REVISTA EMA
2002, VOL. 7, Nº 2, 227-246

SITUACIONES DE GENERALIZACIÓN
Y USO DE MODELOS EN LA INICIACIÓN

LIGIA TORRES, EDITH VALOYES Y ROCÍO MALAGÓN

Se presentan algunas reflexiones acerca de los resultados obtenidos en los proyectos de indagación pedagógica: "Actividades de generalización en la iniciación al álgebra" y la "Modelación matemática en la iniciación al álgebra". Reflexiones relacionadas con elementos teóricos fundamentales que sustentan las perspectivas de iniciación a un estudio formal del álgebra escolar, como también reflexiones que aluden a las potencialidades y dificultades que se promueven cuando se introducen actividades en estas perspectivas, en el aula.

PROBLEMÁTICA QUE ENMARCA LOS PROYECTOS

La motivación inicial por el estudio de la problemática del paso de la aritmética al álgebra en el ámbito escolar surge de nuestra propia experiencia sobre esta materia en la práctica pedagógica y del conocimiento que nos hemos formado a lo largo de los últimos años sobre diferentes investigaciones. En particular, sobre algunas que han tomado como objeto de estudio los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra en secundaria, el álgebra y su lenguaje, el simbolismo algebraico, la abstracción en álgebra, estrategias de enseñanza en álgebra, etc. Todas ellas realizan el estudio de las dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar. Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de abstracción. Tal circunstancia se da, por ejemplo, cuando las letras comienzan a sustituir a los números, es decir, elementos concretos como los objetos y los números que han sido básicos en el trabajo matemático hasta el momento pasan a ser representados por letras como incógnitas, números generalizados, parámetros o variables. Estas dificultades se manifiestan, entre otras, en errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operativamente con las expresiones algebraicas, errores de traducción cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje cotidiano, e interpretaciones erróneas de expresiones algebraicas, dados los diferentes contextos en que ellas aparecen.

Específicamente hemos abordado el estudio sobre la caracterización del corte didáctico entre el pensamiento aritmético y el algebraico en el momento en que aparece como necesario operar lo representado, es decir, cuando se requiere aceptar la existencia de lo desconocido para luego representarlo y operar sobre ello, por ejemplo, operar la incógnita en el caso de la resolución de ecuaciones. Tal corte no significa que el álgebra sea una asignatura separada completamente de la aritmética, que es como el currículo tradicional la ha considerado, constituyendo esto un grave error ya que no se puede establecer un límite entre el conocimiento aritmético y el algebraico debido a que aspectos primordiales del segundo están presentes en todo conocimiento matemático. Por este motivo la construcción de elementos del pensamiento algebraico debe ser un proceso paralelo y continuo dentro del proceso de desarrollo de los pensamientos aritmético y geométrico.

La problemática del paso de la aritmética al álgebra en el ámbito escolar se ha reconocido de manera más sistemática en nuestro medio (Valle del Cauca, Colombia) a través de los estudios en trabajos[1] de grado, pre-grado, especialización y maestría, lo mismo que en los proyectos de indagación en el aula adelantados por maestros de la Red en Educación Matemática del Valle del Cauca, trabajos estos registrados en el boletín de este organismo publicado en agosto de 2001. En este artículo se presentan los resultados iniciales de dos de los proyectos adelantados dentro de la Red: "Actividades de generalización en la iniciación al álgebra escolar" y "Modelación matemática en la iniciación al álgebra". Estos trabajos de investigación se están continuando en la actualidad como proyectos de maestría.

MIRADA PANORÁMICA A LOS REFERENTES TEÓRICOS DE LOS PROYECTOS

Para iniciar el estudio formal de los conceptos algebraicos nos hemos apropiado de los resultados de la investigación en didáctica del álgebra en lo que respecta a las formas de encarar la iniciación del trabajo algebraico,

1. Trabajos desarrollados en el marco de los programas que dirige el grupo de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Algunos de ellos en el nivel de pre-grado son: "La variable como incógnita en ecuaciones de primer grado" y "Usos y significados del signo igual en ecuaciones de primer grado en contextos geométricos". Entre los trabajos de grado de la Especialización en Educación Matemática están: "La resolución de problemas en el inicio del álgebra escolar" y "Propuesta didáctica para la construcción de expresiones algebraicas desde la perspectiva de generalización". Entre las tesis de maestría en ejecución cabe citar: "La generalización en las matemáticas escolares" y "La noción de variable en el álgebra escolar. Connotaciones históricas y pedagógicas del problema".

como son: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas; y el estudio de situaciones funcionales. Estas perspectivas se apoyan en la resolución de problemas aritméticos y/o algebraicos y en la historia de las ideas algebraicas. En los trabajos reportados en este artículo se toman, de manera explícita, elementos de la generalización y de la modelación sin que esto quiera decir que no se reconozcan las interrelaciones entre las tres formas de abordar la iniciación al trabajo algebraico.

Dichos planteamientos de acercamiento al álgebra consideran de suma importancia no sólo la naturaleza del conocimiento matemático, particularmente del algebraico —su carácter general, analítico, estructural, etc.—, la evolución ontogenética y psicogenética de sus conceptos, las particularidades del pensamiento algebraico —reconocer lo particular en lo general y lo general en lo particular, percibir la variación, etc.— y las peculiaridades del aprendizaje matemático —e.g., la conversión entre representaciones— sino también, los nexos entre los contextos socioculturales y la naturaleza del conocimiento que se construye. Teniendo en cuenta estas observaciones, consideramos que cuando se pretende que los jóvenes construyan conceptos relativos a la variación en álgebra como los de expresión algebraica, ecuación, polinomio, variable y función tenemos que identificar, evaluar y aprovechar las significaciones que ellos poseen. Por ejemplo, habría que identificar ciertas propiedades algebraicas que están presentes en sus significaciones geométricas y en las aritméticas y evaluar cuáles se corresponden con las aportadas por la historia, los textos, los programas oficiales y las manejadas por el maestro, es decir, determinar elementos o factores en el manejo conceptual de estos conceptos o constructos matemáticos, en un contexto social determinado, con el propósito de caracterizar la cultura de estos conceptos en nuestro medio.

De acuerdo con los mencionados planteamientos de la didáctica del álgebra se hace necesaria la movilización hacia lo algebraico a partir del trabajo numérico y/o geométrico de problemas matemáticos donde se utilicen conceptos en diferentes contextos en los que, por medio de la experiencia, el estudiante pueda verificar la utilidad que el lenguaje simbólico puede ofrecer a la mente. En particular, trabajar en el estudiante la competencia para generalizar y comunicar su generalización en lenguaje natural u otra forma de representación tiene gran importancia en la formación de pensamiento matemático; sin embargo, la escuela tradicional no se ha preocupado por desarrollar esta práctica y en cambio, los conocimientos de los estudiantes se limitan al uso de algoritmos para resolver operaciones y problemas numéricos y/o geométricos elementales.

El diseño, la aplicación y el análisis de actividades de generalización para lograr la introducción significativa al álgebra, a través de las expresiones algebraicas, guió uno de los proyectos que se presentan aquí. Para ese trabajo se asumió la perspectiva de la expresión de la generalidad. En la búsqueda de regularidades y expresión de la generalidad se pretendió establecer nexos con los procesos de modelación y con las situaciones funcionales. El diseño de secuencias didácticas que involucraran estas actividades de generalización marchó aunado a la reflexión en torno a varios tópicos entre los que se pueden mencionar: la generalización en matemáticas, la generalización y la abstracción, la generalización y la inducción, la generalización y la visualización, la generalización y la variable, la generalización y la cognición, y la generalización en las matemáticas escolares.

Las expresiones algebraicas cobran realmente su dimensión matemática cuando se relacionan y operan, produciendo ecuaciones, inecuaciones y nuevas expresiones algebraicas. En el surgimiento de estos objetos algebraicos aparece el problema de la producción de significado de estos constructos. Esto ha sido ampliamente debatido por distintos investigadores, quienes sustentan la necesidad de trabajar con los estudiantes diversas aproximaciones, por ejemplo, al concepto de ecuación para que ellos las puedan significar (Nemirovsky y Janvier, 1996). Se requiere para ello poner a los estudiantes en una situación que les permita construir el significado a partir de varias representaciones (gráficas, tablas, etc.) y usarlas con una cierta flexibilidad en la descripción de fenómenos físicos o eventos del mundo. En este proceso de modelación de fenómenos se hace necesaria cierta verbalización que dé significado al simbolismo gradualmente desarrollado por el estudiante. Así, el simbolismo está basado en acciones reales o imaginarias y aparece como la expresión de ciertas variaciones continuas y no como mediciones aisladas. En esta medida, las expresiones algebraicas son resultado de generalización matemática, lo que permite observar los vínculos entre la perspectiva de generalización y la funcional.

La modelación en la introducción al álgebra debe permitir el desarrollo de la noción de variable en los estudiantes. El punto crucial en este proceso de modelación es la fase de formulación que resulta en la creación del modelo (e.g., lineal). Las reflexiones anteriores fueron el punto de partida de la segunda propuesta que se presenta en este artículo. Sin embargo, fue el uso de modelos en la formulación de ecuaciones y en su proceso de solución lo que realmente se redimensionó en este trabajo. El significado con el que se utilizó el término "modelo" (e.g., balanza, máquina, geométrico) es el de *modo de producir significado, de constituir objetos matemáticos y de producir justificaciones relativas a lo que son tales objetos y lo que es posible hacer con ellos*. El modelo en el que se enmarque una ecuación, por ejemplo, determinará las justificaciones de las distintas transformaciones que se efectúen para resolverla. Pero también, el tipo de ecuación determinará tanto el campo en el que se puede solucionar como el modelo que se puede usar, ya que no todas las ecuaciones pueden significarse en un mismo campo y lo que es válido hacer en uno, puede no serlo en otro. Se opera en un determinado campo y es en él en donde se establece la lógica de las operaciones que se van a utilizar en los procesos de resolución. De ahí, la importancia de trabajar con variedad de modelos.

En los trabajos aquí expuestos se puede advertir un acercamiento al álgebra elemental en niveles de la enseñanza básica (séptimo y octavo, grados en los que el currículo impone su estudio formal) en términos de traducción de lenguajes (habitual, algebraico, aritmético, geométrico y el de los modelos) que facilita la actividad matemática como un proceso reversible de generalización y particularización, que estimula y favorece el desarrollo del conocimiento algebraico.

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA

En este proyecto se asumieron diferentes presupuestos enmarcados en los referentes teóricos y análisis de resultados de las investigaciones de John Mason (1996). De tales presupuestos cabe destacar dos. Por un lado, el álgebra es un lenguaje, una forma de decir y comunicar algo. De esta manera, el lenguaje algebraico frente a otros lenguajes —como el natural— por sus propias reglas de juego y de expresión, presenta ventajas como la posibilidad de expresar generalizaciones de situaciones, lo que permite hacer inferencias y transferencias de las mismas situaciones a otras formas más complejas del conocimiento. Por otro lado, en el mundo con frecuencia se encuentran regularidades. Al observar una regularidad o un patrón de comportamiento, aparece la necesidad de expresarlo, de comunicarlo y es el lenguaje algebraico, por ser más sucinto, el indicado.

Coherente con los dos supuestos mencionados, es posible considerar que dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentarles situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes a los casos específicos y llegar a una lectura y escritura de lo general. En tales situaciones, presentadas como actividades de generalización, se deben concebir tres etapas bien diferenciadas entre sí, cada una de las cuales requiere un detallado estudio; dichas etapas son: *ver*, *decir* y *registrar* (Mason, 1999).

Aunque en las dos primeras etapas (i.e., ver y decir) no es explícita la sintaxis formal algebraica, sí es fundamental dedicarle en el trabajo escolar suficiente tiempo a ellas; el paso apresurado al registro simbólico de una regularidad conlleva a una pérdida de sentido y significado de la expresión general y a un obstáculo para el manejo adecuado de las expresiones algebraicas resultantes. El paso del *ver* y del *decir* al *registrar* es un paso difícil para los alumnos y por tanto debe ser realizado a través de suficientes y variadas situaciones diseñadas para tal fin. Este aspecto ha sido ampliamente corroborado por los diferentes estudios e investigaciones que han abordado los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra desde esta perspectiva (Socas, 1989; Arzaquiel, 1993; Mason, 1999, 1996).

En la primera etapa, en la observación de una generalidad, se trata de distinguir lo que es propio de cada caso específico y lo que es común a todos ellos, lo que no varía, para luego construir una regla que permita "percibir lo general" sin hacer referencia a los casos concretos. Un aspecto de relevancia en esta etapa es el contexto en el cual se presenta la situación. En este trabajo se han utilizado contextos geométricos y aritméticos; los primeros, ya que facilitan la manipulación de la información tanto como la percepción de las características de la situación; por su parte, las series numéricas tienen la ventaja de permitir aprovechar la mayor experiencia de los estudiantes en el trabajo con los números y sus propiedades.

Un último aspecto que es necesario afrontar en la etapa de la percepción de la regularidad, es el problema de la validez de las conjeturas hechas sobre las características de los casos específicos y si se trata o no de patrones generales de comportamiento. Es importante tener en cuenta que las conjeturas deben ser probadas para ver si expresan propiedades de todos los casos que se podrían observar o si simplemente son un resultado de ejemplos particulares. En este aspecto hay que diferenciar entre la demostración matemática requerida para dar cuenta de la validez de la relación encontrada y los procesos de argumentación y prueba de los alumnos, cuando esta perspectiva de búsqueda de lo general tiene usos didácticos. Es este segundo caso el que fue objeto de observación y análisis en nuestro trabajo.

Tal como se había planteado antes, la mayor dificultad en los procesos de generalización se encuentra en el paso de la descripción verbal de la regularidad al registro simbólico de la misma. En consecuencia, se hace necesario dar respuesta, desde la actividad misma, a la pregunta sobre cuándo es el momento oportuno para esa conversión y cómo movilizarla.

Diversas investigaciones (Mason, 1999; Kieran, 1988, 1996; Grupo Azarquiel, 1993) sugieren que el paso al registro simbólico se realice sólo después de haber transcurrido suficiente tiempo y trabajo en las etapas de observación y descripción verbal de los patrones; además, recomiendan a los profesores la tarea de crear ambientes propicios para que la escritura simbólica aparezca como una necesidad del estudiante de comunicar de manera más efectiva sus registros. Por ejemplo, Mason (1999, p. 52) afirma:

> El movimiento hacia la notación matemática formal se debe trabajar en forma gradual, a la velocidad individual de quien aprende. Los alumnos necesitan ver que los símbolos se usan para expresar generalidades pero sólo los emplearán en forma exitosa cuando estén listos para hacerlo, y cuando perciban una necesidad de hacerlo.

Sobre las situaciones y su implementación

En esta etapa del proyecto, los aspectos metodológicos correspondieron a un esquema experimental en el cual el diseño de las situaciones y su implementación en el aula pretendían la construcción, por parte de los estudiantes, de expresiones algebraicas desde dos perspectivas de análisis: la emergencia de la notación algebraica y la contextualización y construcción de significados para las expresiones resultantes, verificado esto a través de la observación y la toma de registros de las ejecuciones de los alumnos y el posterior análisis de los resultados. En la siguiente etapa del proyecto —la que se está desarrollando como una tesis de maestría— se espera dar cuenta de los procesos de significación de la operatividad de las expresiones producidas.

La población objeto de estudio estuvo conformada por treinta jóvenes, entre trece y quince años de edad, del grado octavo de la educación básica secundaria del colegio Técnico Industrial Veinte de Julio, establecimiento de carácter oficial de la ciudad de Cali.

En las sesiones de clase se priorizaron dos momentos: el de trabajo individual y los espacios de las discusiones plenarias. En estos últimos fue donde realmente se confrontaron los análisis preliminares de las situaciones y las movilizaciones conceptuales que se lograron en los estudiantes.

Las situaciones para la intervención en el aula se agruparon en cinco talleres, con dos o tres actividades cada uno, que pretendían movilizar distintos tipos de relaciones matemáticas como las lineales —referidas en las tareas expuestas en este artículo— que conllevan a representaciones del tipo $p = 3(n+1)$, $a = 2b$, $a = n/2$; también se incluyeron actividades que generan relaciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + b$. Otros aspectos determinantes en las actividades fueron los contextos aritméticos y los geométricos en los que se enmarcaron y la etapa que les correspondió movilizar —ver, decir o registrar.

Entre las variables —planteadas desde el análisis preliminar del proyecto— que determinaron el diseño de cada taller están: el campo numérico (números racionales positivos), la diferenciación entre los conceptos directamente involucrados (el concepto de las operaciones básicas, propiedades numéricas, etc.) y los utilizados como herramienta (perímetro y área) y la organización de la secuencia de las tareas de acuerdo con la etapa que movilizaban.

El análisis preliminar permitió sugerir unos niveles de logro cognitivo a través de los procedimientos que se esperaba siguieran los estudiantes. Como ejemplo, presentamos los logros planteados para la Actividad 1 expuesta más adelante. En un primer nivel se encuentran los estudiantes que obtengan conclusiones que no obedecen a regularidades sino a comportamientos arbitrarios de los términos en juego. En un segundo nivel se encuentran los estudiantes que reconociendo el resultado de cada adición como un múltiplo de tres no lo identifican como un producto de tres veces el término del medio. En el tercer nivel, están los estudiantes que reconocen la suma como tres veces el término del medio en la terna —así sea por tanteo— y logran expresar la regularidad en lenguaje natural. Los procedimientos descritos anteriormente se convirtieron en elementos de contraste con los realmente seguidos por los aprendices durante el trabajo de campo y por lo tanto constituyeron una parte fundamental de la validación de la hipótesis del proyecto.

Las actividades siguientes corresponden a los tres primeros talleres y se catalogan en nivel de dificultad intermedio.

Actividad 1

1) Realiza las siguientes adiciones para cada terna de números:

   a. $1 + 2 + 3 =$

   b. $4 + 5 + 6 =$

   c. $8 + 9 + 10 =$

   d. $9 + 10 + 11 =$

2) Describe las características que encuentras entre los números que conforman cada terna.

3) Escribe todas las relaciones que encuentres entre los términos de cada adición con su respectivo resultado o suma.

4) De las relaciones que encontraste, en el punto anterior, determina la(s) que permita(n) calcular el resultado de la adición sin necesidad de realizarla.

5) Escribe otras ternas de números con la misma característica y comprueba si ocurre lo mismo. Verifica que la regla encontrada se cumple para cualquiera de las ternas elegidas.

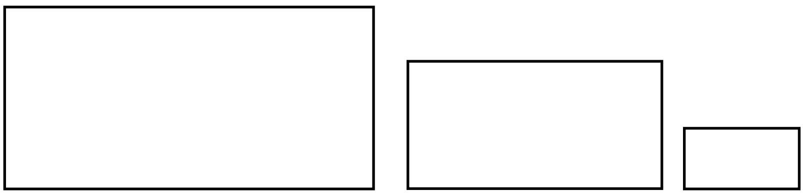
6) Describe la regla encontrada, que permite el cálculo de la adición en términos de los sumandos.

Actividad 2

1) Para cada uno de los siguientes rectángulos, donde la base corresponde al lado horizontal y la altura al lado vertical,

   a. Mide la longitud de la base y la altura.

   b. Establece una relación entre la medida de la base y la medida de la altura. Descríbela.



2) Dibuja un rectángulo con otras medidas que cumpla la relación descrita anteriormente.

3) Si a representa la medida de la altura de un rectángulo cualquiera que cumple la relación trabajada en la situación, ¿cómo se podría escribir la medida de la base en términos de a?

4) Si b representa la medida de la base de un rectángulo cualquiera que cumple la relación, ¿cómo se escribe la medida de la altura en términos de b?

5) Escribe una expresión que represente el perímetro del rectángulo.

Actividad 3

Luis es un estudiante muy afortunado puesto que cuenta con varios medios para desplazarse a su colegio, a la biblioteca y eventualmente a la casa de su mejor compañero para realizar tareas. Como periódicamente hace uso de ellos, ha calculado las diferencias de tiempos entre los desplazamientos, encontrando que el tiempo que tarda caminando equivale al doble del tiempo en bicicleta y cuatro veces del que gastaría en autobús.

1) Si n representa el tiempo que Luis tarda en uno de sus recorridos en autobús, ¿cómo podría expresar este recorrido en términos de n si lo hubiese hecho en bicicleta? Y, ¿si lo realizara a pie?

2) Escribe una expresión en términos de n que represente el tiempo utilizado en un desplazamiento de Luis, donde la mitad del recorrido lo ha hecho en bicicleta y el resto, por algún motivo, caminando.

3) Si t representa el tiempo total de recorrido en un día, escribe una expresión para t en términos de n conociendo que la mitad del recorrido lo hizo en autobús y el resto caminando.

4) Use la expresión obtenida en el punto anterior para calcular el tiempo total gastado en los recorridos en ese día, si estuvo viajando en autobús durante 40 minutos.

Sobre el análisis de los resultados

A partir del estudio de los procedimientos seguidos por los estudiantes y de los distintos argumentos presentados en las discusiones posteriores se infirieron una serie de elementos que permitieron valorar los alcances de la propuesta. A continuación se mencionan algunos de ellos.

En las etapas del *ver* y el *decir* se hizo notoria la importancia de que el maestro o investigador guiara los procesos de observación para que el estudiante desechara las propiedades no fundamentales para la tarea e identificara las variables fundamentales. Una pregunta clave en esta guía fue "¿qué es lo que varía y con relación a qué lo hace?". Esto se anota pues muchos estudiantes centraron su atención en propiedades arbitrarias de los términos o elementos que se relacionan en la tarea y que no permiten encontrar el patrón de regularidad. Por ejemplo, en la Actividad 1 dieron como respuesta de relación entre los términos de cada adición y su suma el hecho de que "cada sumando es menor que la suma". La anotación anterior no implica que durante la implementación hayamos desconocido los argumentos de los estudiantes o no se haya hecho la respectiva discusión con el colectivo sobre sus apreciaciones acerca de *lo particular* y *lo general* en cada situación.

En el desarrollo progresivo de los talleres se fueron observando avances significativos con respecto a la búsqueda de lo general y a la necesidad creciente de encontrar expresiones que posibilitaran registros más concisos. Con ello se confirmó el lento proceso que implica la consolidación de la notación algebraica como una forma de registrar regularidades y patrones. Se observaron, desde registros completamente verbales hasta aquellos donde se reconoció la necesidad y se hizo uso de símbolos para la denominación de cantidades generales, llegando a expresiones algebraicas con sintaxis próximas a las presentadas formalmente en álgebra. Se obtuvieron, por ejemplo, registros como "el doble del lado a" y "dos veces la medida de a", como también "$a \times 2$" (en la Actividad 2 presentada anteriormente) y registros más complejos como "$n \times 2 + 40$" (en la Actividad 3).

La verdadera potencia de lo anterior se encontró en la evolución de los registros matemáticos de un mismo estudiante. Se evidenció que pudo ir reconociendo otras formas de expresar y registrar sus observaciones hasta llegar a construcciones simbólico-algebraicas, a las que les asignó significados imposibles de alcanzar a través de las prácticas sobre las expresiones algebraicas que tradicionalmente se hacen en la escuela, por razón de haber sido partícipe de su elaboración.

Otro de los logros alcanzados con actividades que son parte de las situaciones diseñadas pero que no se han registrado en este artículo, consistió en haber llegado a algunas lecturas "de lo general"; un ejemplo de esto muestra que al presentar expresiones como "$3r$", los estudiantes reconocieron distintos sentidos para esta expresión, entre ellos el hecho de ser 3 por un número *cualquiera*. De igual forma, al presentarles expresiones como "$2x + 2y$" le asignaron significados en diversos contextos como el "perímetro de un rectángulo", "el doble de un número *cualquiera* sumado con el doble de otro número *cualquiera*", "el doble de la edad de … sumado con el doble de la edad de …", etc. Con todo ello se logró potenciar la posterior conversión de enunciados en lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Finalmente reconocimos la incidencia de este tipo de tareas en el cambio positivo de la actitud de los estudiantes frente al trabajo con las matemáticas, hecho corroborado en la disponibilidad hacia de trabajo, el alto nivel de participación en las discusiones y la apropiación de la tarea misma.

MODELACIÓN Y USO DE MODELOS EN LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA ESCOLAR

Diseñar una secuencia didáctica como fundamento para la iniciación al álgebra escolar desde el uso de modelos, de tal manera que permitiera a los estudiantes una elaboración de significado de los objetos algebraicos antes que el aprendizaje de reglas para manipular símbolos, fue el objeto de estudio y análisis de este proyecto. Se esperaba que a partir del uso de los modelos como herramientas de traducción entre distintos lenguajes (natural, geométrico, etc.) se llegara a una construcción paulatina de la sintaxis algebraica.

Para la elaboración de la secuencia didáctica se asumieron los modelos —balanza, parte y todo, máquina, geométrico, etc.— como herramientas que al ser usadas, permiten dotar de significado a las ecuaciones lineales en las que la incógnita aparece en ambos de sus miembros, es decir, ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx$ o $Ax \pm B = Cx \pm D$. En este sentido, adoptamos la idea de modelaje en la cual se conjugan dos componentes: una, la traducción de distintos lenguajes (e.g., el natural, el gráfico, y el geométrico) al algebraico, actividad que permite dotar de sentido y significado, en un contexto más concreto, a los objetos y operaciones, y la otra componente, la separación de estos objetos y operaciones de los significados más concretos, es decir, el acceso a un nivel puramente sintáctico (Filloy, 1998). En este sentido no abarcamos la idea de modelación propuesta por Janvier (1996) aunque era el deseo inicial; tomamos, en cambio, como referencia los trabajos adelantados por Filloy (1998) y Socas (1989).

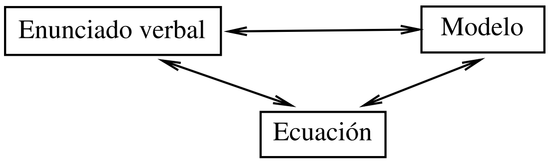
Con el fin de que el lector pueda vislumbrar lo que implica haber asumido la idea de Socas y no la de Janvier, presentamos las siguientes precisiones. Para Janvier la modelación es un proceso que comprende dos fases: la de formulación y la de validación. Durante la fase de formulación se establecen las relaciones claves entre las variables de un problema; el establecimiento de estas relaciones básicas puede llevarse a cabo a partir de medidas o conjeturas; posteriormente se ejecutan una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a formular el modelo como una expresión simbólica. La fase de validación consiste en constatar la validez del modelo, llevando a la realidad eso que supuestamente representa ya sea a través de la medición o de otro modo. Esto, según Janvier, le proporciona al modelo un doble status: por una parte, el modelo es establecido en términos matemáticos y permanece independiente de la realidad desde la cual surge. Este status abstracto es confirmado por la aplicación mecánica de reglas que involucran la manipulación simbólica. Por otro lado, el modelo representa objetos concretos o relaciones que pueden medirse. Entonces, los elementos del modelo (los parámetros de la fórmula, las características de la tabla, etc.) que previamente no tenían significado, adquieren sentido en el contexto de la situación bajo investigación.

Por su parte, Socas en sus trabajos está interesado en el uso de modelos como instrumentos de traducción de lenguajes antes que en un proceso de modelación en el sentido mencionado anteriormente. Para él, los modelos en el álgebra son herramientas en el sentido de que permiten pasar de una situación problemática, expresada por ejemplo, en lenguaje natural, al modelo, y de éste a la expresión algebraica correspondiente. Es así como pueden considerarse modelos tanto los diferentes tipos de recursos gráficos —como los diagramas, las "máquinas", los "ordinogramas", las balanzas, etc.— como también las relaciones matemáticas (fórmulas, ecuaciones, etc.), aclarando que pertenecen a distintas clases. Socas considera la utilización de modelos como "fundamental en la creación de conceptos y procesos de razonamiento ya que permiten hacer accesibles y manipulables conceptos intelectualmente más difíciles".

Sobre las situaciones y su implementación

Las situaciones de la propuesta fueron desarrolladas por estudiantes del grado octavo de la educación básica del Instituto Técnico Industrial Donald Rodrigo Tafur, colegio oficial de la ciudad de Cali.

La secuencia didáctica la conforman varias actividades en las que fueron utilizados los modelos de la balanza y la comparación de áreas (geométrico), teniendo en cuenta, para su diseño, el siguiente esquema propuesto por Socas[2]:



Según el anterior esquema, se podría proponer una actividad en la cual a partir del enunciado verbal o situación problemática, usando el modelo se llegara a la ecuación, o, viceversa, de la ecuación y usando el modelo, se propusiera una situación problemática. Algunos ejemplos de actividades de la secuencia didáctica son:

Actividades de la situación 1

1) Una bolsa de papas junto con un bloque de 6 kilos pesan lo mismo que tres bolsas de papas (iguales a la primera) y un bloque de 2 kilos.
   a. ¿Qué es lo desconocido en esta situación?
   b. ¿Qué expresión algebraica utilizarías para representar esta situación?
   c. Representa en el modelo de la balanza la situación anterior.
2) Tenemos una balanza en equilibrio. En el lado derecho hay dos botellas y tres vasos; al lado izquierdo hay una botella y siete vasos.
   a. Usa el modelo de la balanza para representar la situación anterior.
   b. ¿Qué es lo desconocido en esta situación?
   c. ¿Cuál sería la expresión algebraica que representa esta situación?
   d. El peso de una botella, ¿al peso de cuantos vasos equivale? Explica tu respuesta.
3) Un perro pesa doce libras más que un gato.
   a. Escribe dos ejemplos de los que pueden ser los pesos del perro y del gato.
   b. Usa el modelo de la balanza para representar esta situación.

2. Este autor clasifica los modelos en: intuitivos, como por ejemplo las relaciones matemáticas; explícitos tales como los diagramas; y analógicos como aquellos que pertenecen a una clase distinta de la realidad que representan, como por ejemplo los bloques de Dienes.

c. ¿Cuál sería la ecuación que representa esta situación?

d. Si el perro y el gato juntos pesan 50 libras, ¿cuál sería la ecuación que representa esta situación? Representa lo anterior utilizando el modelo de la balanza.

e. ¿Cuánto pesa el perro y cuanto el gato? Explica tu respuesta.

4) Para cada una de las ecuaciones siguientes:

$x + 7 = 23$

$3x + 14 = 5x$

$5x = 4x + 8$

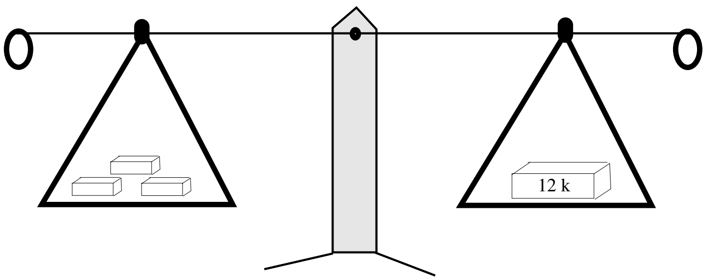
$x + 12 = P$

a. Represéntala usando el modelo de la balanza.

b. Resuelve cada ecuación.

c. Escribe un problema que pueda resolverse usando cada ecuación.

5) La siguiente gráfica muestra una balanza. Los tres bloques del lado derecho pesan lo mismo cada uno.



a. ¿Está en equilibrio la balanza? Explica tu respuesta.

b. Si se retira un bloque del lado derecho, ¿qué sucederá con el equilibrio? ¿Qué se debe hacer para equilibrar nuevamente la balanza? Explica tu respuesta.

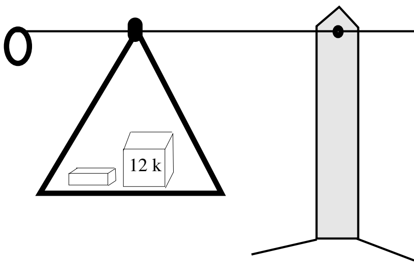
c. Si se añade un bloque igual a los anteriores al lado izquierdo. ¿Qué sucederá con el equilibrio de la balanza? ¿Qué tendremos que hacer para que quede en equilibrio nuevamente?

d. ¿Cuál es el peso de cada bloque? ¿Por qué?

e. Escribe una expresión algebraica que represente la situación planteada inicialmente.

f. Escribe una expresión algebraica que represente cada una de las situaciones planteadas en los puntos b y c. ¿En cuál o cuáles de las situaciones incluyendo la inicial hay condiciones de igualdad. Explica tu respuesta.

6) Considera la situación presentada en el gráfico siguiente:



a. ¿Cuál debe ser el peso del bloque para que la balanza esté en equilibrio?

b. ¿Cuál debe ser el peso del bloque para que la balanza se desequilibre hacia el lado derecho?

c. ¿Cuál debe ser el peso del bloque para que la balanza se desequilibre hacia el lado izquierdo?

d. Escribe una expresión algebraica que represente cada una de las situaciones planteadas.

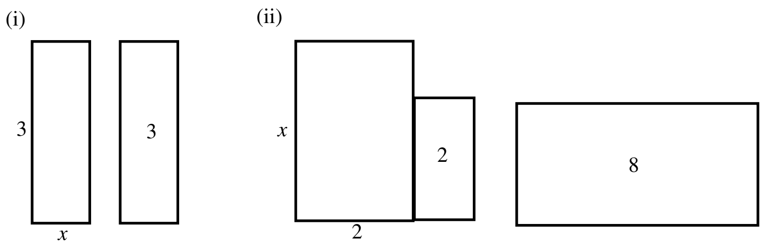
Actividades de la situación 2

1) En cada caso, las áreas de las figuras son iguales.

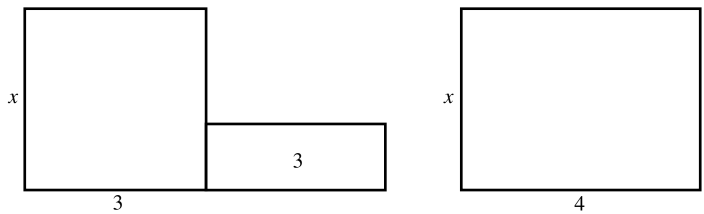
a. Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre las áreas en cada caso.

b. Sin realizar ninguna operación matemática, halla el valor de la longitud desconocida en cada caso. Para ello puedes comparar las áreas, recortar, etc.

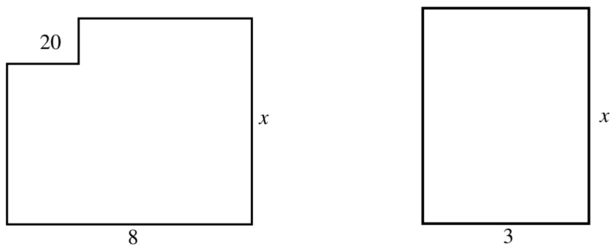
c. Después de hallar el valor de longitud desconocida, escribe en lenguaje normal o con expresiones algebraicas el procedimiento que usaste para encontrar dicha longitud.



(iii)



(iv)



2) Tenemos un rectángulo cuyo ancho mide 6 cm. y su largo es x cm.

   d. ¿Cuánto mide el perímetro?

   e. ¿Cuál es valor de su altura?

3) Un cuadrado cuyo lado mide 9 cm. tiene perímetro igual al del rectángulo anterior.

   a. Siendo iguales los perímetros de las dos figuras, ¿puede medir 3 cm. la altura del rectángulo?, ¿puede medir 10 cm.? Explica tu respuesta.

   b. ¿Cuál debe ser el valor de la altura del rectángulo para que su perímetro sea igual al del cuadrado? Explica tu respuesta.

   c. Escribe la expresión algebraica que representa la relación entre los perímetros de las dos figuras.

Sobre el análisis de los resultados

A partir de nuestra experiencia en el desarrollo del proyecto podemos afirmar que la iniciación al álgebra a partir del uso de modelos potenció en los estudiantes algunos aspectos propios del sistema simbólico, pero también en el transcurso de dicha iniciación surgieron puntos que se podrían haber convertido en obstáculos para el aprendizaje. A continuación mencionamos algunos de los aspectos que se potenciaron.

Un análisis de las tareas nos permitió evidenciar que efectivamente —como lo suponíamos— el uso de la balanza y de las áreas como modelos facilitó en los estudiantes la significación de los objetos algebraicos. Los modelos usados como herramientas dieron a los estudiantes la posibilidad de volver concreto eso que en un momento era tan abstracto para ellos y en ese proceso, los alumnos pudieron dotar de sentido las operaciones que se podían realizar con esos objetos. Hallamos un ejemplo de esto cuando al usar el modelo de la balanza para que el estudiante dotara de significado la ecuación $3x + 14 = 5x$, el estudiante identificó la condición de equilibrio en la balanza con la igualdad en el ecuación; esta identificación facilitó la acción de trasponer términos en el procedimiento de resolución de la ecuación ya que, debiendo conservarse el equilibrio de la balanza, era necesario retirar o adicionar cantidades iguales siempre. Lo anterior, permitió en últimas la construcción de la propiedad uniforme —básica en el proceso de solución de una ecuación; los estudiantes, por ejemplo, al resolver $3x + 14 = 5x$, si sustraían un peso de $3x$ del lado izquierdo, sustraían igual peso del lado derecho, lo que los conducía a la ecuación $14 = 2x$ y así, dado que el peso de dos objetos era 14 unidades, el peso de uno era 7. Es importante anotar, que las acciones que se ejecutaban en la balanza se registraban en lenguaje algebraico, estableciéndose una correspondencia entre ellos. Los alumnos pudieron evidenciar en estos cambios de registro la potencia del lenguaje algebraico, ya que recogía acciones que no podían evidenciarse al usar la balanza, por ejemplo, la operación matemática de sustraer o la de dividir.

Así pues, parece que el modelo de la balanza es potente cuando se pretende que los jóvenes avancen en la construcción del concepto de igualdad como una relación de equivalencia, más allá de la idea que han venido manejando de ella en el plano aritmético y que reduce su significado a "ejecutar una operación". En este mismo sentido, se reconoce la homogeneización como un elemento importante en el proceso de solución de las ecuaciones ya que los estudiantes reconocen "lo desconocido" o "los datos" del problema como cantidades diferentes, en el proceso operativo.

El modelo geométrico movilizó el reconocimiento de expresiones equivalentes, la significación de operaciones como la factorización y la significación de propiedades como la distributiva. Expresiones como $6 \cdot (x + 4)$ pudieron ser entendidas como el área de un rectángulo cuyos lados miden respectivamente 6 y $x + 4$. Al graficar este rectángulo pudieron identificarse en él la existencia de dos rectángulos de lados 6 y x y 6 y 4, cuyas áreas eran respectivamente $6x$ y 24, con lo cual el área del rectángulo inicial era

$6x + 24$. Esto condujo a establecer la igualdad $6 \cdot (x + 4) = 6x + 24$, iniciándose de esta manera la construcción de la propiedad distributiva.

De manera similar, al considerar la expresión $6x + 24$ como el área de un rectángulo, los estudiante pudieron asumir $6x$ y 24 como áreas y el rectángulo inicial como formado por dos rectángulos con estas áreas y cuyos lados eran 6 y y $x + 4$, presentándose aquí un caso de factorización.

Quizás un aspecto importante del trabajo con el modelo geométrico fue la construcción por parte de los estudiantes, del sentido de variación de una magnitud; en el caso de representar el área de un rectángulo con la expresión $8x$, por ejemplo, fue claro que x varía en un dominio restringido, entre 0 y 8, y que esto implica una variación de su área. Hubo por tanto una reflexión importante sobre el campo numérico en el cual la expresión $8x$ asumida como el área de un rectángulo tiene sentido.

De la misma manera como el uso de los modelos mencionados potenció en el proyecto ciertos aspectos, tal uso también conllevó dificultades que fue necesario sortear. Una de tales dificultades es la imposibilidad de representar, en cualquiera de los dos modelos, ecuaciones cuya solución sea un número negativo; como ha sido señalado por otros autores, en el proyecto pudimos corroborar que el uso de los modelos mencionados indujo a los estudiantes a pensar que las ecuaciones sólo pueden ser resueltas en el campo de los racionales positivos y que una ecuación como $x + 8 = 5$, que claramente no puede representarse en el modelo de la balanza o en el geométrico, no puede resolverse. Fue necesario entonces introducir otros modelos como los diagramas para representar este tipo de ecuaciones, en los cuales el número negativo adquiere significado.

Otra dificultad que encontramos en la implementación de la secuencia didáctica, pero no la abordamos de manera especial en el proyecto, tiene que ver con el uso restringido de la letra propiciado por las actividades propuestas que enfatizan el uso de la letra como incógnita pero no como variable.

El trabajo con los modelos nos permitió confirmar aspectos que son fuente de dificultad para el aprendizaje del álgebra y que han sido identificados en distintos trabajos a nivel internacional. La persistencia de los estudiantes en el uso del tanteo como forma de encontrar la solución de una ecuación, la reducción de una expresión algebraica combinando números con expresiones simbólicas (e.g., $70 - 2x = 68x$), el problema de la inversión de las operaciones, etc., han sido ampliamente caracterizados por Filloy (1998), Rojano y Gallardo (1984) y en el trabajo que aquí se expone también estuvieron presentes. Estos aspectos están fuertemente arraigados en los jóvenes y parece importante seguir profundizando ellos.

Para terminar planteamos una serie de inquietudes que surgieron en el curso del diseño y la aplicación de la secuencia didáctica; parece importante hacer públicos estos puntos para contribuir al debate y avanzar en la caracterización del problema del aprendizaje del álgebra en el país.

Durante todo el proceso de elaboración de la propuesta y aplicación de la misma hubo un pregunta básica tomada por norte y fue la siguiente: ¿Qué aspecto (o aspectos) del pensamiento algebraico se potencia(n) a través del uso de modelos en una iniciación al álgebra escolar?

Sin duda, el uso de modelos permitió a los estudiantes dotar de significado las ecuaciones y ampliar el sentido de la igualdad como "orden" para ejecutar una operación hasta considerarla como una relación de equivalencia. Además permitió cierto nivel de operatividad con objetos algebraicos. Pero realmente, ¿se estaba desarrollando pensamiento algebraico en los estudiantes? Si se asume que uno de los aspectos claves de dicho pensamiento es la habilidad para extraer relaciones matemáticas a partir de situaciones problemas y expresarlas usando símbolos algebraicos, —i.e., la capacidad para modelar en el sentido planteado por Janvier— consideramos que el uso de modelos se queda corto para potenciar pensamiento algebraico en los estudiantes ya que tal actividad enfatiza mucho más el conocimiento procedimental que el conceptual. Como herramienta didáctica, el modelo permite realizar traducciones entre distintos tipos de lenguajes y "volver más concreto" lo abstracto; pero como lo han señalado distintos autores, pudimos evidenciar la tendencia de los estudiantes a permanecer en el nivel concreto lo que dificulta la operatividad extramodelo, inclusive en situaciones aparentemente muy simples en las que el uso del modelo no es pertinente; por ejemplo, cuando se les pide resolver $3x = 27$ o $2x + 8 = 14$. Esta tendencia se constituyó en un obstáculo para la adquisición de los elementos básicos de la sintaxis algebraica.

En este punto de la reflexión consideramos importante retomar la modelación como instrumento para la iniciación al álgebra escolar y no sólo el uso de modelos como herramienta aislada, ya que como hipótesis creemos que a partir de la modelación se pueden potenciar aspectos básicos del pensamiento algebraico como la resolución de problemas y no sólo la adquisición de destrezas en el manejo de los símbolos y expresiones del álgebra escolar. La modelación como proceso esencial de la actividad matemática podría inicialmente movilizar la construcción del concepto de variable por parte de los estudiantes, a partir de la elaboración de modelos que den cuenta de situaciones problemáticas de la realidad y de las matemáticas mismas.

REFERENCIAS

Filloy, E. (1998). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didactique des mathematiques, 9* (2), 155-188.

Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar el álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7,* 229-240.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el/Raíces del álgebra*. (Traducción al español: Cecilia Agudelo). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Nemirovsky, R. (1996), Mathematical narratives, modelling, and algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 197-220). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Socas, M., Camacho, M. et al. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Ligia Amparo Torres
Rocío Malagón
Grupo de Educación Matemática
Instituto de Educación y Pedagogía
Universidad del Valle
Tel.: (092) 321 23 41
Cali, Colombia
E-mail: litoren@yahoo.com
E-mail: rociomp63@yahoo.com

Luz Edith Valoyes
ITI Donald Rodrigo Tafur González
Tel.: (092) 333 93 74
Cali, Colombia
E-mail: edithvaloyes@yahoo.com