View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas

Marta Molina[1]

En el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, a menudo puede observarse cómo los alumnos se embarcan en difíciles cálculos antes de mirar la expresión con la que tiene que trabajar y prestar atención a sus particularidades, a su estructura. De este modo pierden la oportunidad de elegir el enfoque más eficaz para resolver la situación, como puede ser simplificar las operaciones a realizar antes de iniciarlas. Nos estamos refiriendo aquí en particular al cálculo de expresiones aritméticas, a la resolución de ecuaciones algebraicas y a la simplificación de expresiones algebraicas si bien este hecho también se observa en matemáticas más avanzadas como el cálculo integral (Hejny, Jirotkova, y Kratochvilova, 2006). Pareciera, en muchos casos, que el conocimiento de los alumnos es únicamente mecánico.

Siguiendo esta idea consideremos las actividades y formas de resolución que se muestran en la Figura 1. Cada una de dichas actividades forma parte de la práctica matemática habitual en las aulas de matemáticas de educación primaria y secundaria. Así mismo, el tipo de resolución mostrada también suele ser observada en los trabajos de los alumnos. Lo que estas actividades tienen en común es que posible un tipo de resolución más eficiente haciendo uso de las características particulares de las expresiones con las que se está trabajando. En la Figura 2 se presenta una resolución alternativa que describimos a continuación.

1) Resuelve la ecuación

$$\frac{15(33x+9)}{3} = 15(28x-14)$$

$$15(33x+9) = (15(28x-14))3$$
$$495x+135 = (420x-210)3$$
$$495x+135 = 1260x-630$$
$$135+630 = 1260x-495x$$
$$765 = 765x$$
$$x = \frac{765}{765}$$
$$x = 1$$

2) Factoriza $125 \cdot 48 \cdot 33$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 48 \\ \hline 1000 \\ 500 \\ \hline 6000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6000 \\ \times\ 33 \\ \hline 18000 \\ 18000 \\ \hline 198000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 198000 & 2 \\ 99000 & 2 \\ 49500 & 2 \\ 24750 & 2 \\ 12375 & 5 \\ 2475 & 5 \\ 495 & 5 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Respuesta: $2^4 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

[1] Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. SUMA 65, 7-15.

3) Calcula $324+215-214=$ $\begin{array}{r} 324 \\ +\ 215 \\ \hline 539 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 539 \\ -\ 214 \\ \hline 325 \end{array}$

Figura 1. Tres tareas y una posible forma de resolución

En el caso de la primera actividad, al observar los términos que la componen, se aprecia la repetición del número 15 como factor en ambos miembros. También se observa que los dos números que aparecen en la expresión $33x+9$ son múltiplos de 3 y, puesto que esta expresión aparece dividida por 3, es de utilidad sacar 3 factor común para simplificar. Así la ecuación dada es equivalente a $\frac{3(11x+3)}{3}=28x-14$, que a su vez es equivalente a $11x+3=28x-14$. En esta última expresión también se observan relaciones entre los términos, por ejemplo, 14 es un factor común del miembro derecho, pero en este caso esa relación no ayuda a simplificar (*hacer más simple*) la ecuación. Por tanto, para obtener la solución sólo queda agrupar las variables en un miembro, los términos independientes en otro, y "despejar equis" (ver Figura 2).

En la segunda actividad, se trata de factorizar la expresión, por tanto, descomponerla en sus factores primos. La expresión en cuestión es un producto, por lo que se puede proceder directamente a factorizar los factores que la componen: 125, 48 y 33. En el caso de 125 y 33 es probable que se conozca directamente su factorización 5^3 y $3\cdot 11$, respectivamente, como se hace en la resolución de la Figura 2. Sólo queda, por tanto, factorizar 48 ($2^4\cdot 3$), unir dichas factorizaciones y reagrupar los términos: $5^3\cdot 3\cdot 11\cdot 2^4\cdot 3=5^3\cdot 3^2\cdot 11\cdot 2^4$.

En la última actividad, atendiendo a los términos que componen la expresión se observa que los dos últimos términos son consecutivos. Puesto que la expresión indica que han de restarse, es inmediato concluir que la expresión dada es equivalente a $324+1$. De esto se deduce rápidamente, y sin mayores dificultades, su resultado.

1) Resuelve la ecuación	2) Factoriza $125\cdot 48\cdot 33$
$\frac{15(33x+9)}{3}=15(28x-14)$	$\begin{array}{ccc} 125\ \cdot & 48\ \cdot & 33 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 5^3 & 2^4\cdot 3 & 3\cdot 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r\|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$ $125\cdot 48\cdot 33=5^3\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot 11$

$\frac{\cancel{15}(33x+9)}{3} = \cancel{15}(28x-14)$ $\frac{33x+9}{3} = 28x-14$ $\frac{\cancel{3}(11x+3)}{\cancel{3}} = 28x-14$ $11x+3 = 28x-14$ $3+14 = 28x-11x$ $17 = 17x$ $\frac{\cancel{17}}{\cancel{17}} = x$ $1 = x$	3) Calcula $324+215-214=$ $324 + \underbrace{215-214}_{1} = 324+1 = 325$

Figura 2. Una resolución alternativa a las tres tareas de la figura 1.

Tanto la resolución que se presenta en la Figura 2 como la presentada previamente en la Figura 1, para cada una de las tres actividades, son matemáticamente correctas y, probablemente, cualquier docente estaría satisfecho de obtener tanto una como otra forma de resolución por parte de un alumno. Comparamos aquí ambas estrategias para centrar la atención en el papel de la estructura de las expresiones aritméticas y algebraicas.

En los ejemplos mostrados en la Figura 1 se emplea un procedimiento estándar aprendido —en este caso para la resolución de ecuaciones, la factorización y el cálculo de operaciones aritméticas respectivamente—, sin atender a las características particulares de las expresiones con las que se estaba trabajando. En estos casos se dice que se ha seguido un *enfoque procedimental.*

En cambio, cuando se presta atención a las características particulares de las expresiones, es decir, a su estructura, y ésta se utiliza para abordar la resolución de la actividad propuesta, se dice que se ha utilizado un *enfoque estructural.* Así ocurre en las resoluciones alternativas propuestas en la Figura 2.

En el trabajo con expresiones numéricas o algebraicas, tanto a nivel de primaria como de secundaria, ambos enfoques son posibles. Es una elección docente cuál de estos enfoques se promueve en una determinada actividad matemática y, en general, en la práctica habitual del aula. En el enfoque procedimental lo que hace el alumno es activar en su mente algunos procedimientos aprendidos tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. El enfoque estructural, en cambio, requiere un pensamiento más flexible; el alumno atiende a toda la expresión, la analiza para identificar su estructura y utiliza relaciones entre los elementos que la componen para construir la estrategia de resolución. En el primer caso el alumno adquiere práctica en la resolución de problemas de ese mismo tipo; con el segundo enfoque, en cambio, el alumno puede acceder a una mayor comprensión de la situación (Hejny et al., 2006, p. 290).

1. Idea de estructura en la aritmética y el álgebra

El término enfoque estructural procede obviamente de la palabra estructura. En general, en matemáticas el término estructura se asigna a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, alguna operación u operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (Castro, Rico y Romero, 1997). Por ejemplo, la estructura del conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación de suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

Este significado de estructura es el más frecuente en matemáticas pero, al considerar expresiones aritméticas y algebraicas, este vocablo también se utiliza para referir a los términos que componen la expresión, a los signos que los relacionan, al orden de los diferentes elementos y a las relaciones que existen entre ellos[1]. Así, percibir la estructura de la expresión $14+5=5+14$ consiste en identificar dos partes (cada miembro) y un signo que las relaciona (el signo igual), que cada parte consta de dos números y un signo de suma que los conecta y que, además, los números que componen el miembro derecho de la igualdad son los mismos, pero en diferente orden, que los que componen el izquierdo. Esta idea de estructura se reduce a los elementos que componen la expresión, a la forma de la expresión. En particular, éste es el significado de dicho término que se está utilizando al decir que los pares de expresiones que se muestran en la Figura 3 tienen la misma estructura.

x^2+y^2	$12+17=11+18$
$(x+7)^2+(3x+1)^2$	$51+73=50+74$

Figura 3. Dos parejas de expresiones con igual estructura.

Este significado del término estructura es el que estamos destacando en este trabajo y es del que procede la expresión enfoque estructural.

2. El enfoque estructural

Ocurre, en ocasiones, que la percepción de la estructura de una expresión tiene lugar de forma espontánea. En el primer acercamiento a una expresión o expresiones o mientras que se trabaja en ellas, ciertas características o relaciones entre sus elementos "emergen", es decir, sin haber prestado una atención intencionada éstas vienen a la mente del sujeto y "se hacen visibles". Por ejemplo, en la expresión $5+5+5+5$ puede saltar a la vista del lector que todos los términos de la suma son iguales, sin necesidad de haber realizado una búsqueda consciente de relaciones entre los elementos de dicha expresión. Ciertas características o relaciones "sobresalientes" de, o entre, expresiones matemáticas, al ser detectadas de forma espontánea, pueden favorecer un enfoque estructural en vez de un enfoque procedimental, al inducir al sujeto a considerar el modo en que las relaciones que detecta le pueden facilitar la obtención de la respuesta o aportar información de interés sobre la situación en estudio. En este sentido el diseño de las tareas que se proponen en el aula es clave para iniciar un trabajo que promueva una percepción estructural de las expresiones.

Con independencia de dichos casos, los alumnos suelen mostrar tendencia computacional en el trabajo aritmético y algebraico por lo que se hace necesario promover el hábito de pararse a observar y analizar las características particulares de la expresión o expresiones con las que se ha de trabajar, antes de iniciar ninguna manipulación. No obstante, esto no es suficiente para percibir la estructura de una expresión, sino que son, además, necesarias otras habilidades que mencionamos a continuación y que han sido agrupadas bajo el nombre de *sentido estructural* (Hoch y Dreyfus, 2006). Llevar acabo enfoques estructurales requiere de, y promueve, estas habilidades:

- Percibir las expresiones y sus partes ("subexpresiones") como entidades (como un todo), y no como procesos a realizar paso a paso. Por ejemplo, percibir la expresión $ab + ac + ae$ como suma de tres términos requiere considerar ab, ac y ae como entidades en sí mismas. De forma similar concluir que $(125+329)-(125+329)$ es cero sin realizar ningún cálculo o reconocer $2x+1$ como un factor común en la expresión $(2x+1)^2 - 3x(2x+1)$, necesita, entre otros aspectos, concebir $125+329$ y $2x+1$, respectivamente, como una entidad.
- Reconocer relaciones entre subestructuras. Por ejemplo, percibir que los tres sumandos de la expresión $ab + ac + ae$ tienen a como factor común o que la expresión $(125+329)-(125+329)$ contiene dos subexpresiones que son iguales ($125+329$).

En la práctica tienen lugar enfoques que no son puramente procedimentales ni puramente estructurales. A veces durante la realización de cierto cálculo, se aprecia alguna característica particular de la expresión con la que se está trabajando y ésta se emplea para obtener la respuesta. Así lo ponen de manifiesto las siguientes explicaciones dadas por dos alumnos de tercero de educación primaria al pedirles que indiquen si las igualdades $51+51=50+52$ y $7+15=8+15$ son verdaderas o falsas:

- "Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno, si le quitas [uno], cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos".
- "Falsa, porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño" (Aparte calcula mediante el algoritmo estándar de la suma el valor numérico de ambos miembros).

Inicialmente los alumnos procedieron a realizar los cálculos de ambos miembros de la igualdad pero en algún momento de dicho proceso se percataron de la estructura particular de dichas igualdades y la emplearon para concluir su respuesta. De forma similar, pero en el trabajo con expresiones algebraicas, Hoch y Dreyfus (2004) han observado al proponer a los alumnos ciertas ecuaciones tales como $\left(\frac{(x-1)-4x}{4(x-1)}\right) - x = 6 + \left(\frac{(x-1)-4x}{4(x-1)}\right)$, que dos terceras partes de los alumnos que emplearon enfoques estructurales (basados en la identificación de una misma expresión repetida en ambos miembros de la ecuación) realizaron previamente alguna manipulación de las expresiones antes de percibir su estructura.

Ocurre en la práctica que ambos enfoques se conjugan o se suceden, teniendo lugar el uso de pensamiento estructural en una etapa inicial, intermedia o final. Si bien ambos enfoques tienen cabida en la actividad matemática, destacamos la atención a la estructura como un elemento clave para promover un trabajo más significativo y productivo con expresiones aritméticas y algebraicas así como abordar algunas de las dificultades que los alumnos encuentran en el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra facilitando la transición entre ambas.

A través de una visión estructural de la aritmética y el álgebra, el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas puede no sólo contribuir a la fluidez en la aplicación de procedimientos estándar, que es en la actualidad un objetivo importante de la enseñanza escolar de las matemáticas, sino también al desarrollo de otros componentes de la competencia matemática como la comprensión de los conceptos, operaciones y relaciones matemáticas; pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar; y llegar a tener una inclinación habitual a ver las matemáticas con sentido (NRC, 2001).

Los alumnos desde los primeros años de su etapa escolar son capaces de apreciar y utilizar estructura en mayor medida de lo que a priori podría pensarse. A continuación describimos una experiencia realizada en un curso de tercero de Educación Primaria que corrobora este hecho. Esta experiencia también muestra que esta visión estructural contribuye a enriquecer el aprendizaje de la aritmética ya que ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y a hacer que los alumnos piensen sobre las propiedades de las operaciones, la manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a las expresiones. El objetivo al promover este enfoque estructural desde los primeros cursos de primaria es, por tanto, favorecer un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios), el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina, 2006).

3. Una experiencia en un aula de primaria

Como parte de mi tesis doctoral (Autor, 2006), realizamos una intervención en un aula de tercero de primaria de un colegio público de la provincia de Granada. Interesados en estudiar cómo los niños dan sentido a las igualdades numéricas y en promover su apreciación de la estructura de éstas, trabajamos con ellos durante seis sesiones de una hora en la resolución de igualdades abiertas y de igualdades cerradas verdaderas y falsas[2]. Queríamos promover una visión estructural de la aritmética.

a. Diseño de las igualdades

Propusimos a los alumnos igualdades abiertas (es decir, incompletas, con un recuadro a completar como en $8+4=\square+5$) e igualdades cerradas (es decir, completas tal como $13+11=12+12$) verdaderas y falsas, en actividades escritas individuales, discusiones grupales y entrevistas individuales. Las igualdades incluían números enteros positivos de hasta 3 dígitos y operaciones de suma y resta. Tuvimos en cuenta propiedades aritméticas en su diseño tales como la propiedad conmutativa de la suma (ej. $10+4=4+10$), la relación complementaria que existe entre la suma y la resta (ej. $21-14+14=26$; $100+94-94=100$) y relaciones de composición y descomposición entre números (ej. $78-16=78-10-6$; $7+7+9=14+9$). De este modo no sólo era posible que los alumnos resolvieran las igualdades a partir del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, sino también haciendo uso de propiedades aritméticas y relaciones entre los términos que las componen.

En las igualdades abiertas la tarea de los alumnos era completarlas y explicar cómo las habían resuelto. En las igualdades verdaderas y falsas[3] debían de justificar si eran verdaderas o falsas, y en caso de ser falsas, proponer una forma de corregirlas. En las discusiones animamos a los alumnos a que explicaran cómo habían resuelto las igualdades, a que propusieran estrategias diferentes a las ya expresadas por sus compañeros en esa misma igualdad y a que intentaran resolverlas sin tener que hacer todos los cálculos/operaciones.

b. Sesiones de trabajo en el aula

Inicialmente la mayoría de los alumnos abordaron las igualdades de forma procedimental, calculando los valores numéricos de ambos miembros. Por ejemplo, Marcos dio como respuesta siete a la igualdad $8+4=\square+5$ y explicó "Porque ocho más cuatro son doce y cinco más siete son doce”. De forma semejante en la igualdad 12 + 7 = 7 + $\square$ Belén explicó su respuesta 11 como sigue: “He sumado doce más siete, y el resultado éste te tiene que dar lo mismo que esto (señalando al miembro derecho de la igualdad)”.

En la primera y segunda sesión algunos alumnos mostraron la apreciación de relaciones entre los términos de algunas igualdades. Así, durante la discusión, de la igualdad $12+7=7+\square$, algunos alumnos expresaron: “Porque es el mismo número”, “Lo han puesto al revés” y “Han cambiado los números de orden”. Pero fue a partir de la tercera sesión cuando las intervenciones de los alumnos que señalaban la apreciación de la estructura de las igualdades fueron más numerosas. En la Tabla 1 se muestran algunas de las respuestas de los alumnos que lo ponen de manifiesto.

Igualdad	Explicación de algún alumno
72 = 56 – 14	“Que setenta y dos no es igual a cincuenta y seis menos catorce porque cincuenta y seis menos catorce es un número más chico que setenta y dos. [Ah! Esto va a ser un número más chico que setenta y dos. ¿Cómo lo sabes?] Porque cincuenta y seis es más chico que setenta y dos y si le restamos catorce, me da un número más chico que cincuenta y seis.”
$122+35-35=122$	“Verdadera, porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo”. (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)
$11-6=10-5$	“Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual”
231 + 48 = 231 + 40 + 8	Es verdadera, porque sale lo mismo. A cuarenta y ocho le pongo un ocho…, a cuarenta le pongo un ocho y me sale lo mismo.
75 + 23 = 23 + 75	“Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo”
15 – 6 = 6 – 15	“Que es verdadera….Porque sólo lo que han hecho es cambiar el orden”

Tabla 1. Ejemplos de explicaciones de los alumnos que ponen de manifiesto el uso de estructura de las expresiones

En total, a lo largo de las seis sesiones, un tercio de las justificaciones de los alumnos estuvieron basadas en la apreciación de la estructura de las expresiones. Los alumnos hicieron referencia a diversos tipos de relaciones apreciadas en las sentencias, tales como que un mismo número estaba siendo sumado y restado, o que unos términos de la igualdad podían ser obtenidos a partir de otros sumando o restando alguna cantidad, y a cierta mismidad entre partes de las igualdades. A partir de dichas relaciones argumentaron la validez de las igualdades.

Algunas explicaciones, tales como la recogida en la Tabla 1 para la igualdad $75+23=23+75$, fueron algo imprecisas al referir a cierta mismidad y no dejan claro hasta qué punto los alumnos habían reconocido la estructura de la expresión. Estas explicaciones requieren de la solicitud del docente de mayor elaboración por parte del alumno.

También fueron frecuentes los casos (un 50% de las veces) en los que los alumnos realizaron el cálculo de ambos miembros de la igualdad para concluir su respuesta. En alguna ocasiones (un 6 % de las veces) los alumnos requirieron hacer algunos cálculos en la expresión antes de apreciar cierta relación entre sus términos que les permitió cambiar de estrategia y emplear un enfoque estructural.

Todos salvo dos o tres alumnos utilizaron en algún momento un enfoque estructural. El enfoque utilizado por cada alumno para resolver las igualdades varió de una sesión a otra e incluso de una igualdad a otra dentro de la misma sesión de trabajo en el aula. Varios factores influyeron en la percepción de los alumnos de las igualdades y en el proceso de resolución seguido. Pudimos observar que las igualdades relacionadas con la propiedad del cero como elemento neutro de la suma y de la resta por la derecha o con la relación de un número y su opuesto fueron eficaces para interrumpir la tendencia procedimental de los alumnos. La repetición de términos en ambos o uno de los miembros también tuvieron un efecto destacado. Las igualdades basadas en la propiedad conmutativa fueron resueltas más frecuentemente mediante enfoques estructurales que realizando el cálculo de ambos miembros. En las igualdades basadas en la relación inversa de la suma y la resta o en relaciones de descomposición y composición de números, ambos enfoques fueron igualmente frecuentes.

Las igualdades que no incluían repetición de términos, tales como las basadas en la relación de compensación o en el tamaño relativo de los términos, fueron resueltas más frecuentemente a partir del cálculo del valor numérico de ambos miembros.

Observamos, también, que para algunos alumnos el encontrar números de gran magnitud en las igualdades les provocó resistencia a calcular y les indujo a buscar relaciones entre los términos de la igualdad. En cambio, en el caso de los alumnos con menor dominio del cálculo, los números de una sola cifra facilitaron su apreciación de relaciones. La forma de las igualdades también tuvo influencia para algunos alumnos siendo, en su caso, más frecuente el uso de enfoques estructurales cuando las igualdades que contenían operaciones en ambos miembros.

Estas observaciones ponen de manifiesto la importancia de las expresiones propuestas sean ricas en relaciones y variadas en estructura ya que el modo en que los alumnos las abordaron estuvo influenciado por las características de la igualdad: estructura, tamaño de los números y relaciones utilizadas en el diseño. Además la frecuencia con la que cada alumno utilizó un enfoque estructural estuvo influenciada por su conocimiento y experiencia aritmética previa. Esto determina, para cada alumno, la demanda cognitiva que supone las tareas propuestas, su forma de concebir los números y dar significado al signo igual, su mayor o menor tendencia al cálculo y su mayor o menor conocimiento (implícito o explicito) de las propiedades aritméticas..

También fue esencial crear un ambiente en el aula en el que las estrategias que hacían uso de la estructura de las expresiones eran valoradas. Para muchos alumnos escuchar este tipo de estrategias explicadas por algunos de sus compañeros, fue clave para que consideraran formas diferentes de resolver las igualdades. En ningún momento propusimos a los alumnos estrategias particulares a utilizar, sino que se intentó alterar el modo en que los alumnos atendían a las expresiones solicitando estrategias que no requirieran realizar todos los cálculos. Nuestra intención era inducir a los alumnos a "mirar" las igualdades de otra manera, a que atendieran a su estructura e intentaran usar las relaciones observadas para argumentar su respuesta sobre la veracidad o falsedad de la igualdad.

Sin duda alguna seis sesiones no son suficientes para producir un cambio definitivo en la percepción de estructura por parte de los alumnos y en el desarrollo del sentido estructural. Se requiere de un trabajo continuado, preferiblemente en diferentes contextos. En el siguiente apartado se proponen algunos tipos de actividades a desarrollar en el aula con esta intención.

4. Sugerencias para promover un enfoque estructural en el aula de matemáticas.

A través del mismo método de trabajo seguido en la experiencia descrita en el apartado previo, esto es, discusiones con todo el grupo y actividades escritas sobre la veracidad y falsedad de expresiones o sobre diferentes modos de abordar expresiones, se pueden trabajar en el aula otros aspectos importantes sobre la estructura de las expresiones como el orden de las operaciones, el uso de paréntesis, el significado del signo igual o algunas de las dificultades concretas que suelen encontrar en la interpretación y manipulación de expresiones. Así por ejemplo las expresiones $5+6\cdot 10$ versus $11\cdot 10$ o sus análogas $5+6x=60$ versus $11x=60$ permiten tratar en el aula el orden de las operaciones. Con la misma intención pueden compararse las expresiones $17-3\cdot 4$ versus $14\cdot 4$ o sus análogas $17-3x=58$ versus $14x=58$. Otras expresiones tales como $926-167-167$ versus $926-(167+167)$ versus $926-167+167$ versus $926+167-167$, o sus análogas en simbolismo algebraico, hacen referencia al papel de los paréntesis en las expresiones. Comparar las expresiones 27-5+3 versus 27-8, o sus análogas algebraicas $x-5+3=31$ versus $x-8=31$, o indagar en las diferentes formas de operar/simplificar las expresiones $237+89-89+267-92+92$ y $15x+7x-7x+9x-5x+5x$, permite tratar en el aula la vinculación de cada número con el símbolo que le precede que suele ser una fuente de dificultades tanto en el contexto aritmético como en el algebraico (Linchevski y Livneh, 1999).

Una característica a destacar de esta actividad es que se puede adaptar a todos los niveles educativos variando el tipo de expresiones que se consideran. A su vez, a través de la inclusión de variedad de expresiones y al enfatizar la búsqueda de variadas formas de abordar una misma expresión se permite la participación de alumnos con diferentes habilidades.

Es importante destacar el especial papel que tiene aquí los números. Al utilizarse igualdades basadas en propiedades aritméticas, hay una generalidad que se percibe en cada grupo de igualdades: la propiedad conmutativa, la relación complementaria de la suma y la resta,… Los números están actuando aquí "casi como variables"[4]. Sin el uso de símbolos, se dirige la atención de los alumnos a la estructura de las expresiones. Un aspecto importante a distinguir es qué varía y qué permanece constante. Si la atención de los alumnos está únicamente en el cálculo o en los detalles parecerá para ellos que todo varía de una expresión a otra y que no hay nada en común. La atención a la estructura es lo que permite identificar los elementos que permanecen constantes.

A continuación indicamos otras propuestas, extraídas de los textos Watson y Mason (2005) y Zaskis y Campbell (2006), en las que se hace uso de los ejemplos para promover la apreciación de estructura por alumnos de Educación Primaria o Secundaria.

1. Proponer un ejemplo con ciertas restricciones.

Actividad 1. Propón una ecuación de segundo grado que sólo tenga una solución.

Según las restricciones que se impongan se condicionará qué aspectos de la estructura de las ecuaciones se pretende que se trabajen. Podemos limitar el número de soluciones, los coeficientes de las variables, o el tipo de representación gráfica de la función que define la ecuación… Todas estas restricciones obligan al alumno a centrar su atención en la estructura de la ecuación que debe construir.

2. "Y otro, y otro"

Esta es una extensión de la actividad anterior. Una vez que los alumnos han construido algún ejemplo que cumpla las restricciones indicadas, que propongan otro, y otro más,…. De este modo, si el alumno ha obtenido el primer ejemplo por ensayo y error se le fuerza a atender a los elementos de la estructura relacionados con los requisitos impuestos.

3. Hazlo más difícil

Esta es otra extensión de la actividad "Propón un ejemplo con restricciones". En este caso, tras haber propuesto uno o varios ejemplos que cumplan las restricciones dadas, se pide al alumno que proponga otro más difícil, y luego otro más difícil, y otro más aún… (el significado de difícil podemos dejarlo a interpretación del alumno o podemos precisarlo nosotros, por ejemplo, pidiendo que tenga números más grandes, o mayor número de operaciones, expresiones algebraicas más complejas, que no se vaya a parecer al que escriban sus compañeros,….). La actividad se hace accesible a todos los alumnos porque cada uno puede partir de su ejemplo e ir complicándolo progresivamente a su gusto. Al pedirle que hagan su ejemplo cada vez más complejo se podrá observar las posibilidades que ponen juego (e.g. tipos de números: naturales, racionales,…) a la hora de trabajar con las expresiones algebraicas/aritméticas en cuestión.

4. Deshacer

Actividad 4a. Sabiendo que la expresión que ha resultado al simplificar es $3x + 1$. ¿Cuál puede ser la expresión de partida?

Actividad 4b. Sabiendo que el resultado de una operación ha sido 32 ¿Cuál puede ser la expresión de partida?

En este caso, al contrario de lo que es habitual se le da al alumno el resultado ("la solución") de un proceso de cálculo o de simplificación y se pretende que proponga cual podía ser la expresión inicial. Esta actividad se puede enriquecer imponiendo unas características determinadas a la expresión de partida. Por ejemplo, un determinado número de términos, unas determinadas operaciones,… Las dos actividades previas, "Y otro, y otro" y "Hazlo más difícil" también pueden presentarse como extensiones de este tipo de actividad.

5. Añade restricciones secuencialmente

Actividad 5a. Escribe lo siguiente en el orden que se indica:
a) un número natural que contenga más de dos factores propios
b) un número que contenga más de dos factores propios, dos de ellos iguales entre si
c) un número que contenga exactamente 4 factores propios, dos de ellos iguales entre si

Ahora vuelve y revisa tus respuestas; cada uno de los ejemplos propuesto en cada apartado no debe cumplir la condición que se indica en el apartado que le sigue.

Actividad 5b. Escribe lo siguiente en el orden que se indica:
a) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,
b) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$*, tales que los coeficientes de la incógnita sean números pares,*
c) el producto de dos expresiones algebraicas, con una sola incógnita, a las que puedas aplicar la igualdad notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$*, tales que los coeficientes de la incógnita sean números pares y los términos independiente sean fracciones impropias.*

Ahora vuelve y revisa tus respuestas; cada uno de los ejemplos propuesto en cada apartado no debe cumplir la condición que se indica en el apartado que le sigue.

Esta actividad es semejante a las anteriores pero, en este caso, el último requisito que impone volver hacia atrás fuerza a reflexionar sobre el modo en que cada una de las restricciones influye en el tipo de expresiones que se pueden proponer como ejemplos.

6. Caracteriza todos los objetos que satisfacen una serie de restricciones

Esta actividad busca la generalización de ciertas relaciones a partir de la consideración de varios casos particulares. La cuestión a plantear a los alumnos es ¿qué hay que hacer para construir más ejemplos que cumplan las mismas condiciones? ¿Qué método habéis usado? ¿Qué podemos decir que todos estos ejemplos cumplan/tengan en común?

Esta actividad es conveniente proponerla una vez los alumnos han generado bastantes ejemplos que cumplan unas restricciones dadas, puesto que se espera la verbalización de los elementos de la estructura de dichas expresiones que han estado utilizando.

Las tareas descritas basadas en el uso de ejemplos, poseen ciertas características que les hace significativas en la enseñanza. En primer lugar, resultan muy motivadoras para los alumnos. Durante su realización se puede animar a que sean creativos sugiriéndoles que intenten que sus ejemplos no coincidan con los de ningún otro compañero. Además, son accesibles a alumnos de todas las edades, al variarse los requisitos de los ejemplos que se requieren al alumno, así como a grupos de alumnos de diversas habilidades pues cada uno de ellos construirá sus propios ejemplos.

Aunque aquí se han presentado estas actividades por su potencial para promover el desarrollo de sentido estructural y la percepción de estructura por parte de los alumnos, el mismo esquema puede adaptarse a otros contenidos y dar lugar a actividades de geometría, estadística, medida o relacionadas con otros conceptos aritméticos o algebraicos. En uno u otro contexto, el acto de crear ejemplos ayuda a la construcción y/o extensión de significados; la reflexión en la variedad de ejemplos posibles afecta a la cognición de los alumnos; y los ejemplos producidos por ellos permiten al docente acceder a sus conocimientos y al modo en que dan sentido y perciben diversos conceptos o representaciones matemáticas (Watson y Mason, 2005).

5. Bibliografía

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. y Molina, M (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática, 19*(2), 67-94.

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Fujii, T., y Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 258-264). Melbourne: University of Melbourne.

Hejny, M., Jirotkova, D. y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME 30.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, (Vol. 3; pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (Vol. 3; pp. 305-312). Praga: PME.

Kieran, C. (1991). A procedural–structural perspective on Algebra Research. En F. Furinghetti (Ed), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2; pp. 245-253). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Kirsher, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structural Sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF

Pierce, R., y Stacey, K. (2001). A Framework for Algebraic Insight. In J. Bobis, B. Perry, M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol 2; pp. 418-425). Sydney: MERGA.

Watson, A**.** **y** Mason, J**.** (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples. Studies in Mathematical Thinking and Learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zaskis, R. y Campbell, S.R. (Eds.) (2006). *Number theory in mathematics education: perspectives and prospects.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Notas:

[1] A esta estructura se le denomina también estructura sintáctica (Kirshner, 1989) o superficial (Kieran, 1991) de una expresión.

[2] Por definición las igualdades han de ser proposiciones verdaderas, no obstante en este trabajo somos menos restrictivos con el término para evitar la introducción de otro término y así facilitar la comprensión del documento.

[3]En trabajos previos hemos observado que las igualdades abiertas son útiles para revelar y desafiar la comprensión de los alumnos del signo igual, mientras que las igualdades cerradas verdaderas o falsas son de mayor utilidad cuando se quiere promover que los alumnos atiendan a la estructura de la igualdad pues ayudan a desafiar su tendencia al cálculo. Cuando los alumnos encuentran un recuadro que completar, muestran mayor tendencia a realizar los cálculos (Carpenter et al., 2003; Castro y Molina, 2007).

[4] Quasivariables en términos de Fujii y Stephens (2001).