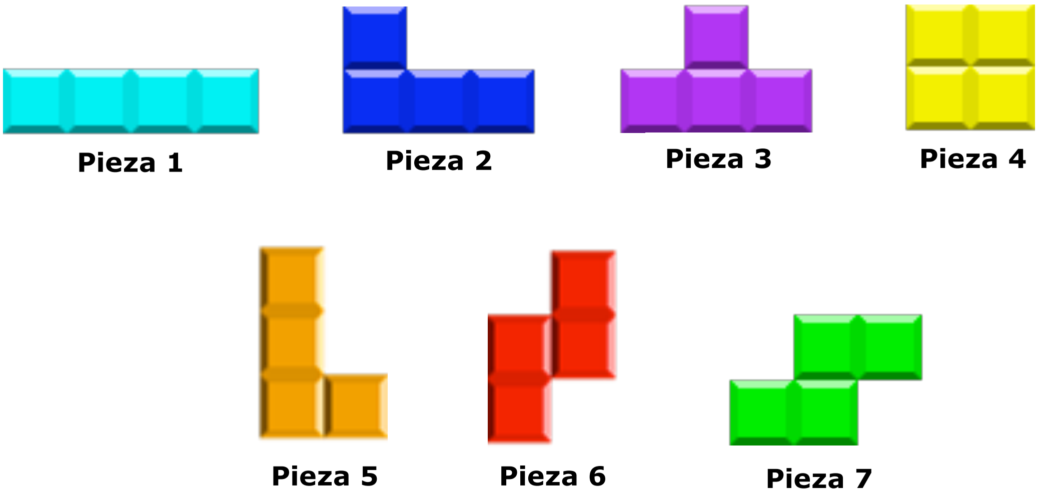
– En algunos casos las tareas encomendadas a los alumnos no resultaron adecuadas a su nivel de conocimientos, la mayor parte de las veces por exceso de dificultad, por lo que será necesario revisarlas y afinarlas.

Los debates realizados en las distintas reuniones de profesores necesarias para llevar a cabo esta experiencia, han producido un acercamiento de posturas y un cierto consenso respecto a la docencia de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II tanto más valioso cuanto que incorpora a profesores de las tres Facultades. Esperamos que este consenso se vaya ampliando en cursos sucesivos.

PRÁCTICA Nº 1

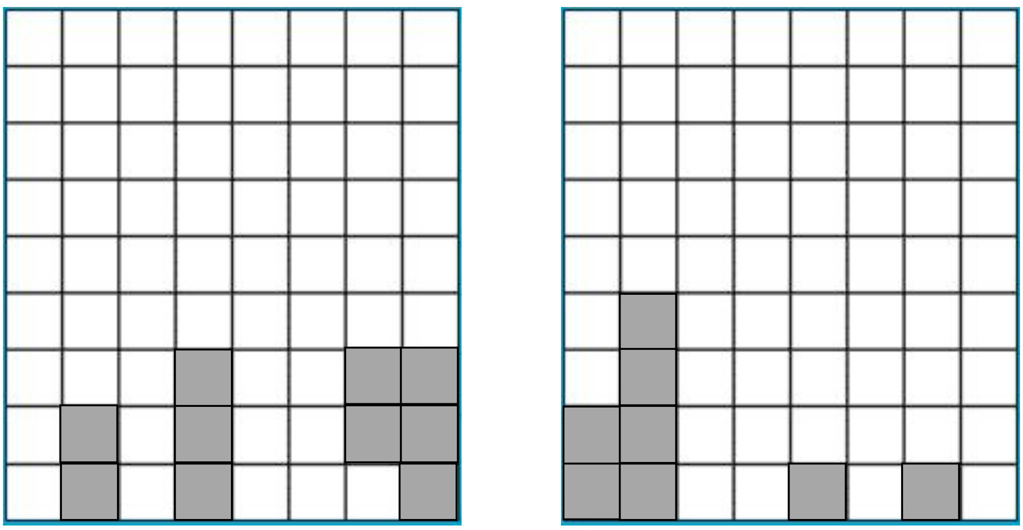
EL TETRIS Y LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Los elementos principales de Tetris son siete tipos de piezas llamadas tetraminós (4 cuadrados unidos por los lados de forma que cada uno de ellos tiene al menos un lado común) que van cayendo de forma aleatoria desde la parte superior de la pantalla. El jugador las debe ir rotando y colocarlas de forma que se formen líneas completas.



1º) Durante el juego del Tetris, se pueden realizar movimientos sobre las piezas: algunos obligados (van cayendo hacia abajo constantemente) y otros voluntarios (puedes desplazarlas con el cursor y cambiarlas de posición con el botón) ¿Qué movimientos del plano identificas y cuáles son sus elementos?

2º) Observa las siguientes situaciones que se pueden dar en el Tetris:

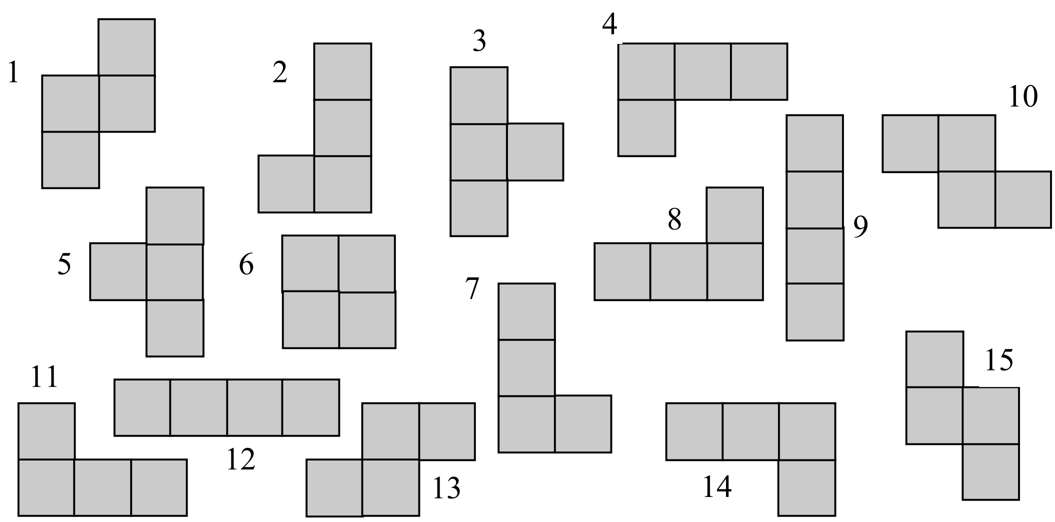


a) ¿Cuál es el menor número de piezas que necesitas para hacer una jugada de tres líneas a la vez en cada una de las situaciones anteriores? Describe las piezas que has utilizado.

b) Suponiendo que las fichas caen desde la primera fila y en la posición que se observa en la página 1, describe los movimientos (con sus respectivos elementos) que has necesitado hacer para la jugada que has seguido en el apartado a).

3º) En el Tetris dos tetraminós son iguales (son del mismo tipo y color) cuando mediante los movimientos permitidos de rotación y traslación llevamos uno a otro.

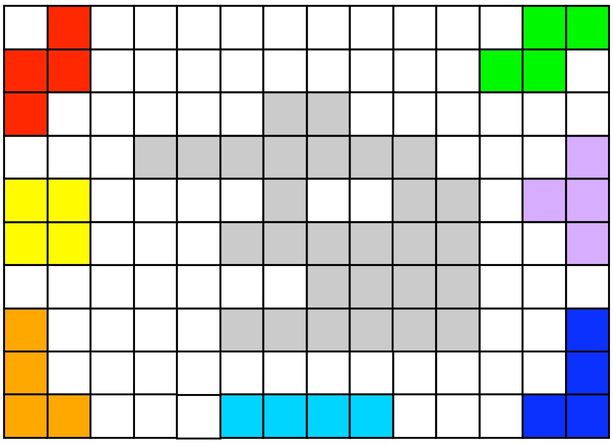
a) Indica las piezas del Tetris que se consideran iguales entre sí según la definición dada.



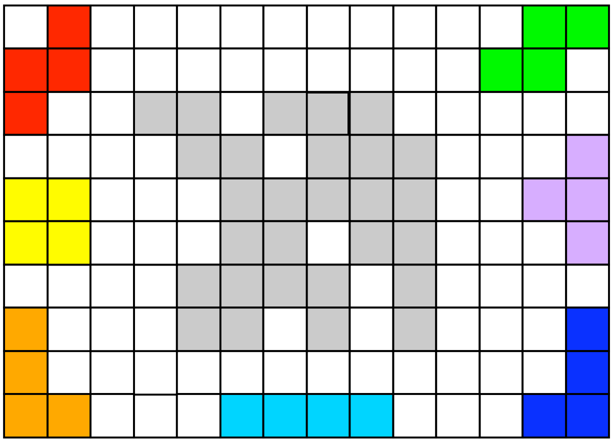
b) ¿Es posible construir algún tetraminó que sea diferente de las 7 piezas de Tetris presentadas en la página 1?

4º) Diseña la figura sombreada con las piezas del Tetris que tienes en los márgenes de la cuadrícula. Describe los movimientos que has realizado sobre cada una de las piezas partiendo de su posición inicial.

a)

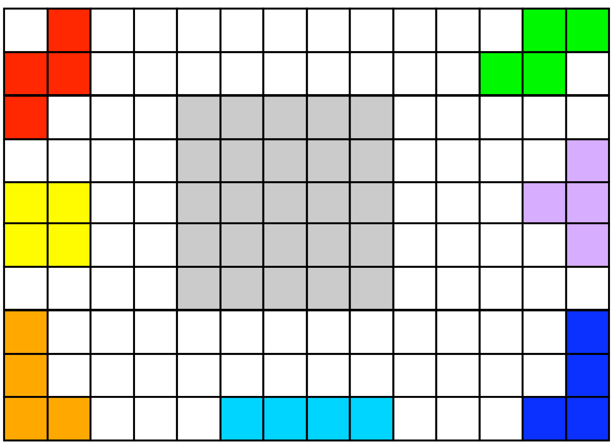


b)

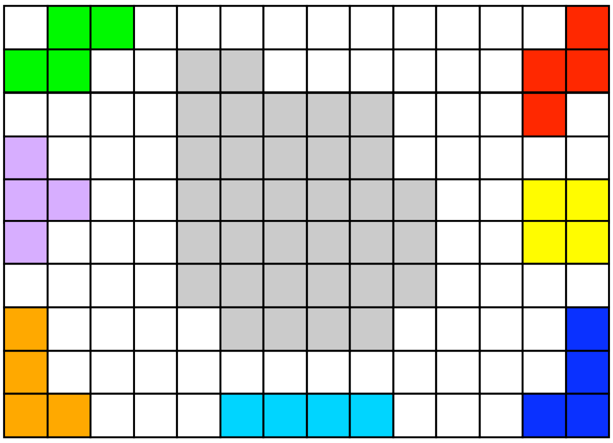


5º) ¿Puedes realizar la misma tarea de la Actividad 4º con las siguientes figuras? Si lo has logrado, indica los movimientos que has realizado sobre cada una de las piezas. Si piensas que no se puede, razona el porqué.

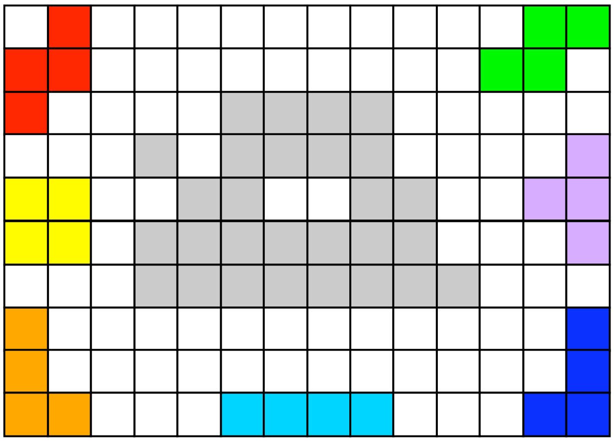
a)



b)



c)



6º) Otro de los movimientos del plano es la simetría axial. Según lo visto en la Actividad 1º, ¿se utiliza la simetría axial para transformar las piezas en el Tetris?

7º) Según lo visto en la Actividad 3º, ¿hay algún movimiento en el Tetris que te permita pasar de la piezas 2 a la 5? ¿y de la 6 a la 7? Con esas mismas parejas de figuras ¿existe algún movimiento en el plano que te permita convertir una en otra?

8º) En el plano dos tetraminós

son iguales cuando mediante un movimiento en el plano sobre uno obtenemos el otro. ¿Cuáles son los tetraminós diferentes en el plano? Identifica y describe los movimientos en el plano que te permiten establecer esas diferencias.

9º) ¿Cuántos ejes de simetría tiene la Pieza 3?, ¿y la Pieza 1?, ¿y la Pieza 4?, ¿y la Pieza 5? (ver las piezas en la página 1)

10º) Dibuja la pieza resultante de girar la Pieza 4 45º sobre su centro. ¿Y qué sucede si el ángulo de giro es 180º?

11º) Después de realizar movimientos sobre las piezas en todas las actividades anteriores responde:

a) ¿Se conservan las distancias entre dos puntos interiores de la pieza?
b) ¿Se conserva la forma y el tamaño de la pieza a través de los movimientos que has realizado?

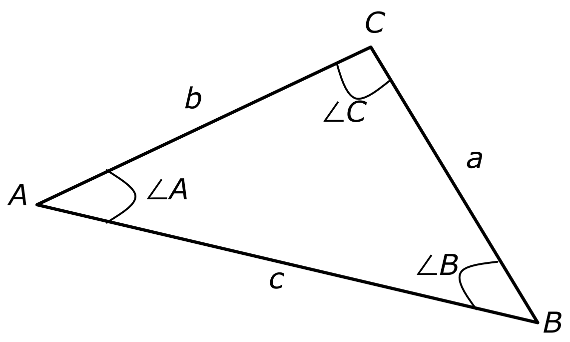
PRÁCTICA Nº 2

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Empezaremos por introducir una notación adecuada para que podamos comunicarnos entre nosotros con mayor precisión.

En primer lugar, a cada vértice de un triángulo le asignaremos una letra mayúscula *A*, *B* y *C*, siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj. Además, a cada lado del triángulo le asignaremos una letra minúscula que sea igual a la su vértice opuesto. Por último, a cada ángulo del triángulo lo denotaremos poniendo el signo ∠ delante de su vértice.

Así, todo triángulo puede estar representado de esta manera:



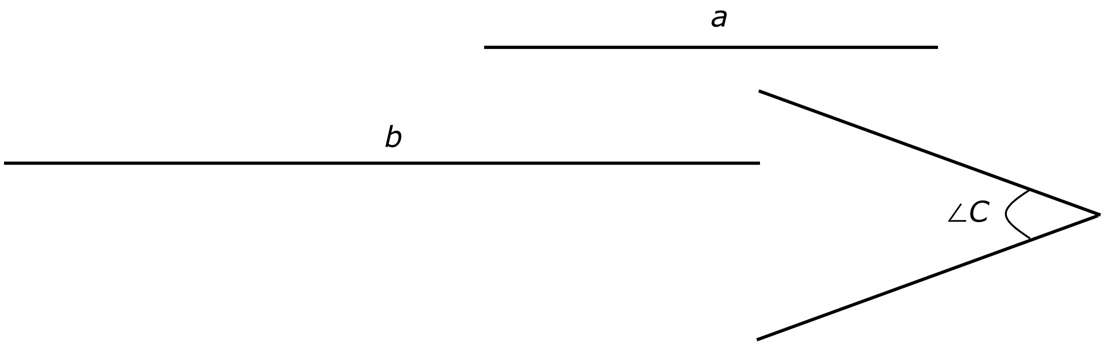
En los siguientes folios, encontrareis distintos segmentos y ángulos agrupados por apartados. En cada apartado realiza las siguientes acciones:

1º) Con una regla sin graduar y un compás, intenta construir un triángulo con los datos ofrecidos.

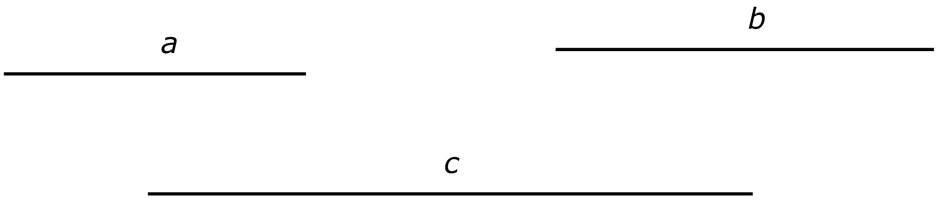
2º) En el caso en que no se pueda construir un triángulo, razona los motivos por los cuales esto no es posible.

3º) En los apartados en los que sí has podido construir un triángulo, ¿podríais construir otros triángulos distintos con los mismos datos que se ofrecen o el triángulo que has construido es el único posible?

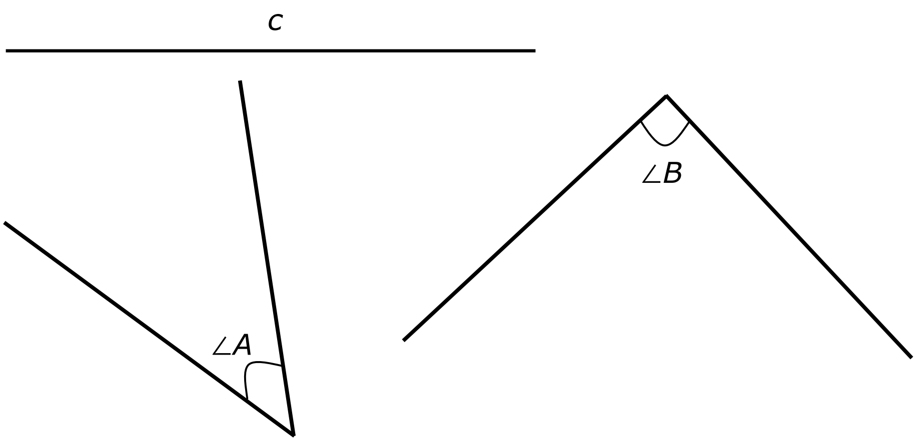
Apartado 1:



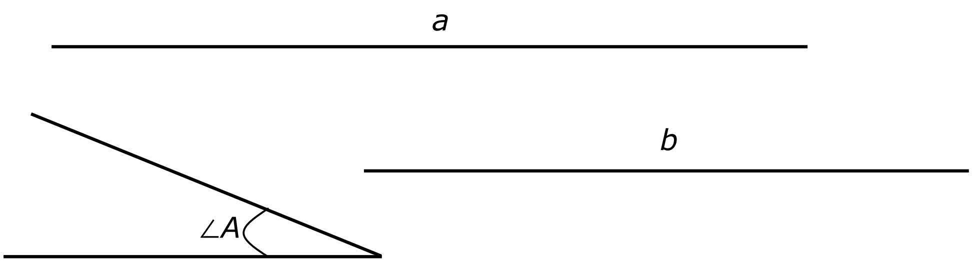
Apartado 2:



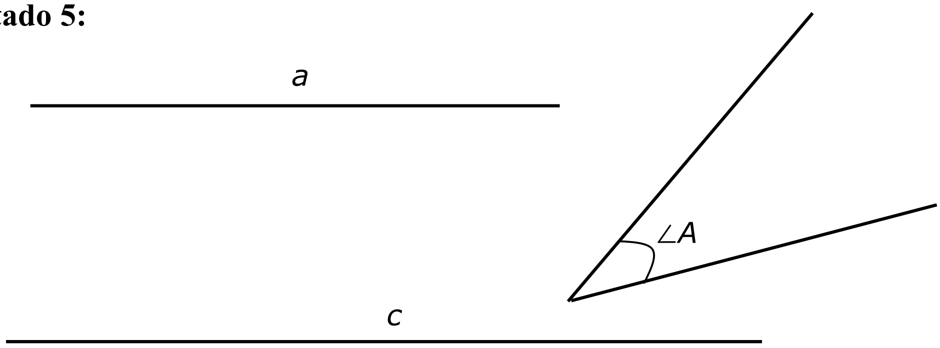
Apartado 3:



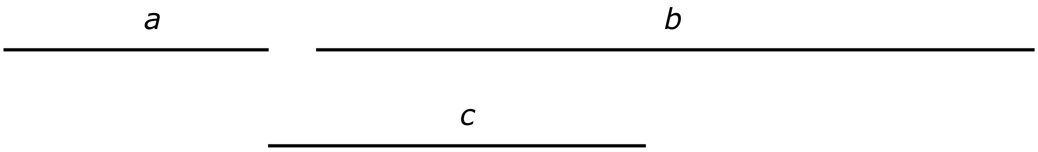
Apartado 4:



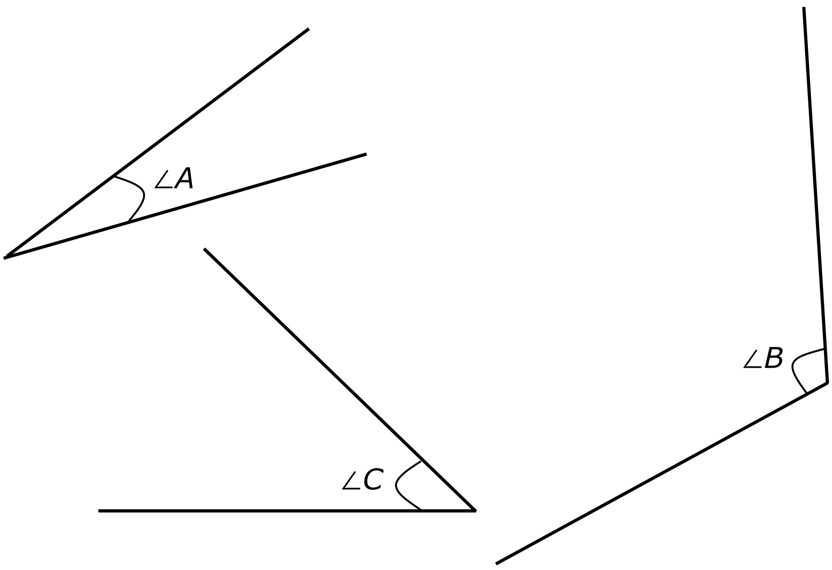
Apartado 5:



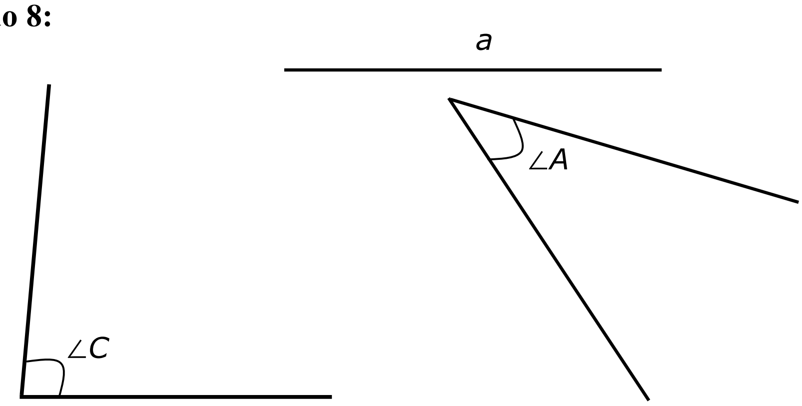
Apartado 6:



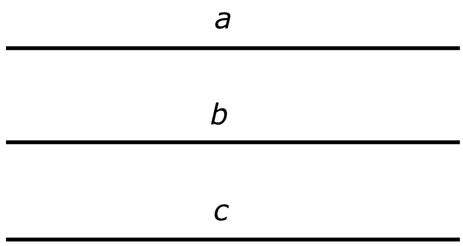
Apartado 7:

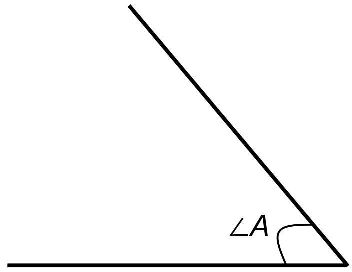


Apartado 8:



Apartado 9:

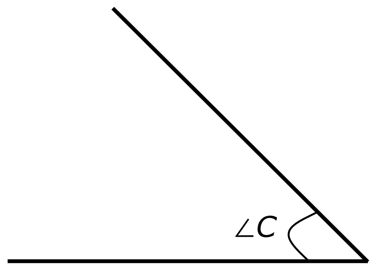




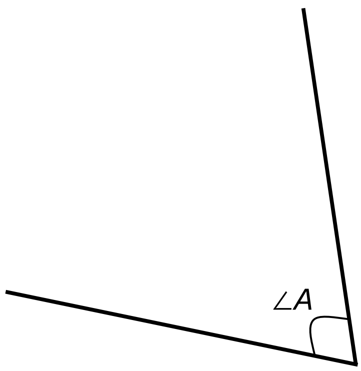
Apartado 10:

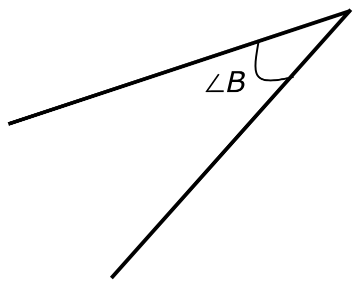
No se conocen cómo son los segmentos *a* y *b*, aunque sí que se sabe que:

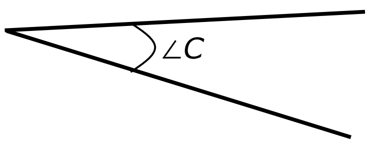
$$\boldsymbol{a = b}$$



Apartado 11:







PRÁCTICA Nº 3

LA DEFINICIÓN EN GEOMETRÍA

Objetivo

El objetivo principal de esta práctica es reflexionar sobre las condiciones que tiene que cumplir un enunciado para poder darle el rango de definición de un objeto geométrico. Al mismo tiempo, se pretende que el alumno recuerde las propiedades de los cuadriláteros y su clasificación.

Tarea 1

En la hoja adjunta aparecen dibujados ocho cuadriláteros convexos.

a) En el siguiente cuadro marca con un aspa una casilla cuando la figura cumpla la propiedad correspondiente.

PROPIEDADES	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
La figura tiene todos los lados iguales								
La figura tiene los lados opuestos iguales								
La figura tiene dos pares de lados consecutivos iguales.								
La figura tiene todos lo ángulos interiores iguales								
La figura tiene los ángulos interiores opuestos iguales								
La figura tiene dos ángulos interiores opuestos iguales								
La figura tiene los lados opuestos paralelos								
La figura tiene dos lados opuestos paralelos								
Las diagonales de la figura se cortan en su punto medio								
Una de las diagonales corta en el punto medio a la otra								
Las diagonales de la figura son iguales								
Las diagonales de la figura son perpendiculares								

b) ¿Qué figura tiene más propiedades? ¿Qué figura tiene menos?

Tarea 2

Definir es enunciar un conjunto mínimo de propiedades que delimitan un objeto geométrico, diferenciándolo de los demás objetos.

Una definición debe cumplir, entre otros, los siguientes requisitos:

1. Ser lo más concisa posible, es decir, no incluir propiedades que puedan deducirse a partir de otras que ya figuren en la definición.
2. No contener contradicciones
3. No contener únicamente enunciados negativos.
4. No contener ambigüedades.

a) Para cada una de las propiedades siguientes, dibuja al menos tres figuras que la cumplan:

- i) Cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos y puede tener dos ángulos rectos.
- ii) Cuadrilátero que tiene sólo dos ángulos rectos consecutivos y cuyas diagonales son iguales.
- iii) Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.
- iv) No es un rombo, ni un rectángulo.
- v) Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos e iguales, sus ángulos son todos iguales a un recto y las diagonales se cortan en su punto medio.
- vi) Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos no paralelos e iguales.

b) Indica si los enunciados anteriores pueden considerarse definiciones de alguna figura geométrica, señalando, en caso afirmativo, el nombre de esa figura. En caso negativo, indica qué requisitos de la definición se incumplen y modifica el enunciado para que pueda ser considerado definición de alguna figura geométrica.

Tarea 3

a) Define cuadrado, rectángulo y rombo, atendiendo a las propiedades de sus diagonales.

b) De acuerdo con las definiciones que has dado, ¿un cuadrado puede ser un rombo?, ¿un cuadrado puede ser un rectángulo?, ¿un rectángulo puede ser un rombo?

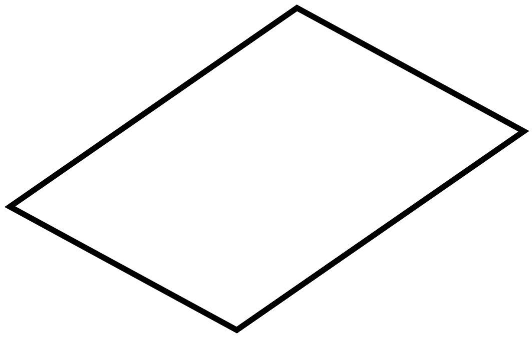


Fig. 1

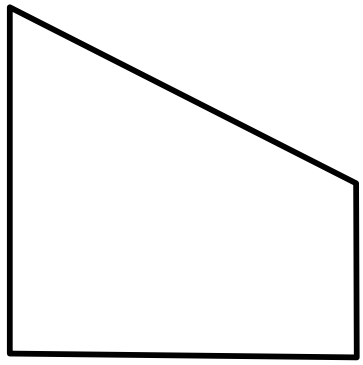


Fig. 2

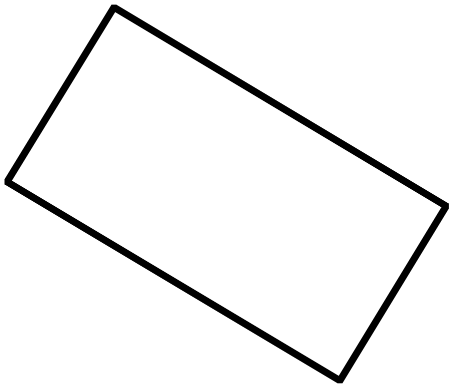


Fig. 3

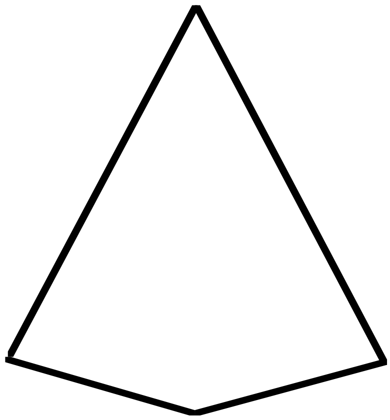


Fig. 4

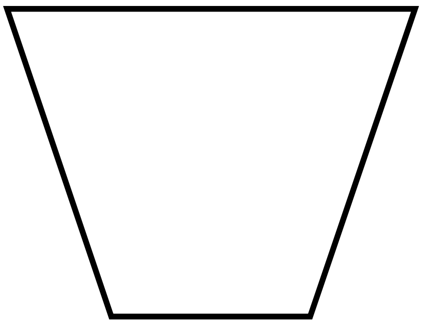


Fig. 5

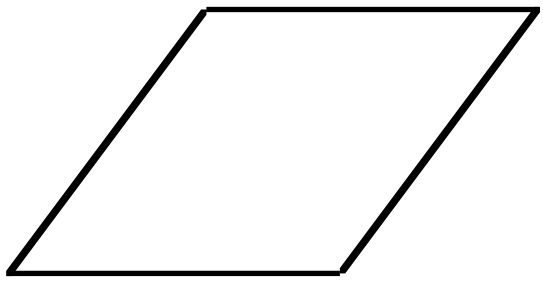


Fig. 6

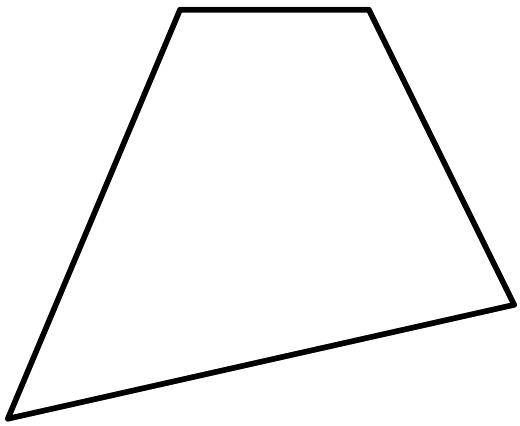


Fig. 7

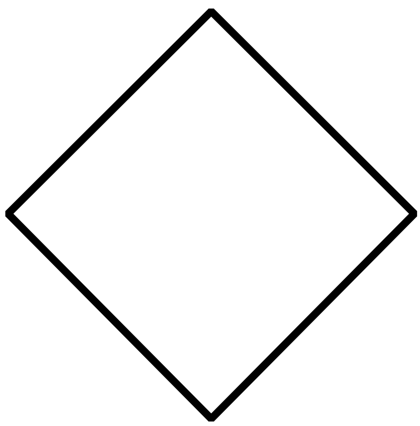


Fig. 8

PRÁCTICA Nº 4

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS CON REGLA Y COMPÁS

En esta práctica puedes usar una regla sin graduar, un compás y una escuadra y un cartabón, sólo para trazar paralelas.

Los datos no están dados previamente. El constructor de la figura debe empezar por dibujar los datos que va a utilizar y denotarlos adecuadamente.

En todos los casos se deberá explicar por escrito la construcción realizada.

Problema 1: Construye una circunferencia tangente a otra dada y cuyo radio sea el doble que el de la circunferencia dada.

Problema 2: Construye un rombo conocido su lado.

Problema 3: Construye un deltoide conocidas las dos diagonales y uno de sus lados.

Problema 4: Construye un trapecio isósceles conocidos sus lados.

Problema 5: Construye un rectángulo conocida una diagonal y el ángulo que forma con la otra diagonal.

Problema 6: Inscribe una circunferencia en un triángulo escaleno dado.

PRÁCTICA Nº 5

CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

Construcción de poliedros regulares

Un poliedro convexo es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

Construye utilizando el PLOT todos los poliedros regulares posibles. Uno de ellos constrúyelo con el CREATOR.

Tipo de caras	Nº de caras que concurren en un vértice	Nº total de caras	Nombre del poliedro

Construcción de poliedros semirregulares

Un poliedro convexo es semirregular si sus caras están formadas por dos o más polígonos regulares distintos y en cada vértice concurren el mismo número de caras de cada tipo de polígono.

Construye, utilizando el PLOT o el CREATOR, un poliedro semirregular

Tipo de caras	Nº de caras de cada tipo que concurren en un vértice	Nº total de caras

PRÁCTICA Nº 6

CONJETURAS SOBRE ÁREAS DE POLÍGONOS

Objetivo de la práctica

Con esta práctica se pretende que el alumno:

- desarrolle técnicas de medida de áreas de polígonos dibujados sobre una cuadrícula y
- se familiarice con la búsqueda de relaciones entre variables que permitan conjeturar fórmulas generales.

Problema 1

Encuentra el área de las figuras dibujadas en la cuadrícula adjunta tomando como unidad de medida el área de una cuadrícula.

Problema 2

Vamos a tratar de encontrar una fórmula que relacione el área de los polígonos anteriores con el número de puntos de la cuadrícula contenidos en su contorno y en su interior. Para ello:

a) Clasifica los polígonos según el número de puntos que tengan en su interior y rellena las siguientes tablas:

Polígonos con un punto en su interior			
Letra que indica el polígono	**Área del polígono**	**Número de puntos en el contorno**	**Relación entre el área y el número de puntos en el contorno**
		n	

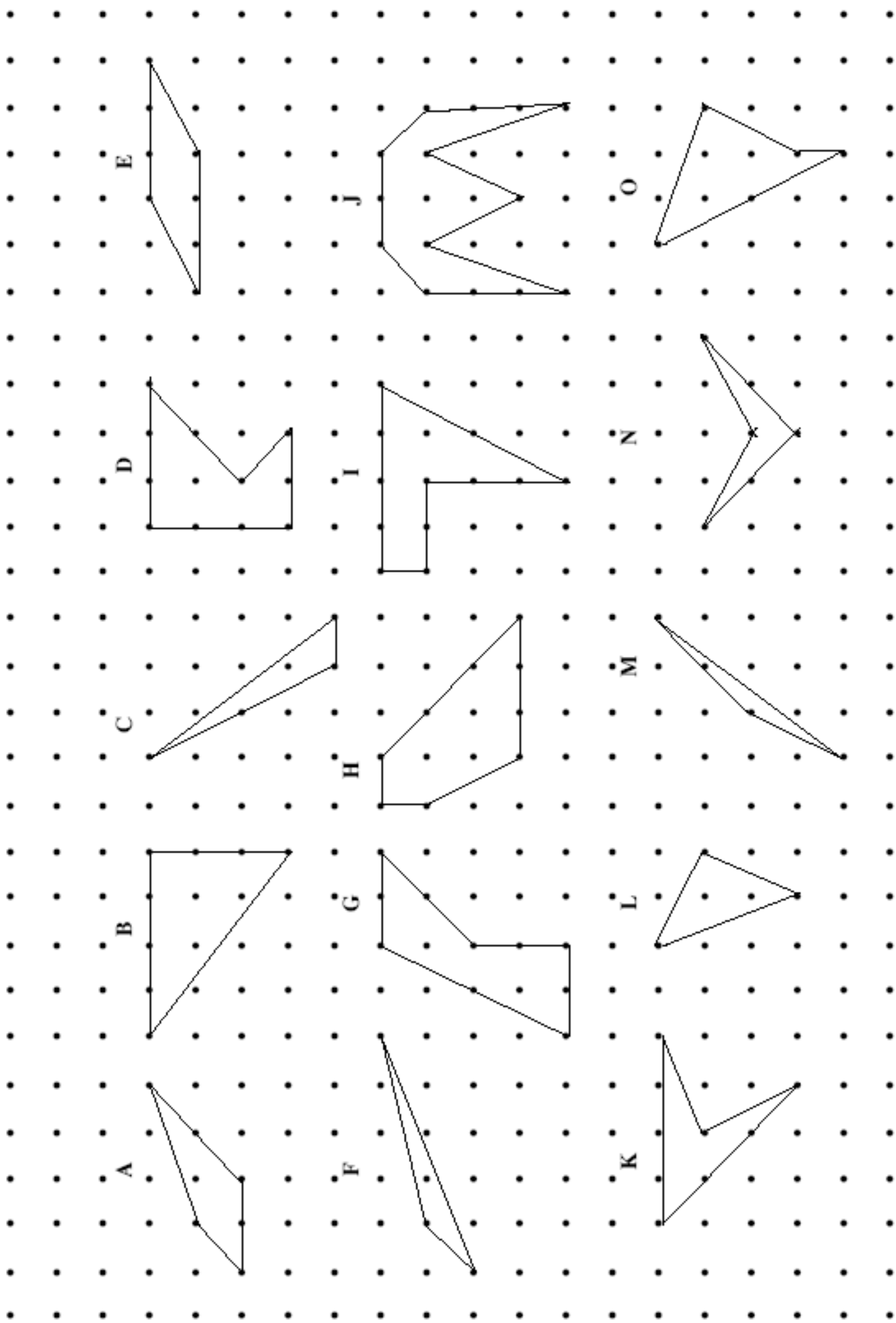
Polígonos con dos puntos en su interior			
Letra que indica el polígono	**Área del polígono**	**Número de puntos en el contorno**	**Relación entre el área y el número de puntos en el contorno**
		n	

Polígonos con tres puntos en su interior			
Letra que indica el polígono	**Área del polígono**	**Número de puntos en el contorno**	**Relación entre el área y el número de puntos en el contorno**
		n	

Polígonos con ningún punto en su interior			
Letra que indica el polígono	**Área del polígono**	**Número de puntos en el contorno**	**Relación entre el área y el número de puntos en el contorno**
		n	

b) Rellena ahora la siguiente tabla y conjetura una fórmula general que nos relacione el área de cualquier polígono dibujado sobre la cuadrícula en función de los **n** puntos de la cuadrícula en el contorno y de los **i** puntos de la cuadrícula en el interior del polígono.

Número de puntos en el contorno del polígono	Área del polígono **sin** puntos en su interior **i=0**	Área del polígono con **un** punto en su interior **i=1**	Área del polígono con **dos** puntos en su interior **i=2**	Área del polígono con **tres** puntos en su interior **i=3**	Área del polígono con **i** puntos en su interior
n					


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O

PRÁCTICA Nº 7

LA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

Objetivo

Con esta práctica se pretende iniciar al alumno en las particularidades de la demostración geométrica. Para ello, se presenta una propiedad geométrica y se dan indicaciones que orientan su demostración.

Propiedad ***: Si en un triángulo cualquiera se traza por el punto medio de uno de sus lados una recta paralela a otro de sus lados, se cumple que:***

1º) La recta paralela corta al otro lado del triángulo por su punto medio.

2º) El segmento que une los puntos medios es la mitad del lado del triángulo al que es paralelo.

i) Para demostrar esta propiedad, suponemos que han sido demostradas anteriormente las propiedades siguientes:

a) Dos ángulos que tienen respectivamente un lado situado en la misma recta y otro paralelo, son iguales. Dos ángulos que tienen los lados respectivamente paralelos, son iguales.

b) Dos triángulos que tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos contiguos a él, son iguales.

c) En un paralelogramo los lados opuestos son iguales.

ii) Dibuja un triángulo adecuado y la paralela por uno de sus puntos medios. Elige alguna línea auxiliar que pueda ayudarte a demostrar la propiedad, basándote en las propiedades indicadas en el apartado i).

iii) Escribe el razonamiento, denotando previamente los elementos del dibujo que utilizas.

Corolario: ***Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo y la suma de los lados de éste es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero.***

i) Demuestra esta propiedad basándote en la propiedad anteriormente demostrada y en la que dice que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí. Para ello, haz primero un dibujo adecuado que sirva de soporte a la demostración, denótalo convenientemente y escribe el razonamiento.

PRÁCTICA Nº 8

SECCIONES OBTENIDAS AL CORTAR UN CUBO

Esta actividad tiene como principal objetivo el desarrollo de la visión espacial.

Para ello vamos a trabajar observando distintos cortes planos posibles sobre un poliedro regular que conoces ampliamente: el CUBO.

Cuando cortamos un cubo, dando un corte plano, el cubo aparece dividido en dos trozos o partes. El polígono que aparece en la zona del corte que separa los dos trozos se llama ***SECCIÓN DEL CORTE***.

Para la realización de las actividades de esta práctica, te proponemos que sigas los siguiente pasos:

Imagina el corte que se te indica en las actividades → Formula tu conjetura → Debate con tus compañeros de grupo → Reformula tu conjetura (si lo crees necesario) → Valida tu conjetura haciendo el corte sobre el cubo

Insistimos en el interés de que, antes de realizar el corte hagas un esfuerzo por imaginarte el cubo y las secciones de corte que se producen con los datos que se ofrecen. Frecuentemente, lo que conoces son los puntos situados sobre algunas aristas por donde se propone el corte. Cuando busques la validación de tu conjetura, puedes utilizar los cubos de corcho blanco o las hojas de trabajo que contienen cubos desde distintas perspectivas. Te proponemos que dibujes en las hojas de trabajo cómo crees que va a ser la sección y que, posteriormente, ejecutes el corte sobre el cubo de corcho.

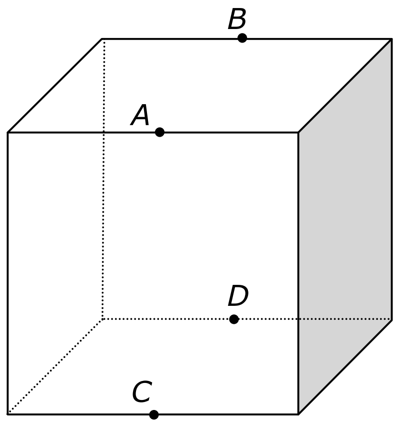
1º) Imagina un cubo. En un vértice confluyen tres aristas. Toma un punto cualquiera de cada una de ellas. Si hicieras un corte plano que pasase por los puntos *A*, *B* y *C*, el cubo quedaría dividido en dos piezas distintas, ¿qué tipo de polígono aparece como sección del corte realizado? ¿Cómo es ese polígono, atendiendo a la longitud de sus lados?

a.- ¿Cómo elegirías los puntos *A*, *B* y *C* para que la sección de corte resulte ser un triángulo equilátero?

b.- ¿Qué condiciones tendrían que cumplir los puntos *A*, *B* y *C* para que la sección de corte sea un triángulo isósceles?

2º) Ahora vamos a realizar los cortes del cubo de una forma distinta a como se han hecho en el anterior apartado.

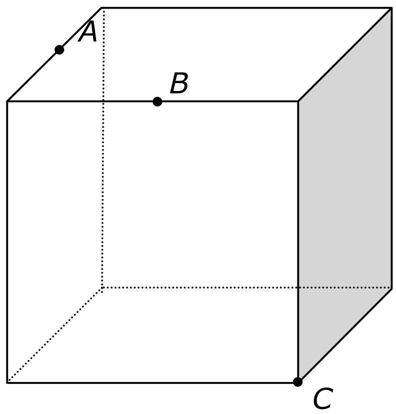
a.- ¿Qué polígono es la sección resultado del corte por los puntos medios de las aristas (indicados en la figura como A, B, C y D)?



b.- ¿Cuál es el mínimo número de puntos sobre las aristas del cubo que son necesarios para determinar un único corte?

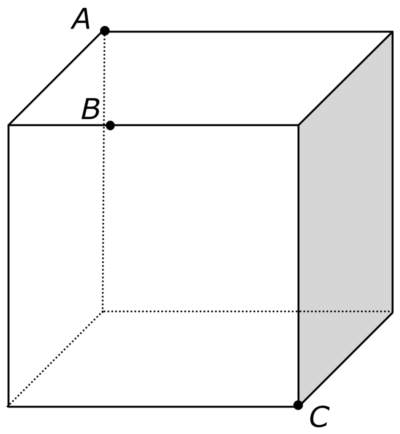
c.- ¿Cómo eliges 3 puntos en las aristas del cubo para que resulte como sección un rectángulo?

3º) Consideremos ahora que uno de los tres puntos es un vértice del cubo. ¿Qué nombre recibe el polígono resultante de la sección indicada si los puntos A y B son los puntos medios de sus aristas?



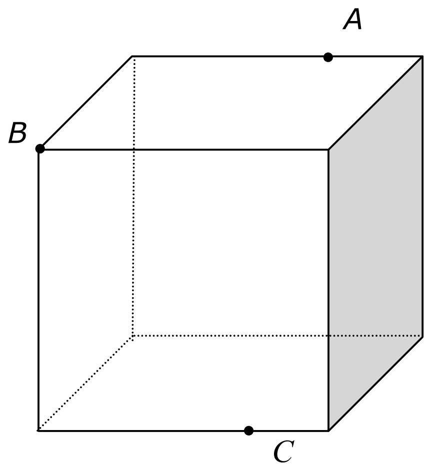
4º) ¿Qué nombre recibe el polígono que aparece como sección del corte indicado?

Nota: El punto *B* está a 1/3 de la arista de distancia con el vértice.



5º) ¿Qué nombre recibe el polígono que aparece como sección del corte que pasa por los puntos *A*, *B* y *C* de la figura?

Nota: Los puntos *A* y *C* están situados a distancia 2/3 de su arista respecto a los vértices de su izquierda.



6º) ¿Es posible obtener un pentágono regular como sección plana de un cubo?.