

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88

## **UN ACERCAMIENTO A LA INVESTIGACIÓN DE DISEÑO A TRAVÉS DE LOS EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA**

Marta Molina, Encarnación Castro, Jose Luis Molina y Enrique Castro

*La Investigación de Diseño (Design Research) es un paradigma metodológico relativamente joven que está siendo de gran utilidad en el campo de la Didáctica de las Ciencias. En este trabajo aportamos una descripción general de dicho paradigma centrándonos en más detalle en la metodología concreta de los experimentos de enseñanza. Presentamos y ejemplificamos las principales características de este tipo de estudios, enriqueciendo la descripción aportada por la literatura con las conclusiones extraídas en nuestra experiencia en su puesta en práctica. Nuestro objetivo es contribuir a su divulgación y desarrollo, así como promover la reflexión y discusión sobre esta metodología.*

Palabras clave: Experimentos de enseñanza; Investigación de diseño; Metodología cualitativa; Didáctica de las Matemáticas; Didáctica de las Ciencias.

### **An Approach of Design Research through Teaching Experiments**

*Design Research is a relatively young methodological paradigm which is being useful in Science Education research. In this paper we provide a general description of this paradigm and focus on more detail in the specific methodology of teaching experiments. We present and exemplify the main characteristics of this type of studies, enriching the description provided by the literature with what we learned in its application. Our objective is to contribute to its divulgation and development, as well as to promote reflection and discussion on this methodology.*

Keywords: Teaching experiments; Design research; Qualitative methodology; Mathematics education; Science education.

La aspiración, tanto de docentes como de investigadores, por conocer qué sucede en el aula cuando los alumnos adquieren conocimiento, ha conducido a buscar metodologías que sean sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje y, de este modo, aumenten la relevancia de la investigación para la práctica. Esta situación ha dado lugar al surgimiento de metodologías de investigación alternativas a las existentes, las cuales proceden, en algunos casos, de la sistematización de prácticas que se han venido realizando sin la cobertura de un paradigma concreto. En este contexto surge la investigación de diseño que persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico.

Su carácter emergente así como su destacado potencial para la investigación en el campo de la Didáctica de las Ciencias (Kelly, Lesh y Baek, 2008)<sup>1</sup> motiva nuestro interés por profundizar en la naturaleza y características de este paradigma. Comenzamos el artículo describiendo en qué consiste la investigación de diseño, para centrarnos con más detalle en los experimentos de enseñanza, que son los estudios más frecuentes dentro de dicho paradigma. En relación con estos estudios recogemos sus principales características y, a partir de la experiencia de la puesta en práctica de esta metodología, identificamos las acciones a realizar en cada fase del experimento. Posteriormente, con la intención de complementar la descripción teórica previa, describimos un experimento de enseñanza que hemos realizado en el área de Didáctica de la Matemática.

## INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

Por *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño* se designa a un paradigma de investigación, de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollada dentro de las “*Ciencias del aprendizaje*” (Learning Sciences) y se nutre de un amplio campo multidisciplinar que incluye la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia, así como las didácticas específicas, entre otros (Confrey, 2006; Sawyer, 2006). Esta metodología tiene como objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación. Todo ello la convierte en una metodología potente en la investigación del aprendizaje y la enseñanza.

En palabras de Confrey (2006) se persigue documentar “*qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en las tareas, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de la clase*” (p.2).

Esta metodología se caracteriza por la interdependencia existente entre el diseño instruccional y la investigación. El diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación y, a su vez, tanto los análisis continuados que se van realizando como el análisis retrospectivo de la misma, informan sobre el diseño permitiendo su mejora. Se combina el carácter abierto del diseño con las restricciones auto-impuestas de la investigación (Cobb y Gravemeijer, 2008).

Más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño funciona y sugerir formas en las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias. Se incluye y refleja un compromiso para entender las relaciones existentes entre teoría educativa, práctica e instrumentos (ya sean recursos didácticos o herramientas conceptuales). Esto es posible porque al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos mediante los cuales éste se sustenta y se organiza (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb y Gravemeijer, 2008). Este tipo de investigación tiene potencial para hacer progresar las teorías del

---

<sup>1</sup> Una forma de investigación de diseño que ha sido activamente utilizada en Europa es denominada *developmental research* (investigación de desarrollo) (Kelly, 2004), no obstante en la actualidad se ha impuesto el término *design research* (investigación de diseño) (Cobb y Gravemeijer, 2008).

aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas y conduce a conocimiento empíricamente fundamentado, útil en la toma de decisiones instructivas dirigidas a promover y mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Así mismo, aporta información sobre el diseño instruccional, que sirve de guía para otros diseños (Cobb et al, 2003; DBRC, 2003; Kelly, Baek, Lesh y Bannan-Ritland, 2008).

## CARACTERÍSTICAS

Los experimentos de diseño son complejos, multivariables, multiniveles, intervencionistas, iterativos, orientados por la teoría y hacia la práctica y generadores de modelos teóricos (Cobb et al., 2003; Shavelson, Phillips, Towne y Feuer, 2003), como a continuación se justifica (ver figura 1).

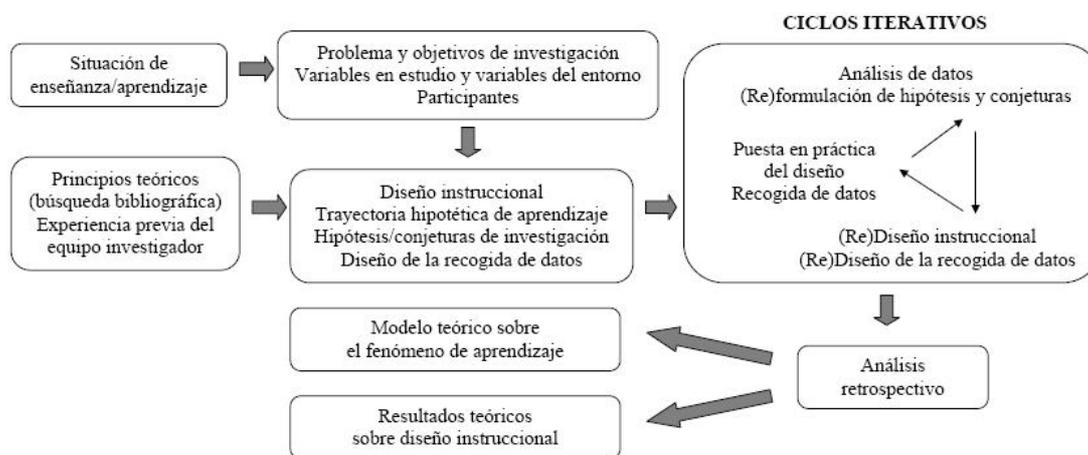


Figura 1. Estructura general de una investigación de diseño

- Se centran en la caracterización de una situación de aprendizaje en toda su complejidad, la mayor parte de la cual no es conocida a priori. Esta complejidad se traduce en la implicación de múltiples variables muchas de las cuales no pueden ser controladas, siendo necesario precisar cuáles de ellas serán objeto de estudio y cuáles se asumen como condiciones del entorno (Barab y Squire, 2004; Cobb et al., 2003). Ocurren en contextos de la vida real donde habitualmente se produce algún tipo de aprendizaje. Por lo tanto, el tipo de situaciones que comprenden son muy variadas: un equipo de investigadores trabajando con un pequeño grupo de alumnos, un grupo de investigadores trabajando en un aula en colaboración con un docente, un grupo de investigadores y formadores de profesores y maestros en activo promoviendo conjuntamente el desarrollo de una comunidad profesional, ... (Barab y Squire, 2004; Cobb et al., 2003). Todo ello exige de la participación de diferentes tipos de agentes que aportan variados grados y tipos de experiencia; entre ellos la persona que actúa como docente, la cual ha de estar completamente implicada en el estudio (Barab y Squire, 2004). Esta diversidad de participantes enriquece la elaboración y análisis del diseño así como la recogida e interpretación de los datos, e incrementa la calidad del proceso de investigación (Steffe y Thompson, 2000).

La multiplicidad de contextos en los que este tipo de estudios puede tener lugar junto con el tipo de personas involucradas, son factores que ocasiona la existencia de muy diversos tipos de experimentos de diseño. Entre ellos destacamos los experimentos de enseñanza los cuales describimos más adelante. Otros ejemplos

de diferente naturaleza son descritos por Collins, Joseph y Bielaczyc (2004) y Kelly et al. (2008) en los que sucesivas aplicaciones y elaboraciones del diseño son realizadas en contextos diferentes o incluso en niveles diferentes desde la visión del diseño curricular (aula, centro, sistema educativo, formación de profesores). Así mismo, el foco de atención de la investigación puede ser variado: la evolución de las interacciones entre los alumnos en un aula, el desarrollo del aprendizaje de un concepto, el desarrollo de un grupo de docentes, etc. (Kelly y Lesh, 2000).

- Persiguen el desarrollo de modelos teóricos empíricamente fundamentados, relativos a un dominio de aprendizaje específico (en este sentido dichos modelos han sido calificados como humildes). Este tipo de estudios no proveen de grandes teorías de aprendizaje sino que tienen un alcance teórico intermedio. No obstante, al estar basados en hechos empíricos son esenciales para la mejora de la educación, entendida como un proceso generativo a largo plazo (Cobb et al., 2003). Se destaca el potencial de este tipo de estudios para el desarrollo de constructos teóricos de utilidad para detectar orden, regularidades y patrones en los complejos contextos en los que se desarrollan (diSessa y Cobb, 2004).

En algunos de estos estudios el desarrollo del modelo teórico es paralelo al diseño de un producto, por ejemplo un conjunto de tareas, un currículo o un software para la enseñanza de un contenido específico. En esos casos, el producto será un resultado más de la investigación (Hjalmarson y Lesh, 2008).

- El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño (Collins et al., 2004). Los investigadores que emplean esta metodología hacen, testan, y refinan conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje en estudio y los medios que lo sustentan. Estas conjeturas se basan en las evidencias que van obteniendo y en fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes de la literatura. Ambas fuentes actúan de manera entrelazada. Los constructos teóricos son utilizados para el diseño así como para interpretar los datos recogidos; recíprocamente, estos constructos son modificados en su puesta en práctica pudiéndose establecer la necesidad de elaborar nuevos constructos. Por tanto, no consiste en la confirmación de unos constructos teóricos previamente construidos, sino en la acomodación del modelo a la realidad observada. Existen dos propósitos en permanente oposición. Por una parte, se persigue averiguar si el modelo teórico permanece viable a la vista de los datos obtenidos y, por otra, los investigadores están dispuestos en todo momento a modificar el modelo ante observaciones inesperadas (Confrey, 2006; Steffe y Thompson, 2000).

Además de teorías de aprendizajes específicas a un dominio, el análisis final permitirá extraer información sobre el diseño instruccional que sirva de guía para otros diseños (Bannan-Ritland y Baek, 2008).

- Dada la complejidad de las situaciones de aprendizaje, es necesario recoger extensos registros para capturar todo el proceso: lo que los alumnos, los docentes y los investigadores aprenden a lo largo del desarrollo del experimento, así como el estado del alumnado al final de éste (DBRC, 2003). Así mismo, es necesario tomar nota de las decisiones tomadas de manera justificada con el fin de dar una descripción detallada de la evolución de la investigación así como de evaluarla y garantizar su calidad (Cobb y Gravemeijer, 2008). La exhaustividad de la recogida de datos puede permitir analizar de forma retrospectiva el papel de ciertas variables que inicialmente

no fueron consideradas pero posteriormente se erijan como relevantes para el fenómeno en estudio. Los investigadores recogerán muchos más datos de los que podrán analizar y emplear, siendo necesario, a posteriori, distinguir la información relevante de la irrelevante (Hjalmarson y Lesh, 2008).

Los métodos empleados para la recogida de datos serán refinados y desarrollados conforme la investigación avanza, buscando adaptarse al contexto de la situación de enseñanza/aprendizaje considerada e ir agregando información de diferentes fuentes (Hjalmarson y Lesh, 2008).

- Como consecuencia de su carácter cíclico, estos estudios implican dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan durante los diferentes ciclos y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que da respuesta el primero de estos análisis son típicamente de carácter práctico y están directamente relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. En cambio, el análisis retrospectivo persigue contribuir al desarrollo de un modelo teórico de ese proceso de aprendizaje (Cobb, 2000).

En un primer acercamiento a este paradigma se le identifican semejanzas con la Investigación-Acción, entre ellas, su carácter cíclico que conduce a la retroalimentación de la teoría y la práctica, su desarrollo en contextos naturales, y su interés por comprender o mejorar la realidad educativa. No obstante, existen importantes diferencias entre ambas metodologías. La Investigación-Acción surge del paradigma crítico y como tal persigue el desarrollo de las personas involucradas. Dichas personas son agentes naturales de la situación considerada y se constituyen como grupo de investigadores para abordar la mejora o el estudio (para su comprensión) de una situación real en la que se encuentran inmersos (Elliot, 1990). En cambio, en los estudios de diseño el objetivo es el desarrollo de una teoría, no de las personas intervinientes en el mismo, aunque sin duda éstas aprenderán en el transcurso del estudio. Así mismo los investigadores no han de ser necesariamente los agentes naturales de la situación en estudio ni han de abordar una problemática existente.

## FORTALEZAS Y DEBILIDADES

Una de las principales fortalezas que se le reconocen a los estudios de diseño es que eliminan el abismo existente entre la práctica educativa y los análisis teóricos, ya que proveen de informes situados sobre el aprendizaje de los alumnos, relacionando directamente el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido (Kelly et al., 2008). Otros aspectos destacados, relativos a algunos de estos estudios, son el hecho de que testan teorías en la práctica, trabajan con los docentes en la construcción del conocimiento, reconocen los límites de la teoría, capturan las especificidades de la práctica y las ventajas potenciales de adaptar la teoría a su contexto de forma iterativa y refinadora, y abordan los problemas cotidianos del aula, de los centros y de las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, adaptando la enseñanza a estas condiciones (Shavelson et al., 2003).

Los investigadores del DBRC (2003) identifican cuatro áreas en las que consideran que esta metodología puede aportar mayores beneficios: exploración de posibilidades

para ambientes noveles de enseñanza y aprendizaje, desarrollo de teorías contextualizadas sobre enseñanza y aprendizaje, construcción de conocimiento acumulativo de diseño, y desarrollo de la capacidad humana para la innovación. Destaca el carácter de este tipo de estudios como promotor de la identificación y crecimiento de nuevas ideas y constructos. Los estudios de diseño, en tanto que son generadores de hipótesis y de marcos o estructuras organizadoras, contribuyen a la formulación de modelos, más que a la estimación o validación de éstos, siendo, de este modo, de utilidad para la generación de buenas cuestiones a abordar mediante otro tipo de metodologías. Kelly (2004) señala, además, la capacidad de estos estudios para servir como incubadores de nuevas técnicas de investigación.

Entre las debilidades que se reconocen, en general, a esta metodología, destacan las dificultades que emergen desde la complejidad de las situaciones del mundo real (muchas variables no están o no pueden ser controladas), los problemas de coordinación en la recogida de datos derivados de la participación de varios investigadores, la dificultad del manejo y análisis de la gran cantidad de datos que resultan, la complejidad de la comparación entre diseños y el problema de delimitar el origen del conocimiento que los investigadores adquieren a lo largo del proceso de investigación, debido al diálogo continuo que se produce entre la teoría y la práctica (Collins et al., 2004; Dede, 2004). Por su parte Kelly (2004) insiste en la necesidad de especificar la “*gramática argumentativa*” de estos estudios, es decir, la lógica que guía el uso de los métodos y que sustenta el razonamiento sobre los datos, para que sirva de garantía de las argumentaciones que se obtienen, puesto que las argumentaciones y los resultados del estudio suelen derivar de un bajo porcentaje de los datos recogidos.

## EVALUACIÓN DE LA CALIDAD

La evaluación de los estudios de diseño se articula a través de los siguientes criterios: fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización, y utilidad (Cobb, Stephan, McClain, y Gravemeijer, 2001; Cobb y Gravemeijer; 2008; Confrey, 2006).

La *fiabilidad* o grado en que las inferencias y afirmaciones que resultan son razonables y justificables, se mide en estos casos a partir del grado en que: a) el análisis ha sido sistemático y ha permitido la refutación de conjeturas; b) los criterios utilizados para las argumentaciones son explícitos permitiendo a otros investigadores monitorizar el análisis; c) las argumentaciones y afirmaciones finales pueden ser justificadas siguiendo las sucesivas fases del análisis, para lo cual es necesario que se aporte una detallada descripción de cada una de estas fases y que se fundamenten las inferencias realizadas; y d) el análisis ha sido criticado por otros investigadores, no todos familiares con el contexto en el que se recogieron los datos.

La *replicabilidad* no tiene cabida en el sentido estricto del término; consiste en los aspectos del proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones. Realizando estudios posteriores que utilicen el modelo obtenido como material conceptual a ser reorganizado, el modelo elaborado será sustituido por otro más avanzado<sup>2</sup>. Así, se comprueban los resultados del primer estudio y se desarrolla el modelo de modo que es aplicable a un mayor número de contextos, aumentando, por tanto, su *capacidad de generalización*. No se puede pedir

---

<sup>2</sup> Esta sucesión de estudios de diseño centrados en un mismo fenómeno de aprendizaje da lugar a macro-ciclos de diseño (ver Cobb, 2008).

que los resultados sean generalizables en el sentido estricto del término; recordemos que la intención no es obtener leyes universales. La capacidad de generalización en este tipo de trabajos no está condicionada por la representatividad de la muestra, está íntimamente relacionada con la replicabilidad e implica que otros serán capaces de usar los productos que deriven de él para promover aprendizaje en otros contextos.

En cuanto a la *utilidad*, los resultados obtenidos deben de dejar claro lo que implican para la enseñanza. El tipo de justificación aportada ofrece a los docentes la posibilidad de adaptar, comprobar y modificar las secuencias de enseñanza en sus aulas.

## EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA

Los experimentos de enseñanza se enmarcan dentro del paradigma de la investigación de diseño, siendo el tipo de estudios de diseño más frecuentes (Cobb y Gravemeijer, 2008). De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). La duración del experimento puede ser variable, (ej. horas, uno o varios años) y la “atmósfera” a observar pueden ser pequeñas habitaciones-laboratorio para entrevistas, clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más amplios.

La característica principal de estos estudios es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000). Los investigadores se convierten en una parte integral del sistema que están investigando, interaccionando con él, lo que conduce a complejas relaciones que rompen la habitual distinción entre investigadores, docentes y alumnos. En general, se espera que el alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones. Esta distinción de diversos planos de acción ha conducido a que en ocasiones se denomine a estos estudios *experimentos multiniveles o multietapas* (Confrey, 2006; Lesh y Kelly, 2000).

Los investigadores se distancian de los contextos laboratorio y se introducen en las aulas. No obstante, a diferencia de la “*investigación basada en el aula*” (classroom based-research), las intervenciones son realizadas por uno de los investigadores, y no por el docente habitual del aula, a no ser que éste se involucre plenamente en el estudio. Además, dichas intervenciones están determinadas y delimitadas por los objetivos de la investigación, los cuales han de anteponerse a lo que desde el punto de vista del docente pueda ser más adecuado para los alumnos (Kelly y Lesh, 2000).

Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente.

En la ejecución de los experimentos de enseñanza, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: *preparación* del experimento, *experimentación* para promover el aprendizaje, y ejecución del *análisis* retrospectivo de los datos. En la segunda de estas fases tiene lugar las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de

tres pasos: 1) diseño y formulación de hipótesis; 2) intervención en el aula y recogida de datos; y 3) análisis de los datos y revisión y reformulación de hipótesis.

Partiendo de nuestra experiencia en la aplicación de esta metodología (Castro y Molina, 2007; Molina y Ambrose, 2008; Molina, Castro, y Castro, 2009) indicamos en la Tabla 1 las diferentes acciones que identificamos en cada una de estas fases. Estas acciones deben estar sustentadas por una consulta previa, y paralela, de literatura relevante en relación con el problema de investigación.

Tabla 1. Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza

<b>FASES</b>	<b>ACCIONES</b>
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO	<p>Definir el problema y los objetivos de investigación.</p> <p>Identificar los objetivos instruccionales.</p> <p>Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos.</p> <p>Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos.</p> <p>Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización.</p> <p>Diseñar la recogida de datos.</p> <p>Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.</p> <p>Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.</p>
EXPERIMENTACIÓN	
Antes de cada intervención	<p>Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos.</p> <p>Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</p> <p>Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.</p> <p>Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.</p> <p>Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos.</p> <p>Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.</p>
En cada intervención	<p>Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención.</p> <p>Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</p>
Después de cada intervención	<p>Analizar los datos recogidos en la intervención.</p> <p>Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.</p>
ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE	<p>Recopilar y organizar toda la información recogida.</p> <p>Analizar el conjunto de los datos, lo que implica:</p> <p>a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las</p>

Tabla 1. Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza

FASES	ACCIONES
LOS DATOS	<p>conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.</p> <p>b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.</p>

## UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA EN EL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Presentamos aquí, a modo de ejemplo, una descripción de la parte metodológica de un experimento de enseñanza realizado en la línea de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, en el área de Didáctica de la Matemática. El trabajo realizado (Molina, 2006) es un estudio exploratorio, en el que se analiza el uso y desarrollo de pensamiento relacional<sup>3</sup> y los significados del signo igual que los alumnos de Educación Primaria ponen de manifiesto en el trabajo con igualdades y sentencias numéricas<sup>4</sup>. En concreto trabajamos, en su aula habitual, con un grupo de 26 alumnos de tercero de Educación Primaria.

### PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO

Siguiendo la propuesta Early-Algebra de integración de modos de pensamiento algebraico en el currículo de matemáticas de Educación Primaria (descrita en Molina, 2009), se eligió el contexto de las igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas por su potencial para promover el uso de pensamiento relacional (Carpenter, Franke y Levi, 2003). Este tipo de pensamiento favorece y facilita la algebrización de la aritmética, al centrar la atención en la estructura que subyace a ésta y promover el desarrollo y uso de sentido numérico (Sowder, 1992), sentido operacional (Slavit, 1999) y sentido estructural (Hoch, 2003). En este contexto la comprensión del signo igual se manifiesta como un elemento destacado a considerar en la transición de la aritmética al álgebra.

Con estas consideraciones, el problema de investigación ya descrito se concretó en los siguientes objetivos de investigación, los dos primeros de carácter teórico y el resto de carácter empírico:

- O1. Describir y caracterizar el pensamiento relacional en cualquier contexto, y en especial, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas.

<sup>3</sup> Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas, consiste en examinar expresiones aritméticas, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (Molina, 2006).

<sup>4</sup> Con el término sentencia numérica nos referimos a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo. Estos enunciados pueden ser verdaderos o falsos. Por ejemplo, son sentencias las siguientes expresiones  $5 + 7 = 9$  y  $24 + 10 = 7 + 27$ . Ocurre que toda sentencia verdadera es una igualdad (por definición las igualdades son siempre verdaderas).

- O2. Analizar la vinculación del pensamiento relacional, en el contexto de la aritmética, con otros constructos existentes en la literatura de Educación Matemática con los que esté conectado.
- O3. Identificar las estrategias<sup>5</sup> que emplean los alumnos en la resolución de sentencias numéricas y analizar, en especial, las basadas en cierto uso de *pensamiento relacional*.
- O4. Caracterizar el uso de *pensamiento relacional* que evidencian las producciones e intervenciones de dichos alumnos, identificando los elementos en los que los alumnos centran su atención cuando hacen uso de *pensamiento relacional*.
- O5. Analizar y evaluar la comprensión del signo igual que muestran los alumnos participantes en el estudio al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas.
- O6. Analizar la evolución de los alumnos, a lo largo de las sesiones, en cuanto a la comprensión del signo igual y el uso de *pensamiento relacional* que ponen de manifiesto.

Atendiendo a los resultados de un estudio previo (Castro y Molina, 2007; Molina y Ambrose, 2008) decidimos utilizar, con diferentes finalidades, igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas. Las igualdades abiertas fueron empleadas para evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos así como identificar las estrategias empleadas y las dificultades manifestadas en la resolución de las mismas. Las sentencias verdaderas y falsas se utilizaron para favorecer y detectar el uso de pensamiento relacional en la resolución de las sentencias, promover el desarrollo de la comprensión del signo igual e identificar las estrategias utilizadas por los alumnos. Estas igualdades y sentencias serían propuestas a los alumnos en el contexto de tareas escritas individuales, discusiones de gran grupo y entrevistas individuales, promoviendo la verbalización y discusión de las respuestas de los alumnos y el uso de multiplicidad de estrategias, especialmente aquellas que hacen uso de relaciones y propiedades aritméticas.

En la Tabla 2 se muestra la distribución por sesión del tipo de tareas, así como los métodos de recogida de datos empleados, el número de alumnos asistentes y la temporalidad y duración de las sesiones. Trabajamos con los alumnos durante seis sesiones en el periodo de un año. La temporalización fue intencionada, con la salvedad de los periodos vacacionales, para: a) favorecer que nuestra intervención en el aula tuviera un efecto prolongado, b) disminuir la probabilidad de estar evaluando un aprendizaje memorístico, y c) contar con tiempo suficiente para analizar los resultados de cada intervención y tomar decisiones respecto a la siguiente intervención en el aula.

Tabla 2. Características generales de la experimentación

Fecha (duración)	NA	Actividades	Tipo de Igualdades/ sentencias	Recogida de datos
---------------------	----	-------------	--------------------------------------	-------------------

<sup>5</sup> Entendemos por estrategia cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos, de una determinada estructura conceptual (Rico, Castro, Castro, Coriat, Martín, Puig, et al., 1997).

Tabla 2. Características generales de la experimentación

<b>Fecha</b> (duración)	<b>NA</b>	<b>Actividades</b>	<b>Tipo de Igualdades/ sentencias</b>	<b>Recogida de datos</b>
23 Nov (30´)	26	Evaluación escrita Entrevistas a 4 alumnos Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente
24 Ene (1h)	21	Evaluación escrita Discusión Actividad escrita Discusión	Igualdades Abiertas	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente
3 Feb (1h)	22	Discusión	Sentencias v/f	Grabación en video Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente
16 Feb (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente
2 Mar (1h 50 = 13x8´)	(13)	Entrevistas individuales	Sentencias v/f	Grabaciones en audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente
16 Nov (1h)	25	Evaluación escrita	Sentencias v/f	Hojas de trabajo de los alumnos Notas de la investigadora- docente

NA.: número de alumnos

Nuestro primer objetivo fue analizar la comprensión inicial de los alumnos sobre las igualdades propuestas así como detectar las estrategias usadas por los estudiantes para resolverlas. La primera intervención fue también dirigida a que los alumnos se acostumbraran a que la investigadora-docente reemplazara a su profesor como docente y a la presencia de la videocámara en la clase. Así mismo, serviría para que la investigadora-docente se familiarizara con los alumnos. Las siguientes sesiones estaban encaminadas a ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de las igualdades y sentencias, superar las dificultades manifestadas, promover el uso de estrategias variadas para resolver las sentencias, en especial aquellas que hicieran uso de pensamiento relacional, y analizar dichos procesos.

A partir de una revisión de la literatura sobre educación matemática centrada en el problema de investigación y de la información obtenida en un estudio previo (Castro y

Molina, 2007; Molina y Ambrose, 2008), desarrollamos una conjetura inicial sobre el proceso de aprendizaje que seguirían los alumnos, la cual resumimos a continuación.

Los alumnos encontrarían dificultades en la resolución de sentencias e igualdades numéricas no convencionales, presentando una marcada tendencia computacional. Dichas dificultades no son atribuibles, en general, a falta de capacidad de los alumnos debido a su desarrollo evolutivo. Preveíamos que manifestarían cierta inestabilidad en su comprensión del signo igual. No obstante, mediante la consideración y discusión de las distintas estrategias que emplearan en la resolución de las sentencias e igualdades, en particular aquellas que hicieran uso de propiedades aritméticas, la mayoría de los alumnos desarrollarían una adecuada comprensión de las igualdades y sentencias numéricas, y podrían desarrollar pensamiento relacional como estrategia para su resolución. Conjeturamos que utilizarían estrategias basadas en el cálculo de las operaciones expresadas y en el uso de pensamiento relacional; siendo el primero de estos tipos de estrategias el más frecuente. La explicación, por parte de los alumnos, de las estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional, permitiría hacer explícito parte de su conocimiento sobre la estructura de la aritmética y facilitaría el análisis de los aspectos y características de las sentencias en las que centran su atención al abordar su resolución. Este tipo de estrategias serían potenciadas favoreciendo el intercambio de distintas estrategias de resolución de una misma igualdad o sentencia y preguntando a los alumnos por formas de resolver las igualdades y las sentencias sin realizar operaciones.

## EXPERIMENTACIÓN

Iniciada la experimentación, a la luz de los datos recogidos se fue revisando y reformulando la conjetura anteriormente descrita y se fue concretando el diseño, planificación y temporalización de las sesiones que en la fase previa del experimento se habían planificado. Se tomaron decisiones de diferente naturaleza sobre las siguientes intervenciones relativas: a los objetivos instruccionales y de investigación de la intervención (e. g., explorar ciertas dificultades detectadas en las igualdades abiertas de resta), a los instrumentos de recogida de datos (e.g., pedir a los alumnos que explicaran por escrito cómo resolvían cada igualdad), al diseño de las actividades (e.g., proponer a los alumnos la construcción de sus propias sentencias verdaderas y falsas) y a la gestión del aula (e.g., distribuir a los alumnos cartulinas para que pusieran su nombre y las colocaran sobre su mesa), entre otros aspectos.

Las intervenciones en el aula fueron realizadas por una de las autoras, mientras que el maestro del grupo de alumnos permaneció en el aula ayudando a mantener un comportamiento adecuado de los mismos, no estando implicado en el equipo de investigadores del estudio. Otra investigadora participó en el resto del proceso de investigación y varios investigadores colaboraron en momentos diferentes mediante la discusión y la crítica sobre el diseño de las intervenciones, así como sobre el análisis e interpretación de los datos. El doble papel de la investigadora-docente ocasionó cierta tensión durante las intervenciones en el aula que fue gestionada ciñéndose a los objetivos instruccionales y de investigación de cada intervención.

Se recogió una extensa colección de datos sobre el pensamiento de los alumnos mientras resolvían las sentencias numéricas propuestas. También recogimos datos del pensamiento y de las decisiones tomadas por los investigadores participantes durante las diferentes etapas del proceso de investigación, especialmente en las reuniones celebradas para discutir el diseño de cada intervención y el análisis de los datos de las sesiones previas (ver los métodos específicos empleados en la Tabla 2).

## EJECUCIÓN DEL ANÁLISIS RETROSPECTIVO

El análisis retrospectivo de los datos fue cualitativo. A partir de la recogida de datos realizada en el aula, a) se identificaron las estrategias que emplean los alumnos participantes en la resolución de las sentencias numéricas consideradas; b) se caracterizó el uso de pensamiento relacional que evidencian sus producciones e intervenciones, identificando los elementos en los que centran su atención cuando hacen uso de este tipo de pensamiento; c) se analizó y evaluó la comprensión del signo igual que mostraron al abordar la resolución y construcción de igualdades y sentencias numéricas; y d) se detalló la evolución de la comprensión del signo igual y del uso de pensamiento relacional que pusieron de manifiesto.

A modo de ejemplo de estos resultados presentamos en la Tabla 3 las estrategias identificadas en la resolución de las sentencias verdaderas y falsas. Distinguimos tres tipos de estrategias

- Operacional (O): Realiza las operaciones contenidas en la sentencia y concluye la veracidad o falsedad de la sentencia comparando los valores numéricos de ambos miembros.
- Interrupción del cálculo (IC): Inicia el cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, pero, en el proceso, aprecia relaciones entre los elementos de la sentencia las cuales utiliza para resolverla.
- Detección de relaciones (DR): Detecta características particulares de la sentencia y/o relaciones entre sus elementos y utiliza algún conocimiento aritmético relacionado para resolver la sentencia.

Cada uno de estos tipos de estrategias los subdividimos al considerar diferentes actuaciones de los alumnos (ver Tabla 3).

Estrategia	Descripción	Ejemplo
O		
O-M	Tras calcular el valor numérico de uno de los miembros, aprecia que las operaciones a realizar en el otro miembro coinciden con algunas de las ya realizadas, no requiriendo volver a realizar dichos cálculos	$7 + 7 + 9 = 14 + 9$ : “ <i>He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés</i> ” <sup>6</sup>
O-R	A partir del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, aprecia una relación entre los términos que componen la sentencia que conduce a una justificación alternativa.	$7 + 15 = 8 + 15$ : “ <i>Falsa porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño</i> ”.
Otras	Otros casos no incluidos en O-M y O-R	[ $75 - 14 = 340$ ] “ <i>Falsa porque <math>75 - 14</math> es 61 y no es 340</i> ”

<sup>6</sup> El tono de voz es clave en esta explicación para constatar que la alumna reconoce que la operación a realizar en el miembro derecho de la sentencias es una de las ya realizadas.

IC		
IC-O	Concluye al conocer y comparar los valores numéricos de ambos miembros	[122 + 35 – 35 = 122] “Verdadera porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo” (calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157)
IC-noO	Concluye sin conocer los valores numéricos de ambos miembros	51 + 51 = 50 + 52 “Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno si le quitas cincuenta le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos”.
DR		
DR-P	Utiliza dicha apreciación para determinar si la sentencia es verdadera o falsa recurriendo al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para su justificación	12 + 11 = 11 + 12 “Verdadera...” “Porque 12 + 11 es igual a trece, catorce, quince,....veintidós, veintitrés, y 11 más doce es igual a....veintitrés” (habiendo afirmado con rapidez la veracidad de la sentencia al serle planteada)
DR-O	Obtiene los valores numéricos de ambos miembros a partir de dicho conocimiento	[23 + 0 = 23] “Porque veintitrés más cero igual a veintitrés, porque si a veintitrés no le sumamos nada es veintitrés”
DR-noO	Resuelve aplicando dicho conocimiento directamente, sin llegar a conocer el valor numérico de ambos miembros	[75 + 23 = 23 + 75] “Verdadera porque son los mismos números y nada más han cambiado una posición”

Los resultados obtenidos, de los cuales sólo se ha descrito aquí los tipos de estrategias identificadas en la resolución de la sentencias numéricas propuestas, muestran parte del potencial de la propuesta Early-Algebra dando muestras de un aprendizaje posible en estas edades. La mayoría de los alumnos evidencian uso de pensamiento relacional, algunos incluso antes de que sea promovido en el aula. No es posible concretar la capacidad de uso de este tipo de pensamiento en cada alumno. Se identifican las estrategias utilizadas en la resolución de las igualdades y sentencias propuestas, las cuales se diferencian en el papel del cálculo así como en el momento del proceso y modo en que se hace uso de pensamiento relacional. Estas estrategias evidencian la diversidad de estructuras de atención de los alumnos; sujetas a interacciones sociales

además de a la carga cognitiva y a las dificultades que plantea la tarea. Además, se detectan dificultades relativas al conocimiento de las convenciones aritméticas, la sobre-generalización de propiedades aritméticas y ciertas limitaciones en la comprensión del signo igual. También se hace patente la necesidad de abordar de forma continuada en el aula el desarrollo de la comprensión del signo igual y se conjetura que el desarrollo de comprensión consiste en la adopción de multiplicidad de significados<sup>7</sup>.

## CONCLUSIONES

En este artículo hemos descrito el paradigma metodológico denominado investigación de diseño, el cual, en las últimas dos décadas, está siendo activamente implementado y desarrollado en la investigación en Didáctica de las Ciencias. Destaca por su potencial para desarrollar teorías sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje, de contenidos específicos, de una forma sensible a la complejidad y naturaleza sistémica de dicho proceso. Las claves de esta metodología se encuentran en: a) la conjugación, de forma cíclica, de dos análisis: el del proceso de aprendizaje y el de los elementos del diseño instruccional que sustentan dicho aprendizaje; y b) la dialéctica que se establece entre la teoría y la práctica, en los procesos iterativos de interpretación de datos empíricos, por medio de la teoría existente, y de elaboración de modelos teóricos explicativos del fenómeno de aprendizaje, a partir de la información empírica obtenida.

Se presenta como un paradigma muy amplio —diverso en el tipo de situaciones de aprendizaje y focos de estudio que se consideran, agentes que participan, niveles educativos implicados— con gran potencial para dar resultados relevantes de directa aplicación a la práctica. Es sensible a las especificidades de la práctica, a los problemas cotidianos del aula, de los centros y de las comunidades que influyen en la enseñanza y el aprendizaje, y a los límites de la teoría.

Es de remarcar, especialmente, la pertinencia de esta metodología para investigaciones sobre problemas para los que la información existente es escasa y, por tanto, insuficiente para apoyar el diseño de ambientes de aprendizaje (Cobb y Gravemeijer, 2008). Otras fortalezas, así como sus principales debilidades, han sido detalladas en este artículo con la intención de guiar a investigadores interesados en llevar a la práctica esta metodología y permitirles tomar conciencia de los elementos clave a controlar en este tipo de estudios.

Dentro de este paradigma, los experimentos de enseñanza destacan como el tipo de estudios de diseño más frecuentes. Nuestra experiencia con esta metodología nos ha permitido describirlos desde un punto de vista práctico, señalando las acciones que implica su desarrollo y ejemplificando los diferentes elementos que lo componen. En ellos se reconoce con claridad la estructura y características de la investigación de diseño (ver figura 1). Dentro de la metodología de diseño se pueden enmarcar muy diversos tipos de estudios, siendo los experimentos de enseñanza los que podemos identificar, en su desarrollo, como más próximos a la práctica habitual del docente al consistir en el diseño, puesta en práctica y análisis de un conjunto de intervenciones, en un aula, que persiguen un aprendizaje. En este caso el objetivo es tanto práctico (promover el aprendizaje) como teórico (elaborar un modelo teórico de dicho proceso de aprendizaje) y el proceso de diseño-puesta en práctica-análisis es repetido de forma reiterativa.

---

<sup>7</sup> Consultar Molina (2006) para ver una descripción más detallada de los resultados.

Reconocemos, en cierto modo, esta metodología como una sistematización de prácticas que se han venido realizando en la investigación educativa, bajo la influencia de otras metodologías de investigación existentes pero reduciendo algunas de sus restricciones, con el objetivo de asemejar la situación en estudio, lo máximo posible, a la práctica real del aula.

### **Agradecimientos**

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto del Plan Nacional de I+D+i con número EDU2009-11337 titulado “Modelización y representaciones en educación matemática”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciado con fondos FEDER.

### **REFERENCIAS**

- BANNAN-RITLAND, B. Y BAEK, J. Y. (2008). Investigating the act of design in design research: the road taken. En A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 299-319). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- BARAB, S. y SQUIRE, K. (2004). *Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 1-14.
- CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L. y LEVI, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann
- CASTRO, E. y MOLINA, M. (2007). *Desarrollo de Pensamiento Relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. Educación Matemática*, 19(2), pp. 67-94
- COBB, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction. En J. Boaler (Eds.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45- 82). London: Ablex Publishing.
- COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER, R. y SCHAUBLE, L. (2003). *Desing experiment in Educational Research. Educational Researcher*, 32(1), pp. 9-13.
- COBB, P. y GRAVEMEIJER, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A.E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- COBB, P., STEPHAN, M., MCCLAIN, K. y GRAVEMEIJER, K. (2001). *Participating in classroom mathematical practices. Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), pp. 113-164.
- COLLINS, A., JOSEPH, D. y BIELACZYK, K. (2004). *Design research: theoretical and methodological issues. Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 15-42.
- CONFREY, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.
- DBRC (THE DESIGN BASED RESEARCH COLLECTIVE) (2003). *Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. Educational Researcher*, 32(1), pp. 5-8.

- DEDE, C. (2004). *If design-based research is the answer, what is the question? A commentary on Collins, Joseph, and Bielaczyc; diSessa and Cobb; Fishman, Marx, Blumenthal, Krajcik, and Soloway in the JLS Special Issue on Design-Based Research. Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 105-114.
- DISESSA, A.A. y COBB, P. (2004). *Ontological innovation and the role of theory in design experiments. Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 77-103.
- ELLIOT, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata
- HJALMARSON M. A. y LESH, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520-534). London: Routledge.
- HOCH, M. (2003, marzo). *Structure sense*. Presentado en the third Conference of the European Researchers in Mathematics Education, Bellaria, Italia.
- KELLY, A.E. (2004). *Design research in education: yes, but is it methodological? The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), pp. 115-128.
- KELLY, A.E., BAEK, J.Y., LESH, R.A. y BANNAN-RITLAND, B. (2008). Enabling innovations in education and systematizing their impact. En A.E. Kelly, R.A. Lesh y J.Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 3-18). Mew York, NY: Routledge.
- KELLY, A.E. y LESH, R.A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- KELLY, A.E., LESH R.A. y BAEK J.Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Mew York, NY: Routledge.
- LESH, R.A. y KELLY, A.E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum associates.
- MOLINA, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- MOLINA, M. (2009). *Una Propuesta de Cambio Curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria. PNA*, 3(3), pp. 135-156
- MOLINA, M. y AMBROSE, R. (2008). *From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), pp. 61-80.
- MOLINA, M., CASTRO, E. y CASTRO. E. (2009). *Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 7(1), pp. 341-368
- RICO, L., CASTRO, E., CASTRO, E., CORIAT, M., MARÍN, A., PUIG, L. et al. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori e Institut de Ciències de l'Educació.
- SAWYER, R.K. (2006). The New Science of Learning. En R.K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1-18). New York, NY: Cambridge University Press.

- SHAVELSON, R.J., PHILLIPS, D.C., TOWNE, L. y FEUER, M.J. (2003). *On the science of education design studies*. *Educational Researcher*, 32(1), pp. 25-28.
- SLAVIT, D. (1999). *The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought*. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), pp. 251-274.
- SOWDER, J. (1992). Estimation and Number Sense. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). NY: Macmillan Publishing Company y NCTM.
- STEFFE, L. y THOMPSON, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.