Trujillo, P. A.,Castro, E. y Molina, M. (2008). *Proceso de generalización: un estudio de casos con futuros maestros.* En Cardeñoso, José María; Peñas, María (Eds.), Investigación en el aula de matemáticas: sentido numérico (pp. 225-231). Granada. España: S.A.E.M. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

# PROCESO DE GENERALIZACIÓN: UN ESTUDIO DE CASOS CON FUTUROS MAESTROS[1]

PAOLA ANDREA TRUJILLO, ENCARNACIÓN CASTRO Y MARTA MOLINA
Universidad de Granada

*Presentamos parte de un estudio que persigue analizar el proceso de generalización que realizan futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas. Los datos se recogieron a través de entrevistas a dos parejas de estudiantes a los que se les propusieron cuatro tareas escritas. Centramos nuestra atención aquí en la producción de una estudiante en una de dichas tarea. Destacamos además algunas de las principales conclusiones que se extraen de la investigación realizada.*

## INTRODUCCIÓN

En las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, el estudio del proceso de generalización ha sido abordado en el caso de estudiantes de educación secundaria, pero no tanto en relación a estudiantes de otros niveles, en particular futuros maestros (Trujillo, 2008). Waters (2004) reporta la existencia de una literatura muy limitada sobre la creación de patrones, así como de la expresión y justificación de generalizaciones e insiste en la necesidad de proporcionar un mayor apoyo a los profesores en un esfuerzo para mejorar su conocimiento matemático. Partiendo de estas consideraciones, hemos realizado un estudio de casos sobre las generalizaciones que realizan futuros maestros. El propósito es conocer cómo se enfrentan estos estudiantes a ciertas tareas aritméticas, propuestas especialmente para provocar en ellos la realización y expresión de generalizaciones, y analizar su desempeño centrándonos en el tipo de generalizaciones que realizan y las dificultades que manifiestan.

[1] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías, construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

## MARCO TEÓRICO

Numerosos autores, entre los que se encuentran Becker y Rivera (2008), Kieran (2006), Mason (1996), Schliemann et al. (2003), Usiskin (1999), han tratado de responder a la cuestión *qué es el álgebr*a. Así mismo, se han centrado en buscar la forma más adecuada de trabajar el álgebra en el sistema escolar. En dicha búsqueda, han llegado a distinguir diferentes concepciones y componentes del álgebra así como enfoques para trabajarla en el aula. Destacamos aquí aquellos que hacen referencia a la generalización.

Para Kieran (2006) el "álgebra como generalización" es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones. Afirma que la experiencia previa de los estudiantes con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, debe tener un efecto importante en la capacidad de los estudiantes en dar sentido al álgebra (Kieran, 1989). Por su parte, Mason (1996) considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, o incluso como la esencia del álgebra, y afirma que la estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada. Así mismo, Schliemann et al. (2003) consideran en sus trabajos el álgebra como una aritmética de números y cantidades generalizada. Sostienen que este enfoque resalta el cambio de pensar sobre relaciones entre números y medidas particulares a pensar sobre relaciones entre conjuntos de números y medidas, y de calcular respuestas numéricas a describir y representar relaciones entre variables. Según Socas et al. (1989), el álgebra no está separada de la aritmética, sino que es en gran parte aritmética generalizada. Hewitt (1998) considera que el álgebra o el pensamiento algebraico subyacen a la aritmética, ya que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Usiskin (1999) afirma que las instrucciones clave para el estudiante en esta concepción son "traducir" y "generalizar", y afirma que éstas son habilidades importantes no sólo para el álgebra sino también para la aritmética.

A través de estas aportaciones, se observa que la generalización de la aritmética es considerada una componente fundamental del álgebra, que es utilizada tradicionalmente para la introducción del álgebra en el ámbito escolar. Siguiendo esta línea tomamos, para nuestro trabajo, la visión del álgebra como una aritmética generalizada y consideramos que la generalización es una valiosa vía de introducción del álgebra en la escuela. Enmarcamos este enfoque de la enseñanza del álgebra dentro de la propuesta de cambio curricular denominada Early-Algebra que pretende introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización obligatoria (Blanton y Kaput, 2005). Esta propuesta persigue promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial de la aritmética, a partir de la integración de modos de pensamiento algebraicos en la actividad aritmética. Al promover un enfoque estructural de la aritmética, se persigue potenciar el desarrollo del sentido numérico, operacional y estructural de los estudiantes (Molina, 2006).

Consideramos que la puesta en práctica de dicho cambio curricular la han de realizar maestros preparados para tal efecto y que, para llevar a cabo este tipo de enseñanza, es necesario que los maestros sean capaces de promover en sus estudiantes modos de pensamiento algebraicos, entre ellos el pensamiento relacional (Molina, 2006). La formación del maestro en dicho ámbito, es por tanto, ineludible. Tomando dicha formación como un objetivo a considerar a corto plazo, nos proponemos investigar sobre el comportamiento de futuros maestros ante procesos de generalización en los que el pensamiento relacional juega un papel primordial. Aunque no de forma directa, el sentido numérico está involucrado en esta concepción del álgebra, ya que si éste se ha desarrollado adecuadamente potenciará el paso a la generalización.

## METODOLOGÍA

Nuestra investigación responde a un estudio de casos. Los sujetos participantes han sido cuatro estudiantes de primer año de Magisterio de la especialidad de Lengua Extranjera del curso 2007/2008, de la Universidad de Granada. La recogida de datos se llevó a cabo en dos sesiones, en forma de entrevistas, que se realizaron en días diferentes en el segundo cuatrimestre académico tras haber cursado la asignatura de Matemáticas y su didáctica. En dicha asignatura los estudiantes no habían trabajado nada sobre este tema. La primera entrevista se realizó a las dos parejas por separado. El papel de la investigadora fue, principalmente, de observadora y su participación fue limitada. A través del trabajo en parejas forzamos a los estudiantes a tener que expresar oralmente cómo iban abordando las tareas. De este modo podríamos recoger información de lo que pensaban mientras realizaban su trabajo. La segunda entrevista, de carácter semi-estructurado, se realizó de forma individual. La investigadora participó haciendo las preguntas que, a priori, se habían elaborado para recabar la información pertinente. El objetivo de la segunda entrevista era profundizar en las respuestas dadas por los estudiantes en la primera sesión. En ambas sesiones cada estudiante tuvo a su disposición calculadoras y folios en blanco.

Los datos recogidos son de tipo cualitativo y tienen distinta procedencia: documentos escritos por las investigadoras como preparación para el desarrollo de las entrevistas, observaciones y notas tomadas por la investigadora a lo largo de las sesiones, documentos escritos por los estudiantes con los resultados de las tareas propuestas, grabación en audio de las dos sesiones y la transcripción de las mismas.

**Tareas**

En la primera entrevista se le propuso a las parejas de estudiantes cuatro tareas que se presentaron junto a dos informaciones que aportaban un contexto y una motivación para su desarrollo. Las tareas elegidas responden a los siguientes criterios: a) estar compuestas por expresiones aritméticas en las que intervienen sólo números naturales, de no más de tres cifras, b) las operaciones implicadas sólo son de suma y multiplicación y c) las expresiones guardan entre sí una relación que permite detectar un patrón susceptible de ser generalizado. Concretamente, las expresiones en las que trabajaron en cada tarea fueron las siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| *12 x 12*<br>*13 x 11* | *4 x 4*<br>*5 x 3* | *9 x 9*<br>*10 x 8* |

***Tarea 1***

| | | |
|---|---|---|
| *2 x 5 + 2 x 7*<br>*2 x (5 + 7)* | *4 x 10 + 4 x 5*<br>*4 x (10 + 5)* | *7 x 9 + 7 x 6*<br>*7 x (9 + 6)* |

***Tarea 2***

| |
|---|
| *3 + 5 =*<br>*27 + 29 =*<br>*9 + 11 =*<br>*45 + 47 =* |

***Tarea 3***

| |
|---|
| *16 + 17 + 18 + 19 + 20 =*<br>*9 + 10 + 11 + 12 + 13 =*<br>*132 + 133 + 134 + 135 + 136 =* |

***Tarea 4***

En las cuatro tareas se les solicitó a los estudiantes: (1) que escribieran expresiones similares a las dadas y (2) que explicaran, de forma general, cómo pueden construir más expresiones similares a las dadas. En las tareas 1 y 2, también se les pidió que observaran las relaciones existentes en y entre las expresiones dadas y que expresaran dichas relaciones de forma general, y en 3 y 4, que encontraran alguna multiplicación de dos números que diera igual resultado que las sumas dadas, y que expresaran las relaciones encontradas de forma general.

**Taxonomía para categorizar las generalizaciones**

Para el análisis de los datos recogidos utilizamos la taxonomía de Ellis (2007) modificada para la ocasión (ver tabla 1). Dicha taxonomía tiene en cuenta diferentes niveles de generalización y distingue entre la actividad de los estudiantes cuando generalizan, denominadas *acciones para la generalización*, y los enunciados finales de generalización, llamados *generalizaciones reflejadas*. En este trabajo utilizamos la segunda parte de la taxonomía para analizar y clasificar los enunciados finales (orales o escritos) de generalización de los estudiantes.

Por el tipo de tareas elegidas y objetivo de nuestro trabajo hemos realizado dos modificaciones en dicha taxonomía: no incluir la sub-categoría influencia ya que consideramos que ésta hace referencia a aquellas acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar una generalización más que a un enunciado final, y nuestro interés estaba localizado en los enunciados finales; y distinguir dos tipos de enunciados dentro de la sub-categoría de similitud de objetos o representaciones: estructura y resultado, al apreciar en el análisis de los datos una clara distinción entre ambos tipos de enunciados. Esta distinción es pertinente por estar considerando expresiones numéricas las cuales pueden considerarse similares por tener el mismo valor numérico (resultado) o por tener una estructura idéntica o semejante.

<table>
<tr><td rowspan="9">Tipo IV: Identificación o Enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: Identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: Identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: Identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td></tr>
<tr><td>Resultado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: Identificación de situaciones como similares o idénticas.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: Descripción de una fórmula general o hecho.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: Identificación de un patrón general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: Descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: Enunciado del significado de un objeto/idea.</td></tr>
<tr><td>Tipo V: Definición</td><td colspan="3">Clases de objetos: Definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td></tr>
</table>

**Tabla 1. Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas**

## ANÁLISIS DE DATOS

Presentamos el análisis de datos de la estudiante Natalia (nombre ficticio) en la tarea 2. Los enunciados que produjo en esta tarea se clasificaron en las subcategorías de similitud en propiedad común y situaciones; y en cuanto a principios generales en regla, estrategia o procedimiento y regla global.

***Similitud de una propiedad común***[2]. La estudiante reconoce que estas expresiones se relacionan con una propiedad, con la asociativa, porque se está asociando (Figura 1).

Podemos observar que se utiliza la propiedad asociativa, ya que se están asociando números.

Figura 1

***Situaciones***. Cuando Natalia y su compañera advirtieron que era posible expresar de forma general la propiedad distributiva, Natalia expresó de forma oral la importancia que para ella tenían las letras en el contexto de las matemáticas: "*Yo creo que las letras, también es un recurso, digamos didáctico para enseñar matemáticas, es una forma que a lo mejor los niños a primera vista al ver los números, les resulte mas cómodo verlos en letras… sólo es sustituir y es relacionar*".

***Regla***. La explicación que proporcionó Natalia para construir más expresiones similares la clasificamos como regla ya que expresa la relación en forma general pero utilizando un caso particular (Figura 2).

Otro punto que se puede tener en cuenta es que en el paréntesis se suma los números diferentes que anteriormente se han multiplicado $4 \times 10 + 4 \times 5 \rightarrow 4 \times (10 + 5)$

Figura 2

***Estrategia o procedimiento.*** La estudiante manifestó cómo construir más expresiones similares. Para ello tuvo en cuenta que las parejas de expresiones dadas son equivalentes (Figura 3). Al final del desarrollo de esta tarea, Natalia expresa mediante simbolismo algebraico la propiedad distributiva (Figura 4). Su explicación sugiere que ésta es una forma más clara de expresar relaciones.

Se pueden tener varias cosas en cuenta para construir más expresiones como es el caso de que $4 \times 10 + 4 \times 5 = 4 \times (10 \times 5)$, es decir dará el mismo resultado.

Figura 3

Una manera de expresar estas operaciones sería con letras, quizá sería una manera más clara, puesto que posteriormente sólo habría que sustituir. ejemplo $7 \times 9 + 7 \times 6$

$7 \times (9 + 6)$

Figura 4

[2] El orden de las subcategorías de la taxonomía no tiene porqué coincidir con el proceso de trabajo de los alumnos. Aquí presentamos los enunciados de la estudiante siguiendo el orden dado

***Regla global***. En el tercer apartado de la tarea, la estudiante expresa de forma general, mediante simbolismo algebraico, la estructura de las expresiones aritméticas dadas, poniendo de manifiesto su equivalencia (Figura 5).

$$\boxed{a \times b + a \times c = a \times (b+c)}$$

Figura 5

**DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES**

A partir del análisis realizado observamos que la estudiante enunció el reconocimiento de principios generales en regla, procedimiento y regla global a lo largo de la tarea. Identificó similitudes entre las expresiones aritméticas, a modo de propiedades en común y situaciones. Hubo dos subcategorías que no tuvieron ningún enunciado final: fenómeno continuo y clases de objetos. Esto puede ser debido: *(1)* al tipo de tarea propuesta, ya que las parejas de expresiones dadas no sugieren un movimiento o cambio de una a otra, como ocurre por ejemplo en una sucesión (ej. cada vez se suman cinco más) sino que comparten una relación (estática) entre sus términos, *(2)* el tipo de enunciados que propone no precisa el conjunto de elementos para los que es aplicable la generalización que expresa.

La tarea 2 es la única en la que Natalia propone una generalización de forma simbólica, en los demás casos utilizó el lenguaje verbal. Esto puede ser debido a que a lo largo de su formación matemática en variadas ocasiones ha encontrado expresada de forma simbólica dicha propiedad (distributiva).

En relación al trabajo en parejas, pudimos observar que Natalia y su compañera tuvieron un diálogo cohesivo y dinámico, que en variadas ocasiones ayudó a la detección de relaciones en las expresiones numéricas dadas, sobre todo a Natalia. En general, la estudiante puso de manifiesto el uso del pensamiento relacional (Molina, 2006) identificando relaciones o regularidades en las expresiones dadas.

Las dificultades presentadas por Natalia en las cuatro tareas fueron: no considerar, en algunos casos, las parejas de expresiones como totalidades sino percibirlas como expresiones separadas; al afrontar la tarea, no comprendía que se le pedía que hiciese. Esta última dificultad puede ser debida a su falta de experiencia y trabajo previo en tareas del tipo de las propuestas. A diferencia de su compañera, Natalia expresó menor cantidad de enunciados de regla global, lo que pone de manifiesto cierta dificultad en expresar de forma general las relaciones observadas y necesitar recurrir a ejemplos.

En general los cuatro estudiantes llegaron a expresar de forma general relaciones que apreciaron en las expresiones aritméticas consideradas, aunque en algunos casos fue necesario que la entrevistadora les guiará con interrogantes del tipo: ¿podrías expresarlo de una forma general con letras?, ¿podrías empezar por números pequeños?, ¿qué ves en común entre los términos de las multiplicaciones y los términos de las sumas?, etc. Estas observaciones nos sugieren que si los estudiantes a lo largo de su formación trabajan tareas de este tipo progresarían significativamente en el desarrollo de generalizaciones. La integración en la formación de maestros de actividades que permitan y promuevan el desarrollo y expresión de generalidades, de forma tanto verbal como simbólica, se muestra de interés para ayudarles a distinguir los patrones útiles en una determinada situación, dificultad señalada por (Lee, 1996) y que hemos observado en este trabajo.

## REFERENCIAS


Becker, J.R. y Rivera, F.D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 1.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163,* 19-29.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4 (pp. 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 87-106). London: Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. y Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G.

Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME and the 25th PME-NA joined conference*, Vol. 4 (pp.127-134). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Trujillo, P. A.(2008). Proceso de generalización que realizan futuros maestros. Trabajo final de master. Dpto. Didática de la Matemática, Universidad de Granada.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*, (pp. 7–13). Reston, Va.: NCTM.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I Putt, R Faragher & M Mclean (Eds.) *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010* (*Proceedings of the 27th MERGA Annual Conference)*, Vol 2 (pp.565-572). Sydney: MERGA.