Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). *El proceso de generalización: un estudio con futuros maestros de primaria.* Indivisa, Monografía XII, 73-90.

EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN: UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA[1]

Paola Andrea Trujillo, Encarnación Castro y Marta Molina
Universidad de Granada

Resumen

Se presenta un avance de una investigación que pretende estudiar el proceso de generalización que realizan futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización. Para justificar la pertinencia e interés de este trabajo nos basamos en investigaciones internacionales relacionadas con esta área las cuales nos han permitido perfilar el marco teórico de esta investigación. Tras haber realizado una fase de experimentación, mostramos aquí los primeros resultados. Los datos se recogieron a través de una entrevista a dos parejas de alumnos, en la que cada pareja trabajó conjuntamente en la resolución de la tarea escrita propuesta.

Palabras clave: Aritmética generalizada, Early- Algebra, Estudio de casos, Generalización, Pensamiento relacional.

Abstract

We present a preview of a research study that aims to study the generalization process that future primary school teachers carry on when working with arithmetic expressions that allow generalization. To justify the pertinence and interest of this work, we rely on international research related with this area. These studies allow us to shape this research's theoretic framework. Having developed an experimentation stage, here we show the first results. Data was gathered through interviews with two different couples of students. Each one worked together in the resolution of the given task.

Key words: Generalized Arithmetic, Early-Algebra, Study of cases, Generalization, Relational thinking.

Numerosos investigadores, preocupados por las dificultades que el aprendizaje del álgebra ocasiona a los alumnos, han desarrollado diferentes trabajos tratando de responder a la cuestión *qué es el álgebra*, así como buscando la forma más adecuada de trabajar el álgebra en el sistema escolar. Estos trabajos han llevado a distinguir diversas concepciones, enfoques y componentes del álgebra al no poder dar una definición concreta del álgebra. Kieran (2006, 2007) y Molina (2006) recogen algunos de estos enfoques y concepciones del álgebra que enumeramos seguidamente. En estos trabajos distinguimos:

[1] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos PEDER de la Comunidad Europea.

Concepciones del álgebra: El álgebra se considera como generalización de patrones numéricos y geométricos así como de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, como una forma de resolver problemas, o bien como la modelización de fenómenos físicos. Se percibe así mismo como aritmética generalizada, el estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo estudio de funciones) y el estudio de estructuras.

Enfoques. En las investigaciones centradas en el álgebra, se presentan cuatro enfoques que se conciben como una categorización fenomenológica. Un enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas; otro enfoque se centra en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. Un tercero hace referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. El por último un enfoque que se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

Dimensiones o componentes: En cuanto a las componentes de las tareas algebraicas destacamos: la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y el análisis del cambio.

En la actualidad, la propuesta de introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización, llamada Early–Algebra; va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba algunos de los componentes anteriormente mencionados; concretamente el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas (lo que incluye la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998). Desde esta propuesta, la mayoría de las investigaciones se centran en el pensamiento algebraico que puede ser promovido en el contexto de la aritmética (Molina, 2006).

Nuestro trabajo toma la visión del álgebra basada en aritmética generalizada, siguiendo a los autores que apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela (Mason, 1996; Mason, Graham, y Johnston–Wilder, 2005; Kieran, 2006, 2007). El objetivo general de esta investigación es estudiar el proceso de generalización que realizan futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización. Se pretende conocer el modo en que se enfrentan a las tareas propuestas para analizar el tipo de generalizaciones que realizan, la comprensión que evidencian, los modos de pensamiento que utilizan, el conocimiento que ponen en juego, las dificultades que manifiestan y cómo se produce o no aprendizaje.

ÁLGEBRA COMO GENERALIZACIÓN

Kaput define la generalización como:

> *"extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos".* (Kaput1999, p.136)

Otros autores, señalan diferentes concepciones de la actividad de generalización: como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad; como un lenguaje verbal y de gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar (como una alternativa al sistema de representación algebraico) y como una de las ideas básicas que puede guiar a los estudiantes a la utilización y manejo del lenguaje algebraico (Cañadas, 2007).

La generalización tiene un papel destacado dentro del álgebra como muestran las diferentes concepciones, dimensiones y enfoques antes enunciados. Autores como Mason (1996) y Mason *et al* (2005), consideran la generalización como una ruta hacia el álgebra, o incluso como la esencia del álgebra. Estos autores, habiendo analizado el proceso de generalización en las matemáticas escolares, identifican las siguientes conductas que conforman el ciclo de generalización: percibir la generalidad, expresar la generalidad, elucidar una regla general, verbal o numérica para generar una secuencia, expresar simbólicamente la generalidad, y manipular la generalidad. Para Kieran (2006, 2007), el "álgebra como generalización" es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar pruebas.

Aritmética y Álgebra

La generalización de la aritmética es considerada una componente fundamental del álgebra y existe una relación dual entre ambas sub-áreas de la matemática (Molina, 2006). El álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. La estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada (Mason, 1996).

Conscientes de que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos en sus trabajos algebraicos, numerosos investigadores proponen trabajar con actividades que faciliten la transición entre ambas disciplinas y centran su atención en la estructura de la aritmética, convencidos de que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra (Kieran, 1989) y que el conocimiento de la estructura aritmética o algebraica comprende el conocimiento de conjuntos de objetos matemáticos, de las operaciones, de las propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones, y de las propiedades de relaciones cuantitativas (Molina, 2006).

Para suavizar la transición de la aritmética al álgebra, Fujii (2003) sugiere: describir y hacer uso de los procesos y propiedades estructurales generalizables. Generalizar soluciones a problemas aritméticos para facilitar el desarrollo, por los alumnos, del concepto de variable en un sentido informal, y proveer oportunidades a los alumnos para discutir sus estrategias de resolución de estos problemas con la intención de resaltar los procesos e ideas matemáticas fundamentales (citado por Molina 2006). Por su parte, destacando el potencial algebraico de la aritmética, Fujii y Stephens (2001), señalan el papel de los números, como cuasi-variables, como un elemento clave para abordar problemas aritméticos de manera algebraica, sin requerirse un conocimiento previo del lenguaje simbólico algebraico. Estos autores utilizan el término "cuasi-variables" para referir al uso de los números en expresiones y sentencias numéricas que indican una relación matemática la cual es cierta para todos los números que se consideren (Molina, 2006). Al trabajar con este tipo de expresiones se pone en juego el pensamiento relacional, que es el tipo de pensamiento que se aplica al trabajar con expresiones aritméticas y algebraicas a partir del análisis de la estructura y la apreciación y uso de relaciones entre los términos que las componen. Para Molina (2006), el pensamiento relacional es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolos como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo. Este tipo de pensamiento se muestra, de esta forma, vinculado con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones. Destaca su potencial para favorecer y facilitar la algebrización de la aritmética, al centrar la atención en la estructura que subyace a ésta y favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional.

METODOLOGÍA

Esta investigación responde a un estudio de casos. Los sujetos participantes fueron cuatro estudiantes de primer año de Magisterio de la especialidad de Lengua Extranjera del curso 2007/2008, de la Universidad de Granada. Se organizaron dos grupos, uno constituido por dos mujeres y el otro, por un hombre y una mujer. Ninguno de ellos había recibido instrucción previa del tema antes de la ejecución de las tareas. Se diseñaron cuatro tareas con tres ítems cada una de ellas. Las tareas se trabajaron durante dos entrevistas que se llevaron a cabo en días diferentes, con una separación entre ellas de una semana. La primera entrevista se realizó a dos parejas y el papel del investigador era de observador y su participación era limitada. La segunda entrevista, de carácter semi-estructurado, se realizó de forma individual. El objetivo en esta última era profundizar en las respuestas dadas por los alumnos en la primera sesión. En la segunda entrevista sólo se trabajaron tres de las cuatro tareas y el papel del investigador fue de observador participante. En ambos casos, cada estudiante tuvo a su disposición calculadoras y folios en blanco. Se trató de que los alumnos expresaran de forma verbal y escrita todo lo que pensaban al realizar las tareas; tanto individual como colectivamente. Las dos sesiones se grabaron en audio.

Tareas

Las tareas propuestas a los estudiantes fueron las siguientes:

Ejercicio 1.	*12 x 12* *13 x 11*	*4 x 4* *5 x 3*	*9 x 9* *10 x 8*

Ejercicio 2.	*2 x 5 + 2 x 7* *2 x (5 + 7)*	*4 x 10 + 4 x 5* *4 x (10 + 5)*	*7 x 9 + 7 x 6* *7 x (9 + 6)*

Ejercicio 3. Realiza las operaciones:

3 + 5 =
27 + 29 =
9 + 11 =
45 + 47 =

Ejercicio 4. Realiza las operaciones:

16 + 17 + 18 + 19 + 20 =
9 + 10 + 11 + 12 + 13 =
132 + 133 + 134 + 135 + 136 =

Como se observa cada una de las tareas planteadas estuvo compuesta por expresiones aritméticas que incluyeron números naturales, cantidades no mayores a tres cifras y las operaciones de suma y multiplicación. Las dos primeras tareas tienen en común buscar las relaciones existentes entre las parejas de expresiones dadas. En el ejercicio 1, se observan las relaciones entre un número multiplicado por sí mismo, a x a, y su siguiente multiplicado por el anterior (a + 1) x (a – 1). En el ejercicio 2, se reconoce la propiedad distributiva. Las tareas 3 y 4 tienen en común la existencia de relaciones entre las expresiones consideradas y la multiplicación y presentan una relación con respecto al punto medio de las expresiones dadas. Además, en el primer caso, se percibe la presencia de números impares y, en el otro, que la cantidad de términos es impar.

A lo largo de las tareas se presentaron dos informaciones para dar un contexto a los ejercicios, la primera se presentó antes de las dos primeras tareas y la segunda información antes de la tercera y cuarta tarea. En las cuatro tareas se les solicitó a los alumnos que escribieran expresiones similares a las dadas, que explicaran de forma general cómo pueden construir más expresiones similares, que observaran las relaciones existente en y entre los ítem dados y que expresaran dichas relaciones de forma general.

Taxonomía para categorizar generalizaciones

En el análisis de los datos recogidos utilizamos la taxonomía de Ellis (2007). Esta taxonomía tiene en cuenta múltiples niveles de generalización y distingue la actividad de los estudiantes mientras generalizan, llamadas *acciones para la generalización*, y los enunciados finales de generalización, llamados *generalizaciones reflejadas*. Se diferencian tres tipos de generalizaciones reflejadas: *Identificación o Enunciado, Definición e Influencia*. Dentro de la primera de estas subcategorías la autora distingue entre Fenómeno continuo, Similitud (propiedad común, objetos o representaciones y situaciones) y Principio general (regla, patrón, estrategia o procedimiento y regla global). A su vez la subcategoría de *influencia* está dividida en: Idea previa o estrategia e Idea modificada o estrategia[2].

En este trabajo utilizamos la segunda de las categorías distinguidas por Ellis, *generalizaciones reflejadas*, para analizar y clasificar los enunciados finales de generalización de los estudiantes. Estos enunciados finales pueden ser verbales, escritos o el uso del resultado de una generalización (cuando los estudiantes implementan generalizaciones previamente desarrolladas en nuevos problemas o contextos). No obstante, no incluimos la subcategoría *influencia* ya que consideramos que ésta representa acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar una generalización más que un enunciado final.

ANÁLISIS DE DATOS

Para cada una de las tareas realizadas por los alumnos se organizaron los datos en tablas (anexos), en las cuales se categorizaron los enunciados finales verbales o escritos generados por los estudiantes. En estas tablas sólo incluimos los enunciados finales que los alumnos desarrollaron en la primera sesión, por parejas; en la cual, la participación de la entrevistadora fue limitada. A continuación presentamos el análisis de datos de una de las alumnas: Andrea[3].

Tarea 1.

[2] En las tablas de los anexos se incluye una breve descripción de cada una de estas subcategorías.
[3]Andrea es nombre ficticio.

Los enunciados que Andrea produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones y principios generales como patrón y regla global.

Similitud de objetos o representaciones. La alumna observó tres relaciones en las expresiones numéricas dadas: (a) cambio del orden de los términos; la suma de los dos términos de cada expresión da lo mismo y los términos de las expresiones de cada pareja se diferencian en una unidad (ver Figura 1)

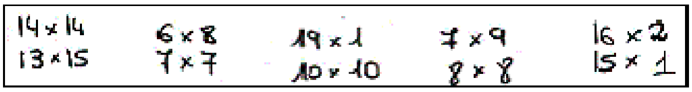

Figura 1

En algunos casos no consideró las parejas de expresiones como un conjunto, sino de forma separada (Figura 2.)

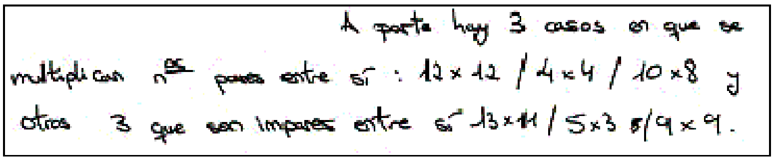

Figura 2

Patrón. Observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas: (Figura 3.)

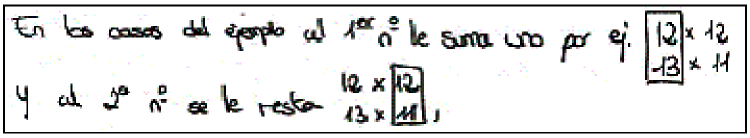

Figura 3

Regla global. Utilizó el lenguaje verbal-escrito para explicar de forma general cómo construir más expresiones similares. En este caso, ella usa un tipo de generalización verbal-escrita (Figura 4.)

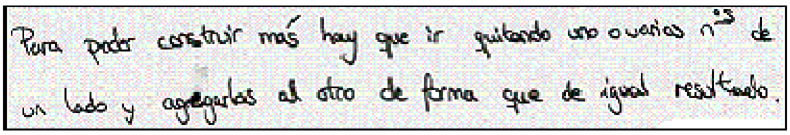

Figura 4

Tarea 2.

Los enunciados de estas tareas se clasifican en las subcategorías de similitud en una propiedad común y objetos o representaciones; y en principios generales en regla, procedimiento o estrategia y regla global.

Similitud de una propiedad común. La alumna pareció reconocer que estas expresiones se relacionan con una propiedad, pero no estaba segura. Su compañera la convence diciéndole que ella cree que es asociativa, porque se está asociando.

Similitud de objetos o representaciones. La estudiante planteó expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones dadas e igualó las parejas de expresiones poniendo así de manifiesto su equivalencia (Figura 5.)

$$3 \times 6 + 3 \times 8 = 3 \times (6+8)$$
$$5 \times 4 + 5 \times 6 = 5 \times (4+6)$$
$$8 \times 9 + 8 \times 10 = 8 \times (9+10)$$

Figura 5

Procedimiento o estrategia. La alumna describe verbalmente el método por el cual las parejas de expresiones dadas son equivalentes.

Regla. La explicación que presentó Andrea para construir más expresiones similares se clasificó como regla, ya que expresa la relación en forma general pero utilizando un caso particular. (Figura 6.)

Se usa un nº común que se coloca antes del + por ej. el
nº común (2) × 5 y depés se suma a otra multiplicación con el nº
común (2) multiplicado por otro nº distinto, y esto dan
= resultado que si multiplicas el nº común ((2) × (5+7)) por la
suma de los nºs distintos

Figura 6

Regla global. En el tercer apartado de la tarea, la alumna expresa la forma general de las expresiones aritméticas dadas, es decir, expresa la propiedad distributiva de forma general. Ella dice que se pueden utilizar letras para expresar estas expresiones, ya que éstas se pueden usar para todos los números y es más fácil porque sólo es sustituir. (Figura 7.)

También creemos que se puede aplicar a todos los nºs y sería sencillo
explicarlo con letras para que luego sea solo sustituir por nºs, ej:
$A \times B + A \times C = A \times (B+C)$

Figura 7

Tarea 3.

Los enunciados que Andrea expresa en esta tarea se clasifican en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones y principios generales como regla, patrón, y regla global.

Similitud de objetos o representaciones. La alumna identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas *"Todos los números son impares, sin embargo, todos dan resultado par".*

Patrón. Ella observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas (ver Figura 8.)


En 1er lugar del 1er nº al 2º hay 2 nº de diferencia

Figura 8

Regla. La alumna plantea que si el primer término es impar y se le suman dos, los dos términos serán impares, lo que conlleva que su resultado sea par. Al final aplica un razonamiento incorrecto, ya que supone que en sentido inverso esto también ocurre. (Figura 9.)

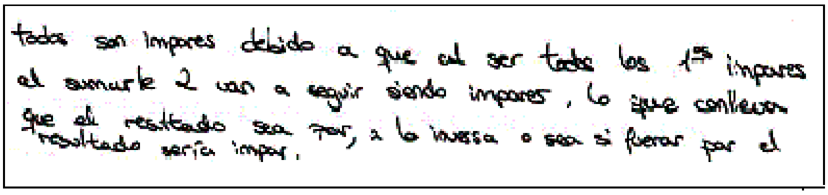
todos son impares debido a que al ser todos los 1os impares al sumarle 2 van a seguir siendo impares, lo que conlleva que el resultado sea par, a la inversa o sea si fueran par el resultado sería impar.

Figura 9

Regla global. Crea un esquema general para expresar la relación que se categorizó como regla para cualquier número. (Figura 10.)

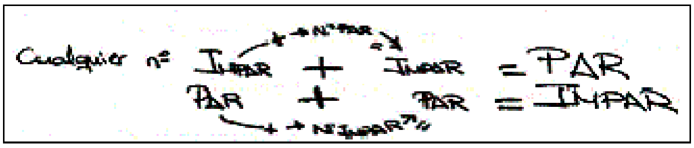

Figura 10

En el tercer ítem de esta tarea se le pide a la alumna que relacione los resultados de las suma dadas con la multiplicación de dos números. Andrea plantea dos relaciones, una sobre la paridad de la multiplicación de impares y pares (Figura 11), y otra contrastando la multiplicación por uno de la suma de una unidad (Figura 12.)

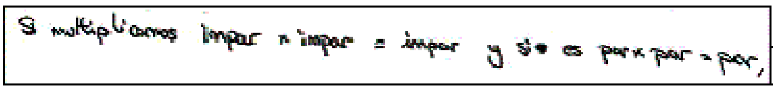
Si multiplicamos impar × impar = impar y si es par × par = par,

Figura 11


Al multiplicar cualquier nº por 1 da un nº menor que si lo sumases

Figura 12

Tarea 4.

Clasificamos los enunciados que Andrea produjo al trabajar en esta tarea en las subcategorías de similitud en una propiedad común y objetos o representaciones; y en principios generales en regla, patrón y procedimiento o estrategia.

Similitud de una propiedad común. La alumna identifica y expresa oralmente que: "*… en los tres salen múltiplos de cinco porque sale cero, el cinco y el cero*".

Similitud de un objeto o representación. Crea nuevas expresiones similares manteniendo la estructura de las expresiones aritméticas dadas. (Figura 13.)

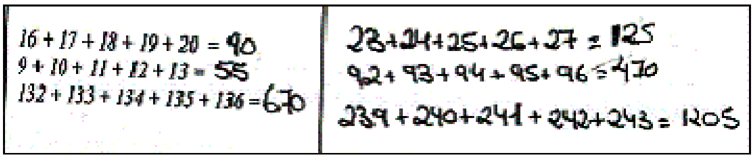
$16+17+18+19+20=90$
$9+10+11+12+13=55$
$132+133+134+135+136=670$
$23+24+25+26+27=125$
$92+93+94+95+96=470$
$239+240+241+242+243=1205$

Figura 13

Patrón. Andrea observó la siguiente regularidad en las expresiones dadas: *"…y por lo que he visto, siempre se cumple que los resultados terminan en cero o en cinco, lo cual significa que son múltiplos de cinco… con cinco números".*

Procedimiento o estrategia. La alumna describe cómo se construyen números consecutivos. (Figura 14.)

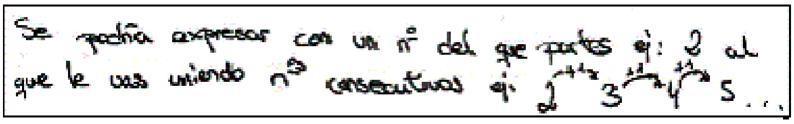
Se podría expresar con un nº del que partes ej: 2 al que le vas uniendo nºs consecutivos ej: $2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5$ . . .

Figura 14

Regla. Enuncia una regla para poder crear más expresiones similares a partir de las dadas. (Figura 15.)

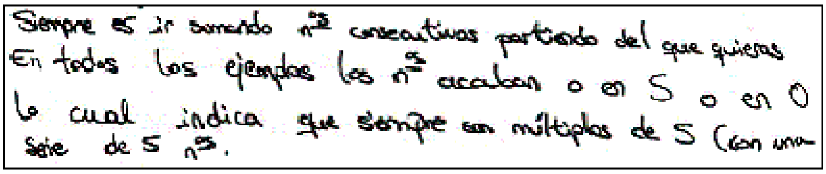
Siempre es ir sumando nºs consecutivos partiendo del que quieras
En todos los ejemplos los nºs acaban o en 5 o en 0
lo cual indica que siempre son múltiplos de 5 (con una
serie de 5 nºs.

Figura 15

Para resumir, presentamos en la tabla 1 la clasificación de los enunciados de generalización que desarrolló la alumna en cada tarea.

Generalizaciones reflejadas			**Tarea 1.**	**Tarea 2.**	**Tarea 3.**	**Tarea 4.**
Identificación o enunciado	*Fenómeno continúo*		0	0	0	0
	Similitud	*Propiedad común*	0	1	0	1
		Objetos o representaciones	3	1	2	1
		Situaciones	0	0	0	0
	Principio general	*Regla*	0	1	1	1
		Patrón	2	0	1	1
		Estrategia o procedimiento	0	1	0	1
		Regla global	1	2	4	0
Definición	*Clases de objetos*		0	0	0	0

A MODO DE CONCLUSIONES

A partir del análisis realizado observamos que la alumna enunció el reconocimiento de patrones, procedimientos, reglas y reglas globales a lo largo de las tareas. Identificó similitudes entre las expresiones aritméticas, a modo de propiedades en común u objetos o representaciones.

Se observa que algunas subcategorías de la categoría generalizaciones reflejadas no se aplicaron al clasificar los enunciados verbales o escritos producidos por Andrea. La taxonomía nos ha permitido categorizar los enunciados de generalización desarrollados por esta alumna. Sin embargo, es posible refinar la taxonomía en un estudio posterior con más sujetos o crear una propia.

A partir de los resultados obtenidos en el análisis de datos de este caso podemos señalar que de modo general, la alumna en las cuatro tareas sólo llegó a expresar una generalización de forma simbólica en la tarea 2. Sin embargo, se pudo observar otros tipos de generalizaciones no simbólicas enunciadas por ella a través de lenguaje verbal o incluso por medio de representaciones que combinan símbolos y palabras (ver figuras 10 y 11).

En general, la alumna presenta dificultades para poder expresar simbólicamente sus generalizaciones. Resultados similares se han observado en algunas investigaciones pioneras recogidas por Kieran (2006, 2007) sobre el uso de la notación algebraica (el simbolismo algebraico) como una herramienta para expresar patrones generales y figurales, y para justificar formas equivalentes de estas relaciones de patrones, en los cuales se constata que pocos estudiantes usan el simbolismo algebraico o aprecian su papel para justificar una declaración general sobre números. Además, Kieran recoge que una dificultad adicional yace en la incapacidad de los estudiantes para articular la estructura de un patrón o una relación usando el lenguaje ordinario. En nuestro caso, esta dificultad no se percibió, en todas las tareas la alumna expresó los patrones observados por ella de forma verbal.

En relación con la identificación de patrones o regularidades, se observó que Andrea se centró en buscar varios patrones en una misma tarea, considerando, además del patrón que nosotros utilizamos en el diseño de la tarea, otros que percibía al relacionar los términos que componen las expresiones.

En su trabajo la alumna puso de manifiesto el uso del pensamiento relacional, identificando relaciones o regularidades en expresiones aritméticas así como el reconocimiento de una propiedad aritmética (distributiva).

Es de resaltar que la alumna en la segunda entrevista, a través de un diálogo guiado usando preguntas como: ¿podrías expresarlo de una forma general, con letras?, ¿podrías empezar por números pequeños?, ¿qué ves en común entre los términos de las multiplicaciones y los términos de las sumas?, etc.; llegó a expresar sus generalizaciones por medio de expresiones algebraicas simbólicas en la totalidad de las tareas.

REFERENCIAS

Cañadas, C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America, Vol. 1 (pp. 49-66). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Fujii, T. y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.258- 264). Melbourne: University of Melbourne.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4 (pp. 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutteriez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future.* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 707–62). National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

<table>
<tr><th colspan="4">GENERALIZACIONES REFLEJADAS POR LA ALUMNA
TAREA 1.</th></tr>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="2"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="2">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo especifico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td>Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td></tr>
<tr><td>Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>14×14 / 13×15 6×8 / 7×7 19×1 / 10×10 7×9 / 8×8 16×2 / 15×1

A parte hay 3 casos en que se multiplican nºs pares entre sí: 12×12 / 4×4 / 10×8 y otros 3 que son impares entre sí 13×11 / 5×3 8/9×9.

podemos buscar otro como en mi caso 3º → $19 \times 1 = \boxed{20}$, $10 \times 10 = \boxed{20}$ o por ejemplo $\boxed{5 \times 8 = 2 \times 11} = 13$</td></tr>
<tr><td>Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td>Regla: La descripción de una formula general o hecho.</td><td></td></tr>
<tr><td>Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>“…en todos, he quitado por un lado uno y en el otro, lo he sumado”.
En los casos del ejemplo al 1er nº le suma uno por ej $\boxed{12} \times 12$ / $\boxed{13} \times 11$ y al 2º nº se le resta $12 \times \boxed{12}$ / $13 \times \boxed{11}$,</td></tr>
<tr><td>Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso especifico.</td><td></td></tr>
<tr><td>Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td>Para poder construir más hay que ir quitando uno o varios nºs de un lado y agregarlos al otro de forma que de igual resultado.</td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="2">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">GENERALIZACIONES REFLEJADAS POR LA ALUMNA
TAREA 2.</th></tr>
<tr><th>TIPOS</th><th colspan="2"></th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="2">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo especifico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td>Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td>creí que era una propiedad distributiva pero luego por mi compañera me di cuenta que era asociativa.</td></tr>
<tr><td>Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>$3 \times 6 + 3 \times 8 = 3 \times (6+8)$
$5 \times 4 + 5 \times 6 = 5 \times (4+6)$
$8 \times 9 + 8 \times 10 = 8 \times (9+10)$</td></tr>
<tr><td>Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td>Regla: La descripción de una formula general o hecho.</td><td>Se usa un nº común que se coloca antes del + por ej. el nº (2) × 5 y después se suma a otra multiplicación con el nº común (2) multiplicado por otro nº distinto, y esto da = resultado que si multiplicas el nº común ((2) × (5+7)) por la suma de los nºs distintos</td></tr>
<tr><td>Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td></td></tr>
<tr><td>Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso especifico.</td><td>"… se repite siempre el primer, o sea, hay un número que se repite siempre, verdad?, entonces, lo multiplica, por ejemplo aquí, el número que se repite, por cinco; y le sumas, el número que se repite por siete; entonces, este número, lo multiplicas por los dos que no se repiten y te va a dar lo mismo en ambos casos".</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td>"Sería "a" por "b" más "a" por "c" igual "a" por "b" más "c"".

También creemos que se puede aplicar a todos los nºs y sería sencillo explicarlo con letras para que luego sea solo sustituir por nºs, ej:
$A \times B + A \times C = A \times (B+C)$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="2">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>

GENERALIZACIONES REFLEJADAS POR LA ALUMNA ***TAREA 3.***			
TIPOS			***EJEMPLOS***
Tipo IV: Identificación o enunciado	*1. Fenómeno continuo:* La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo especifico.		
	2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.	*Propiedad común:* La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.	
		Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.	*"Todos los números son impares, sin embargo, todos dan resultado par"* 3 + 5 = 8 27 + 29 = 56 9 + 11 = 20 45 + 47 = 92 2 + 4 5 + 7 90 + 92 13 + 15
		Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.	
	3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.	*Regla:* La descripción de una formula general o hecho.	todos son impares debido a que al ser todos los 1os impares al sumarle 2 van a seguir siendo impares, lo que conlleva que el resultado sea par, a la inversa o sea si fueran par el resultado sería impar.
		Patrón: La identificación de un patrón general.	En 1er lugar del 1er nº al 2º hay 2 nºs de diferencia
		Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso especifico.	
		Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.	*" Sumas impar e impar te va a dar par"* Si multiplicamos impar × impar = impar y si es par × par = par, Al multiplicar cualquier nº por 1 da un nº menor que si lo sumases Cualquier nº IMPAR + IMPAR = PAR PAR + PAR = IMPAR + → Nº PAR + → Nº IMPAR
Tipo V: Definición	*1. Clases de objetos:* La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.		

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">GENERALIZACIONES REFLEJADAS POR LA ALUMNA
TAREA 4.</td></tr>
<tr><td>TIPOS</td><td colspan="2"></td><td>EJEMPLOS</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Tipo IV: Identificación o enunciado</td><td colspan="2">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo especifico.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td>Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td>“… en los tres salen múltiplos de cinco porque sale cero, el cinco y el cero”</td></tr>
<tr><td>Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 90
9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55
132 + 133 + 134 + 135 + 136 = 670
23 + 24 + 25 + 26 + 27 = 125
92 + 93 + 94 + 95 + 96 = 470
239 + 240 + 241 + 242 + 243 = 1205</td></tr>
<tr><td>Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td>Regla: La descripción de una formula general o hecho.</td><td>Siempre es ir sumando nºs consecutivos partiendo del que quieras
En todos los ejemplos los nºs acaban o en 5 o en 0
lo cual indica que siempre son múltiplos de 5 (con una
serie de 5 nºs.</td></tr>
<tr><td>Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>“…y por lo que he visto, siempre se cumple que los resultados terminan en cero o en cinco, lo cual significa que son múltiplos de cinco… con cinco números”</td></tr>
<tr><td>Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso especifico.</td><td>Se podría expresar con un nº del que partes ej: 2 al
que le vas uniendo nºs consecutivos ej: $2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \ldots$</td></tr>
<tr><td>Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="2">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td></tr>
</table>