

Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M.J., Molina, M., Peñas, M.; Cañadas, M.C.; Crisóstomo, E. (2006). *Experiencia en el aula de secundaria con fractales*. En Lupiáñez, José Luis; Cardeñoso, José María; García, M. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: la geometría* (pp. 213-221). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

EXPERIENCIA EN EL AULA DE SECUNDARIA CON FRACTALES

Grupo PI

**Sandra Gallardo, Manuel J. Martínez-Santaolalla, Marta Molina, María Peñas,
M^a Consuelo Cañadas, Edson Crisóstomo**

grupo_pi@yahoo.es

Resumen

Presentamos una experiencia docente en un aula de 2 ESO en la que trabajamos los fractales mediante el uso de material de carácter manipulativo. La metodología seguida se basa en la construcción de casos particulares con el fin de llegar al concepto de fractal.

INTRODUCCIÓN

A pesar de la breve historia matemática de los fractales, éstos están teniendo gran importancia en multitud de aplicaciones (meteorología, medicina, geología, economía, ...) si bien el aspecto estético es el que prima en muchos trabajos sobre los mismos. Esto es debido a la complejidad de este concepto que requiere matemáticas superiores.

Los fractales como tales no forman parte del currículo de secundaria explícitamente pero muchas de las características de los mismos son tratadas ampliamente en el aula de matemáticas. Al trabajar fractales estamos trabajando semejanza de figuras, recursividad, inducción geométrica y la idea intuitiva de infinito; además se potencian actitudes como el rigor, el gusto por el trabajo y la percepción de la belleza implícita en las matemáticas. También es importante destacar que la construcción de fractales en dos dimensiones y tres dimensiones permite trabajar con los alumnos la percepción espacial y el complejo paso del plano al espacio.

En la siguiente comunicación vamos a desarrollar una experiencia de trabajo en el aula de secundaria con fractales, para lo cual haremos uso de materiales de carácter manipulativo (papel, regla, compás, tijeras,...) y daremos indicaciones para completar esta experiencia mediante el uso de soporte informático (Workshop 1.1. y 3DCard).

EXPERIENCIA.-

Es evidente que el concepto de fractal es difícil de comprender, por eso el trabajo con fractales en secundaria no puede reducirse a la definición matemática ni a complicadas fórmulas que permitan generar fractales, sino que debe basarse principalmente en la gran potencialidad visual de los mismos y la búsqueda de propiedades geométricas (patrones, unidad generadora, semejanza, ...).

La experiencia se realiza con alumnos de 2º ESO durante 4 sesiones en las cuales construirán fractales de dos y tres dimensiones utilizando diversos materiales. Los alumnos trabajarán en parejas con el objetivo final de realizar un mural en cartulina sobre los fractales. Para realizar dicho mural deberán percibir visualmente la idea de fractal, construir fractales y extraer propiedades de los mismos, concluyendo con una aproximación al concepto de fractal.

En la primera sesión se hace entrega a los alumnos de un dossier en el que incluyen las actividades a realizar y se explica qué es un fractal, la historia de los fractales y su utilidad. De este modo pretendemos que el alumno se familiarice con la idea de fractal mediante la observación y manipulación de los mismos.

El primer fractal que van a construir es el copo de nieve, descrito por primera vez por el matemático sueco Helge von Koch en 1904. Para dicha construcción entregamos a los alumnos una malla triangular con la intención de facilitarles la construcción. Las instrucciones dadas son las siguientes:

EL COPO DE NIEVE DE KOCH

Vamos a usar una malla triangular para ayudarnos en los dibujos.

Paso 1: Empezamos con un triángulo equilátero lo mas grande que se pueda.

Paso 2: Haremos una estrella.

- a. Dividimos una cara del triángulo en tres partes iguales y borramos la parte del medio.
- b. Reemplazamos esta parte con dos líneas de la misma longitud que la que borramos.
- c. Hacemos lo mismo en los otros dos lados del triángulo.

Paso 3: Realizamos los pasos anteriores una y otra vez.

Si lo hiciéramos infinitas veces entonces tendremos un fractal.

El siguiente fractal que realizan en esta sesión es el triángulo de Sierpinski para ello volvemos a utilizar la malla triangular y volvemos a construir el triángulo equilátero.

TRIANGULO SIERPINSKI

Construimos otro fractal:

Paso 1: Dibujamos un triángulo equilátero.

Paso 2: Marca en cada lado del triángulo el punto medio y une los puntos medios. ¿Cuántos triángulos te salen ahora?

Paso 3: Fíjate en triángulo interior. Recorta el triángulo interior.

Paso 4: Repite los pasos anteriores en los tres triángulos equiláteros que te quedan. Y vuelve a recortar el triángulo interior de cada uno de ellos.

Paso 5: Repite lo anterior cuanto puedas.

En la segunda sesión los alumnos realizan otros tres fractales. El primero de ellos es el espacio de Peano en el que trabajaremos con cuadrados de manera similar a los anteriores. En el segundo, partiendo de un espacio acotado para trabajar, el alumno debe construir un fractal mediante el trazado de circunferencias tangentes al espacio de partida. En el último se pide al alumno la libre composición de un fractal a partir de un espacio circular. En todos ellos se sugiere el uso de colores para mejorar visualmente sus producciones.

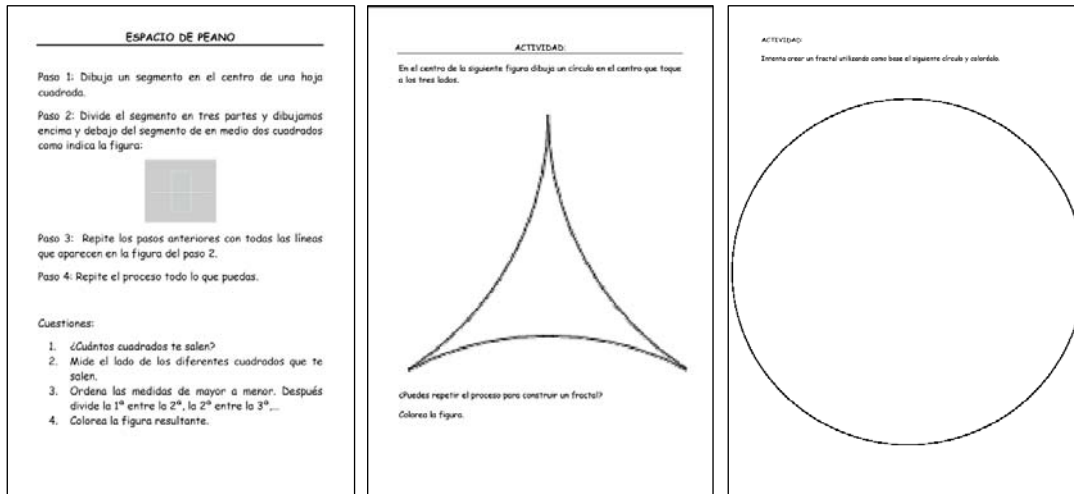


Figura 1: Actividades segunda sesión.

En la tercera sesión los alumnos construyen fractales en tres dimensiones partiendo de plantillas pop-up, termino anglosajón utilizado para las tarjetas que al abrir muestran figuras en 3D (Uribe, 1998). Mediante cortes y dobleces adecuados marcados en las plantillas se obtienen llamativas construcciones que permiten visualizar de manera finita un fractal (Glassner, 1998).

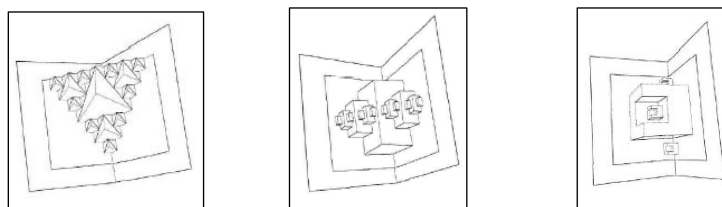
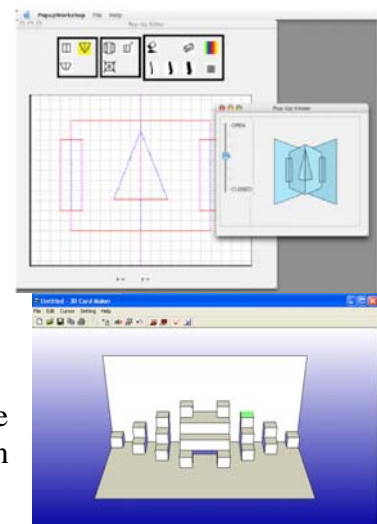


Figura 2: Plantillas Pop-up para la sesión tercera. Ver anexos.

Esta sesión se podría completar con el uso de software para la construcción de pop-up aunque en este caso no pudo llevarse a cabo por problemas informáticos. Recomendamos dos software al respecto Workshop 1.1. y 3DCard ambos gratuitos (ver imágenes al margen). Para saber más sobre estos programas y sus aplicaciones en el aula se puede consultar Hendrix (2004, 2005). La utilización de estos programas nos permitirán también trabajar con los alumnos el complicado paso del plano al espacio y viceversa.

Por último la sesión cuarta consiste en realizar el mural sobre fractales. Se les pide que expliquen con sus palabras qué es un



fractal, qué expliquen brevemente de donde surgen y para qué sirven (para ello pueden utilizar el dossier entregado en la sesión inicial) y por último que añadan los fractales construidos durante el taller.

RESULTADOS

En la construcción del copo de nieve en la primera sesión se observan dificultades por parte de los alumnos para construir un triángulo equilátero utilizando la malla y dificultades para dividir los lados del triángulo en tres partes iguales. Algunos alumnos cuentan puntos y dividen entre tres en vez de contar espacios entre puntos y dividir después entre tres. El segundo paso de la construcción lo realizan con aparente facilidad una vez que logran dividir el segmento en tres partes. En los siguientes niveles se percibe la dificultad de los alumnos por considerar todos los segmentos existentes y volver a realizar los pasos. Se observan también dificultades para construir figuras semejantes pero de distinto tamaño.

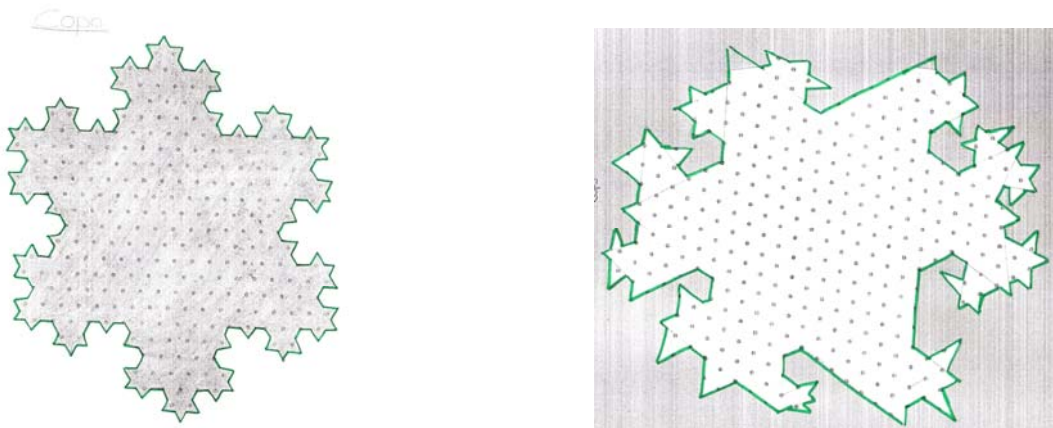


Figura 3: Construcciones de los alumnos del Copo de Nieve de Koch.

En el triángulo de Sierpinski los alumnos encuentran la dificultad de percibir que los triángulos centrales deben recortarse y que son los adyacentes donde se realiza la siguiente división. Aún así esta construcción resulta más sencilla por tener que dividir los lados por dos en vez de por tres, las dificultades están en conseguir triángulos iguales equiláteros y en saber cuáles son los triángulos que deben recortar.

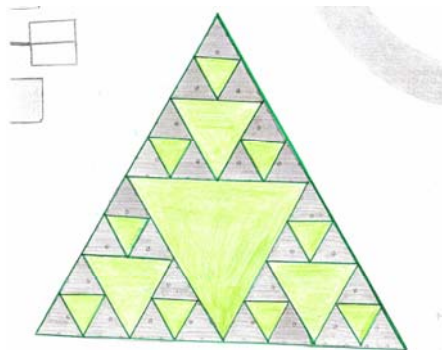


Figura 4: Construcción del triángulo de Sierpinski por una alumno.

Durante la segunda sesión al realizar el espacio de Peano vuelven a tener problemas para repetir la figura en todos los segmentos posibles y en percibir que a partir del primer paso los cuadrados comienzan a tocarse en sus vértices. Vuelven a tener dificultades para percibir que la figura que se repite debe ser un rectángulo formado por dos cuadrados y que este debe construirse siempre en el centro del segmento. Los fractales que surgen son muy diversos y ninguna pareja de alumnos logra completarlo correctamente.



Figura 5: Ejemplos de las construcciones de los alumnos del espacio de Peano.

El siguiente fractal basado en la construcción de circunferencias tangentes en un espacio acotado pretende que los alumnos empiecen a realizar el fractal con menos instrucciones y hagan uso del color para crear fractales “bellos”. Aún así en esta actividad los alumnos muestran dificultades para encontrar el centro de la figura y realizar circunferencias tangentes. Realizan circunferencias de distintos tamaños y dispuestas aleatoriamente y en ningún momento se percibe la regularidad propia de un fractal.

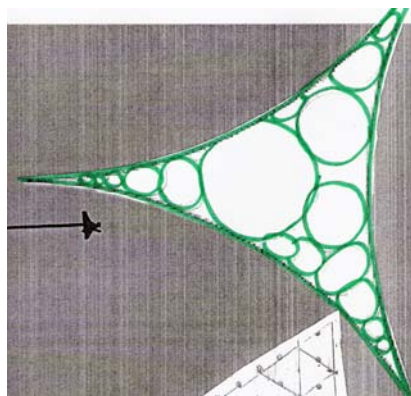


Figura 6: Construcción del fractal de circunferencias tangentes por un alumno.

En la última actividad de este bloque de fractales en dos dimensiones se les pide que se inventen un fractal a partir de una circunferencia. Es aquí donde observamos que algunos alumnos no han percibido las características principales de un fractal y crean figuras que no son fractales porque no se realizan repeticiones de figuras semejantes (dividen el círculo aleatoriamente) o se realizan repeticiones de figuras aparentemente similares pero que no lo son (caso de los arcos de circunferencias). La mayoría acaban realizando círculos concéntricos (es decir, aparece la misma figura, repetida, de distinto tamaño cada vez más pequeña,...).

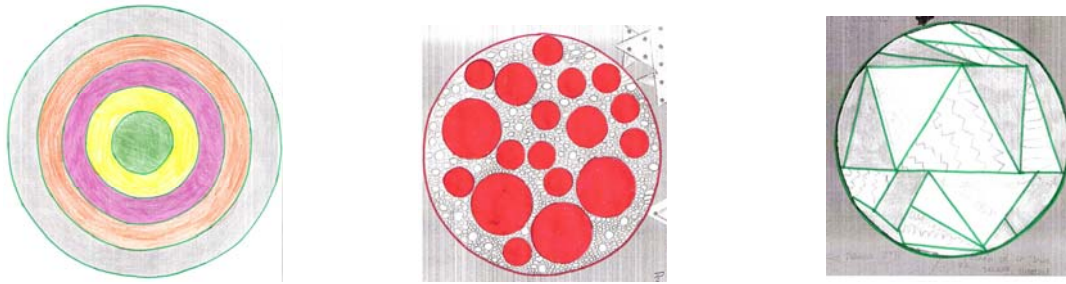


Figura 7: Ejemplos de fractales libres construidos por los alumnos en un espacio circular.

Las construcción de fractales en tres dimensiones a partir de las plantillas pop-up con las indicaciones para doblarlas resultan muy atractivas para los alumnos si bien muestran dificultades en la realización de los dobleces no distinguiendo cuando el doblez es en forma de valle y cuando en forma de monte.

En los murales finales aparecen las siguientes definiciones de fractal dadas por los alumnos:

- *“Es un objeto matemático compuesto de elementos geométricos de tamaño y orientación variable. Es una nueva rama de las matemáticas llamada geometría fractal”*
- *“Es un término acuñado por Mandelbrot en los años 70 a partir del adjetivo latino fractus que significa interrumpido o irregular”*
- *“Forman una familia de objetos matemáticos, además, tienen en común, que la estructura del principio se repite sucesivamente. Esto da lugar a una figura que parece muy complicada, pero al realizarlo resulta ser todo lo contrario. Los fractales han llegado a ser tan importantes que han sacado una nueva rama para saber más de ellos”*
- *“Un fractal es repetir el mismo proceso muchas veces hasta que ya no se puede más”.*

Al intentar explicarnos para qué sirven los fractales éstas son sus respuestas:

- *“Conforme más completo está el objeto mayor es su longitud. Un fractal siempre tiene una misma medida lo representes como cualquier escala. Si no tenemos ningún objeto que nos sirva de referencia no podemos saber el tamaño real del fractal”*
- *“Para que si un objeto fractal lo aumentamos, los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto independiente de cual sea la escala que utilizamos y forma parte como un mosaico de los elementos mayores”*
- *“Aquello que desechamos en la medición, porque al ir contando cada vez con mas precisión debemos añadir el contorno de bahías, rocas, granos de arena y así hasta niveles subatómicos. Se puede abordar desde dos puntos de vista se acepta comúnmente que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos también geométricos de tamaño y orientación variable pero de aspecto similar.*
- *“Para contar con más precisión todo aquello que desechamos en la medición”*

Con estas definiciones observamos la dificultad de los alumnos por percibir el concepto de fractal y su utilidad más allá del aspecto estético. Los alumnos buscan en el dossier definiciones alternativas aunque éstas sean evidentemente imposibles de comprender para ellos.

CONCLUSIONES

El trabajo con fractales en el aula de secundaria puede ser muy útil para trabajar con los alumnos conceptos geométricos y actitudes adecuadas de trabajo en el aula de matemáticas. Además con el uso de fractales en 3D podemos trabajar el importante paso de las 2D a las 3D.

En la construcción de fractales también está implícita una cierta idea de infinito que puede ir calando en los alumnos. Si bien esta idea que aparece está ligada a una imposibilidad física, podemos realizar fractales hasta donde nos permita el papel.

La principal dificultad que han encontrado los alumnos es percibir que el concepto de fractal implica la recursividad de un patrón previo. Ellos perciben la aleatoriedad final de la figura lo que les lleva a diseñar fractales sin un patrón pero visualmente aleatorios.

En esta comunicación pretendíamos mostrar como trabajar con fractales con materiales muy asequibles y con alumnos de primer ciclo de secundaria. La idea es ir acercándolos a conceptos matemáticos que trabajaran en cursos posteriores.

BIBLIOGRAFIA

Glassner, A. (1998). *Interactive Pop-up card Design*. Redmond: Ed. Microsoft Corporation.

Hendrix, S. (2004). *Supporting and Observing. Children's Pop-up Design*. Ph.D. Dissertation Proposal

Hendrix, S. (2005). *Popup Workshop Version 1.1 Documentation* . Disponible en <http://www.cs.colorado.edu/~ctg/>

Junta de Andalucía (1992). Decreto 148/1992, de 14 de Mayo, por el que se modifica el decreto 106/1992, de 9 de Junio, por el que se establece las enseñanzas correspondientes a la E.S.O en Andalucía (B.O.J.A. número 75, de 27 de Junio de 2002).

Uribe, D. (1998). *Fractal Cuts*. England: Tarquin Publications.

ANEXOS (Uribe, 1998)

