Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

PROCESO DE GENERALIZACIÓN QUE REALIZAN FUTUROS MAESTROS

Trabajo de Master que presenta

PAOLA ANDREA TRUJILLO PULIDO

dirigido por las doctoras

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ MARTA MOLINA GONZÁLEZ

GRANADA, 2008

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Trabajo de Máster

PROCESO DE GENERALIZACIÓN QUE REALIZAN FUTUROS MAESTROS

Trabajo de Máster presentado
por Dña. Paola Andrea Trujillo Pulido
para la obtención del título de Máster en
Didáctica de la Matemática

Tutoras:

Dra. Dña. Encarnación Castro

Dra. Dña. Marta Molina

GRANADA, 2008

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido a que este trabajo sea una realidad.

A mis tutoras, Encarnación Castro Martínez y Marta Molina González, por permitirme trabajar a su lado y aprender de su conocimiento y experiencia.

A mis profesores, por guiarme y descubrir un mundo nuevo de conocimiento.

A Rubí, Rafa y Gabriela, por su ánimo, amistad y colaboración en estos meses de trabajo. Por los jueves.

A mi familia, por apoyarme y animarme siempre para lograr la culminación de mis metas. Por su cariño y confianza incondicional.

A Omar, por sus consejos y apoyo en los momentos clave.

A mis amigos, Pilar Adriana, Sergio y Marcela, por su ánimo y paciencia en las inagotables noches de insomnio.

A Pipe, por todo su apoyo, ayuda y comprensión a lo largo de estos años, y por robarme una sonrisa cada día.

A Carlos, por ser un gran amigo, compañero y persona, espero que desde el cielo sigas estando orgulloso de mí.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El documento que presentamos recoge la investigación que hemos llevado a cabo en el curso 2007-08 como trabajo final de máster en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Nuestro trabajo se ha centrado en realizar un estudio de casos sobre las generalizaciones que realizan unos sujetos, alumnos de primer curso de Magisterio, de la especialidad de Lengua Extranjera, a partir del análisis de expresiones aritméticas propuestas por la investigadora. Se enmarca este trabajo en el campo de estudio que analiza el paso de la aritmética al álgebra, especialmente en las generalizaciones de patrones y estructuras que presentan ciertas expresiones aritméticas.

El interés por el tema de investigación elegido surge desde nuestra preocupación en los procesos cognitivos de los estudiantes y, más concretamente, en las dificultades que presentan en el aprendizaje del álgebra.

A este respecto, los trabajos de Encarnación Castro sobre la generalización a la que llegan los alumnos al trabajar sobre patrones utilizando tres tipos de representaciones diferentes, y de Marta Molina que estudia dentro del contexto de Early-Algebra el uso de pensamiento relacional de alumnos que resuelven igualdades numéricas, me han brindado tanto una fuente de conocimiento como una línea de investigación en la que profundizar o ampliar aspectos que ellas habían planteado.

Para la elaboración de este trabajo iniciamos un proceso de búsqueda y lectura de artículos, libros y tesis doctorales, con el fin de conocer (en lo posible) las investigaciones realizadas (nacionales e internacionales) sobre los temas de generalización, patrones, álgebra, Early-Algebra y pensamiento relacional.

La revisión bibliográfica que hemos realizado nos ha puesto de manifiesto algunas evidencias de las que ya éramos conscientes como, por ejemplo, que los estudiantes presentan dificultades en el paso de la aritmética al álgebra y que el estudio de este problema no es actual, sino que lleva varias décadas siendo objeto de investigaciones en educación matemática, enfocándose desde muy diversas perspectivas. De las investigaciones consultadas hemos recopilado preguntas y problemas de investigación que los autores dejan pendientes. Dicha revisión además nos ha servido como punto de referencia para la fundamentación teórica de nuestro trabajo así como para la elección de tareas para proponer a los sujetos participantes en el trabajo y para la recuperación de una taxonomía sobre categorización de generalizaciones que hemos adoptado y modificado, en parte, para analizar las producciones de los sujetos.

A continuación presentamos el problema que hemos investigado tal como lo formulamos, el marco teórico sobre el que se ha sustentado el mismo, el marco metodológico utilizado así como los datos obtenidos, el análisis de esos datos y una síntesis de los resultados del trabajo realizado.

PROBLEMA A INVESTIGAR

Como ya hemos comentado anteriormente nuestro propósito, al realizar este trabajo, se centra en conocer el modo en que unos futuros maestros se enfrentan a ciertas tareas aritméticas propuestas especialmente para provocar en ellos la realización y expresión de generalizaciones. Analizamos el desempeño de los sujetos centrándonos en el tipo de generalizaciones que realizan y en algunas de las dificultades que manifiestan en el trabajo de las tareas propuestas.

Interés del problema

Consideramos que este problema tiene gran interés para la educación matemática debido a que el estudio del proceso de generalización ha sido abordado en la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra para el caso de los alumnos de educación secundaria, pero no tanto en relación a alumnos de otros niveles, en particular futuros maestros. La investigación de Waters (2004) reportó la existencia de una literatura muy limitada sobre la creación de patrones per se, y particularmente sobre patrones a través de los que generalizar, así como de la expresión y justificación de estas generalizaciones. Además, entre los hallazgos de su estudio indicó que hay una necesidad de proporcionar un mayor apoyo a los profesores en un esfuerzo para mejorar su conocimiento matemático. Esta necesidad se intensifica si nos proponemos el objetivo de que los maestros integren en la enseñanza de las matemáticas de primaria el desarrollo de pensamiento algebraico, como se sugiere desde la propuesta Early-Algebra. Desde esta perspectiva, esperamos que los resultados de este trabajo sirvan para informar sobre algunas de las necesidades concretas existentes en la formación de futuros maestros.

Antecedentes del problema a investigar

Como resultado de la búsqueda de información sobre el problema a investigar, hemos recopilado y analizado una serie de documentos que presentamos clasificados en la tabla 1, atendiendo al foco principal en el que se centran. Si bien es complicado, a veces, decidir y considerar un foco único para los trabajos, hemos tratado de ajustar la clasificación tanto como nos ha sido posible. Todas estas investigaciones han sido de nuestro interés ya que nos aportado información útil en mayor o menor medida.

Tabla 1. Clasificación de las investigaciones por temas

TEMAS		AUTOR/ES Y AÑO
Relacionado con la generalización	**Énfasis en la Generalización**	- Ainley, J., Wilson, K. y Bills, L. (2003) - Amit, M. y Neria, D. (2008) - Becker, J.R. y Rivera, F.D. (2008) - Cañadas, C. (2007) - Cañadas, C. y Castro, E. (2004) - Davidov, V. (1972/1990) - Lobato, J., Ellis, A. y Muñoz, R. (2003) - Mason, J. (1996) - Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005) - Zazkis, R., Liljedahl, P. y Chernoff, E. (2008)
	Patrones	- Castro, E. (1995) - Dindyal, J. (2007) - Nathan, M. y Kim, S. (2007) - Polya, G. (1966) - Radford, L. (2008) - Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2008) - Steele, D. (2008) - Steen, L. (1990) - Vogel, R. (2005) - Warren, E. (2005) - Warren, E. y Cooper, T. (2008) - Waters, J. (2004)
	Early-Algebra	- Carraher, D., Martínez, M. y Schliemann, A. (2008) - Cooper, T. y Warren, E. (2008)
	Estrategias	- Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006) - Lannin, J. (2003) - Yeap. B. H. y Kaur, B. (2008)
	Taxonomía	- Ellis, A., (2007a, b y c)
Relacionado con el Álgebra	**Early-Algebra**	- Carraher, D. y Schliemann, A. (2002, 2007) - Van Amerom, B. (2003)
	Álgebra y aritmética	- Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006) - Hewitt, D. (1998)

	Aritmética generalizada	- Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (2001) - Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. y Peled, E. (2003) - Warren, E. (2004)
	Enseñanza – Aprendizaje del álgebra	- Discussion Document for the Twelfth ICMI Study (2000) - Joint Mathematical Council of the United Kingdom y The Royal Society (1997) - Kaput, J. (1999) - Kieran, C. (1989, 2006, 2007) - Kieran, C. y Filloy, E. (1989) - Lee, L. (1996) - NCTM (2000) - Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989) - Van Amerom, B. (2002)
	Concepciones del álgebra	- Usiskin, Z. (1999) - Kieran, C. (1991) - Fernandez, M., y Anhalt, C. (2001)
Relacionado con el Pensamiento	**Relacional**	- Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005) - Hunter, J. (2007) - Molina, M. (2006) - Stephens, M. (2007)
	Algebraico	- Britt, M. y Irwin, K. (2008) - Butto, C. y Rojano, T. (2004) - Molina, M. (2007) - Soares, J. (2006)
	Funcional	- Blanton, M. y Kaput, J. (2005)
	Matemático	- Schoenfeld, A. (1992)
	Cuasi-variable	- Fujii, T. (2003) - Fujii, T. y Stephens, M. (2001, 2008)

Varios de los documentos revisados (Discussion Document for the Twelfth ICMI Study, 2000; Joint Mathematical Council of the United Kingdom y The Royal Society, 1997; Kaput, 1999; Kieran, 1989, 2006, 2007; Kieran y Filloy, 1989; Lee, 1996; NCTM, 2000; Socas et al., 1989; Van Amerom, 2002) presentan un trabajo desarrollado en este ámbito tratando de responder a la cuestión qué es el álgebra, así como buscando la forma más adecuada de trabajar el álgebra en el sistema escolar. Dichos trabajos han llevado a distinguir diferentes concepciones y componentes del álgebra, y enfoques para su trabajo en el aula, los cuales recogemos en el apartado dedicado al marco teórico. Una de dichas concepciones considera el álgebra como aritmética generalizada (Ainley et al., 2003; Amit y Neria, 2008; Becker y Rivera, 2008; Cañadas, 2007; Carraher et al., 2001; Davidov, 1972, 1990; Lobato et al., 2003; Mason, 1996; Mason et al., 2005; Schliemann et al., 2003; Warren, 2004; Zazkis et al., 2008) y apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela. Esta concepción es la que vamos a adoptar para nuestro trabajo.

Por otra parte, las lecturas reseñadas en la tabla nos han permitido discernir que el enfoque de la enseñanza del álgebra viendo ésta como una aritmética generalizada, se incluye en una propuesta de cambio curricular denominada Early-Algebra, la cual pretende introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización obligatoria. Es conveniente hacer notar que el Early-Algebra no se refiere al álgebra formal de la educación secundaria, sino que es una propuesta que trata de iniciar a los estudiantes en la actividad y pensamiento algebraico a través de situaciones ricas en relaciones estructurales en varios tópicos del curriculum de la escuela elemental, preparándoles para una introduciendo de la notación algebraica gradualmente (Carraher et al., 2008; Carraher y Schliemann, 2002, 2007; Cooper y Warren, 2008; Van Amerom, 2003). Se considera que la propuesta curricular denominada Early-Algebra puede salvar muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, las cuales se consideran debidas, en gran parte, a la separación del álgebra y la aritmética en otro tipo de enseñanza.

Trabajar conceptos y modos de pensamiento algebraicos desde los primeros cursos de escolarización, tal y como propone la Early-Algebra, puede servir como puente entre estas dos sub-áreas de las matemáticas. Para ello los maestros han de estar preparados para llevar a cabo dicho trabajo en sus aulas. Por otro lado, el desarrollo de un pensamiento relacional fuerte estará a favor de un buen logro en el trabajo en Early-Algebra, ya que este tipo de pensamiento es el que interviene en el análisis de objetos o situaciones matemáticas, cuando se consideran como totalidades y se centra la atención en la búsqueda de relaciones y en el análisis de la estructura subyacente; lo que se considera primordial para la generalización (Molina, 2006).

De gran interés nos ha resultado, en las lecturas realizadas, la considerable cantidad de interrogantes aparecidas en las mismas, los cuales nos han dado pie para formular una serie de cuestiones que presentamos organizadas de acuerdo a tres temáticas.

Preguntas que se centran en el trabajo de los estudiantes de magisterio ¿Son capaces de generalizar expresiones aritméticas?, ¿Cómo hacen la generalización?, ¿Qué pasos dan?, ¿Qué representaciones utilizan?, ¿Qué variedad de generalizaciones producen los estudiantes? ¿Perciben relaciones en expresiones aritméticas dadas?, ¿Buscan variedad de relaciones?, ¿Distinguen las relaciones que son claves para la generalización de las que no lo son?, ¿Se limitan a los ejemplos que se les dan en las tareas o buscan otros?, ¿Ven las expresiones como totalidades o como una sucesión de términos aislados?, ¿Qué retos encuentran los estudiantes en su esfuerzo para expresar la generalización de relaciones apreciadas en expresiones aritméticas dadas?, ¿Qué tipo de representaciones intermedias sirven para ayudar a los estudiantes a pasar de una generalización con palabras, a una generalización expresada en notación algebraica?

Preguntas que se centran en el profesor ¿Qué trabajo pueden llevar a cabo los profesores de educación primaria para promover que sus estudiantes realicen generalizaciones matemáticas?, ¿Cuáles serían los beneficios de incorporar la propuesta Early-Algebra y promover el pensamiento algebraico en la formación de maestros?, ¿De que modo influye en los futuros maestros el aprendizaje y la reflexión en clase sobre la conveniencia de la enseñanza de estos tópicos en la escuela? ¿Están preparados los futuros maestros para hacer frente a las dificultades que pueden presentar los estudiantes al trabajarse en el aula la aritmética y el álgebra de forma integrada?

Preguntas que se centran en el aprendizaje y la enseñanza ¿Cómo aprenden los estudiantes a describir las relaciones detectadas y expresarlas gradualmente según la notación algebraica?, ¿Qué aprendizaje es necesario para que los estudiantes sean capaces de hacer generalizaciones matemáticas?, ¿Es la forma en que se enseña el álgebra escolar lo que causa que los estudiantes presenten dificultades en realizar y expresar generalizaciones?, ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de un comienzo temprano del desarrollo de pensamiento algebraico en el aprendizaje de los estudiantes?, ¿Qué aspectos del álgebra y del pensamiento algebraico deberían formar parte de una educación de álgebra temprana?

Interrogantes considerados para nuestro trabajo

¿Los futuros maestros son capaces de expresar de forma general relaciones apreciadas en expresiones aritméticas?

¿Qué variedad de generalizaciones producen dichos estudiantes?

¿Cómo interviene el pensamiento relacional en el trabajo con las expresiones aritméticas hasta llegar a la expresión de alguna generalización?
¿Distinguen las regularidades o patrones claves para la generalización de las que no lo son?
¿Qué dificultades presentan para generalizar las relaciones apreciadas en expresiones aritméticas?

OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Las reflexiones anteriores nos han llevado a plantearnos un objetivo general de investigación, y unos objetivos concretos a los que trataremos de dar respuesta

Objetivo General

El objetivo general de esta investigación es estudiar el proceso de generalización que realizan unos futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización.

Objetivos concretos

Analizar el trabajo de unos alumnos, futuros maestros de Educación Primaria, con expresiones aritméticas tratando de cumplir los siguientes objetivos:

O1: Discernir si dichos sujetos, realizan el "paso" desde las expresiones aritméticas a la generalización

O2: Recopilar todas las generalizaciones que produzcan y estudiar su variedad

O3: Analizar si utilizan pensamiento relacional, y de que modo, en el proceso del paso de las expresiones aritméticas a la generalización

O4: Comprobar si, dichos sujetos, perciben los patrones que permiten la generalización

O5: Percibir las dificultades que presentan dichos alumnos en el trabajo planteado de "paso" entre expresiones aritméticas y su generalización algebraica.

MARCO TEÓRICO

Este marco teórico que presentamos lo hemos realizado, como ya apuntamos en la introducción, partiendo de la reflexión sobre los textos analizados. En dichos textos se distinguen diferentes concepciones y componentes del álgebra así como enfoques para su trabajo en el aula. Comenzamos recogiendo de varios autores (Fernández y Anhalt, 2001; Kieran, 1991, 2006, 2007; Molina, 2006; Socas et al., 1989; Usiskin, 1999) sus aportaciones sobre estas ideas. Posteriormente para precisar el marco conceptual se presentan dos grandes bloques: Álgebra como generalización y Aritmética, Álgebra y Early-Algebra. Debido a la naturaleza del contenido con el que vamos a trabajar, destacamos la relevancia de algunas nociones dentro de dichos bloques teóricos como: generalización, aritmética generalizada y pensamiento relacional.

Concepciones. Enfoques para la enseñanza. Dimensiones o componentes

El álgebra se considera como generalización de patrones numéricos y geométricos así como de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, como una forma de resolver problemas, o bien como la modelización de fenómenos físicos. Se percibe así mismo como aritmética generalizada, el estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo estudio de funciones) y el estudio de estructuras.

Se presentan cuatro enfoques que se conciben como una categorización fenomenológica: (1) como un medio para resolver problemas; (2) el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables; (3) la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras; (4) un lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

En cuanto a las componentes del álgebra de destacamos: (a) la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones; (b) la representación de relaciones matemáticas; (c) el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; (d) el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y (e) el análisis del cambio.

ÁLGEBRA COMO GENERALIZACIÓN

La generalización tiene un papel destacado dentro del álgebra como muestran las diferentes concepciones, dimensiones y enfoques antes enunciados. Autores como Mason (1996) y Mason et al., (2005), consideran la generalización como una ruta hacia el álgebra, o incluso como la esencia del álgebra. Para Kieran (2006, 2007), el "álgebra como generalización" es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones.

La importancia de la generalización en el aprendizaje ha sido reconocida en investigaciones pioneras como indicó Davidov (1972/1990) al señalar que "desarrollar las generalizaciones de los niños se ve como uno de los principales propósitos de la instrucción escolar" (p.10). Los estándares del NCTM (2000) enuncian que la generalización es uno de los principales objetivos de la instrucción matemática.

Es importante resaltar que el reconocimiento de patrones es esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar, ya que al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos, se está hablando de generalización (Polya, 1966). Lee (1996) sugirió que "el álgebra, y de hecho todas las matemáticas son sobre la generalización de patrones" (p.103). Steen (1990) y Schoenfeld (1992) han coincidido en referirse a las matemáticas como la ciencia de los patrones. Schoenfeld (1992) explica esta afirmación como sigue:

> *Las matemáticas son una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de practicantes entrenados (científicos matemáticos) se ocupan de la ciencia de los patrones –intentos sistemáticos basados en la observación, estudio, y experimentación, para determinar la naturaleza de los principios de las regularidades en los sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemática aplicada). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica* (p. 335).

Los patrones se consideran como "algo" que se repite con regularidad (Castro, 1995; Stacey, 1989). La descripción y representación de patrones geométricos y numéricos aparecen asociadas a la generalización y al lenguaje algebraico y verbal como formas de expresar las generalizaciones (Cañadas, 2007). El foco de la enseñanza matemática debería ser dirigido a fomentar habilidades fundamentales en generalizar, expresar y justificar sistemáticamente generalizaciones (Kaput y Blanton, 2001).

Generalización

Kaput define la generalización como:

> *"extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos".* (Kaput, 1999, p.136)

Amit y Neria (2008) recogen diferentes definiciones sobre la generalización: como pasar de la consideración de un objeto a la consideración de un conjunto que contiene ese objeto; o pasar de la consideración de un conjunto restringido al de un conjunto más grande que contiene el restringido. Asimismo, la definen como un proceso sofisticado y poderoso, el cual involucra reflexión y una hábil reconstrucción de los propios esquemas existentes; y como el proceso de aplicar un argumento dado en un contexto más amplio. Estas autoras también señalan su genuina necesidad en la educación matemática y distinguen al menos dos formas de alcanzar la generalización, bien por la creación de versiones ´resumen` abreviadas de ítems de conocimiento, o, alternativamente, creando un isomorfismo entre dos ítems.

Según señala (Cañadas, 2007), apoyándose en varios autores, se consideran diferentes concepciones de la actividad de generalización, a saber: como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad; como un lenguaje verbal y de gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar (como una alternativa al sistema de representación algebraico) y como una de las ideas básicas que puede guiar a los estudiantes a la utilización y manejo del lenguaje algebraico.

Actividades o etapas en el proceso de generalización se destacan por algunos investigadores. Lobato, Ellis, & Muñoz, (2003) indican que la etapa inicial en la generalización exige "enfocarse" o "prestar atención" a una posible propiedad invariante o relación. Mason et al. (2005) resaltan que en la ruta hacia la generalización se necesitan actos de "prestar cuidadosa atención" a detalles, especialmente a aquellos aspectos que cambian y/o a los que se mantienen iguales. Esto se puede resumir en la frase de Mason et al. (2005) "ver lo general a través de lo particular y ver lo particular en lo general" (p. 310).

Destacamos la aportación de Radford (2008) para el cual el punto crucial en una justificación de generalización es explicar la forma en la que se percibe lo que es igual y lo que es diferente. Argumenta que las generalizaciones de patrones algebraicos no están caracterizadas por el uso de notaciones sino por la forma general en la que se tratan. Sugiere que la generalización de patrones algebraicos supone tres momentos (1) la captación de una similitud, (2) la generalización de esta similitud a todos los términos de la secuencia que se está considerando y (3) la formación de una regla o esquema que permite determinar cualquier término de la secuencia directamente (es este caso el autor se está refiriendo a la generalización que se realiza a partir de una secuencia).

En esa misma línea, Mason (1996) y Mason et al. (2005), habiendo analizado el proceso de generalización en las matemáticas escolares, identifican las siguientes conductas que conforman el ciclo de generalización: percibir la generalidad, expresar la generalidad, elucidar una regla general, verbal o numérica para generar una secuencia, expresar simbólicamente la generalidad, y manipular la generalidad. Desde la perspectiva de Kaput (1999), la generalización requiere emprender al menos tres actividades: (a) identificar similitudes a lo largo de casos, (b) extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó, o (c) derivar resultados más amplios de casos particulares. Cañadas y Castro (2004) habiendo analizado el razonamiento inductivo en alumnos de secundaria, definen un sistema de categorías que responde a las acciones seguidas por los alumnos para llegar a la generalización: (1) la comprensión del enunciado de la tarea, (2) trabajar con casos particulares, (3) formular conjeturas, (4) validar las conjeturas y; (5) justificar la conjetura general.

ARITMÉTICA, ÁLGEBRA Y EARLY-ALGEBRA

La generalización de la aritmética es considerada una componente fundamental del álgebra que es utilizada tradicionalmente para la introducción del álgebra en el ámbito escolar. Centrándose en esta componente, Mason (1996) formula que la diferencia entre aritmética y álgebra es que "*la aritmética procede directamente de lo conocido a lo desconocido utilizando cálculos conocidos; el álgebra procede indirectamente de lo desconocido vía lo conocido a ecuaciones y desigualdades que pueden ser resueltas utilizando técnicas establecidas*" (p. 23). Van Amerom (2003) afirma que la aritmética trata con cálculos directos sobre números conocidos, mientras que el álgebra requiere razonamiento sobre cantidades desconocidas o variables y reconocer la diferencia entre situaciones específicas y generales

Una vista más cuidadosa sobre las principales diferencias entre el álgebra escolar y la aritmética es recogida por Van Amerom, (2002) y Molina (2006). Estas autoras resaltan que la aritmética y el álgebra tienen objetivos diferentes, la aritmética busca encontrar una solución numérica, en cambio, el álgebra busca generalizar y simbolizar métodos de resolución de problemas. En este sentido, de forma general la aritmética se enfoca en la manipulación de números fijos, en la generalización de situaciones relativas a números concretos, los símbolos son considerados como etiquetas de medidas o abreviaciones de un objeto y las expresiones simbólicas representan procesos. En contraste, el foco en el álgebra está en la generalización de las relaciones entre números, la reducción a la uniformidad, la manipulación de variables, los símbolos son variables o incógnitas y las expresiones simbólicas son consideradas como productos y procesos.

Debido a esta diferencia de enfoques se produce una separación del álgebra y la aritmética en el aprendizaje de las matemáticas lo cual acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos en sus trabajos algebraicos. Por este motivo, varios autores proponen diferentes formas de trabajar para promover la integración de ambas disciplinas y así facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra formal, así como un inicio temprano en esta forma de trabajar.

En particular Fujii (2003) sugiere que se debe: describir y hacer uso de los procesos y propiedades estructurales generalizables -generalizar soluciones a problemas aritméticos para facilitar el desarrollo, por los alumnos, del concepto de variable en un sentido informal-, y proveer oportunidades a los alumnos para discutir sus estrategias de resolución de estos problemas con la intención de resaltar los procesos e ideas matemáticas fundamentales. Romberg y Kaput (1999) mantienen que entender las matemáticas cada vez más complejas de este nuevo siglo requerirá que los niños tengan un tipo de experiencia de escuela elemental que vaya más allá de la aritmética y la fluidez de cálculo, para prestar atención a la estructura subyacente más profunda de las matemáticas. Blanton (por aparecer) afirma que requerirá experiencias que ayuden a los niños a aprender a reconocer y articular relaciones y estructuras matemáticas y utilizar estos entendimientos de razonamiento matemático como objetos para el razonamiento matemático (citado por Blanton y Kaput, 2005). Así mismo, en la última edición de los

Estándares del NCTM (2000), se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización:

> *viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los docentes pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior* (p. 37).

Este movimiento se recoge en la propuesta que se conoce como Early-Algebra y que trata de introducir modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar. Esta propuesta persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, sobre todo, facilitar el aprendizaje del álgebra a los escolares. Dicha propuesta va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba la mayoría de los diferentes componentes anteriormente mencionados.

El propósito subyacente del Early-Algebra es impulsar a la vez y con la misma fuerza el pensamiento algebraico y el aritmético. Para ello se recomienda profundizar en la forma estructural y general de las matemáticas y no sólo trabajar en experiencias aisladas de cálculos. Se trata de una forma nueva de trabajar, a través de la cual se pretende favorecer que los alumnos de niveles escolares más bajos puedan alcanzar el éxito matemático en los grados posteriores. Por tanto, la perspectiva sobre la "preparación algebraica" es que las experiencias en construir y expresar generalizaciones matemáticas deberían ser un proceso uniforme que empieza al principio de la escolarización formal, y no un contenido para los grados posteriores (Blanton y Kaput, 2005).

Aritmética generalizada

Al margen de la propuesta de Early-Algebra otros autores han abundado en estas ideas. Según Socas et al., (1989) el álgebra no está separada de la aritmética; sino que es en gran parte aritmética generalizada. Hewitt (1998) y Mason et al., (2005) consideran que el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética, ya que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Según Hewitt (1998), la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado.

La visión del álgebra como una aritmética generalizada, es seguida por otros autores, como Kieran (2006, 2007), además de los mencionados, que apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela. Drijvers y Hendrikus (2003) argumentan que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética y a su vez la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. La estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada (Mason, 1996).

Schliemann et al., (2003) enfocan en el álgebra como una aritmética generalizada de números y cantidades. Este enfoque resalta el cambio de pensar sobre relaciones entre números particulares y medidas a pensar sobre relaciones entre conjuntos de números y medidas; y de calcular respuestas numéricas a describir y representar relaciones entre variables. Para dicho cambio se requiere que los estudiantes emprendan actividades especialmente diseñadas, para que puedan empezar a notar, articular, y representar los patrones numéricos que ven entre variables. Bajo la misma concepción del álgebra, Usiskin (1999) afirma que las instrucciones clave para el estudiante en esta concepción son "traducir" y "generalizar", y afirma que éstas son habilidades importantes no sólo para el álgebra sino también para la aritmética.

De esta forma, para entender la generalización de relaciones y procesos se requiere que éstos sean anteriormente asimilados en la aritmética, ya que es necesario que los alumnos internalicen generalidades que se encuentran implícitas dentro de ésta y que son cruciales para el aprendizaje del álgebra. Kieran (1989) afirma que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra.

Por consiguiente, los docentes de todos los niveles deberían promover el pensamiento algebraico a partir de situaciones aritméticas con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra. Han de promover actividades aritméticas que inciten a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, en las cuales los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas a la vez que practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2004, 2005). Consideramos que para llevar a cabo este tipo de enseñanza, que afronta el aprendizaje del álgebra como aritmética generalizada es necesario promover el uso y desarrollo de pensamiento relacional en la preparación de los futuros maestros.

Pensamiento Relacional

Para Molina (2006), el pensamiento relacional es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo. Este tipo de pensamiento se muestra, de esta forma, vinculado con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones. Destaca su potencial para favorecer y facilitar la algebrización de la aritmética, al centrar la atención en la estructura que subyace a ésta y favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional.

El pensamiento relacional requiere de utilizar propiedades fundamentales de los números y operaciones para transformar expresiones matemáticas en lugar de calcular simplemente una respuesta siguiendo una secuencia predeterminada de procedimientos. Este tipo de pensamiento resalta la importancia de prestar atención a las relaciones y propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas en lugar de enfocarse exclusivamente en procedimientos para calcular respuestas (Carpenter et al., 2005).

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional representan un cambio fundamental de tratamiento, pasando de poner énfasis en lo aritmético (procedimental, basado en el cálculo de respuestas) a ponerlo en lo algebraico (estructural, basado en examinar relaciones). El uso de pensamiento relacional ayuda a minimizar la realización de operaciones y hace que se piense más sobre propiedades de las mismas. La manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a dichas expresiones. Todo ello favorece un aprendizaje significativo de la aritmética, incidiendo en el desarrollo de la fluidez del cálculo y la adquisición de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Molina, 2006).

El uso de pensamiento relacional, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas como paso a la generalización comprende varios aspectos como: considerar las expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, para promover un enfoque no computacional de la aritmética; contemplar las expresiones como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y transformadas, concebir las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos; identificar y describir patrones y relaciones sobre los números y operaciones (Molina, 2006).

Fujii y Stephens (2001) señalan que "*el uso de expresiones numéricas para ilustrar relaciones variables, requiere de un cambio de pensamiento, alejándose del cálculo hacia la investigación de patrones de generalidad y complejidad creciente*" (p. 264). Destacan el potencial algebraico de la aritmética, y señalan el papel de los números, como cuasi-variables, considerándolos elemento clave para abordar problemas aritméticos de manera algebraica, sin requerirse un conocimiento previo del lenguaje simbólico algebraico. Utilizan el término "cuasi-variables" para referirse al uso de los números en una sentencia numérica o grupo de sentencias numéricas que indican una relación matemática subyacente que permanece verdadera sin importar los números que se utilicen.

METODOLOGÍA

Esta investigación responde a un estudio de casos. Los sujetos participantes fueron cuatro estudiantes de primer año de Magisterio de la especialidad de Lengua Extranjera del curso 2007/2008, de la Universidad de Granada, a los que denominaremos con nombres ficticios: Andrea, Natalia, Federico y Margarita. Estos alumnos fueron seleccionados entre el alumnado de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica que asistía con cierta regularidad y no tenían un rendimiento muy alto ni muy bajo en dicha asignatura.

Los distribuimos en dos parejas para que realizaran las tareas programadas, una pareja constituida por dos mujeres (Andrea y Natalia) y la otra, por un hombre y una mujer (Federico y Margarita). En cada pareja uno de los integrantes presentaba mayor facilidad de expresión oral y mejor rendimiento académico en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica. Durante el presente curso académico ninguno de ellos había recibido instrucción previa específica sobre el tema antes de la ejecución de las tareas.

Uno de los objetivos al recoger los datos, era que los alumnos expresaran de forma oral y escrita todo lo que pensaban al realizar las tareas. Por esta razón se trabajó en parejas para que los estudiantes hablaran entre sí y tuvieran la necesidad de explicar lo que estaban pensando y haciendo. De este modo podríamos recoger mayor información de lo que pensaban mientras realizaban su trabajo.

Datos

La recogida de datos se llevo a cabo en dos sesiones en forma de entrevistas que se llevaron a cabo en días diferentes, con una separación entre ellos de una semana, en el segundo cuatrimestre académico tras haber cursado la asignatura de Matemáticas y su didáctica, en dicha asignatura los alumnos no trabajaron el tema que es el motivo de nuestro trabajo. Ambas sesiones se realizaron en el seminario del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En estas entrevistas se trabajaron cuatro tareas con varias cuestiones en cada una de ellas.

La primera entrevista se realizó a las parejas, por separado, y la segunda a cada alumno de forma individual. El papel de la investigadora en la primera entrevista era, principalmente, de observadora y su participación fue limitada. En la segunda entrevista, de carácter semi-estructurado, la investigadora participó haciendo las preguntas que, a priori, se habían elaborado para recabar la información pertinente. El objetivo de la esta segunda entrevista era profundizar en las respuestas dadas por los alumnos en la primera sesión. Por esta razón y habiendo analizado las respuestas de los alumnos a las cuatro tareas, se decidió que en la segunda entrevista sólo era necesario trabajar tres de las cuatro tareas. En ambas sesiones, cada estudiante tuvo a su disposición calculadoras y folios en blanco. Las dos sesiones se grabaron en audio.

Los datos que hemos recogido son de tipo cualitativo y tienen distinta procedencia: Documentos escritos por los investigadores como preparación para el desarrollo de las entrevistas; de las observaciones y notas tomadas por el investigador a lo largo de las sesiones; documentos escritos por los alumnos con los resultados de las tareas propuestas; grabación en audio de las dos sesiones y transcripción de las mismas.

Tareas

Las tareas se presentaron a los alumnos junto a dos informaciones que aportaban un contexto y una motivación para las cuestiones que se les plantearon. El texto de la primera información (Figura A) se presentó antes de la primera tarea y el texto de la segunda (Figura B) entre la segunda y la tercera tarea.

> **Información 1.** *El profesor de Carlos e Inés les ha propuesto unos ejercicios para que adquieran mayor fluidez en el cálculo de multiplicaciones, son las que están en todos los recuadros. Verás que las expresiones que aparecen guardan entre sí unas relaciones especiales.*
>
> *Vas a trabajar con cuatro ejercicios realizando las tareas que te proponemos:*

Figura A

> **Información 2.** *Los ejercicios 3 y 4 que propone el profesor a estos alumnos no parecen tener nada que ver con la multiplicación, pero, como descubrirás más adelante, no es así.*

Figura B

Las tareas elegidas responden a los siguientes criterios: a) estar compuestas por expresiones aritméticas en las que intervienen sólo números naturales, b) los números que aparecen no tienen más de tres cifras, c) las operaciones implicadas sólo son de suma y multiplicación y d) las expresiones guardan entre sí una relación que permite detectar un patrón susceptible de ser generalizado. De esta forma, se buscaba favorecer la detección e identificación de relaciones presentes en las expresiones dadas y su posterior generalización, intentando evitar posibles dificultades en el cálculo.

En las cuatro tareas se les solicitó a los alumnos: (1) que escribieran expresiones similares a las dadas y (2) que explicaran de forma general cómo pueden construir más expresiones similares. En la tarea 1 y 2, también se les pidió que observaran las relaciones existentes en y entre las expresiones dadas y que expresaran dichas relaciones de forma general, y en las tareas 3 y 4, que encontraran alguna multiplicación de dos números que diera igual resultado que las sumas dadas, y que expresaran las relaciones encontradas de forma general.

Estas cuestiones pretendían guiar a los alumnos en el análisis de las expresiones dadas, forzándoles a buscar relaciones entre las expresiones y que, posteriormente, las expresaran de forma general, ya fuera de forma verbal o simbólica.

Las expresiones concretas presentadas a los estudiantes en cada tarea fueron las siguientes:

Ejercicio 1.	*12 x 12* *13 x 11*	*4 x 4* *5 x 3*	*9 x 9* *10 x 8*

Ejercicio 2.	*2 x 5 + 2 x 7* *2 x (5 + 7)*	*4 x 10 + 4 x 5* *4 x (10 + 5)*	*7 x 9 + 7 x 6* *7 x (9 + 6)*

Ejercicio 3. Realiza las operaciones: *3 + 5 =* *27 + 29 =* *9 + 11 =* *45 + 47 =*	**Ejercicio 4. Realiza las operaciones:** *16 + 17 + 18 + 19 + 20 =* *9 + 10 + 11 + 12 + 13 =* *132 + 133 + 134 + 135 + 136 =*

En la tarea 1 aparecen separados en un mismo cuadro el producto de un número por sí mismo y otro producto en el que los factores son un número más y uno menos del anterior, respectivamente. Esperábamos que los estudiantes observaran las relaciones entre un número multiplicado por sí mismo, a x a, y su siguiente multiplicado por su anterior (a + 1) x (a – 1).

En la tarea 2, en cada uno de los recuadros se recogen dos expresiones que son equivalentes y que se obtienen una a partir de la otra aplicando la propiedad distributiva (sacar factor común).

Las tareas 3 y 4 tienen en común la existencia de relaciones entre las expresiones consideradas y la multiplicación de dos números siendo uno de ellos el punto medio del primer y último término de las expresiones dadas. Además, en el ejercicio 3 se percibe la presencia de dos números impares consecutivos y, en el 4 de cinco términos consecutivos.

Taxonomía para categorizar generalizaciones

Para el análisis de los datos recogidos utilizamos la taxonomía de Ellis (2007a), realizando algunas modificaciones que más adelante detallamos. Esta taxonomía tiene en cuenta diferentes niveles de generalización y distingue dos partes muy diferenciadas, la actividad de los estudiantes cuando generalizan que Ellis denomina *acciones para la generalización*, y los enunciados finales de generalización, llamados *generalizaciones reflejadas*. Los enunciados finales de generalización pueden ser orales, escritos o el uso del resultado de una generalización (cuando los estudiantes implementan en nuevos problemas o contextos generalizaciones previamente desarrolladas).

Esta taxonomía resulta especialmente relevante porque, a diferencia de otros trabajos previos en los que se han descrito niveles y categorías de generalización a partir de modelos expertos de rendimiento, esta taxonomía procede de una intensa recogida de datos, desde una perspectiva centrada en el alumno, a través de experimentos de enseñanza y entrevistas con alumnos de 11 y 12 años (Ellis, 2007a).

En este trabajo utilizamos la segunda parte de la taxonomía señalada por Ellis (2007a), para analizar y clasificar los enunciados finales de generalización de los estudiantes. En esta parte de la taxonomía se distinguen tres tipos de generalizaciones llamadas reflejadas: *Identificación o Enunciado, Definición e Influencia*. Dentro de la primera de estas subcategorías la autora distingue entre Fenómeno continuo, Similitud (propiedad común, objetos o representaciones y situaciones) y Principio general (regla, patrón, estrategia o procedimiento y regla global). A su vez la subcategoría de *influencia* está dividida en: Idea previa o estrategia.

Para adecuar la taxonomía a nuestro trabajo, hemos realizado las siguientes modificaciones: (a) no incluir la subcategoría *influencia* ya que consideramos que ésta hace referencia a aquellas acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar una generalización más que a un enunciado final y nuestro interés estaba localizado en los enunciados finales y no en las acciones, las cuales no nos era posible conocer; y (b) distinguir dos tipos de enunciados dentro de la subcategoría de *similitud de objetos o representaciones: estructura* y *resultado,* ya que una vez recogidos los datos, para el análisis de los mismos vimos necesario hacer esta subdivisión. Esta distinción es pertinente en este caso por estar considerando expresiones numéricas las cuales pueden considerarse similares por tener el mismo valor numérico (resultado) o por tener una estructura idéntica o semejante. Quedando la taxonomía que utilizamos como se muestra seguidamente en la tabla 2:

Tabla 2: Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis

<table>
<tr><th colspan="4">TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo especifico.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de una propiedad común a varios objetos o situaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura: La identificación de objetos como similares o idénticos según la estructura.</td></tr>
<tr><td>Resultado: La identificación de objetos como similares o idénticos en función de los resultados, es decir, de sus valores numéricos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td>Regla: La descripción de una formula general o hecho.</td></tr>
<tr><td>Patrón: La identificación de un patrón general.</td></tr>
<tr><td>Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td></tr>
<tr><td>Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="2">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td></tr>
</table>

ANÁLISIS DE DATOS

A continuación analizamos y clasificamos los enunciados orales y escritos de generalización, generados por los estudiantes, utilizando la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis. En el análisis de las producciones de los alumnos en cada una de las tareas, inicialmente organizamos los enunciados de los estudiantes en unas tablas que recogemos en los anexos, en las cuales ya aparecen clasificados según dicha taxonomía.

Producción de Andrea

Tarea 1.

Los enunciados que Andrea produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones en estructura y resultado y principios generales como patrón, estrategia o procedimiento y regla global.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* La alumna a partir de las expresiones numéricas dadas creó otras expresiones similares (Figura 1), de las cuales por su expresión oral y escrita podemos extraer las siguientes relaciones: las columnas de las expresiones numéricas se diferencian por una unidad, y; la suma de los dos términos de cada expresión da lo mismo (Figura 2). Cabe resaltar que con respecto a la primera relación se presentan dos diferencias, en las expresiones [14x14, 13x15] la alumna mantiene la estructura de las expresiones dadas, en cambio en la última [16x2, 15x1] mantiene la relación detectada pero no la estructura de las expresiones dadas.

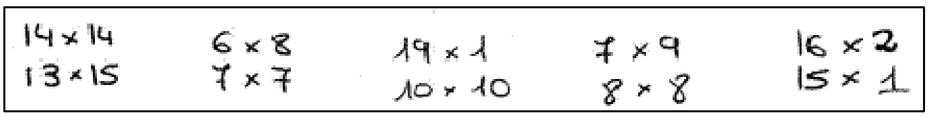


Figura 1

En algunos casos no consideró las parejas de expresiones como un conjunto, sino de forma separada (Figura 3).

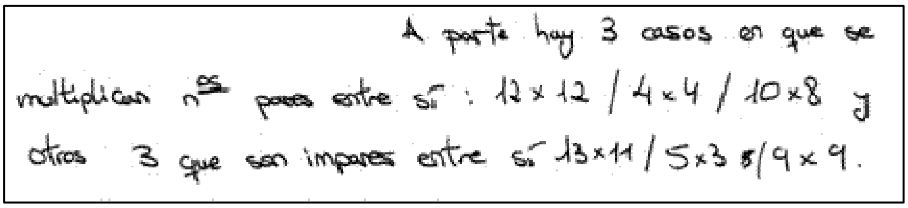

A parte hay 3 casos en que se multiplican nºs pares entre sí: 12 × 12 / 4 × 4 / 10 × 8 y otros 3 que son impares entre sí 13 × 11 / 5 × 3 ~~5~~/ 9 × 9.

Figura 3

- *Resultado.* (Figura 2)

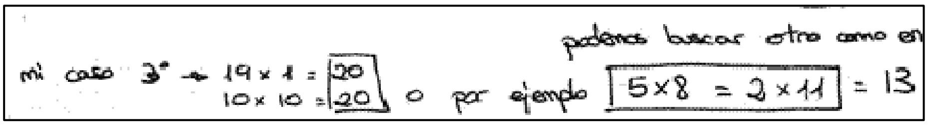

podemos buscar otro como en mi caso 3º → $19 \times 1 = \boxed{20}$, $10 \times 10 = \boxed{20}$ o por ejemplo $\boxed{5 \times 8 = 2 \times 11} = 13$

Figura 2

Patrón. Observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas: "…*en todos, he quitado por un lado uno y en el otro, lo he sumado"* (Figura 4).

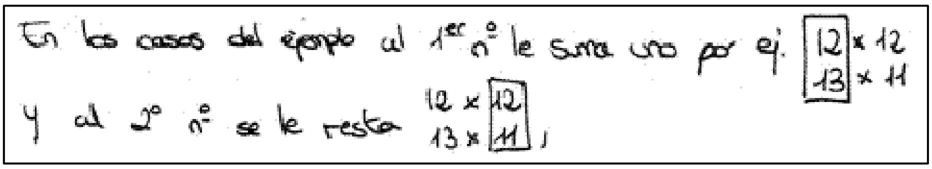

En los casos del ejemplo al 1er nº le suma uno por ej. $\boxed{12} \times 12$, $\boxed{13} \times 11$ y al 2º nº se le resta $12 \times \boxed{12}$, $13 \times \boxed{11}$,

Figura 4

Estrategia o procedimiento. La alumna expresa de forma oral cómo creó las expresiones aritméticas similares a las dadas: *"...sería 14 y 14, pues 28... el caso es que a éste* [señala en el folio] *le he quitado uno, digamos al 4 le he quitado uno y al cuatro le he sumado uno, y vamos, ya da lo mismo, aunque no tenga que hacer la suma, ya se que van a dar lo mismo. En este caso es lo mismo, a éste* [señala en el folio] *le he sumado uno y a éste* [señala en el folio] *se lo he restado. En éste* [señala en el folio] *como 19 y 1 son 20 pues 10 y 10 también. Luego en éste* [señala en el folio], *pues igual que aquí, a éste le he sumado uno aquí y he restado uno. Y éste* [señala en el folio] *pues lo mismo. En todos he hecho el mismo proceso menos en éste* [señala en el folio] *que es una división, en todos he quitado por un lado uno y en el otro lo he sumado, y en éste* [señala en el folio] *ha sido el único que no porque salía 20, pues he dicho 10 y 10".*

Regla global. Utilizó el lenguaje verbal para explicar de forma general, aunque no muy precisa, cómo construir más expresiones similares. En este caso, ella expresó una generalización de forma verbal (Figura 5)

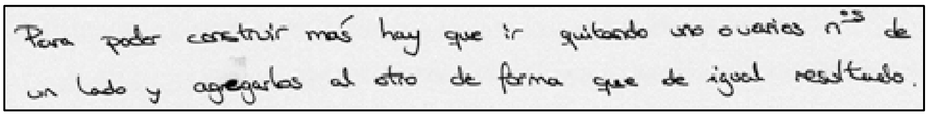

Para poder construir más hay que ir quitando uno o varios n.os de un lado y agregarlos al otro de forma que de igual resultado.

Figura 5

Tarea 2.

Los enunciados de estas tareas se clasifican en las subcategorías de similitud en una propiedad común y objetos o representaciones en estructura; y en principios generales en regla, estrategia o procedimiento y regla global.

Similitud de una propiedad común. La alumna pareció reconocer que estas expresiones se relacionan con una propiedad, pero no estaba segura del nombre de dicha propiedad creyendo que era la propiedad distributiva. Su compañera la convence que es la asociativa diciéndole que ella cree que es asociativa, porque se está asociando (Figura 6). Su intento de recordar dicha propiedad nos indica que ha reconocido la existencia de una propiedad que vincula las expresiones de cada recuadro.

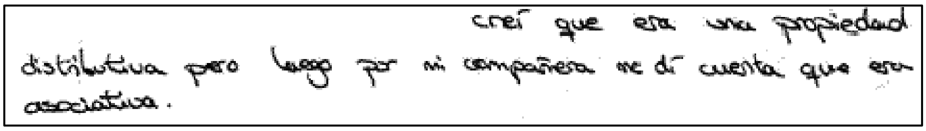
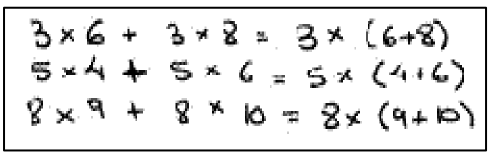

creí que era una propiedad distributiva pero luego por mi compañera me di cuenta que era asociativa.

Figura 6

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* La estudiante planteó expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones dadas e igualó las parejas de expresiones poniendo así de manifiesto su equivalencia (Figura 7).


$3 \times 6 + 3 \times 8 = 3 \times (6+8)$

$5 \times 4 + 5 \times 6 = 5 \times (4+6)$

$8 \times 9 + 8 \times 10 = 8 \times (9+10)$

Figura 7

Estrategia o procedimiento. La alumna describe verbalmente como se construyen estas expresiones que resultan ser equivalentes: *"... se repite siempre el primer, o sea, hay un número que se repite siempre, verdad?, entonces, lo multiplica, por ejemplo aquí, el número que se repite, por cinco; y le sumas, el número que se repite por siete; entonces, este número, lo multiplicas por los dos que no se repiten y te va a dar lo mismo en ambos casos".*

Regla. La explicación que presentó Andrea para construir más expresiones similares se clasificó como regla. En ella expresa la relación en forma general pero utilizando un caso particular (Figura 8).

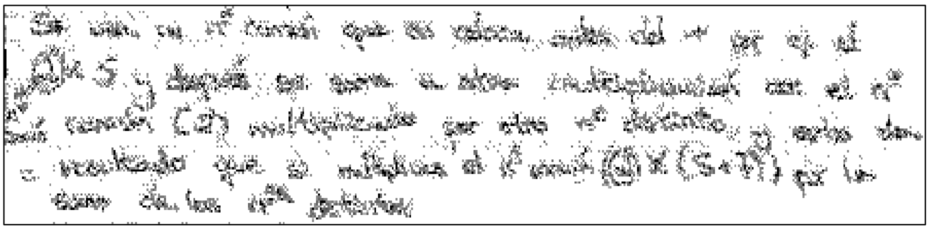


Figura 8

Regla global. En el tercer apartado de la tarea, la alumna expresa de forma general la estructura de las expresiones aritméticas dadas, es decir, expresa la propiedad distributiva de forma general: *"Sería a por b más a por c igual a por b más c".* Ella dice que se pueden utilizar letras para expresar estas expresiones, ya que éstas se pueden usar para todos los números y es más fácil porque sólo es sustituir[1] (Figura 9).

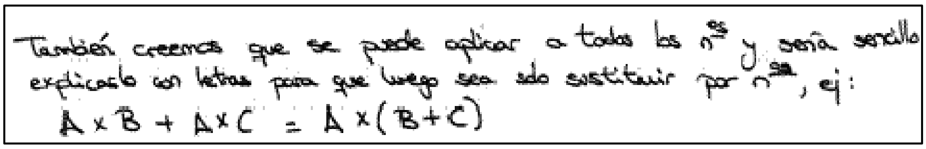


Figura 9

Tarea 3.

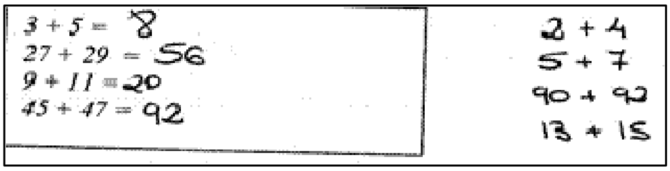
Los enunciados que Andrea expresa en esta tarea se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones en estructura y principios generales como regla, patrón, y regla global.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* La alumna identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas *"Todos los números son impares, sin embargo, todos dan resultado par".*

[1] Cuando la alumna se refiera aquí a todos los números no sabemos si se refiere a únicamente los números naturales o si es consciente de que esta propiedad se cumple también para otro tipo de números.

Crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas, con la salvedad de que incluye sumas de parejas de números pares consecutivos (Figura 10).


3 + 5 = 8
27 + 29 = 56
9 + 11 = 20
45 + 47 = 92

2 + 4
5 + 7
90 + 92
13 + 15

Figura 10

Patrón. Ella observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas (Figura 11)


En 1er lugar del 1er nº al 2º hay 2 nºs de diferencia

Figura 11

Regla. La alumna plantea que si el primer término es impar y se le suman dos, los dos términos serán impares, lo que conlleva que su resultado sea par. Parece llegar a esta generalización a partir del análisis de las expresiones tras el cálculo de su valor numérico. A partir de esta generalización, concluye erróneamente que de forma análoga la suma de dos números pares va a dar un número impar, sin contrastar su conjetura con ejemplos (Figura 12).

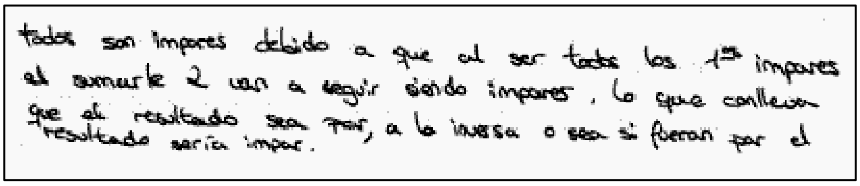

todos son impares debido a que al ser todos los 1º impares
al sumarle 2 van a seguir siendo impares, lo que conlleva
que el resultado sea par, a la inversa o sea si fueran par el
resultado sería impar.

Figura 12

Regla global. Crea un esquema general para expresar varias propiedades que considera ciertas para cualquier número (Figura 13). En este esquema la alumna expresa de nuevo un par de generalizaciones que son incorrectas. De forma oral expresó: "[si] *sumas impar e impar te va a dar par*".

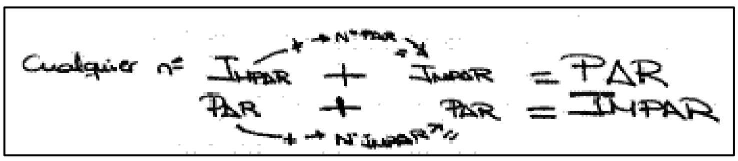

+ → Nº PAR
Cualquier nº IMPAR + IMPAR = PAR
PAR + PAR = IMPAR
+ → Nº IMPAR

Figura 13

En el tercer ítem de esta tarea se le pide que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Andrea plantea dos relaciones, una sobre la paridad de la multiplicación de impares y pares (Figura 14), y otra contrastando la multiplicación por uno de la suma de una unidad (Figura 15). Los patrones de paridad observados por esta alumna, en los cuales ha centrado su trabajo previo en esta tarea, hacen que en esta otra cuestión reflexione sobre la relación de la paridad y la multiplicación y no considere otras posibles relaciones. Además este trabajo con hechos generales de la multiplicación le lleva a recordar una propiedad de esta operación: la propiedad del 1 como elemento identidad.

Si multiplicamos impar × impar = impar y si es par × par = par,

Figura 14

Al multiplicar cualquier nº por 1 da un nº menor que si lo sumases

Figura 15

Tarea 4.

Clasificamos los enunciados que Andrea produjo al trabajar en esta tarea en las subcategorías de similitud en una propiedad común y objetos o representaciones en estructura; y en principios generales en regla, patrón y estrategia o procedimiento.

Similitud de una propiedad común. La alumna identifica y expresa oralmente que: "*... en los tres salen múltiplos de cinco porque sale cero, el cinco y el cero*".

Similitud de un objeto o representación.

- *Estructura.* Crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas (Figura 16).

$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 90$	$23 + 24 + 25 + 26 + 27 = 125$
$9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$	$92 + 93 + 94 + 95 + 96 = 470$
$132 + 133 + 134 + 135 + 136 = 670$	$239 + 240 + 241 + 242 + 243 = 1205$

Figura 16

Patrón. Andrea observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas: *"…y por lo que he visto, siempre se cumple que los resultados terminan en cero o en cinco, lo cual significa que son múltiplos de cinco… con cinco números".* La observación de este patrón es lo que le permite expresar la generalización antes clasificada como similitud de propiedad común (es decir, reconocer que los valores numéricos de dichas expresiones son todos múltiplos de cinco).

Estrategia o procedimiento. La alumna describe cómo se construyen números consecutivos (Figura 17).

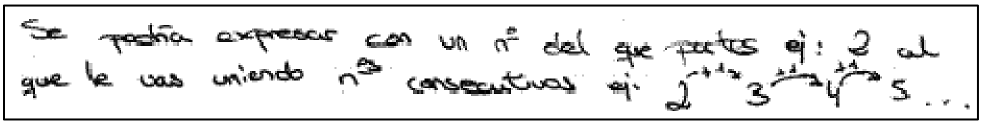

Se podría expresar con un nº del que partes ej: 2 al que le vas uniendo nºs consecutivos ej: 2 +1 3 +1 4 +1 5 . . .

Figura 17

Regla. Enuncia una regla para poder crear más expresiones similares a partir de las dadas (Figura 18).

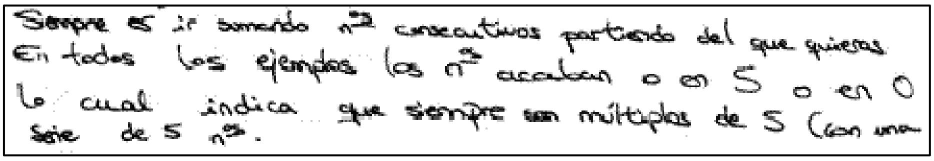

Siempre es ir sumando nºs consecutivos partiendo del que quieras. En todos los ejemplos los nº acaban o en 5 o en 0 lo cual indica que siempre son múltiplos de 5 (con una serie de 5 nºs.

Figura 18

Para resumir, presentamos en la tabla 4 las frecuencias de los tipos de enunciados de generalización que produjo Andrea. En función de las tareas, el mayor número de enunciados producidos por la alumna se ubica en la tarea 3 (8) donde su interés en la paridad de los términos de las expresiones la condujo a expresar variadas generalizaciones. El menor número de enunciados se presenta en la tarea 4 (5). La tarea 1 y 2 se diferencian en un enunciado (7 y 6). En total, esta alumna produjo 26 enunciados.

Respecto a la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis, las subcategorías con mayor número de enunciados son la de regla global (7) y similitud de objetos o representaciones en estructura (6). Este último dato pone de manifiesto que la atención de la alumna se centro en elementos estructurales de las expresiones y no tanto en su valor numérico, poniendo de manifiesto un importante uso de pensamiento relacional.

Las subcategorías con menor número de enunciados fueron la de similitud de objetos o representaciones en resultado (1) y propiedad común (2). Sin embargo, no se encontraron enunciados que pertenecieran a las subcategorías de fenómeno continuo, similitud de situaciones y clases de objetos.

Observamos que en variadas ocasiones (7) expresó generalizaciones o reglas globales sin hacer referencia a ejemplos concretos. No obstante, en ocasiones éstas no fueron correctas, no habiendo sido contrastadas con casos particulares. La mayoría de sus enunciados de generalización fueron verbales acompañados en ocasiones de ejemplos numéricos. En la tarea 2 expresó simbólicamente la relación observada entre las expresiones. También observamos que la mayor parte de enunciados producidos por la alumna se concentran en la subcategoría de principio general (17) en contraposición con la de similitud (9).

Tabla 4: Producción de Andrea

Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas				**Tarea 1.**	**Tarea 2.**	**Tarea 3.**	**Tarea 4.**	**Total**
Identificación o enunciado	*Fenómeno continuo*							0
	Similitud	*Propiedad común*			X		X	2
		Objetos o representaciones	*Estructura*	XX	X	XX	X	6
			Resultado	X				1
		Situaciones						0
	Principio general	*Regla*			X	X	X	3
		Patrón		XX		X	X	4
		Estrategia o procedimiento		X	X		X	3
		Regla global		X	XX	XX XX		7
Definición	*Clases de objetos*							0
Total				7	6	8	5	**26**

Producción de Natalia

Tarea 1.

Los enunciados que Natalia produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y resultados y en principios generales como patrón.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura:* La alumna identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas: *"unas multiplicaciones son números pares y otras son números impares"*.

- *Resultado.* La alumna se centra sólo en la primera expresión numérica dada, y a partir de ésta crea nuevas expresiones que tuvieran el mismo resultado que la suma de los dos términos de la expresión dada (Figura 19).

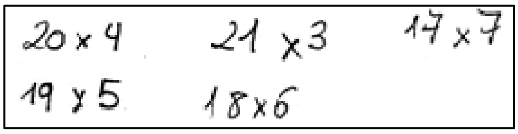

20 x 4 21 x 3 17 x 7
19 x 5 18 x 6

Figura 19

Patrón. La alumna indica oralmente que *"...a simple vista, me he fijado que en los tres casos, al sumarlos, dan el mismo resultado... yo simplemente lo he hecho mirando la suma".* Ella observó las siguientes regularidades en las expresiones dadas: (Figura 20).

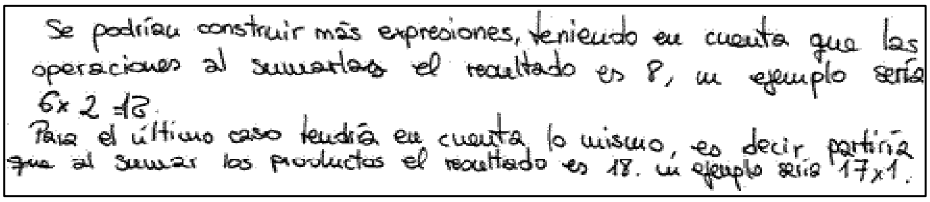

Se podrían construir más expresiones, teniendo en cuenta que las operaciones al sumarlas el resultado es 8, un ejemplo sería 6x 2 =12.
Para el último caso tendría en cuenta lo mismo, es decir partiría que al sumar los productos el resultado es 18. un ejemplo sería 17x1.

Figura 20

Además de que la suma de los términos de dichas expresiones tengan el mismo resultado, la alumna identifica y expresa oralmente una relación aditiva entre los términos de diferentes expresiones dentro de un mismo recuadro: "*...por ejemplo, en el último caso o en el primero; da igual, 12 x 12, aquí se suma, se le añade uno al trece y se le quita al once, en vez de ser doce es once, el que se quita se añade... y claro al hacer eso, pues, unas multiplicaciones son números pares y otras números impares"* (Figura 21).

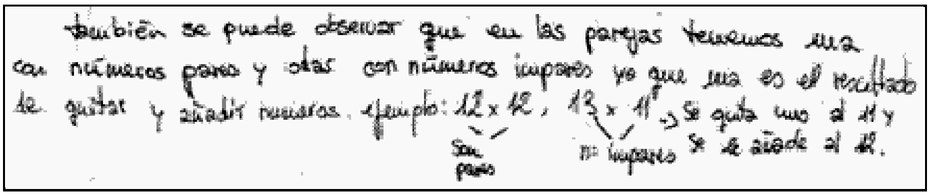

también se puede observar que en las parejas tenemos una con números pares y otras con números impares ya que una es el resultado de quitar y añadir números. ejemplo: 12 x 12, 13 x 11 -> se quita uno al 11 y se le añade al 12.
son pares
nº impares

Figura 21

Tarea 2.

Los enunciados de estas tareas se clasifican en las subcategorías de similitud en una propiedad común y situaciones; y en principios generales en regla, estrategia o procedimiento y regla global.

Similitud de una propiedad común. La alumna reconoce que estas expresiones se relacionan con una propiedad, con la asociativa, porque se está asociando (Figura 22).

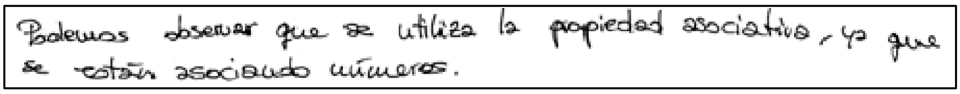

Podemos observar que se utiliza la propiedad asociativa, ya que se están asociando números.

Figura 22

Situaciones. Después que Natalia y Andrea se dieron cuenta que era posible expresar de forma general la propiedad distributiva, Natalia expresó de forma oral el por qué son importantes las letras dentro del contexto de las matemáticas: "*Yo creo que las letras, también es un recurso, digamos didáctico para enseñar matemáticas, es una forma que a lo mejor los niños a primera vista al ver los números, les resulte mas cómodo verlos en letras… sólo es sustituir y es relacionar".*

Regla. La explicación que presentó Natalia para construir más expresiones similares se clasificó como regla. Expresa la relación en forma general pero utilizando un caso particular (Figura 23).

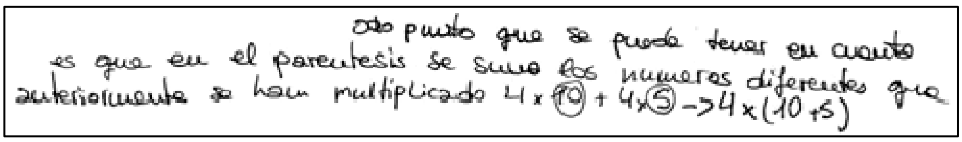
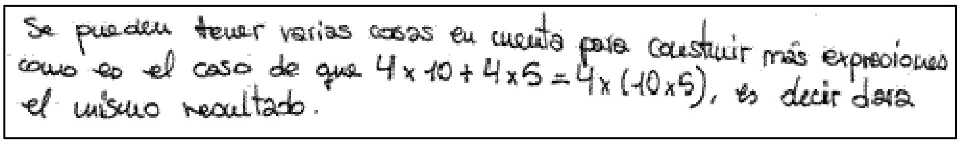

otro punto que se puede tener en cuenta es que en el paréntesis se suma los números diferentes que anteriormente se han multiplicado $4 \times 10 + 4 \times 5 \rightarrow 4 \times (10 + 5)$

Figura 23

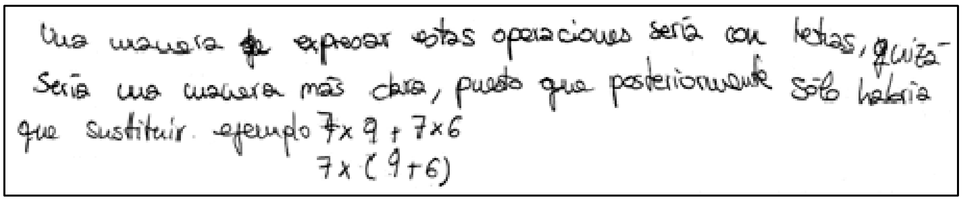
Estrategia o procedimiento. La alumna manifestó que para construir más expresiones similares tuvo en cuenta que las parejas de expresiones dadas son equivalentes (Figura

24). Al final del desarrollo de esta tarea, Natalia expresa mediante simbolismo algebraico la propiedad distributiva y explica por qué utilizó letras para expresar de forma general esta tarea (Figura 25). Su explicación parece sugerir que es una forma más clara de expresar relaciones.



Se pueden tener varias cosas en cuenta para construir más expresiones como es el caso de que $4 \times 10 + 4 \times 5 = 4 \times (10 \times 5)$, es decir dara el mismo resultado.

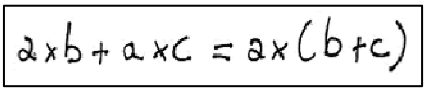
Figura 24



Una manera de expresar estas operaciones sería con letras, quizá sería una manera más clara, puesto que posteriormente sólo habría que sustituir. ejemplo $7 \times 9 + 7 \times 6$
$7 \times (9+6)$

Figura 25

Regla global. En el tercer apartado de la tarea, la alumna expresa de forma general y mediante simbolismo algebraico la estructura de las expresiones aritméticas dadas, poniendo de manifiesto su equivalencia. Esto equivale a la expresión simbólica de la propiedad distributiva de forma general (Figura 26).



$a \times b + a \times c = a \times (b+c)$

Figura 26

Tarea 3.

Los enunciados que Natalia expresa en esta tarea se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y principios generales como patrón, y regla global.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* La alumna identifica y expresa oralmente: *"pues, en este he observado que, por ejemplo, tres más cinco lo que se hace es...siempre que el segundo es más, son dos veces mayor que el primero, tres más cinco, tres y dos, más dos son cinco…"*

(Figura 27). La alumna no expresa de forma correcta que la diferencia entre los dos términos es de dos unidades, sino que utiliza la expresión "dos veces mayor".

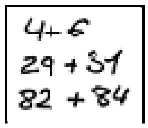


Figura 27

Patrón. La alumna identifica y expresa oralmente las siguientes regularidades: "… *los números son impares, que se llevan dos, que al sumarlos va ser resultado par"…"y claro, puesto que, se le añade dos siempre el segundo número es mayor que el primero*". Al igual que su compañera las expresiones que propone no incluyen únicamente parejas de números impares, sino también parejas de números pares. Ella observó la presencia de relaciones comunes en las expresiones dadas (Figura 28). La alumna comete un error en la parte escrita, ya que dice que al sumar dos impares el número que se obtendrá será impar, pero cuando lo expresa en palabras dice que será par.

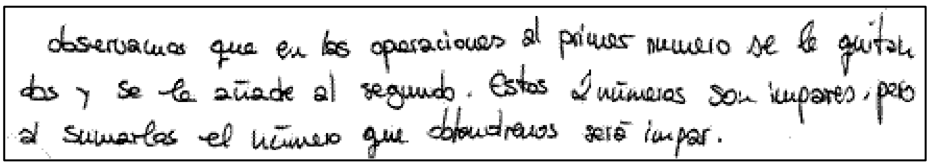


Figura 28

Regla global. La alumna identifica y expresa oralmente que "*si sumas dos impares el resultado va a dar par".* En el tercer ítem de esta tarea se le pide a la alumna que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Natalia plantea dos relaciones, una sobre la paridad de la multiplicación de impares y pares, y otra con la paridad de la suma de impares y pares (Figura 29). Ella crea un esquema general para expresar las relaciones que ella encontró para cualquier número (Figura 30). Al igual que se compañera, al abordar esta cuestión centra su reflexión en relaciones de paridad ya que esas son las que ha estado trabajando en la primera parte de la tarea.

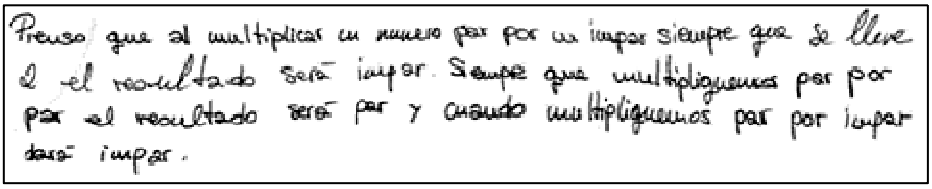

Pienso que al multiplicar un numero par por un impar siempre que se lleve 1 el resultado será impar. Siempre que multipliquemos par por par el resultado será par y cuando multipliquemos par por impar dará impar.

Figura 29

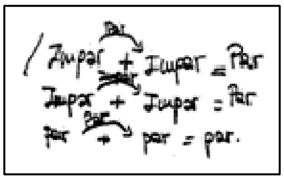

Impar + Impar = Par
Impar + Impar = Par
Par + par = par.

Figura 30

Tarea 4.

Clasificamos los enunciados que Natalia produjo al trabajar en esta tarea en la subcategoría de similitud en objetos o representaciones como estructura; y en principios generales en regla y patrón.

Similitud de un objeto o representación.

-Estructura. Crea nuevas expresiones similares en las cuales mantiene parte de la estructura de las expresiones aritméticas dadas al construir sumas de términos consecutivos, pero sólo incluye cuatro números consecutivos en dichas expresiones (Figura 31).

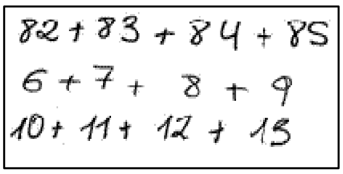

82 + 83 + 84 + 85
6 + 7 + 8 + 9
10 + 11 + 12 + 13

Figura 31

Regla. En el tercer ítem de esta tarea se le pide a la alumna que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Natalia enuncia una regla en la que manifiesta que no es posible encontrar dichas multiplicaciones (Figura 32). En cambio, en la segunda entrevista, Natalia manifestó que si se pueden encontrar dichos productos y resaltó de forma verbal las siguientes relaciones: "*siempre que tengamos un número par, se podrá multiplicar por 2 y obtendremos ese mismo número* [señala el folio]. *Cuando tengamos una suma y sabemos su resultado, sabemos también que para multiplicarlo siempre al primer número se le añade uno*". La alumna expresa estas relaciones de forma simbólica pero no separa las términos con paréntesis: $\begin{pmatrix} a+a+2=c \\ a+1\times 2=c \end{pmatrix}$ La forma correcta sería la siguiente: [a + (a + 2) = c; (a + 1) x 2 = c]. Es posible que para la alumna el uso de paréntesis no sea necesario.

No es posible encontrar una multiplicación que de el mismo resultado que los señalados anteriormente.

Figura 32

Patrón. Natalia observó las siguientes regularidades en las expresiones dadas: sus resultados siempre van a ser múltiplos de cinco, en expresiones con cinco números (Figura 33) que han de ser consecutivos (Figura 34).

Una relación sería que el resultado de estas operaciones, siempre va a ser multiplo de 5 (90, 55, 670), siempre y cuando se hiciera el 5 números.

Figura 33

Se pueden construir expresiones generales sabiendo que son series consecutivas, es decir se va añadiendo uno.

Figura 34

Para resumir, presentamos en la tabla 5 las frecuencias de los tipos de enunciados de generalización producidos por Natalia. En función de las tareas, al igual que su compañera, el mayor número de enunciados producidos por la alumna se ubica en la tarea 3 (7), y el menor número en la tarea 4 (4). En ambos casos igual que su compañera. La tarea 1 y 2 tuvieron el mismo número de enunciados (6). En total, esta alumna produjo 23 enunciados.

Respecto a la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis, las subcategorías con mayor número de enunciados son la patrón (8), similitud de objetos o representaciones en estructura (4) y regla global (4). Al igual que su compañera observamos que prestó mayor atención a la estructura de las expresiones que a su valor numérico, haciendo un uso destacado de pensamiento relacional.

Las subcategorías con menor número de enunciados fueron la de similitud en propiedad común (1), objetos o representaciones en resultado (1) y situaciones (1). Sin embargo, no se encontraron enunciados que pertenecieran a las subcategorías de fenómeno continuo y clases de objetos.

A diferencia de su compañera, observamos que Natalia expresó menor cantidad de generalizaciones o reglas globales (4). En variadas ocasiones las expresó sin hacer referencia a ejemplos concretos. No obstante, en ocasiones éstas no fueron correctas, no habiendo sido contrastadas con casos particulares. Sin embargo, Natalia expresó el doble de patrones que su compañera (8). Es posible que Natalia tuviera más dificultad en expresar las relaciones observadas en términos generales, en variadas ocasiones los enunciados que ella produce los expresa en forma de relaciones o regularidades detectadas más no en términos generales. Al igual que su compañera, la mayoría de sus enunciados de generalización fueron verbales acompañados en ocasiones de ejemplos numéricos y expresó simbólicamente la relación observada entre las expresiones de la tarea 2. También observamos que la mayor parte de enunciados producidos por la alumna se concentran en la subcategoría de principio general (16) en comparación con la de similitud (7).

Tabla 5: Producción de Natalia

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th><th>Tarea 1.</th><th>Tarea 2.</th><th>Tarea 3.</th><th>Tarea 4.</th><th>Total</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">Fenómeno continuo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitud</td><td colspan="2">Propiedad común</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones</td><td>Estructura</td><td>X</td><td></td><td>XX</td><td>X</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Principio general</td><td colspan="2">Regla</td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón</td><td>XX
XX</td><td></td><td>XX</td><td>XX</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento</td><td></td><td>XX</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global</td><td></td><td>X</td><td>XXX</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td colspan="3">Clases de objetos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3"></td><td>6</td><td>6</td><td>7</td><td>4</td><td>23</td></tr>
</table>

Producción de Federico

Tarea 1.

Los enunciados que Federico produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y resultado y principios generales como patrón.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* El alumno expresó de forma oral y escrita dos relaciones para crear nuevas expresiones: el número de dígitos que componía cada término de las expresiones dadas y si los términos de las expresiones se estaban multiplicando un número por si mismo o dos números diferentes (Figura 35). Federico no consideró las parejas de expresiones dadas como un conjunto.

10x10	3x3	8x8
12x14	6x2	10x5

Figura 35

- *Resultado.* Federico observó dos relaciones en las expresiones numéricas dadas: multiplicación de números "de igual valor" (es decir, iguales) y de igual cantidad de dígitos (Figura 36).

- 10x10, 11x11, 12x12 . . . (numeros de igual valor con dos digitos)
- (multiplicación de numeros de dos digitos pero con diferente valor)
- Multiplicaccon de numeros de un digito con el mismo valor
- Multiplicación de numeros de un digito con diferente valor
- Intercalar números de dos digitos con otros de un digito

Figura 36

Patrón. Observó las siguientes regularidades en las expresiones dadas: en la primera pareja de expresiones dadas se presenta un término que se multiplica por si mismo y en cambio, en la segunda pareja la diferencia entre cada término de la expresión es de dos unidades (Figura 37).

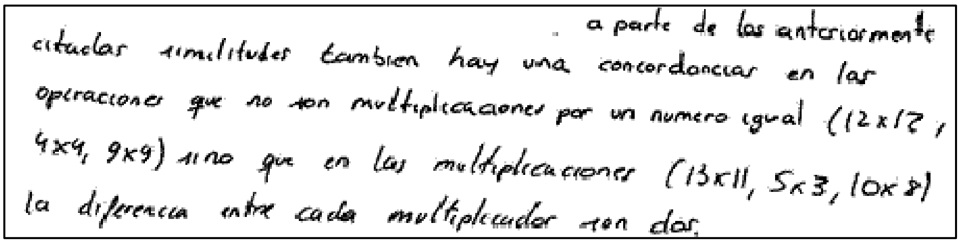

. a parte de las anteriormente citadas similitudes tambien hay una concordancias en las operaciones que no son multiplicaciones por un numero igual (12x12, 4x4, 9x9) sino que en las multiplicaciones (13x11, 5x3, 10x8) la diferencia entre cada multiplicador son dos.

Figura 37

En la segunda entrevista el alumno confirmó que en la expresión *"…en las operaciones que no son multiplicaciones…"* de la figura 37; el "no" fue un error de escritura.

El alumno identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas *"la diferencia es igual en línea así como en cruz, la diferencia es de un número en los dos".* Federico apoya su explicación con las anotaciones que se muestran en la figura 38.

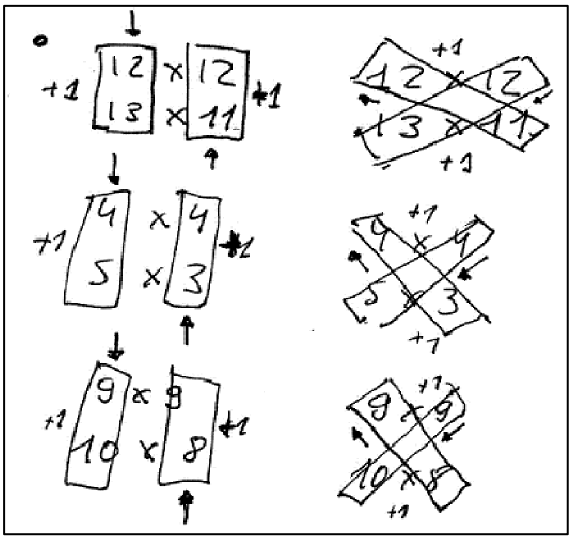


Figura 38

Tarea 2.

Los enunciados de estas tareas se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y en principios generales en regla, patrón y estrategia o procedimiento.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* El alumno crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas (Figura 39).

$3 \times 2 + 3 \times 4$	$2 \times 20 + 2 \times 10$	$5 \times 7 + 5 \times 4$
$3 \times (4 + 2)$	$2 \times (10 + 20)$	$5 \times (7 + 4)$

Figura 39

Situaciones. El alumno identifica y expresa oralmente que *"lo que esta en el paréntesis tiene prioridad".* Indicando que en matemáticas, los paréntesis sirven, principalmente, para especificar el orden en que se debe resolver; este enunciado no se clasificó como regla global ya que el alumno lo utiliza para darse cuenta que las parejas de expresiones dan igual resultado.

Patrón. El alumno identifica y expresa las siguientes regularidades en las expresiones aritméticas dadas (Figuras 40, 41 y 42).

- En cada una de las tres partes del ejercicio 2 solo hay 3 numero diferentes

Figura 40

- Cada pareja empieza por un mismo numero y termina por el mismo numero.

Figura 41

- El resultado de cada operación es el mismo en cada parte del ejercicio.

Figura 42

Estrategia o procedimiento. El alumno manifestó que para construir más expresiones similares tuvo en cuenta los números que conformaban las parejas de expresiones dadas y los fue modificando (figura 43). Esta explicación general de su método no describe la estructura que aprecia en dichas expresiones al ser demasiado vaga, aunque previamente la había expresado.

- Tomando como referencia un numero del ejercicio y a partir de ahí modificarlo siguiendo como ejemplo los ejercicios que tienen ahí.

Figura 43

Tarea 3.

Los enunciados que Federico expresa en esta tarea se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y resultado y principios generales como regla y patrón.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* El alumno crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas (Figura 44). Al igual que Andrea y Natalia, construye sumas con parejas de números pares consecutivos, no únicamente impares.

$7+9=$
$14+16=$
$8+10=$
$52+54=$

Figura 44

- *Resultado.* El estudiante construyó multiplicaciones que tuvieran igual resultado que las expresiones numéricas dadas. Federico manifiesto la igualdad de resultado de las parejas de expresiones como se muestra en la Figura 45.

$3+5=4\times2$
$27+29=14\times4$
$9+11=10\times2$
$45+47=23\times4$

Figura 45

Patrón. El alumno identifica y expresa de forma oral y escrita (Figura 46 y 47) las siguientes regularidades las cuales se complementan: *"La diferencia es de dos números entre un sumando y otro".*

- La diferencia entre sumando son dos

Figura 46

- Los numeros son impares

Figura 47

En el tercer ítem de esta tarea se le pide al alumno que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Federico plantea que *"...en las sumas hay impares y en las multiplicaciones pares"*. A lo largo del desarrollo de esta tarea, el alumno se da cuenta de aspectos que no había tenido en cuenta inicialmente, en este caso, al principio el construyó sumas en las cuales habían sumas de pares y sumas de impares y al ir progresando en esta tarea, Federico detecta que en las sumas dadas todos los números son impares.

Tarea 4.

Clasificamos los enunciados que Federico produjo al trabajar en esta tarea en la subcategoría de similitud en objetos o representaciones como estructura y resultado; y en principios generales en patrón.

Similitud de un objeto o representación.

- *Estructura.* Crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas (Figura 48).

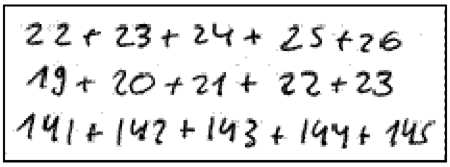


Figura 48

- *Resultado.* En el tercer ítem de esta tarea se le pide al alumno que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Federico plantea multiplicaciones que dan igual resultado a las sumas pero no establece otras relaciones más allá de la equivalencia del resultado (Figura 49).

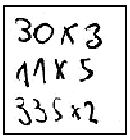


Figura 49

Patrón. Federico manifestó que para seguir ampliando el ejercicio debían ser números consecutivos (Figura 50).

Figura 50

Para resumir, presentamos en la tabla 6 las frecuencias de los tipos de enunciados de generalización que produjo Federico. En función de las tareas, el mayor número de enunciados producidos por el alumno se ubican en las tareas 2 y 3 (6) y el menor número en la tarea 4 (3). En total, este alumno produjo 20 enunciados.

Respecto a la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis, la subcategoría con mayor número de enunciados, al igual que su compañera Natalia, fue la de patrón (11). Es posible que Federico tuviera más dificultad en expresarlo en términos generales y por esta razón detallara las relaciones detectadas en forma de regularidades y por eso no haya expresado ninguna generalización. Las subcategorías con menor número de enunciados fueron la de situaciones (1) y principio general como estrategia o procedimiento (1).

Sin embargo, no se encontraron enunciados que pertenecieran a las subcategorías de fenómeno continuo, propiedad común, regla, regla global y clases de objetos.

También observamos que la mayor parte de enunciados producidos por el alumno se concentran en la subcategoría de principio general (12) en comparación con la de similitud (8).

Tabla 6: Producción de Federico

Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas				**Tarea 1.**	**Tarea 2.**	**Tarea 3.**	**Tarea 4.**	**Total**
Identificación o enunciado	*Fenómeno continuo*							0
	Similitud	*Propiedad común*						0
		Objetos o representaciones	*Estructura*	X	X	X	X	4
			Resultado	X		X	X	3
		Situaciones			X			1
	Principio general	*Regla*						0
		Patrón		XXX	XXX	XX XX	X	11
		Estrategia o procedimiento			X			1

		Regla global					0
Definición	*Clases de objetos*						0
Total			5	6	6	3	**20**

Producción de Margarita

Tarea 1.

Los enunciados que Margarita produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como resultado y en situaciones; y principios generales como patrón y estrategia o procedimiento.

Similitud de objetos o representaciones.

- *Resultado.* Al principio sólo observó que las expresiones numéricas dadas estaban formadas por dos números y un signo de multiplicación y no consideró las parejas de expresiones como un conjunto (Figura 51). Más adelante en la subcategoría de estrategia y procedimiento, Margarita explica cual fue su procedimiento para crear más expresiones similares a las dadas.

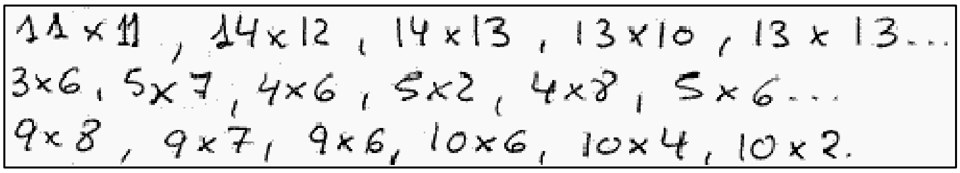

11 × 11 , 14 × 12 , 14 × 13 , 13 × 10 , 13 × 13...
3×6 , 5×7 , 4×6 , 5×2 , 4×8 , 5×6...
9×8 , 9×7 , 9×6 , 10×6 , 10×4 , 10×2.

Figura 51

Posteriormente analiza de forma separada las expresiones presentadas en cada recuadro y manifiesta que una relación existente en las expresiones dadas es la cantidad de dígitos que componen las expresiones (Figura 52).

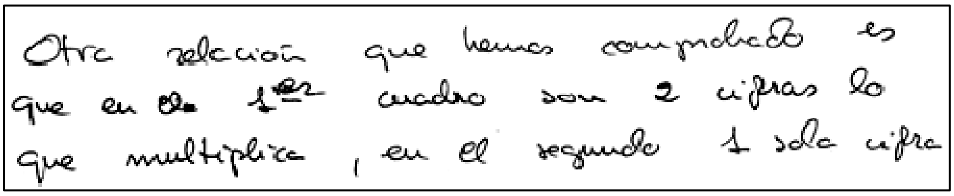

Otra relación que hemos comprobado es que en el 1er cuadro son 2 cifras lo que multiplica, en el segundo 1 sola cifra

Figura 52

Margarita pone de manifiesto las relaciones que ella encontró en las expresiones numéricas a través de un caso particular. Sustituye el número 12 por la letra *n* y escribe las expresiones dadas en función de n (Figura 53). La alumna no se percata que con la primera expresión habría bastado para expresar de forma general las expresiones aritméticas dadas. En la segunda entrevista, al revisar esta primera tarea, la alumna explica cómo hizo para construir más expresiones similares. La investigadora le pregunta: ¿lo puedes expresar de forma general? Margarita lo expresó en notación algebraica y manifestó que con sólo la primera expresión de la figura 53 bastaba, ya que era la expresión general, "*que sirve para cualquier número*".

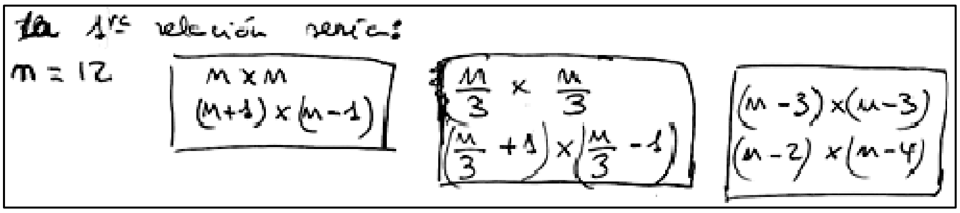
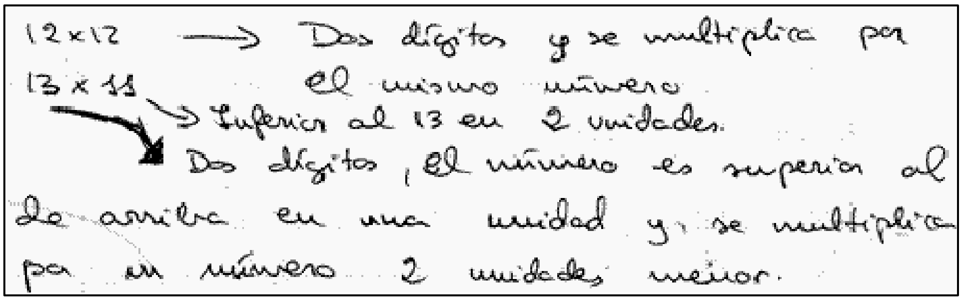


Figura 53

Situaciones. La alumna identifica y expresa oralmente la situación del aprendizaje de las tablas de multiplicar similar a las expresiones dadas: *"aquí a la hora de ampliar puedes hacerlo en vez de orden decreciente en orden creciente igualmente, se supone que sí tiene que guardar una relación con el anterior se supone que el niño ya conoce, por ejemplo, toda la tabla del cuatro de multiplicar, o toda la del cinco…"*.

Patrón. Identifica y expresa de forma oral y escrita (Figura 54 y 55) las regularidades que observó en las expresiones dadas: *"aquí es de dos cifras y aquí es de una, pero por ejemplo, aquí siempre se está multiplicando por el mismo número y el de abajo sería un número mayor y aquí sería la diferencia de dos, la multiplicación de dos, entonces he visto que sigue eso en los tres…"*.

Ella resalta que al principio no se dio cuenta de estas regularidades: *"he visto a posteriori que hay relación entre ellos, por eso, se multiplica por el mismo número y después lo de abajo sería el número mayor pero multiplicado por un número inferior dos veces, por el multiplicando"*. En este enunciado oral, la alumna comete un error de expresión, utiliza la expresión "dos veces" para indicar que la diferencia entre los dos términos de la expresión es de dos unidades. Al igual que lo hizo Natalia en la tarea 3.

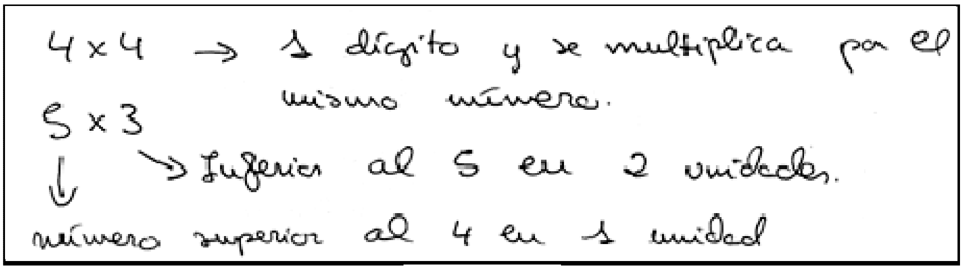


12×12 → Dos dígitos y se multiplica por el mismo número

13×11 → Inferior al 13 en 2 unidades.

Dos dígitos, el número es superior al de arriba en una unidad y se multiplica por un número 2 unidades menor.

Figura 54



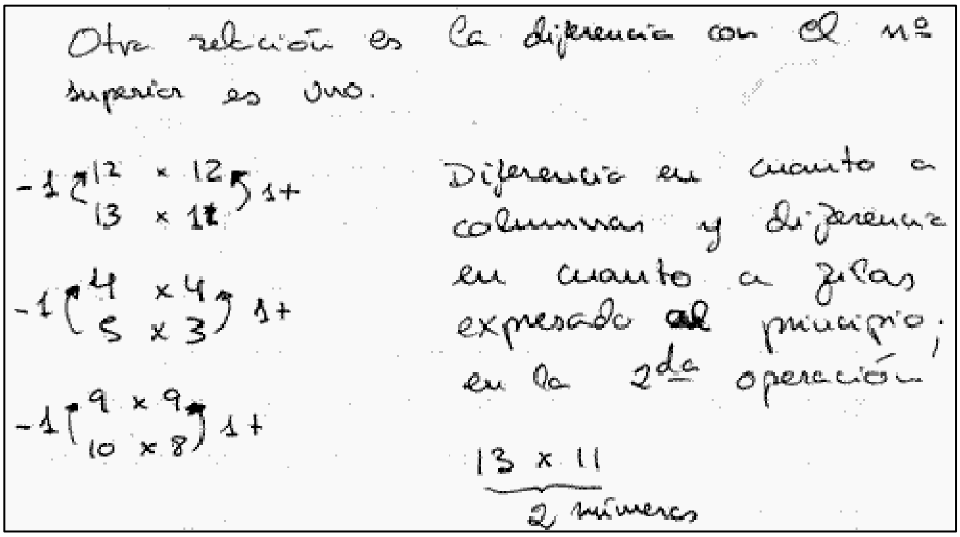
4×4 → 1 dígito y se multiplica por el mismo número.

5×3 → Inferior al 5 en 2 unidades.

número superior al 4 en 1 unidad

Figura 55

Margarita identifica que en las columnas de las expresiones aritméticas dadas está presente la siguiente relación: la suma o resta de una unidad (Figura 56); y lo explica oralmente: *"aquí es la diferencia de un número,… si miras de abajo a arriba* [señala en el folio] *es restando, si miras de abajo a arriba* [señala en el folio] *es sumando, es la diferencia de un número, aquí uno menos* [señala en el folio] *y aquí uno más* [señala en el folio], *aquí resulta lo mismo de 4 a 5 es uno menos y de 3 a 4 es uno más… es un número pero en un lado es por añadidura y por el otro es por resta"*



Otra relación es la diferencia con el nº superior es uno.

-1 12 × 12 1+
13 × 11

-1 4 × 4 1+
5 × 3

-1 9 × 9 1+
10 × 8

Diferencia en cuanto a columnas y diferencia en cuanto a filas expresado al principio; en la 2da operación

13 × 11
2 números

Figura 56

Estrategia o procedimiento. La alumna expresa de forma oral cómo creó las expresiones aritméticas similares a las dadas: *"Ahora me he dado cuenta que llevan una relación, un poquito los tres, entonces; en principio, he intentado poner números cercanos al doce y al trece y hacer multiplicaciones más o menos similares a las que dicen aquí: 14x12, 14x13; un poco cercanos a los que allí aparecen, pero después, bueno en el siguiente ejercicio, he puesto multiplicaciones de una sola cifra, también he seguido la misma tónica que en el primero, números cercanos al cuatro y al cinco, pero ahora me he dado cuenta que los tres van relacionados".*

Tarea 2.

Los enunciados de estas tareas se clasifican en las subcategorías de similitud en una propiedad común y objetos o representaciones como estructura y resultado; y en principios generales como patrón.

Similitud de una propiedad común. La alumna reconoció que estas expresiones se relacionan con la propiedad distributiva (Figura 57).

Figura 57

Similitud de objetos o representaciones.

- *Estructura.* Margarita expresa dos relaciones (Figura 58): los términos de las expresiones se diferencian en dos unidades y; los términos son números pares e impares.

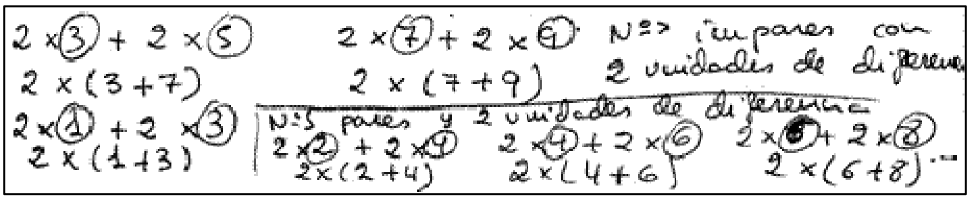


Figura 58

- *Resultado.* La estudiante planteó expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones dadas e igualó las parejas de expresiones poniendo de manifiesto la equivalencia de sus resultados y por ende, resalta que se cumple la propiedad distributiva (Figura 59).

$$\underbrace{2\times 5}_{10} + \underbrace{2\times 7}_{14} = \underbrace{2 \times (5+7)}_{2\times 12 = 24}$$

$$24$$

Figura 59

Al igual que en la tarea 1, Margarita pone de manifiesto las relaciones que ella encontró en las expresiones numéricas a través de un caso particular. Sustituye el número 2 por la letra *n* y escribe dos de las expresiones dadas en función de *n* (Figura 60).

$n=2$

$$n\times(n+3) + n\times(n+5)$$
$$n\times(n+3 + n+5)$$

$$(2n\times 5n) + (2n\times(n+3))$$
$$2n\times(5n + (n+3))$$

Figura 60

Patrón. La alumna identifica en las expresiones aritméticas dadas la siguiente regularidad (Figura 61).

En cada cuadro la operación 1ra es igual a la 2da.

Figura 61

Tarea 3.

Los enunciados que Margarita expresa en esta tarea se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura y resultado; y principios generales como patrón, estrategia o procedimiento y regla global.

Similitud de objetos o representaciones. La alumna crea dos grupos de expresiones similares a las dadas utilizando dos relaciones independientes. La primera de ellas (diferencia de dos unidades entre los términos) la verifican los ejemplos presentados; la otra relación (igualdad de resultado), en cambio, viene impuesta por ella y no se verifica en los ejemplos dados.

a. *Estructura.* La diferencia entre los dos términos de las sumas es de dos unidades (Figura 62).

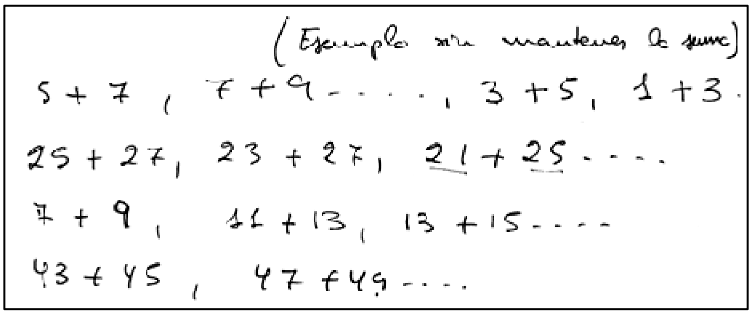


Figura 62

b. Resultado. Manteniendo el mismo resultado de las sumas dadas (Figura 63).

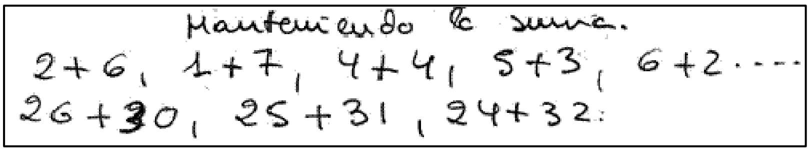


Figura 63

En el tercer ítem de esta tarea Margarita plantea varias multiplicaciones que dan igual resultado que las sumas dadas en el ejercicio, entre ellas el producto por la unidad; pero no establece otras relaciones más allá de la equivalencia del resultado (Figura 64). Ella utiliza la operación inversa de la multiplicación para justificar los términos de las multiplicaciones.

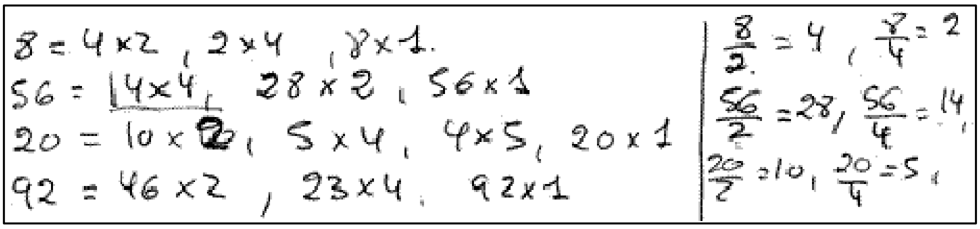


Figura 64

Patrón. Ella observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas (Figura 65):

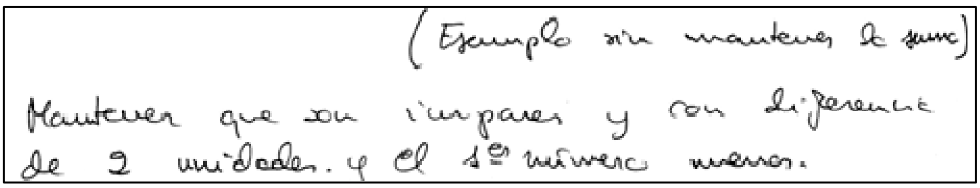


Figura 65

Estrategia o procedimiento. La alumna expresa oralmente cómo creó expresiones aritméticas similares a las dadas, *"yo lo que he hecho ha sido restar un número en uno y a la vez que resto un número en uno, le añado al otro número otra unidad, un número más… es restar uno y sumar uno, o restar dos y sumar dos, sí queremos seguir manteniendo el orden que aquí aparece de dos números".*

Margarita manifiesta que para encontrar dos números que multiplicados den el mismo resultado a las sumas dadas, ella utilizó la operación inversa de la multiplicación, la división: *"Sería dividir entre dos o entre cuatro te puede salir esa operación, sería ocho entre dos, eso te sale cuatro, pues ya sabes que es cuatro por dos para calcular la multiplicación…".* La alumna destaca en esta relación la presencia de los números dos y el cuatro.

Regla global. Margarita concluye a partir de los resultados observados en las sumas dadas, en las cuales todos los términos eran impares que: *"Al sumar números impares te va a salir siempre un número par".*

Tarea 4.

Clasificamos los enunciados que Margarita produjo al trabajar en esta tarea en las subcategorías de similitud en objetos o representaciones; y en principios generales en regla y estrategia o procedimiento.

Similitud de un objeto o representación.

- *Estructura.* Crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas (Figura 66).

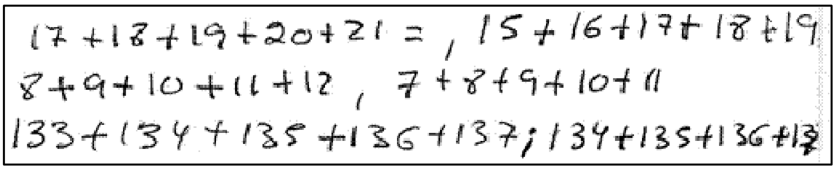


Figura 66

- *Resultado.* En el tercer ítem de esta tarea se le pide a la alumna que relacione los resultados de las sumas dadas con la multiplicación de dos números. Margarita plantea multiplicaciones que dan igual resultado a las sumas, entre ellas el producto por la unidad; pero al igual que en la tarea 3 no establece otras relaciones más allá de la equivalencia del resultado (Figura 67).

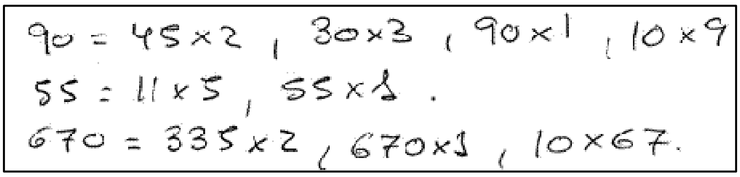


Figura 67

Estrategia o procedimiento. Antes de expresar las multiplicaciones como similitudes de resultado, la alumna describe cómo se construyen números consecutivos pares e impares (Figura 68).

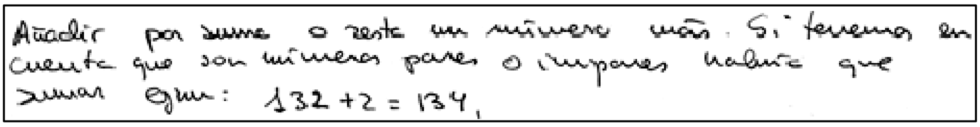


Figura 68

Para resumir, presentamos en la tabla 7 las frecuencias de los tipos de enunciados de generalización producidos por Margarita. En función de las tareas, el mayor número de enunciados producidos por la alumna se ubica en la tarea 1 (11) y el menor número en la tarea 4 (3). En total, esta alumna produjo 26 enunciados. El hecho de que la primera tarea fuera la que presentara más enunciados es debido a que en esta tarea Margarita no prestó atención únicamente a las relaciones que nosotros consideramos en el diseño de la tarea, sino que también observó inicialmente (a) relaciones muy generales y básicas entre las expresiones dadas como conjunto (presencia de dos términos y de un símbolo de multiplicación), (b) relaciones entre las expresiones contenidas en algunos de los recuadros (igual número de dígitos) y posteriormente (c) relaciones de acuerdo a la suma de los términos de las expresiones (igual resultado). Al igual que en la tarea 1, en el resto de tareas Margarita inicialmente se centraba en otras relaciones además de las consideradas en el diseño de las tareas, pero en estas ocasiones se centró más rápido en las relaciones que compartían las parejas de expresiones dadas.

Respecto a la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis, las subcategorías con mayor número de enunciados son la similitud de objetos o representaciones en resultado (8) y principio general en patrón (8). Margarita prestó una mayor atención a los valores numéricos de las expresiones con las que estuvo trabajando que sus compañeros, mostrando una mayor tendencia computacional lo cual en ocasiones le impidió apreciar otras relaciones que le hubieran conducido a un trabajo más algebraico con las expresiones. Al igual que Natalia y Federico es posible que Margarita tuviera más dificultad en expresar en términos generales las relaciones que detectó y por esta razón detallara estas relaciones en forma de regularidades y solo una como generalización.

Las subcategorías con menor número de enunciados fueron la de similitud en propiedad común (1) y situaciones (1); y en principio general en regla global (1). Sin embargo, no se encontraron enunciados que pertenecieran a las subcategorías de fenómeno continuo, regla y clases de objetos. También observamos que los enunciados producidos por la alumna se concentran de igual forma en la subcategoría de principio general (13) y en la de similitud (13).

Tabla 7: Producción de Margarita

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th><th>Tarea 1.</th><th>Tarea 2.</th><th>Tarea 3.</th><th>Tarea 4.</th><th>Total</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">Fenómeno continuo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitud</td><td colspan="2">Propiedad común</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones</td><td>Estructura</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>XXX</td><td>XX</td><td>XX</td><td>X</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Principio general</td><td colspan="2">Regla</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón</td><td>XXX
XXX</td><td>X</td><td>X</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento</td><td>X</td><td></td><td>XX</td><td>X</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td colspan="3">Clases de objetos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3"></td><td>11</td><td>5</td><td>7</td><td>3</td><td>26</td></tr>
</table>

Resultados de las producciones

Por tareas y subcategorías

En la tabla 8 se recoge el número total de enunciados finales verbales o escritos producidos por los cuatro alumnos, a lo largo de las cuatro tareas, clasificados según la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis. En total se obtuvieron 95 enunciados, de los cuales 68 son escritos y 27 orales. Observamos una notoria presencia de enunciados escritos, esperábamos un mayor número de enunciados orales ya que los alumnos podían hablar entre ellos, debido a la forma de trabajo que se propuso, en parejas. Esto es debido a que en la entrevista 1, los alumnos trabajaron inicialmente de forma individual antes de ponerlo en común con sus compañeros.

Las tareas que mayor número de enunciados tuvieron fueron la Tarea 1 (29) y la Tarea 3 (28); la tarea con menos enunciados fue la Tarea 4 (15). Consideramos que posiblemente la tarea 4 tuvo menos enunciados por el cansancio de los alumnos al ser la última. Creemos que el alto número de enunciados en las tareas 1 y 3 se puede deber, en primer lugar, a que la tarea 1, era la primera y traía consigo curiosidad e interés; y en segundo lugar, la tarea 3, planteaba nuevos retos a los alumnos en un formato ligeramente diferente a las tareas anteriores, en el sentido de buscar relaciones entre las sumas de las expresiones dadas y la multiplicación de dos números. Es posible que el hecho de que la equivalencia entre las expresiones dadas en la tarea 2 fuera conocida por los cuatro alumnos, hubiera sido un factor para que esta tarea no tuviera un número mayor de enunciados debido a una falta de exploración.

Teniendo en cuenta la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis, la subcategoría con más enunciados finales fueron la de principios generales en patrón (31) y similitud de objetos o representaciones, la cual se dividió en estructura (17) y resultado (13). Es de destacar el alto número de enunciados en principio general en patrón y el número de enunciados de ésta misma subcategoría en reglas (5) y reglas globales (12). La subcategoría con menos enunciados fue la de similitud de situaciones (3), lo cual puede deberse a que los alumnos no habían trabajado antes tareas de este tipo.

Hubo dos subcategorías que no tuvieron ningún enunciado final: fenómeno continuo y clases de objetos. Los alumnos no expresaron enunciados que vislumbraran la identificación de propiedades que se extendieran más allá de un ejemplo específico, caracterizados por un sentido de continuación, movimiento o relación dinámica entre cantidades. Esto puede ser debido al tipo de tareas propuestas ya que las parejas de expresiones dadas no sugieren un movimiento o cambio de una a otra, como ocurre por ejemplo en una sucesión (ej. cada vez se suman cinco más) sino que comparten una relación (estática) entre sus términos. Tampoco hicieron enunciados que transmitieran el carácter fundamental de un patrón, relación, clase u otro fenómeno que fueran caracterizados como definiciones. Este último tipo de enunciados requerían expresar un hecho general precisando el conjunto de elementos para los que era aplicable. Sin embargo, las explicaciones de los alumnos con los que trabajamos no fueron tan precisas o detalladas.

Tabla 8: Resultados de las producciones por tareas y subcategorías

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th><th>Tarea 1.</th><th>Tarea 2.</th><th>Tarea 3.</th><th>Tarea 4.</th><th>Total</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">Fenómeno continuo</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitud</td><td colspan="2">Propiedad común</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones</td><td>Estructura</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Principio general</td><td colspan="2">Regla</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón</td><td>15</td><td>4</td><td>8</td><td>4</td><td>31</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>0</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td colspan="3">Clases de objetos</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3"></td><td>29</td><td>23</td><td>28</td><td>15</td><td>95</td></tr>
</table>

Por sujetos

Al final de la producción de cada alumno se ha presentado una tabla donde se recogen las frecuencias de los tipos de enunciados finales producidos por cada alumno en cada tarea. A continuación, en la tabla 9, se aglomeran el total de enunciados producidos por cada alumno en las cuatro tareas, clasificados según la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas. Se observa que las alumnas fueron las que más enunciados produjeron en total: Margarita (26), Andrea (26) y Natalia (23). Las dos primeras alumnas pertenecían a parejas diferentes. El menor número de enunciados producidos en total fue el de Federico (20).

Con respecto a las subcategorías, el mayor número de enunciados totales producidos por cada alumno dentro de una subcategoría fue el de Federico en principio general en patrón (11). Natalia y Margarita compartían el mismo número de enunciados (8) pero no en la misma subcategoría, Natalia en la subcategoría de principio general en patrón y Margarita en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones en resultado y principio general en patrón. En el caso de Andrea el mayor número de enunciados producidos por esta alumna fue en la subcategoría de principio general en regla global (7). Esto nos sugiere que los procesos de generalización realizados por esta alumna son de nivel superior en comparación con sus compañeros.

El menor número de enunciados totales producidos por los alumnos en una subcategoría fue de un enunciado, Andrea fue la que tuvo menos subcategorías de estas características, sólo una, la de similitud de objetos o representaciones en resultado. Margarita fue la que tuvo más subcategorías con el menor número de enunciados, fueron tres: similitud en propiedad común y situaciones, y principio general en regla. Natalia y Federico compartían el mismo número de subcategorías con menos enunciados, Natalia en similitud de propiedad común y situaciones. Federico en las subcategorías de similitud de situaciones y principio general en estrategia o procedimiento. Además, Margarita, Natalia y Federico compartían una subcategoría con menos enunciados, la de similitud de situaciones. Natalia y Margarita compartían la subcategoría de similitud en propiedad común.

El mayor número de subcategorías sin enunciados fue el de Federico (5), siendo las siguientes: Fenómeno continuo, similitud en propiedad común, principio general en regla y regla global; y clases de objetos. El resto de alumnos, en este caso mujeres, tuvieron el mismo número de subcategorías sin enunciados (3). Andrea no produjo enunciados en las subcategorías de fenómeno continuo, similitud de situaciones y clases de objetos. En el caso de Natalia, no produjo enunciados en las subcategorías de fenómeno continuo, similitud de objetos o representaciones en resultado y clases de objetos y Margarita en las subcategorías de fenómeno continuo, principio general en regla y clases de objetos. En este aspecto, los cuatro alumnos compartían dos subcategorías sin enunciados: fenómeno continuo y clases de objetos, como ya se ha mencionado previamente. Además, Federico y Margarita compartían la subcategoría de principio general en regla.

Tabla 9: Resultados de las producciones por sujetos

Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas				**Andrea**	**Natalia**	**Federico**	**Margarita**
Identificación o enunciado	*Fenómeno continuo*			0	0	0	0
	Similitud	*Propiedad común*		2	1	0	1
		Objetos o representaciones	*Estructura*	6	4	4	3
			Resultado	1	1	3	8
		Situaciones		0	1	1	1
	Principio general	*Regla*		3	2	0	0
		Patrón		4	8	11	8
		Estrategia o procedimiento		3	2	1	4
		Regla global		7	4	0	1
Definición	*Clases de objetos*			0	0	0	0
Total				**26**	**23**	**20**	**26**

Por parejas

Con respecto al trabajo en parejas, se van a tener en cuenta dos aspectos, en primer lugar, comparamos el trabajo de cada alumno para analizar el trabajo de la pareja, en este caso nos remitiremos a la tabla 9. En segundo lugar, comparamos el número y tipo de enunciados totales verbalizados por cada una de las parejas (tabla 10).

Pareja 1. (Andrea y Natalia)

El número de enunciados producidos por estas dos alumnas en la mayoría de las subcategorías es muy parecido, encontrando una diferencia mínima entre las subcategorías de un enunciado. Esto da cuenta del trabajo en equipo observado por la investigadora en el desarrollo de las tareas. Sólo hay dos subcategorías donde se observa un mayor número de enunciados por parte de una de ellas: Andrea presenta un mayor número de enunciados en la subcategoría de principio general en regla global (7-4) y Natalia en la subcategoría de principio general en patrón (4-8). Este hecho pone de manifiesto una forma de trabajar y un nivel diferente en cada alumna en el proceso de generalización.

El mayor número de enunciados producidos por estas dos alumnas se encuentra en la subcategoría de similitud de objetos o representaciones en estructura (6-4). El menor número de enunciados producidos por esta pareja se encuentran en las subcategorías de similitud de situaciones (0-1) y en objetos o representaciones en resultado (1-1).
No se encontraron enunciados en tres subcategorías, de las cuales dos son compartidas por las alumnas, las subcategorías de fenómeno continuo y clases de objetos. La tercera es sólo de Andrea, en similitud de situaciones.

Pareja 2. (Federico y Margarita)
El número de enunciados producidos por estos dos alumnos en la mayoría de las subcategorías es diferente a comparación de la otra pareja. Esto da cuenta del trabajo en equipo observado por la investigadora, donde se observó que el trabajo en pareja era mínimo y no influía en el desarrollo de las tareas.
El mayor número de enunciados producidos por los dos alumnos se encuentra en la subcategoría de principio general en patrón (11-8). Se observa que Margarita también tuvo un mayor número de enunciados en otra subcategoría, en la similitud de objetos o representaciones en resultado (3-8). El menor número de enunciados producidos por esta pareja se encuentran en las subcategorías de similitud en propiedad común (0-1), situaciones (1-1) y en principio general en regla global (0-1).
No se encontraron enunciados en cinco subcategorías, de las cuales tres son compartidos por los dos alumnos, las subcategorías de fenómeno continuo, principio general en regla y clases de objetos. Las otras dos subcategorías, propiedad común y principio general en regla global son de Federico.

En general (tabla 10), la pareja 1, compuesta por Andrea y Natalia tuvo más enunciados (49) que la pareja 2, de Federico y Margarita (46). Hemos observado que el mayor número de enunciados totales de la pareja 1, está en la subcategoría de principio general en patrón (12) y le siguen: regla global (11) y similitud de objetos o representaciones en estructura (10). En la pareja 2, se observó un alto número de enunciados en la subcategoría de principio general en patrón (19) y le sigue la de similitud de objetos y representaciones en resultado (11). Ambas parejas comparten que el mayor número de enunciados totales por pareja está en la subcategoría de principio general en patrón.
Las subcategorías con menor número de enunciados totales por parejas fueron, en la pareja 1, en similitud de situaciones (1). En la pareja 2, fueron en similitud en propiedad

común (1) y principio general en regla global (1). Sin embargo, en la pareja 2, no se encontraron enunciados en tres subcategorías, de las cuales dos son compartidas con la pareja 1, las subcategorías de fenómeno continuo y clases de objetos; y una no, la subcategoría de principio general en regla.

Por último, destacamos que la diferencia de enunciados totales en las dos parejas no es significativa (49-46), pero consideramos que la pareja 1 tuvo mejor desarrollo durante las tareas, ya que se observa que el número de enunciados en las diferentes subcategorías es más repartido y no tan concentrado como en el caso de la pareja 2.

Se pudo observar que cada pareja trabajó de forma distinta, es posible que ésto se deba a que: (1) cada pareja se enfocara en relaciones diferentes, (2) las expresaran haciendo énfasis de otra forma y (3) el nivel de los alumnos en el proceso de generalización al desarrollar las tareas fuera diferente. Sin embargo, destacamos que la influencia del trabajo en parejas fue más beneficiosa para la pareja 1, que para la pareja 2 . Esto puede ser debido a que la pareja 1 tuvo un diálogo más cohesivo y dinámico entre las alumnas, que en variadas ocasiones ayudó a la detección de relaciones en las expresiones numéricas dadas, sobre todo a Natalia.

Por otro lado, la cantidad y tipo de enunciados producidos en total por cada pareja, es diferente. Sólo se ve una cantidad igual o más o menos parecida de enunciados en ambas parejas en las subcategorías de similitud en situaciones (1-2) y propiedad común (3-1); y en principio general en estrategia o procedimiento (5-5), que son subcategorías con un bajo número de enunciados.

Tabla 10: Resultados de las producciones por parejas

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th><th>Pareja 1 (Andrea y Natalia)</th><th>Pareja 2 (Federico y Margarita)</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">Fenómeno continuo</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitud</td><td colspan="2">Propiedad común</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones</td><td>Estructura</td><td>10</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>2</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Principio general</td><td colspan="2">Regla</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón</td><td>12</td><td>19</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

		Regla global	11	1
Definición	*Clases de objetos*		0	0
Total			**49**	**46**

CONCLUSIONES

En este apartado presentaremos las conclusiones a las que llegamos después de realizar el análisis de datos. En primer lugar, presentamos algunas consideraciones sobre el trabajo de investigación que hemos realizado enfocadas sobre la producción de los alumnos, las tareas propuestas, el trabajo en parejas y la utilidad de la taxonomía de Ellis para este trabajo. En segundo lugar, damos respuesta a las preguntas de investigación que plateamos en el apartado de problema a investigar.

Sobre la producción de los alumnos

En general, y resumiendo muy brevemente la información presentada en el análisis de los datos, a partir del análisis realizado de las producciones de los cuatro estudiantes, observamos que los alumnos enunciaron el reconocimiento de principios generales como patrones, procedimientos o estrategias, reglas y reglas globales. Identificaron similitudes entre las expresiones aritméticas, a modo de propiedades en común, objetos o representaciones y situaciones. Además, apreciamos que algunas de las subcategorías de la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Ellis no se aplicaron al clasificar los enunciados verbales o escritos producidos por los alumnos, concretamente la de fenómeno continuo y clases de objetos. La subcategoría con más enunciados finales fueron la de principios generales en patrón (31) y similitud de objetos o representaciones, la cual se dividió en estructura (17) y resultado (13). Las subcategorías con menos enunciados fueron la de similitud de situaciones (3) y propiedad común (4). Cabe resaltar que la pareja 1, presenta un mayor nivel en el proceso de generalización, ya que Andrea y Natalia presentan un mayor número de generalizaciones o reglas globales (7-4) que la pareja 2 (0-1).

Se obtuvieron en total 95 enunciados, de los cuales 68 son escritos y 27 orales. Las tareas que mayor número de enunciados fueron la Tarea 1 (29) y la Tarea 3 (28); la tarea con menos enunciados fue la Tarea 4 (15). Es posible que la tarea 2 no tenga un número mayor de enunciados (23) debido a que a lo largo de la formación matemática de estos alumnos han tenido variadas ocasiones de encontrar expresada de forma simbólica dicha relación (la propiedad distributiva) y de esta manera, facilitara probablemente que en el caso de la pareja 1 la expresaran con notación simbólica la estructura de las expresiones.

Es de destacar que en la primera entrevista observamos que sobre todo la pareja 1 era capaz de generar generalizaciones de las relaciones y patrones detectados. En ocasiones este tipo de generalizaciones las utilizaron para generar más ejemplos. En el caso de la pareja 2, se observa que ellos se quedan a medio camino. Sin embargo, en la segunda entrevista observamos que los alumnos por si solos son capaces de hacerlo siempre que se les den tareas adecuadas y en un ambiente, donde haya insistencia e interacción entre el profesor y los alumnos, ya que de esta forma avanzan en el proceso. En la segunda sesión, observamos que los alumnos a través de un diálogo guiado usando preguntas como: ¿podrías expresarlo de una forma general, con letras?, ¿podrías empezar por números pequeños?, ¿qué ves en común entre los términos de las multiplicaciones y los términos de las sumas?, etc.; llegaron a expresar sus generalizaciones por medio de expresiones algebraicas simbólicas en casi la totalidad de las tareas. Por otro parte, observamos que tanto en la primera sesión como en la segunda, se notó más interés en el desarrollo de las tareas por parte de las tres alumnas que del alumno.

Estas observaciones nos sugieren que si los alumnos trabajaran tareas de este tipo a lo largo de su formación progresarían significativamente en el desarrollo de generalizaciones. Sería también necesario trabajar la expresión de dichas generalizaciones para enriquecer en detalles y precisión sus explicaciones. Lo cuál es especialmente importante en el caso de estos alumnos debido a que se están formando como maestros.

Sobre las tareas propuestas

Por otra parte, consideramos que las tareas diseñadas para este trabajo fueron adecuadas para que los alumnos desarrollaran y expresaran generalizaciones. Las tareas presentaron a los alumnos retos y oportunidades para que pudieran utilizar patrones para crear nuevas expresiones similares, identificar regularidades, analizar e identificar la estructura de expresiones numéricas, hacer uso de pensamiento relacional y generar y expresar generalizaciones. Sin embargo, después de llevar a cabo las dos sesiones, consideramos mejorar el formato y redacción de las preguntas, ya que causó algunos inconvenientes en la compresión de éstas por parte de los alumnos, y ampliar las informaciones que acompañaban a las tareas. Para posibles aplicaciones de estas tareas también sería recomendable que el investigador incitara a los alumnos a ser más precisos en sus explicaciones ya que es a través de ellas como se valoran las generalizaciones de los alumnos.

Sobre el trabajo en parejas

Con respecto al trabajo en parejas, observamos que esta forma de trabajar si influyó en el desarrollo de las tareas, sobretodo en una de las parejas, en la de Andrea y Natalia. Resaltamos que el trabajo en equipo observado en la pareja 1, mostraba un diálogo cohesivo e interactivo enmarcado por el interés en resolver las tareas. Sin embargo, en la pareja 2, el trabajo fue más individual, no se observaba un interés por trabajar en equipo, sobre todo por parte de Federico. A pesar de esto, cuando Federico explicaba lo que había hecho, Margarita tomaba en cuenta algunas de las ideas planteadas por él, que le ayudaron a tener otro punto de vista de las relaciones encontradas por ella.

Sobre la taxonomía de Ellis

La taxonomía de generalizaciones de Ellis, nos ha permitido tener una plantilla para categorizar los enunciados finales orales y escritos de generalización producidos por los alumnos en el desarrollo de las cuatro tareas. Es de destacar que el orden en que están las subcategorías de la taxonomía no tiene porque coincidir con el proceso de trabajo de los alumnos. Sin embargo, hemos encontramos algunas limitaciones para clasificar estos enunciados. El carácter general de algunas de las subcategorías no nos permitía tener una visión detallada del tipo de enunciados producidos por los alumnos. Por esta razón, después de la recogida de los datos vimos necesaria la modificación de la taxonomía, para el posterior análisis de los datos. No obstante, consideramos que un futuro es posible refinar la taxonomía en un estudio posterior con más sujetos o crear una propia.

Respuesta a las preguntas de investigación

A continuación, tratamos de dar respuesta a las preguntas de investigación que nos planteamos en esta investigación:

¿Los futuros maestros son capaces de expresar de forma general relaciones apreciadas en expresiones aritméticas?

A partir de los resultados obtenidos de las producciones de los cuatro estudiantes, podemos señalar que, sólo la pareja 1 fue capaz de expresar con simbolismo algebraico la generalización de las relaciones apreciadas en las expresiones aritméticas propuestas en una de las cuatro tareas. Sin embargo, resaltamos que las tres alumnas, y sobre todo Andrea y Natalia, fueron capaces de generar generalizaciones de las relaciones y patrones detectados en las expresiones, la mayoría de ellas de forma verbal o como en el caso de la pareja 1, mezclando palabras con símbolos aritméticos para expresar las relaciones de paridad que ellas observaron. Este tipo de representación se encuentra más próxima al simbolismo que la verbal. Algunas de las generalizaciones de los estudiantes que fueron expresadas oralmente estuvieron apoyadas por gestos. A este respecto, Radford (2002) destaca la importancia del lenguaje verbal y los gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar.

Términos como *todos, cualquier y siempre* utilizados por los alumnos, marcan la diferencia e importancia de estas generalizaciones no simbólicas. El problema de este tipo de generalizaciones expresadas de forma verbal, es que presentan limitaciones respecto a su aplicación y generalidad. Sin embargo, al igual que Mason y Pimm (1984), consideramos que el lenguaje natural juega un papel fundamental en el proceso de generalización y que el empleo de éste puede influir en la expresión algebraica de la generalización.

Esperábamos que los estudiantes a partir de la identificación de un patrón en unos pocos casos específicos fueran capaces de razonar inductivamente y generaran una regla global o generalización de forma algebraica de las tareas.

En general, los estudiantes tuvieron poca dificultad describiendo un patrón de forma verbal y en algunas situaciones hicieron predicciones basadas en las relaciones identificadas en un patrón. Sin embargo, los estudiantes no fueron capaces en la mayoría de tareas de proporcionar una descripción algebraica formal (es decir, mediante lenguaje simbólico) de las expresiones aritméticas propuestas. Resultados similares se han observado en Zazkis y Liljedahl (2002), donde estos autores notaron que hay un vacío significativo entre reconocer un patrón y ser capaz de expresarlo algebraicamente.

¿Qué variedad de generalizaciones producen dichos estudiantes?

De acuerdo con la taxonomía de generalizaciones de Ellis (2007a), observamos que la mayor parte de enunciados producidos por Andrea (17), Natalia (16) y Federico (12) se concentran en la subcategoría de principio general. Sin embargo, en el caso de

Margarita los enunciados producidos por ella se concentran de igual forma en ambas subcategorías (13), principio general y similitud.

Ellis (2007c) afirma en base a los resultados de su investigación, que una instrucción que anima un enfoque sobre patrones de números apoya la generalización de patrones, procedimientos y reglas. Mientras que una instrucción que anima un enfoque sobre cantidades apoya generalizaciones sobre relaciones, conexiones entre situaciones y fenómenos dinámicos. Es posible que en el caso de nuestros tres primeros alumnos, su instrucción anterior haya estado enfocada sobre patrones de números. Sin embargo, en este mismo estudio, Ellis indica que en una examinación entre similitudes y diferencias en las generalizaciones de los estudiantes, reveló que el tipo de razonamiento cuantitativo el cual los estudiantes emprendían, probó ser más importante influenciando su generalización que un mero enfoque de cantidades vs. números.

¿Cómo interviene el pensamiento relacional en el trabajo con las expresiones aritméticas hasta llegar a la expresión de alguna generalización?

Los estudiantes en el desarrollo de las tareas pusieron de manifiesto el uso de este pensamiento, identificando y trabajando con relaciones o regularidades detectadas en las expresiones aritméticas. Esperábamos que ocurriera así puesto que las cuestiones de las tareas conducen a los alumnos a centrar su atención en buscar relaciones entre las expresiones dadas. Sin embargo, en el trabajo de Margarita, observamos cierta tendencia computacional que alejó su atención de la estructura de las expresiones. En este caso la alumna expresó enunciados en forma de similitud de resultado de las expresiones. Es de destacar que esta forma de trabajo no bloqueó a la alumna en su búsqueda de relaciones. Sin embargo, en relación con el conocimiento de la estructura de la aritmética, en algunos casos se observó que los alumnos no consideraban las parejas de expresiones como totalidades sino que las percibían como expresiones separadas. En este aspecto, sobresalen los enunciados de Margarita y Natalia, que inicialmente en el desarrollo de las tareas se centraban en cada expresión dada por separado.

¿Distinguen las regularidades o patrones claves para la generalización de las que no lo son?

Los cuatro estudiantes se centraron en buscar varios patrones en una misma tarea, considerando, además del patrón que nosotros utilizamos en el diseño de la tarea, otros que percibían al relacionar los términos que componen las expresiones. En este sentido, Lee (1996) afirma que "el mayor problema no es ver el patrón, es percibir un patrón algebraicamente útil" (p. 95).

Sin embargo, es posible que este gran número de patrones identificados por los alumnos no fueran un desencadenante que los motivara para su posterior generalización, o que la falta de experiencia en el trabajo de este tipo de tareas hiciera que sólo una de las parejas expresara de forma general una de las cuatro tareas. Ellis (2007b) recoge que la percepción de un patrón numérico valido no parece garantizar la habilidad para generalizar ese patrón correctamente. De esta manera, consideramos que se debe potenciar en la educación escolar el trabajo de este tipo de tareas de identificación de regularidades y su posterior generalización.

¿Qué dificultades presentan para generalizar las relaciones apreciadas en expresiones aritméticas?

Los alumnos presentaron dificultades para poder expresar simbólicamente las generalizaciones de los patrones identificados. Resultados similares se han observado en algunas investigaciones pioneras recogidas por Kieran (2006, 2007) sobre el uso de la notación algebraica (el simbolismo algebraico) como una herramienta para expresar patrones generales y figurales, y para justificar formas equivalentes de estas relaciones de patrones, en los cuales se constata que pocos estudiantes usan el simbolismo algebraico o aprecian su papel para justificar una declaración general sobre números.

Además, Kieran recoge que una dificultad adicional subyace en la incapacidad de los estudiantes para articular la estructura de un patrón o una relación usando el lenguaje ordinario. En nuestro caso, esta dificultad no se percibió, en la mayoría de las tareas los estudiantes expresaron los patrones observados por ellos de forma verbal (oral o escrita).

Los alumnos descubrieron gran cantidad de patrones, no obstante, en algún caso (Margarita) no detectaron aquellas relaciones en las que se habían pensado al diseñar las tareas. Como Lannin (2005) afirma, "desarrollar entendimiento algebraico a través de actividades de patrones crea considerables dificultades mientras los estudiantes pasan de un enfoque sobre ejemplos particulares hacia la creación de generalizaciones" (p. 232) Por último, una dificultad añadida fue la falta de experiencia y trabajo previo de los alumnos en este tipo de tareas propuestas, ya que al principio, no sabían o comprendían que debían hacer en las tareas. Lee (1996) encontró que actividades generalizadoras llevaban a tres tipos de obstáculos conceptuales: (1) nivel de percepción, que concernían ver el patrón, (2) nivel verbal, que involucraban expresar el patrón claramente y; (3) el nivel de simbolización, por ejemplo, utilizar una variable n en una expresión general.

A partir del trabajo realizado, hemos observado que se han realizado muchas investigaciones enfocadas en las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra pero muy pocas sobre el papel de la formación de los futuros maestros en este tópico. Consideramos importante investigar cómo los futuros maestros se enfrentan a este tipo de situaciones y cómo lo llevarían al aula en su futuro profesional. Así mismo, resaltamos la presencia de la Early-Algebra en la formación de los futuros maestros desde un enfoque de la enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada, destacando el papel de la generalización y el pensamiento relacional, como una posible vía para solventar las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra.

Por último, presentamos algunas cuestiones de interés, mencionadas anteriormente, como línea de continuación de este trabajo: ¿Qué trabajo pueden llevar a cabo los profesores de educación primaria para promover que sus estudiantes realicen generalizaciones matemáticas?, ¿Cuáles serían los beneficios de incorporar la propuesta Early-Algebra y promover el pensamiento algebraico en la formación de maestros?, ¿De que modo influye en los futuros maestros el aprendizaje y la reflexión en clase sobre la conveniencia de la enseñanza de estos tópicos en la escuela? ¿Están preparados los futuros maestros para hacer frente a las dificultades que pueden presentar los estudiantes al trabajarse en el aula la aritmética y el álgebra de forma integrada?

REFERENCIAS

Ainley, J., Wilson, K. y Bills, L. (2003). Generalising the context and generalising the calculation. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2 (pp.9-16). Honolulu.

Amit, M. y Neria, D. (2008). ‘‘Rising to the challenge’’: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 111–129.

Becker, J.R. y Rivera, F.D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 1.

Blanton (por aparecer). Elementary school children can do algebra and even enjoy it. En B. Dougherty y L. Lee (Eds.), *The algebra lesson: What we have learned through classroom research.* Math Education Research Series: Information Age.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp.135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Cañadas, C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Cañadas C. y Castro E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (pp. 173-182). La Coruña.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM), 37*(1), 53-59.

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Vol 2 (pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D. y Schliemann, A.D. (2002). Empirical and Logical truth in Early Algebra activities: From guessing amounts to representing variables. *Symposium paper NCTM 2002 Research Presession*. Las Vegas, Nevada, April 19-21.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM),40*(1), 3–22.

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. Van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada. España

Cooper, T. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students'ability to generalise. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM),40*(1), 23–37.

Davidov, V. (1972/1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. En J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Discussion Document for the Twelfth ICMI Study (2000). The future of the teaching and learning of algebra. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*, *32*(4), 107-110.

Drijvers y Hendrikus (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Utrecht, Utrecht. http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Ellis, A. B. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

Ellis, A. B. (2007b) Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194 – 229.

Ellis, A. B. (2007c). The influence of reasoning with emergent quantities on students'generalizations. *Cognition and Instruction*. *25*(4), 439 – 478

Fernández, M. y Anhalt, C. (2001). Transition toward algebra. *Mathematics teaching in the middle school,* 7(4), 236-241.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1 (pp. 49-66). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Fujii, T. y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.258-264). Melbourne: University of Melbourne.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders'performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C. Maher, y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 99-108).

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4 (pp. 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on Algebra Research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 245-253). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 707–762). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las ciencias, 7*, 229-240.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). London: Kluwer.

Lobato, J., Ellis, A. y Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment afford students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(3), 1-36.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 83–96.

Rombert, T. A. y Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema y T. A. Rombert (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 3-17). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. y Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp.127-134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-371). New York: MacMillan.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Steen, L. (1990). *On shoulders of giants: New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academic Press.

Sutherland, R. (Ed), (1997). *Teaching and Learning Algebra pre-19*, Joint Mathematical Council of the United Kingdom y The Royal Society. London . http://royalsociety.org/displaypagedoc.asp?id=11493

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*, (pp. 7–13). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition form arithmetic to algebra.* Universidad de Utrecht, Utrecht. http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/inhoud.htm

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I Putt, R Faragher & M Mclean (Eds.) *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010* (*Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* Townsville, Vol 2 (pp.565-572) Sydney. Merga.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2*(1), 93–120.

Zazkis, R., Liljedahl, P. y Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 131–141.

Otros artículos consultados no referenciados en el texto de este informe

Britt, M. y Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 39–53.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Dindyal, J. (2007). High School Students' Use of Patterns and Generalisations. En J. Watson y K. Beswick (Eds), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Vol 1 (pp.236-245). Sydney. Merga.

Fujii, T. y Stephens, M. (2008). Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. En C. E. Greenes y R. Rubenstein, (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* (pp. 127-140). Seventieth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics**.**

Hunter, J. (2007). Relational or Calculational Thinking: Students Solving Open Number Equivalence Problems. En J. Watson y K. Beswick (Eds), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Vol 1 (pp. 421-429). Sydney. Merga.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teacher in the Middle School, 8*(7), 342-348.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3–28.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en Educación Primaria. Ponencia en el XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Tenerife.

Nathan, M. y Kim, S. (2007). Pattern generalization with graphs and words: A cross-sectional and longitudinal analysis of middle school students' representational fluency. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 193 – 219.

Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 97–110.

Soares, J. (2006). Arithmetic to Algebra: A Teacher's Journey. En C. Langrall (Ed.), *Teachers engaged in research: Inquiry into mathematics classrooms, Grades 3-5.* (pp. 49-58). Series Editor: D. Mewborn. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), y Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 97–110.

Stephens, M. (2006). Describing and Exploring the Power of Relational Thinking. En P Grootenboer, R Zevenbergen y M. Chinnappan (Eds), *Identities Cultures and Learning Spaces. Proceedings of the 29th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* Vol 2 (pp. 479-486). Sydney. Merga.

Vogel, R. (2005). Patterns – a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*, *37*(5), 445-449.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 2, pp. 759–766). Sydney. Merga.

Warren, E. y Cooper, T. (2008). Patterns That Support Early Algebraic Thinking in the Elementary School. En C. E. Greenes and R. Rubenstein, (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* (pp. 113-126). Seventieth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Yeap. B. H. y Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalisation: a glimpse from a Singapore classroom. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 55–64.

ANEXOS

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR ANDREA
TAREA 1.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura:</td><td>14 × 14   6 × 8   19 × 1   7 × 9   16 × 2
13 × 15   7 × 7   10 × 10   8 × 8   15 × 1

A parte hay 3 casos en que se multiplican nºs pares entre sí: 12 × 12 / 4 × 4 / 10 × 8 y otros 3 que son impares entre sí 13 × 11 / 5 × 3 ~~8~~/ 9 × 9.</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>podemos buscar otro como en mi caso 3º → 19 × 1 = $\boxed{20}$ / 10 × 10 = $\boxed{20}$ o por ejemplo $\boxed{5 \times 8 = 2 \times 11}$ = 13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>“…en todos, he quitado por un lado uno y en el otro, lo he sumado”.

En los casos del ejemplo al 1er nº le suma uno por ej. $\boxed{12}$ × 12 / $\boxed{13}$ × 11 y al 2º nº se le resta 12 × $\boxed{12}$ / 13 × $\boxed{11}$,</td></tr>
</table>

		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	*"…sería 14 y 14, pues 28… el caso es que a éste* [señala en el folio] *le he quitado uno, digamos al 4 le he quitado uno y al cuatro le he sumado uno, y vamos, ya da lo mismo, aunque no tenga que hacer la suma, ya se que van a dar lo mismo. En este caso es lo mismo, a éste* [señala en el folio] *le he sumado uno y a éste* [señala en el folio] *se lo he restado. En éste* [señala en el folio] *como 19 y 1 son 20 pues 10 y 10 también. Luego en éste* [señala en el folio], *pues igual que aquí, a éste le he sumado uno aquí y he restado uno. Y éste* [señala en el folio] *pues lo mismo. En todos he hecho el mismo proceso menos en éste* [señala en el folio] *que es una división, en todos he quitado por un lado uno y en el otro lo he sumado, y en éste* [señala en el folio] *ha sido el único que no porque salía 20, pues he dicho 10 y 10".*
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	Para poder construir más hay que ir quitando uno o varios nºs de un lado y agregarlos al otro de forma que de igual resultado.
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR ANDREA
TAREA 2.

TIPOS			***EJEMPLOS***
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	creí que era una propiedad distributiva pero luego por mi compañera me dí cuenta que era asociativa.

<table>
<tr><td rowspan="8"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>3 × 6 + 3 × 8 = 3 × (6+8)
5 × 4 + 5 × 6 = 5 × (4+6)
8 × 9 + 8 × 10 = 8 × (9+10)</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td>Se usa un nº común que se coloca antes del + por ej. el 2 × 5 y después se suma a otra multiplicación con el nº nº común (2) multiplicado por otro nº distinto, y esto da = resultado que si multiplicas el nº común (2 × (5+7)) por la suma de los nºs distintos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td>"... se repite siempre el primer, o sea, hay un número que se repite siempre, verdad?, entonces, lo multiplica, por ejemplo aquí, el número que se repite, por cinco; y le sumas, el número que se repite por siete; entonces, este número, lo multiplicas por los dos que no se repiten y te va a dar lo mismo en ambos casos".</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td>"Sería a por b más a por c igual a por b más c".

También creemos que se puede aplicar a todos los nºs y sería sencillo explicarlo con letras para que luego sea solo sustituir por nºs, ej:
A × B + A × C = A × (B + C)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR ANDREA
TAREA 3.

TIPOS				*EJEMPLOS*
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.			
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.		
		Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.	*Estructura*	"*Todos los números son impares, sin embargo, todos dan resultado par*" 3 + 5 = 8 27 + 29 = 56 9 + 11 = 20 45 + 47 = 92 2 + 4 5 + 7 90 + 92 13 + 15
			Resultado	
		Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.		
	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una fórmula general o hecho.		todos son impares debido a que al ser todos los 1os impares al sumarle 2 van a seguir siendo impares, lo que conlleva que el resultado sea par, a la inversa o sea si fueran par el resultado sería impar.
		Patrón: La identificación de un patrón general.		En 1er lugar del 1er nº al 2º hay 2 nºs de diferencia
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.		

		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	“ *Sumas impar e impar te va a dar par”* Si multiplicamos impar × impar = impar y si es par × par = par, Al multiplicar cualquier nº por 1 da un nº menor que si lo sumases Cualquier nº IMPAR + IMPAR = PAR PAR + PAR = IMPAR + → Nº PAR = + → Nº IMPAR =
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR ANDREA
TAREA 4.

TIPOS			***EJEMPLOS***
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	*“... en los tres salen múltiplos de cinco porque sale cero, el cinco y el cero”*

	igualdad.	*Objetos o representaciones:* La identificación de objetos como similares o idénticos.	*Estructura*	$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 90$ $9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$ $132 + 133 + 134 + 135 + 136 = 670$ $23 + 24 + 25 + 26 + 27 = 125$ $92 + 93 + 94 + 95 + 96 = 470$ $239 + 240 + 241 + 242 + 243 = 1205$
			Resultado	
		Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.		
	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una fórmula general o hecho.		Siempre es ir sumando nº consecutivos partiendo del que quieras En todos los ejemplos los nº acaban o en 5 o en 0 lo cual indica que siempre son múltiplos de 5 (con una serie de 5 nº.
		Patrón: La identificación de un patrón general.		*"…y por lo que he visto, siempre se cumple que los resultados terminan en cero o en cinco, lo cual significa que son múltiplos de cinco… con cinco números"*
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.		Se podría expresar con un nº del que partes ej: 2 al que le vas uniendo nº consecutivos ej: $2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \ldots$
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.		
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.			

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR NATALIA
TAREA 1.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Tipo IV:
Identificación
o
enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>“Unas multiplicaciones son números pares y otras son números impares”</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>20 x 4   21 x 3   17 x 7
19 x 5   18 x 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>“…por ejemplo, en el último caso o en el primero; da igual, 12 x 12, aquí se suma, se le añade uno al trece y se le quita al once, en vez de ser doce es once, el que se quita se añade… y claro al hacer eso, pues, unas multiplicaciones son números pares y otras números impares”

también se puede observar que en las parejas tenemos una con números pares y otras con números impares ya que una es el resultado de quitar y añadir numeros. ejemplo: 12 x 12, 13 x 11 → se quita uno al 11 y se le añade al 12.
son pares   n= impares</td></tr>
</table>

			"…a simple vista, me he fijado que en los tres casos, al sumarlos, dan el mismo resultado… yo simplemente lo he hecho mirando la suma" Se podrían construir más expresiones, teniendo en cuenta que las operaciones al sumarlas el resultado es 8, un ejemplo sería 6x 2 =18. Para el último caso tendría en cuenta lo mismo, es decir partiría que al sumar los productos el resultado es 18. un ejemplo sería 17x1.
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR NATALIA
TAREA 2.

TIPOS			***EJEMPLOS***
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	Podemos observar que se utiliza la propiedad asociativa, ya que se están asociando números.

<table>
<tr><td rowspan="7"></td><td rowspan="3">igualdad.</td><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td></td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td>“Yo creo que las letras, también es un recurso, digamos didáctico para enseñar matemáticas, es una forma que a lo mejor los niños a primera vista al ver los números, les resulte mas cómodo verlos en letras… sólo es sustituir y es relacionar”</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td>otro punto que se puede tener en cuenta es que en el parentesis se suma los numeros diferentes que anteriormente se han multiplicado $4 \times 10 + 4 \times 5 \rightarrow 4 \times (10 + 5)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td>Se pueden tener varias cosas en cuenta para construir más expresiones como es el caso de que $4 \times 10 + 4 \times 5 = 4 \times (10 \times 5)$, es decir dara el mismo resultado.

Una manera de expresar estas operaciones sería con letras, quizá sería una manera más clara, puesto que posteriormente sólo habría que sustituir. ejemplo $7 \times 9 + 7 \times 6$
$7 \times (9 + 6)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td>$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$</td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR NATALIA
TAREA 3.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>4+6
29+31
82+84

“Pues, en este he observado que, por ejemplo, tres más cinco lo que se hace es...siempre que el segundo es más, son dos veces mayor que el primero, tres más cinco, tres y dos, más dos son cinco,…”</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>observamos que en las operaciones al primer numero se le quitan dos y se le añade al segundo. Estos 2 números son impares, pero al sumarlos el número que obtendremos será impar.

“… los números son impares, que se llevan dos, que al sumarlos va ser resultado par”…“y claro, puesto que, se le añade dos siempre el segundo número es mayor que el primero”.</td></tr>
</table>

		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	*"Si sumas dos impares el resultado va a dar par"* Pienso que al multiplicar un numero par por un impar siempre que se lleve 1 el resultado será impar. Siempre que multipliquemos par por par el resultado será par y cuando multipliquemos par por impar dará impar. Impar + Impar = Par Impar + Impar = Par Par + par = par.
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR NATALIA
TAREA 4.

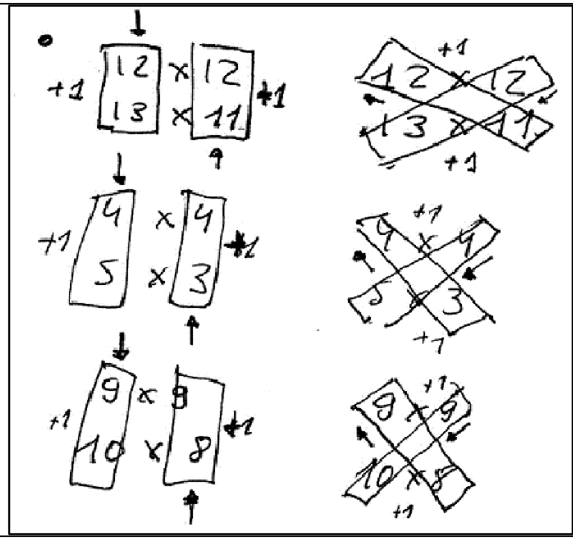
TIPOS			*EJEMPLOS*
	1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	

<table>
<tr>
<td rowspan="8">Tipo IV: Identificación o enunciado</td>
<td rowspan="3">igualdad.</td>
<td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td>
<td>Estructura</td>
<td>82 + 83 + 84 + 85
6 + 7 + 8 + 9
10 + 11 + 12 + 15</td>
</tr>
<tr>
<td>Resultado</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="5">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td>
<td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td>
<td>No es posible encontrar una multiplicación que de el mismo resultado que los señalados anteriormente.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" rowspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td>
<td>Una relación sería que el resultado de estas operaciones, siempre va a ser múltiplo de 5 (90, 55, 670), Siempre y cuando se hiciera el 5 números.</td>
</tr>
<tr>
<td>Se pueden construir expresiones generales sabiendo que son series consecutivos, es decir se va añadiendo uno.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Tipo V: Definición</td>
<td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR FEDERICO
TAREA 1.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>10x10 3x3 8x8
12x14 6x2 10x5</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>· 10x10, 11x11, 12x12 . . . (numeros de igual valor con dos digitos)
• (multiplicación de numeros de dos digitos pero con diferente valor)
• Multiplicacion de numeros de un digito con el mismo valor
• Multiplicación de numeros de un digito con diferente valor
• Intercalar números de dos digitos con otros de un digito</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>a parte de las anteriormente citadas similitudes tambien hay una concordancias en las operaciones que no son multiplicaciones por un numero igual (12x12, 4x4, 9x9) sino que en las multiplicaciones (13x11, 5x3, 10x8) la diferencia entre cada multiplicador son dos.

"la diferencia es igual en línea así como en cruz, la diferencia es de un número en los dos"</td></tr>
</table>

			
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR FEDERICO
TAREA 2.

TIPOS		***EJEMPLOS***
	1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.	

<table>
<tr><td rowspan="8">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>$3 \times 2 + 3 \times 4$ | $2 \times 20 + 2 \times 10$ | $5 \times 7 + 5 \times 4$
$3 \times (4+2)$ | $2 \times (10+20)$ | $5 \times (7+4)$</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td>“lo que esta en el paréntesis tiene prioridad”</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>- En cada una de las tres partes del ejercicio 2 solo hay 3 numero diferentes

- cada pareja empieza por un mismo numero y termina por el mismo numero.

- El resultado de cada operación es el mismo en cada parte del ejercicio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td>- Tomando como referencia un numero del ejercicio y a partir de ahí modificarlo siguiendo como ejemplo los ejercicios que vienen ahí.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR FEDERICO
TAREA 3.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>7+9 =
14+16 =
8+10 =
52+54 =</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>3+5 = 4x2
27+29 = 14x4
9+11 = 10x2
45+47 = 23x4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>- La diferencia entre sumando son dos

- Los numeros son impares

“La diferencia es de dos números entre un sumando y otro”
“… en las sumas hay impares y en las multiplicaciones pares”</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td></td></tr>
<tr><td>Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="2">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR FEDERICO
TAREA 4.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>22 + 23 + 24 + 25 + 26
19 + 20 + 21 + 22 + 23
141 + 142 + 143 + 144 + 145</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>30 x 3
11 x 5
335 x 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
</table>

	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una fórmula general o hecho.	
		Patrón: La identificación de un patrón general.	- Buscando numeros consecutivos
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

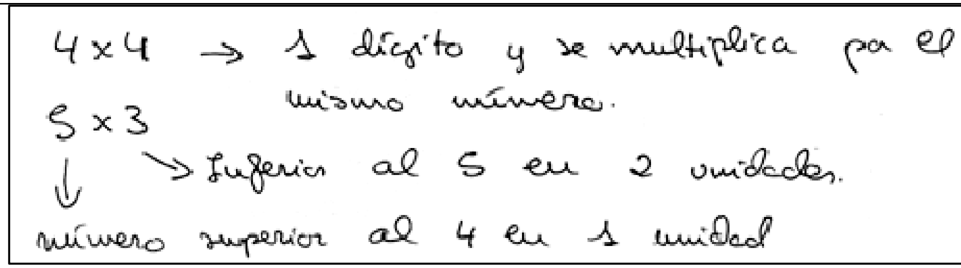
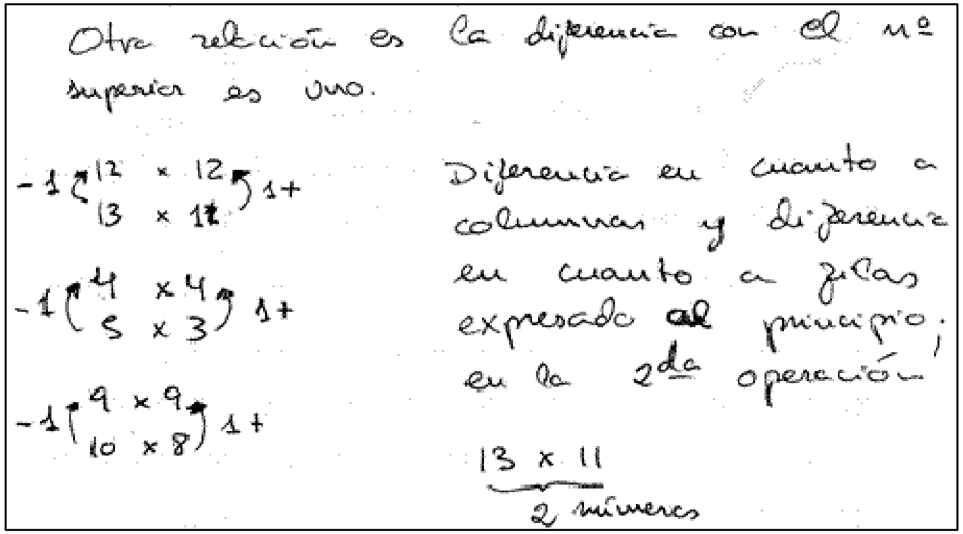
TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR MARGARITA
TAREA 1.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipo IV:
Identificación
o
enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td></td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>11 x 11 , 14x12 , 14 x 13 , 13 x 10 , 13 x 13...
3x6 , 5x7 , 4x6 , 5x2 , 4x8 , 5x6...
9x8 , 9x7 , 9x6 , 10x6 , 10x4 , 10x2.

Otra relación que hemos comprobado es que en el 1er cuadro son 2 cifras lo que multiplica , en el segundo 1 sola cifra

La 1ra relación sería:
$m = 12$ $m \times m$, $(m+1) \times (m-1)$ $\frac{m}{3} \times \frac{m}{3}$, $\left(\frac{m}{3}+1\right) \times \left(\frac{m}{3}-1\right)$ $(m-3) \times (m-3)$, $(m-2) \times (m-4)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td>“aquí a la hora de ampliar puedes hacerlo en vez de orden decreciente en orden creciente igualmente, se supone que sí tiene que guardar una relación con el anterior se supone que el niño ya conoce, por ejemplo, toda la tabla del cuatro de multiplicar, o toda la del cinco…”</td></tr>
</table>

		Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.	
	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Patrón:* La identificación de un patrón general.	*"aquí es la diferencia de un número,… si miras de abajo a arriba* [señala en el folio] *es restando, si miras de abajo a arriba* [señala en el folio] *es sumando, es la diferencia de un número, aquí uno menos* [señala en el folio] *y aquí uno más* [señala en el folio]*, aquí resulta lo mismo de 4 a 5 es uno menos y de 3 a 4 es uno más… es un número pero en un lado es por añadidura y por el otro es por resta"* *"aquí es de dos cifras y aquí es de una, pero por ejemplo, aquí siempre se esta multiplicando por el mismo número y el de abajo sería un número mayor y aquí sería la diferencia de dos, la multiplicación de dos, entonces he visto que sigue eso en los tres…"* *"he visto a posteriori que hay relación entre ellos, por eso, se multiplica por el mismo número y después lo de abajo sería el número mayor pero multiplicado por un número inferior dos veces, por el multiplicando"*. 12×12 → Dos dígitos y se multiplica por el mismo número 13 × 11 → Inferior al 13 en 2 unidades. Dos dígitos, el número es superior al de arriba en una unidad y se multiplica por un número 2 unidades menor.

			 
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	*"Ahora me he dado cuenta que llevan una relación, un poquito los tres, entonces; en principio, he intentado poner números cercanos al doce y al trece y hacer multiplicaciones más o menos similares a las que dicen aquí: 14x12, 14x13; un poco cercanos a los que allí aparecen, pero después, bueno en el siguiente ejercicio, he puesto multiplicaciones de una sola cifra, también he seguido la misma tónica que en el primero, números cercanos al cuatro y al cinco, pero ahora me he dado cuenta que los tres van relacionados"*

		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR MARGARITA
TAREA 2.

TIPOS				*EJEMPLOS*
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.			
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.		Cumple la propiedad distributiva.
		Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.	*Estructura*	$2 \times 3 + 2 \times 5$ $2 \times 7 + 2 \times 9$ Nºs impares con 2 unidades de diferencia $2 \times (3+7)$ $2 \times (7+9)$ $2 \times 1 + 2 \times 3$ $2 \times (1+3)$ Nºs pares y 2 unidades de diferencia $2 \times 2 + 2 \times 4$ $2 \times 4 + 2 \times 6$ $2 \times 6 + 2 \times 8$ $2 \times (2+4)$ $2 \times (4+6)$ $2 \times (6+8)$ ...

			Resultado	$\underbrace{2\times 5}_{10} + \underbrace{2\times 7}_{14} = \underbrace{2 \times (5+7)}_{2 \times 12 = 24}$ 24. $n=2$ $\quad \boxed{\begin{array}{c} n\times(n+3) + n\times(n+5) \\ n\times(n+3+n+5) \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} (2n \times 5n) + (2n\times(n+3)) \\ 2n\times(5n+(n+3)) \end{array}}$
		Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.		
	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una fórmula general o hecho.		
		Patrón: La identificación de un patrón general.		En cada cuadro la operación 1^{ra} es igual a la 2^{da}.
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.		
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.		
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.			

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR MARGARITA
TAREA 3.

<table>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="3"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>(Ejemplo sin mantener la suma)
5 + 7, 7 + 9 ...., 3 + 5, 1 + 3.
25 + 27, 23 + 27, 21 + 25 ....
7 + 9, 11 + 13, 13 + 15 ....
43 + 45, 47 + 49 ....</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>Manteniendo la suma.
2 + 6, 1 + 7, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2 ....
26 + 30, 25 + 31, 24 + 32.

8 = 4 × 2, 2 × 4, 8 × 1. | $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{8}{4} = 2$
56 = 14 × 4, 28 × 2, 56 × 1 | $\frac{56}{2} = 28$, $\frac{56}{4} = 14$,
20 = 10 × 2, 5 × 4, 4 × 5, 20 × 1 | $\frac{20}{2} = 10$, $\frac{20}{4} = 5$,
92 = 46 × 2, 23 × 4, 92 × 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
</table>

	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una fórmula general o hecho.	
		Patrón: La identificación de un patrón general.	(Ejemplo sin mantener la suma) Mantener que son impares y con diferencia de 2 unidades. y el 1º número menor.
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.	*"yo lo que he hecho ha sido restar un número en uno y a la vez que resto un número en uno, le añado al otro número otra unidad, un número más… es restar uno y sumar uno, o restar dos y sumar dos, sí queremos seguir manteniendo el orden que aquí aparece de dos números "* *"Sería dividir entre dos o entre cuatro te puede salir esa operación, sería ocho entre dos, eso te sale cuatro, pues ya sabes que es cuatro por dos para calcular la multiplicación…"*
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	*"Al sumar números impares te va a salir siempre un número par"*
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

TAXONOMÍA MODIFICADA DE GENERALIZACIONES REFLEJADAS
ENUNCIADOS PRODUCIDOS POR MARGARITA
TAREA 4.

TIPOS		*EJEMPLOS*
	1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.	

<table>
<tr><td rowspan="8">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>17+18+19+20+21 = , 15+16+17+18+19
8+9+10+11+12 , 7+8+9+10+11
133+134+135+136+137; 134+135+136+13</td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td>90 = 45×2 , 30×3 , 90×1 , 10×9
55 = 11×5 , 55×1 .
670 = 335×2 , 670×1 , 10×67.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td>Añadir por suma o resta un número más. Si tenemos en cuenta que son números pares o impares habría que sumar ejm: 132+2 = 134,</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>