UN ESTUDIO DE CASOS SOBRE EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

Paola Andrea Trujillo, Encarnación Castro, Marta Molina
Universidad de Granada

RESUMEN

Describimos en esta comunicación parte de un estudio de casos que analiza el proceso de generalización que realizan futuros profesores de Educación Primaria cuando trabajan expresiones aritméticas que permiten la generalización. Los datos proceden de una entrevista realizada a dos parejas de estudiantes, en la que cada pareja trabajó conjuntamente en la resolución de cuatro tareas escritas. Centramos nuestra atención aquí en la producción de una de las parejas en la primera tarea. Partiendo de la comparación de los enunciados de generalización de ambos estudiantes, en cuanto a semejanzas y diferencias, presentamos algunas conclusiones acerca de su proceso de generalización.

ABSTRACT

We describe in this paper part of a case study that analyzes the generalization process that future elementary school teachers carry out when working with arithmetic expressions that allow generalization. Data comes from an interview to two couples of students, in which each couple worked together in solving four different written tasks. Here we focus our attention in the results of a couple in the first task. Starting from the comparison of the generalization statements of both students, their similarities and differences, we present some conclusions about their generalization process.

Trujillo, P. A., Castro, E., Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 511-521). Santander: SEIEM.

Investigadores como Becker y Rivera (2008), Kieran (2006), Mason (1996) y Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al. (2003) han centrado el desarrollo de su trabajo en tratar de responder a la cuestión *qué es el álgebra,* así como de buscar la forma más adecuada de trabajar el álgebra en el sistema escolar. En dicha búsqueda, se han llegado a distinguir diferentes concepciones y componentes del álgebra así como enfoques para trabajarla en el aula. Para nuestro trabajo tomamos una de dichas concepciones, el álgebra como aritmética generalizada, siguiendo a los autores que apuestan por la generalización como una vía de introducción al álgebra en la escuela (e.g. Mason, 1996; Mason, Graham y Johnston–Wilder, 2005; Schliemann et al., 2003; Warren, 2004).

La mayoría de las investigaciones realizadas en relación con la enseñanza y aprendizaje del álgebra, aquellas especialmente centradas en el estudio del proceso de generalización, se han realizado con estudiantes de educación secundaria, no tanto en estudiantes de otros niveles, como sucede, en particular, con futuros maestros (Trujillo, 2008). En esta línea, Waters (2004) hace referencia a la existencia de una literatura muy limitada sobre la creación de patrones, así como sobre la expresión y justificación de generalizaciones e insiste en la necesidad de proporcionar un mayor apoyo a los profesores en un esfuerzo para mejorar su conocimiento matemático al respecto.

Partiendo de las aportaciones hechas por los citados autores, entre otros, nuestro interés para realizar este estudio radica en la intención de conocer el modo en que futuros maestros se enfrentan a ciertas tareas aritméticas, propuestas especialmente para provocar en ellos la realización y expresión de generalizaciones, y analizar su desempeño centrándonos en el tipo de generalizaciones que realizan. En esta comunicación presentamos la producción de una pareja de estudiantes de la diplomatura de Magisterio de la Universidad de Granada, en una de dichas tareas. Nuestros objetivos aquí son: discernir si dichos sujetos realizan el "paso" desde las expresiones aritméticas a la generalización; recopilar todas las generalizaciones que produzcan y clasificarlas utilizando la taxonomía de *generalización reflejadas* de Ellis (2007); analizar y comparar las producciones en cuanto a semejanzas y diferencias y; comprobar si perciben los patrones que permiten la generalización.

MARCO TEÓRICO

La generalización de la aritmética es considerada un componente fundamental del álgebra, que es utilizada tradicionalmente para la introducción del álgebra en el ámbito escolar. Mason (1996) considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, e incluso como la esencia del álgebra, y afirma que la estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada. Para Hewitt (1998) el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética, ya que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Así mismo, Schliemann et al. (2003) consideran en sus trabajos el álgebra como una aritmética de números y cantidades generalizada. Sostienen que este enfoque resalta el cambio de pensar sobre relaciones entre números y medidas particulares a pensar sobre relaciones entre conjuntos de números y medidas, y de calcular respuestas numéricas a describir y representar relaciones entre variables. Para Kieran (2006) el "álgebra como generalización" es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones. Por su parte, Kaput (1999) define la generalización como:

> *extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p.136)*

Siguiendo esta línea en nuestro trabajo, consideramos que la generalización es una valiosa vía de introducción del álgebra en la escuela. Abordamos este enfoque de la enseñanza del álgebra desde la propuesta de cambio curricular denominada Early-Algebra que pretende introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización obligatoria (Blanton y Kaput, 2005, Molina, 2006). En particular la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, y especialmente con la estructura de expresiones aritméticas, puede tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra (Kieran, 1989). Para la puesta en práctica de este cambio curricular, creemos necesario contar con maestros preparados para tal efecto que sean capaces de promover en sus alumnos modos de pensamiento algebraicos.

METODOLOGÍA

Nuestra investigación responde a un estudio de casos. Los sujetos participantes han sido cuatro estudiantes de primer año de Magisterio de la especialidad de Lengua Extranjera del curso 2007/2008, de la Universidad de Granada (tres chicas y un chico). La recogida de datos se llevó a cabo en dos sesiones, en forma de entrevistas. La primera sesión se realizó a las dos parejas, por separado. A través del trabajo en parejas provocamos en los estudiantes la necesidad de expresar oralmente cómo iban abordando las tareas. De este modo se pretendía recoger información de lo que pensaban mientras realizaban su trabajo. El papel de la investigadora fue, principalmente, de observadora y su participación fue limitada. La segunda entrevista, de carácter semi-estructurado, se realizó de forma individual. El objetivo era profundizar en las respuestas dadas por los alumnos en la primera sesión. La investigadora participó haciendo las preguntas que, a priori, se habían elaborado para recabar la información pertinente.

Los datos recogidos son de tipo cualitativo y tienen distinta procedencia: a) documentos escritos por las investigadoras como preparación para el desarrollo de las entrevistas, b) observaciones y notas tomadas por la investigadora a lo largo de las sesiones, c) documentos escritos por los alumnos con los resultados de las tareas propuestas, d) grabación en audio de las dos sesiones y e) la transcripción de las mismas.

Tareas

En la primera sesión se le propuso a las parejas de estudiantes cuatro tareas que se presentaron junto a dos informaciones que aportaban un contexto y una motivación.

12 x 12 13 x 11	4 x 4 5 x 3	9 x 9 10 x 8

Tarea 1

2 x 5 + 2 x 7 2 x (5 + 7)	4 x 10 + 4 x 5 4 x (10 + 5)	7 x 9 + 7 x 6 7 x (9 + 6)

Tarea 2

3 + 5 = 27 + 29 = 9 + 11 = 45 + 47 =

Tarea 3

16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 132 + 133 + 134 + 135 + 136 =

Tarea 4

El formato de las tareas 1 y 2 fue vertical y no horizontal como aquí se presenta por limitación de espacio. Las tareas están compuestas por expresiones aritméticas que guardan entre sí una relación que permite detectar un patrón susceptible de ser generalizado y en las que intervienen sólo números naturales, de no más de tres cifras, y las operaciones suma y multiplicación. En las cuatro tareas se les solicitó a los alumnos que escribieran expresiones similares a las dadas y que explicaran de forma general cómo se pueden construir más expresiones. En las tareas 1 y 2 también se les pidió que observaran las relaciones existentes en y entre las expresiones dadas, y que expresaran dichas relaciones de forma general. En las tareas 3 y 4, los estudiantes debían también buscar alguna multiplicación de dos números que diera igual resultado que las sumas dadas, y expresar las relaciones encontradas de forma general.

Taxonomía para categorizar las generalizaciones

Para el análisis de los datos recogidos utilizamos la taxonomía de Ellis (2007), la cual tiene en cuenta diferentes niveles de generalización. Distingue entre la actividad de los estudiantes cuando generalizan, denominadas *acciones para la generalización*, y los enunciados finales de generalización, llamados *generalizaciones reflejadas*. En este trabajo utilizamos la segunda parte de la taxonomía para analizar y clasificar los enunciados finales (orales o escritos) de generalización de los estudiantes. Además de restringir la categorización de Ellis, la hemos adaptado a nuestro trabajo para lo que hemos realizado las siguientes modificaciones: (a) no incluir la subcategoría influencia ya que consideramos que hace referencia a acciones que los estudiantes realizan para llegar a enunciar una generalización, más que a un enunciado final; y (b) distinguir dos tipos de enunciados dentro de la subcategoría de similitud de objetos o representaciones: estructura y resultado, al apreciar en el análisis de los datos una clara distinción entre ambos tipos de enunciados. Esta distinción es pertinente por estar considerando expresiones numéricas las cuales pueden considerarse similares por tener el mismo valor numérico (resultado) o por tener una estructura idéntica o semejante. La taxonomía utilizada se muestra en la Tabla 1.

ANÁLISIS DE DATOS

Para cada una de las tareas realizadas por los alumnos se organizaron los datos en tablas en las que incluimos los enunciados finales (verbales o escritos) que los alumnos desarrollaron en la primera sesión. Presentamos aquí el análisis del trabajo producido por una de las parejas, Federico y Margarita[1], en la tarea 1. Antes es importante mencionar que en general, no se observó interés por trabajar en equipo por parte de ambos estudiantes; la interacción entre ellos fue mínima, realizando la mayoría del trabajo de forma individual. A pesar de esto, cuando Federico explicaba lo que había hecho, Margarita tomaba en cuenta algunas de las ideas planteadas por él, lo que le permitió tener otro punto de vista de las relaciones encontradas por ella.

A continuación destacamos las semejanzas y diferencias detectadas en el tipo de enunciados producidos por cada uno de los estudiantes, haciendo uso de la taxonomía modificada. La tabla 1 resume el tipo de enunciados de generalización expresados por cada estudiante en la primera tarea.

Semejanzas

En la tarea 1 ambos estudiantes produjeron enunciados clasificados en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como estructura; y en principios generales como patrón. A continuación describimos dichos enunciados. Ningún estudiante expresó enunciados (verbales o escritos) que puedan ser clasificados dentro de las subcategorías de fenómeno continuo, similitud en propiedad común, principios generales como regla y regla global; y clases de objetos.

Estructura. Al principio, ambos estudiantes no consideraron las parejas de expresiones como un conjunto, sino que analizaron cada expresión por separado. Esto condicionó el tipo de relaciones que identificaron. Federico expresó de forma oral y escrita varias relaciones atendiendo al número de dígitos que componen cada término de las expresiones dadas y a si los términos de las expresiones se estaban multiplicando eran iguales o diferentes (Figura 1F). Margarita coincidió en indicar una relación existente en las expresiones dadas relativa a la cantidad de dígitos que componen las expresiones (Figura 1M).

[1] Federico y Margarita son nombres ficticios

- 10×10, 11×11, 12×12 (numeros de igual valor con dos digitos)
- (multiplicacion de numeros de dos digitos pero con diferente valor)
- multiplicacion de numeros de un digito con el mismo valor
- multiplicacion de numeros de un digito con diferente valor
- intercalar numeros de dos digitos con otros de un digito

Figura 1F

Otra relación que hemos comprobado es que en el 1^er^ cuadro son 2 cifras lo que multiplica, en el segundo 1 sola cifra

Figura 1M

Patrón. En general, ambos estudiantes tuvieron poca dificultad para identificar o describir un patrón de forma verbal. Margarita expresó de forma oral y escrita (Figura 2M) las siguientes regularidades: “aquí es de dos cifras y aquí es de una, pero por ejemplo, aquí siempre se está multiplicando por el mismo número y el de abajo sería un número mayor y aquí sería la diferencia de dos, la multiplicación de dos, entonces he visto que sigue eso en los tres…”. Asimismo, Federico observó que en la primera pareja de expresiones dadas se presenta un término que se multiplica por sí mismo y, en cambio, en la segunda pareja la diferencia entre cada término de la expresión es de dos unidades (Figura 2F).

12×12 ⟶ Dos dígitos y se multiplica por el mismo número

13×11 ⟹ Inferior al 13 en 2 unidades

Dos dígitos, el número es superior al de arriba en una unidad y se multiplica por un número 2 unidades menor.

Figura 2M

a parte de las anteriormente citadas similitudes también hay una concordancia en las operaciones que se son multiplicaciones por un numero igual (12×12, 4×4, 8×8) sino que en las multiplicaciones (13×11, 5×3, 10×8) la diferencia entre cada multiplicador son dos.

Figura 2F

Ambos estudiantes identificaron la siguiente regularidad en las columnas de las expresiones aritméticas dadas: la diferencia entre los términos es de una unidad. Margarita lo explica de la siguiente forma oral: "aquí es la diferencia de un número… si miras de abajo a arriba [señala en el folio] es restando, si miras de abajo a arriba [señala en el folio] es sumando, es la diferencia de un número, aquí uno menos [señala en el folio] y aquí uno más [señala en el folio], aquí resulta lo mismo de 4 a 5 es uno menos y de 3 a 4 es uno más… es un número pero en un lado es por añadidura y por el otro es por resta". Igualmente Federico, identifica y expresa oralmente que en las expresiones dadas "la diferencia es igual en línea así como en cruz, la diferencia es de un número en los dos". Ambos estudiante apoyan su explicación con las anotaciones y representaciones pictóricas que se muestran en las figuras 3M y 3F.

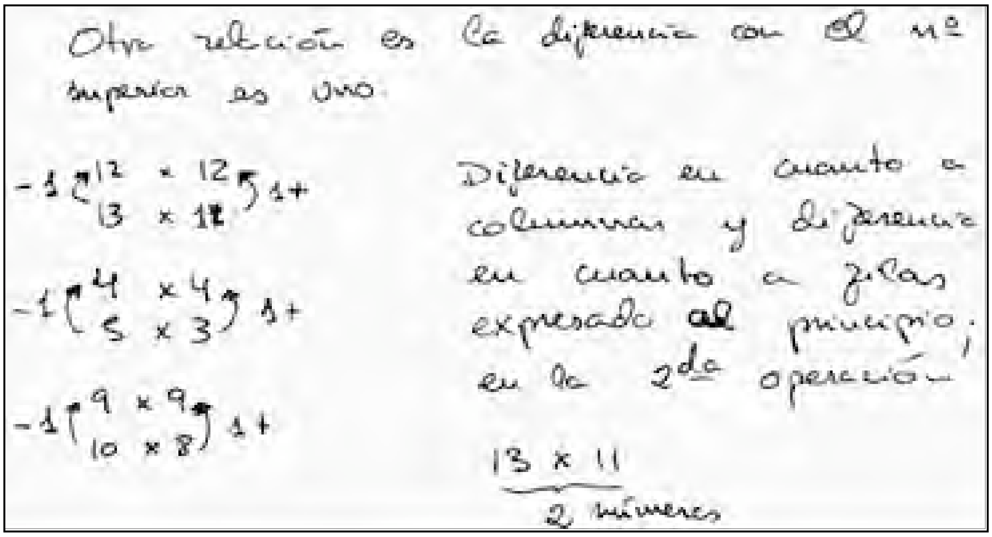

Figura 3M

Diferencias

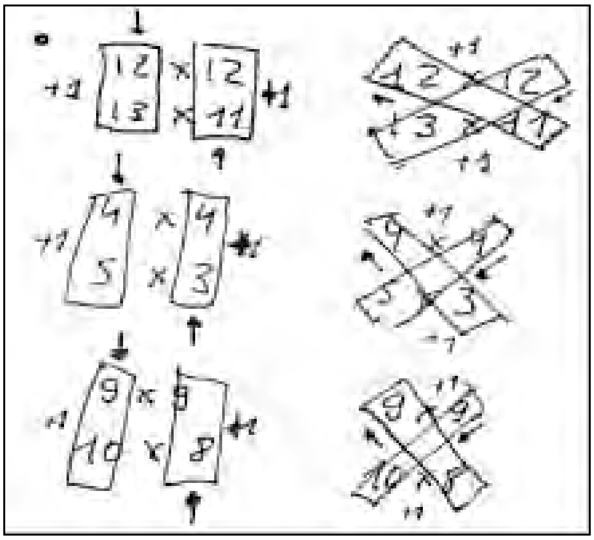

Figura 3F

Dentro de los enunciados producidos por Margarita y Federico en el desarrollo de la tarea 1, identificamos en el caso de Margarita enunciados clasificados dentro de las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como resultado y situaciones; y principios generales como estrategia o procedimiento.

Resultado. Margarita pone de manifiesto las relaciones que identificó en las expresiones numéricas a través de un caso particular: Sustituye el número 12 por la letra *n* y escribe las expresiones dadas en función de *n* (Figura 4M). En la primera entrevista la alumna no se percata de que con la primera expresión que propone habría bastado para expresar de forma general las expresiones aritméticas dadas. Más tarde, al revisar esta tarea en la segunda entrevista se percató de este hecho indicando: “sirve para cualquier número”.

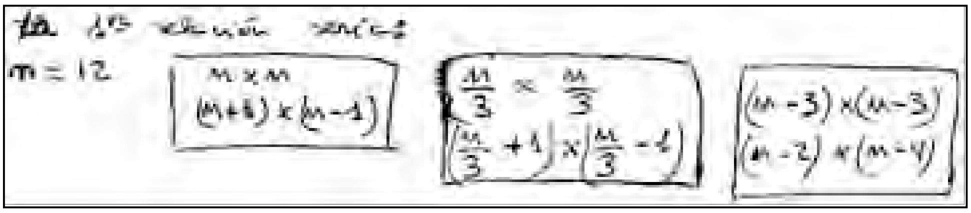

Figura 4M

Situaciones. Margarita identifica y expresa oralmente cierta semejanza entre la situación del aprendizaje de las tablas de multiplicar y las expresiones dadas: “aquí a la hora de ampliar puedes hacerlo en vez de orden decreciente en orden creciente igualmente, se supone que sí tiene que guardar una relación con el anterior se supone que el niño ya conoce, por ejemplo, toda la tabla del cuatro de multiplicar, o toda la del cinco…”.

Estrategia o procedimiento. La alumna expresa de forma oral cuál fue el procedimiento que siguió para crear expresiones aritméticas similares a las dadas: “Ahora me he dado cuenta que llevan una relación, un poquito los tres, entonces; en principio, he intentado poner números cercanos al doce y al trece y hacer multiplicaciones más o menos similares a las que dicen aquí: 14x12, 14x13; un poco cercanos a los que allí aparecen, pero después, bueno en el siguiente ejercicio, he puesto multiplicaciones de una sola cifra, también he seguido la misma tónica que en el primero, números cercanos al cuatro y al cinco, pero ahora me he dado cuenta que los tres van relacionados”.

Para resumir la información que acabamos de comentar, presentamos numéricamente en la Tabla 1 la clasificación de los enunciados de generalización de ambos alumnos en la Tarea 1.

<table>
<tr><th colspan="4">Taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas</th><th>Federico</th><th>Margarita</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Identificación o enunciado</td><td colspan="3">1. Fenómeno continuo: La identificación de una propiedad dinámica que se extiende más allá de un ejemplo específico.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Similitud: Enunciado de una similitud o igualdad.</td><td colspan="2">Propiedad común: La identificación de la propiedad común a objetos o situaciones.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Objetos o representaciones: La identificación de objetos como similares o idénticos.</td><td>Estructura</td><td>■■</td><td></td></tr>
<tr><td>Resultado</td><td></td><td>■</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situaciones: La identificación de situaciones como similares o idénticas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Principio general: Un enunciado de un fenómeno general.</td><td colspan="2">Regla: La descripción de una fórmula general o hecho.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Patrón: La identificación de un patrón general.</td><td>■■■</td><td>■■■■■■</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategia o procedimiento: La descripción de un método que se extiende más allá de un caso específico.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla global: El enunciado del significado de un objeto o idea.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Definición</td><td colspan="3">1. Clases de objetos: La definición de una clase de objetos que satisfacen todos una relación dada, patrón u otro fenómeno.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="3"></td><td>5</td><td>11</td></tr>
</table>

Tabla 1: Producción de Federico y Margarita en la Tarea 1

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En general, y resumiendo la información presentada, observamos ciertas semejanzas con respecto a la presencia de enunciados producidos por ambos alumnos en las distintas subcategorías de la taxonomía modificada. Así, en la subcategoría principios generales, en patrón, los estudiantes identificaron las siguientes regularidades: un término se multiplica por sí mismo, en la segunda pareja la diferencia entre cada término de la expresión es de dos unidades, y la operación que los relaciona es la multiplicación. Con relación a similitud de objetos o representaciones como estructura, expresaron las siguientes relaciones: el número de dígitos que componía cada término de las expresiones, el valor de los números y si los términos de las expresiones se estaban multiplicando un número por sí mismo o dos números diferentes. Además, apreciamos que algunas de las subcategorías no se aplicaron al clasificar los enunciados verbales o escritos producidos por ambos alumnos, concretamente la de fenómeno continuo, similitud en propiedad común, principios generales como regla y regla global; y clases de objetos. Esto puede ser debido: *(1)* al tipo de tarea propuesta ya que las parejas de expresiones dadas no sugieren un movimiento o cambio de una a otra, como ocurre por ejemplo en una sucesión (ej. cada vez se suman cinco más) sino que comparten una relación (estática) entre sus términos, *(2)* dificultad por parte de los estudiantes de expresar de forma general las relaciones observadas, y *(3)* el tipo de enunciados que proponen no precisa el conjunto de elementos para los que es aplicable la generalización que expresa.

En relación con las diferencias, Margarita tuvo un mayor número de enunciados en comparación con Federico (11-5). Ella, además, produjo enunciados en las subcategorías de similitud de objetos o representaciones como situaciones y resultado; y principios generales como estrategia o procedimiento. Este hecho puede ser debido a que Margarita identificó numerosas relaciones diferentes a las consideradas en el diseño de la tarea.

En general, Federico y Margarita tuvieron poca dificultad describiendo un patrón de forma verbal y en algunas situaciones hicieron predicciones basadas en las relaciones identificadas en un patrón. Sin embargo, los estudiantes en esta tarea no fueron capaces de proporcionar una descripción algebraica formal (es decir, mediante lenguaje simbólico) de las expresiones aritméticas propuestas en dicha tarea. En este sentido, observamos cierta dificultad por parte de los alumnos en expresar por medio del simbolismo algebraico las relaciones observadas. Resultados similares se han observado en Zazkis y Liljedahl (2002), donde estos autores notaron que hay un vacío significativo entre reconocer un patrón y ser capaz de expresarlo algebraicamente.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías, construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

BIBLIOGRAFÍA

Becker, J. R., Rivera, F. D. (2008). Generalization in algebra: the foundation of algebraic thinking and reasoning across the grades. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 1.

Blanton, M. L., Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: LEA.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* (Vol. 4, pp. 33-59). Reston, VA.: LEA & NCTM.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp.65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S., Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME and the 25th PME-NA joined conference*, (Vol. 4, pp.127-134). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Trujillo, P. A. (2008). Proceso de generalización que realizan futuros maestros. Trabajo final de master. Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417-424). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, R. Faragher y M. Mclean (Eds.), *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010* (*Proceedings of the 27th MERGA Annual Conference)* (Vol 2, pp.565-572). Sydney: MERGA.

Zazkis, R., Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2*(1), 93–120.